OBJETIVO
FRENTE 1

MATEMÁTICA

Al-Khawarizmi – Pai da Álgebra
As palavras algarismo e algoritmo são derivadas do seu nome.

Potenciação – Radiciação – Fatoração – Módulos

Módulo 1

Definição de potência de expoente inteiro n

Palavras-chave:
• Potência
• Fatores • Expoente

1. Potência com expoente n > 1

A potência de base a, $a \in \mathbb{R}$, e expoente n natural, $n > 1$, é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

Representa-se com o símbolo a^n.

Assim: $$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,\dots\, a}_{n \text{ fatores}}$$

2. Potência com expoente n = 1

É a própria base **a**. Assim: $a^1 = a$

3. Potência com a ≠ 0 e n = 0

É sempre igual a **1**. Assim: $a^0 = 1$

4. Potência com expoente – n

É o inverso da base **a**, com $a \neq 0$, elevado ao expoente **n** ou simplesmente o inverso de a^n.

Assim:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

ou

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observe que: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$, pois

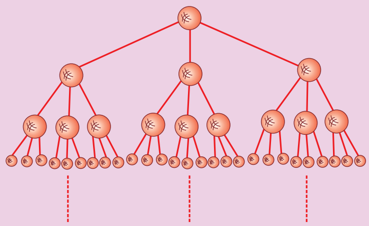
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\dfrac{2}{3}}\right)^3 = \left(1 \,.\, \frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M101**

Saiba mais

O processo de cisão nuclear é o que libera a enorme energia das bombas atômicas. Na cisão nuclear, um nêutron se choca contra o núcleo de um átomo de urânio. Este núcleo absorve o nêutron, desintegra-se e emite três nêutrons. Cada um dos três nêutrons volta a se chocar com outro núcleo de urânio, que por sua vez se desintegra emitindo três nêutrons e assim sucessivamente.



Observe na tabela abaixo que o número de nêutrons obtidos após cada choque é sempre uma potência de base três.

	Números de nêutrons emitidos após o:
1º choque	$3^1 = 3$
2º choque	$3^2 = 9$
3º choque	$3^3 = 27$
⋮	⋮
14º choque	$3^{14} = 4782969$
⋮	⋮
21º choque	$3^{21} = 10460353203$
⋮	⋮

Observe, ainda, que escrever 3^2 é praticamente tão simples quanto escrever 9. Escrever 3^{21}, porém, é **muito mais cômodo** do que escrever 10 460 353 203

Exercícios Resolvidos

1 Utilizando a definição de potência, calcular:

a) 3^4 b) $(-3)^4$ c) 3^3
d) $(-3)^3$ e) -3^3 f) -3^4

Resolução

a) $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$
b) $(-3)^4 = (-3) . (-3) . (-3) . (-3) = 81$
c) $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$
d) $(-3)^3 = (-3) . (-3) . (-3) = -27$
e) $-3^3 = -3 . 3 . 3 = -27$
f) $-3^4 = -3 . 3 . 3 . 3 = -81$

Observe que $-3^3 = (-3)^3$, mas $(-3)^4 \neq -3^4$

2 **(MODELO ENEM)** – A expressão numérica

$$\frac{3^{2,01} . 2^{0,97}}{(2,98)^{3,01} . (1,98)^{1,02}}$$ está mais próxima de

a) 1 b) 3 c) 3^{-1}
d) 0,9 e) 9

Resolução

$$\frac{3^{2,01} . 2^{0,97}}{2,98^{3,01} . 1,98^{1,02}} \cong \frac{3^2 . 2^1}{3^3 . 2^1} =$$

$$= \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

Resposta: C

Exercícios Propostos

Nas questões de **1** a **19**, utilizando as definições de potência de expoente inteiro, calcular:

1 $2^3 = \mathbf{2 . 2 . 2 = 8}$

2 $2^4 = \mathbf{2 . 2 . 2 . 2 = 16}$

3 $(-2)^3 = \mathbf{(-2) . (-2) . (-2) = -8}$

4 $(-2)^4 = \mathbf{(-2) . (-2) . (-2) . (-2) = 16}$

5 $-2^3 = \mathbf{-2 . 2 . 2 = -8}$

6 $-2^4 = \mathbf{-2 . 2 . 2 . 2 = -16}$

7 $2^0 = \mathbf{1}$

8 $(-2)^0 = \mathbf{1}$

9 $(1,3)^0 = \mathbf{1}$

10 $(2,1)^1 = \mathbf{2,1}$

11 $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

12 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2)^3 = 8$

13 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$

14 $10^2 = \mathbf{10 \,.\, 10 = 100}$

15 $10^3 = \mathbf{10.10.10 = 1\,000}$

16 $10^4 = \mathbf{10\,000}$

17 $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

18 $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

19 $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

20 **(MACKENZIE)**

$$\frac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$$ é igual a

a) $\frac{3150}{17}$ b) 90 c) $\frac{1530}{73}$ d) $\frac{17}{3150}$ e) -90

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{25 - 9 + 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{17}{\frac{10 + 18 + 45}{90}} =$$

$$= \frac{17}{\frac{73}{90}} = 17 \,.\, \frac{90}{73} = \frac{1530}{73}$$

Resposta: C

Módulos **2 a 4**

Propriedades das potências

Palavras-chave:
- Produto de potências
- Quociente de potências

Sendo **a** e **b** números reais, **m** e **n** números inteiros, valem as seguintes propriedades:

1. Potências de mesma base

Para **multiplicar**, mantém-se a base e **somam-se os expoentes**.

Para **dividir**, mantém-se a base e **subtraem-se os expoentes**.

$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \; a \neq 0$$

Exemplos

a) $2^3 \,.\, 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

b) $\frac{2^{80}}{2^{78}} = 2^{80-78} = 2^2 = 4$

2. Potências de mesmo expoente

Para **multiplicar**, mantém-se o expoente e **multiplicam-se as bases**.

Para **dividir**, mantém-se o expoente e **dividem-se as bases**.

$$a^n \,.\, b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \; b \neq 0$$

Exemplos

a) $2^3 \,.\, 3^3 = (2 \,.\, 3)^3 = 6^3 = 216$

b) $\frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4 = 81$

3. Potência de potência

Para calcular a potência de outra potência, mantém-se a base e **multiplicam-se os expoentes**.

$$(a^m)^n = a^{m\,.\,n}$$

Exemplos

a) $(2^2)^3 = 2^{2\,.\,3} = 2^6 = 64$

b) $(a^2 \,.\, b^3)^2 = (a^2)^2 \,.\, (b^3)^2 = a^{2\,.\,2} \,.\, b^{3\,.\,2} = a^4 \,.\, b^6$

Observações

- Se os expoentes forem inteiros negativos, as propriedades também valem.

  Lembrar, porém, que nestes casos as bases devem ser diferentes de zero.
- As propriedades têm a finalidade de facilitar o cálculo.

  Não é obrigatório o seu uso. Devemos usá-las quando for conveniente.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M102**

Saiba mais

Se $\mathbf{a \,.\, 10^p = N > 0}$, com $\mathbf{1 \leqslant a < 10}$ e **p** inteiro, então $\mathbf{a \,.\, 10^p}$ é a **notação científica** de **N**.

A notação científica de **320**, por exemplo, é $3,2 \,.\, 10^2$. A de 0,031 é $3,1 \,.\, 10^{-2}$.

Qual a notação científica do número $4^{14} \,.\, 5^{21}$?

Resolução

$4^{14} \,.\, 5^{21} = (2^2)^{14} \,.\, 5^{21} = 2^{28} \,.\, 5^{21} = 2^7 \,.\, 2^{21} \,.\, 5^{21} =$

$= 128 \,.\, 10^{21} = 1,28 \,.\, 10^{23}$

Resposta: $\mathbf{1,28 \,.\, 10^{23}}$

Exercícios Resolvidos – Módulos 2 a 4

1 **(MODELO ENEM)** – Quantos algarismos tem 10^{11}?

Resolução

$10^1 = 10$ tem 2 algarismos: 1 seguido de 1 zero

$10^2 = 10 \,.\, 10 = 100$ tem 3 algarismos: 1 seguido de 2 zeros

$10^3 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 1000$ tem 4 algarismos: 1 seguido de 3 zeros

⋮

De modo análogo, podemos concluir que 10^{11} tem 12 algarismos: "1 seguido de 11 zeros".

Observação:

$10^{11} = 100\,000\,000\,000 = 100$ bilhões

Resposta: 12

2 Escrever dez milhões na forma de uma potência de 10.

Resolução

10 milhões $= 10 \,.\, 1\,000\,000 =$

$= 10\,000\,000 = 10^7$

Resposta: $\mathbf{10^7}$

3 **(MODELO ENEM)** – Sabendo-se que $1,098^{32}$ é aproximadamente igual a 20, qual dos valores abaixo está mais próximo do número $5^6 \,.\, (1,098)^{192}$?

a) 100 mil.
b) 1 milhão.
c) 100 milhões.
d) 1 bilhão.
e) 1 trilhão.

Resolução

$5^6 \,.\, (1,098)^{192} =$

$= 5^6 \,.\, (1,098^{32})^6 \simeq 5^6 \,.\, (20)^6 = (5 \,.\, 20)^6 =$

$= 100^6 = (10^2)^6 = 10^{12} = 1$ trilhão

Resposta: E

Exercícios Propostos – Módulo 2

Nas questões de **1** a **11**, efetue as operações indicadas, utilizando as propriedades das potências, quando você julgar conveniente.

1 $2^3 \,.\, 2^5 = \mathbf{2^{3+5} = 2^8 = 256}$

2 $2^2 \,.\, 2^6 \,.\, 2^{-3} = \mathbf{2^{2+6+(-3)} = 2^5 = 32}$

3 $2^4 : 2^2 = \mathbf{2^{4-2} = 2^2 = 4}$

4 $\dfrac{2^{76}}{2^{74}} = \mathbf{2^{76-74} = 2^2 = 4}$

5 $\dfrac{3^{-2}}{3^{-3}} = \mathbf{3^{-2-(-3)} = 3^1 = 3}$

6 $(0,2)^2 \,.\, (0,5)^2 = \mathbf{(0,2 \,.\, 0,5)^2 = (0,1)^2 = 0,01}$

7 $\dfrac{(-0,4)^3}{(0,2)^3} = \mathbf{\left(\dfrac{-0,4}{0,2}\right)^3 = (-2)^3 = -8}$

8 $(2^2)^3 = \mathbf{2^{2\,.\,3} = 2^6 = 64}$

9 $(2^3)^2 = \mathbf{2^{3\,.\,2} = 2^6 = 64}$

10 $2^{2^3} = \mathbf{2^8 = 256}$

11 $2^{3^2} = \mathbf{2^9 = 512}$

12 O valor da expressão numérica $(2^2 \,.\, 2^{-3} \,.\, 3^{-1} \,.\, 3^3)^2$ é:

a) $\dfrac{81}{4}$ b) $\dfrac{9}{4}$ c) $\dfrac{81}{16}$ d) $\dfrac{16}{81}$ e) $\dfrac{9}{16}$

RESOLUÇÃO:

$(2^{-1} \,.\, 3^2)^2 = 2^{-2} \,.\, 3^4 = \dfrac{1}{4} \,.\, 81 = \dfrac{81}{4}$

Resposta: A

13 O valor da expressão numérica

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] . \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} \text{ é}$$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) – 1 c) – 2 d) 2 e) 0

RESOLUÇÃO:

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] . \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^1\right] . \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128} + \frac{1}{128} = 0$$

Resposta: E

14 **(MODELO ENEM)** – A terça parte de 9^{11} é igual a

a) 3^{11} b) 9^{10} c) 9^{21} d) 27^3 e) 27^7

RESOLUÇÃO:

$$\frac{9^{11}}{3} = \frac{(3^2)^{11}}{3} = \frac{3^{22}}{3} = 3^{21} = (3^3)^7 = 27^7$$

Resposta: E

Exercícios Propostos – Módulo 3

1 Sendo **a** e **b** números reais diferentes de zero, o valor de $\dfrac{(a^3 \,.\, b^2)^3}{(a^2 \,.\, b^3)^2}$ é:

a) a^2b b) a^6 c) a^5 d) b^4 e) ab

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a^9 \,.\, b^6}{a^4 \,.\, b^6} = a^5 \,.\, b^0 = a^5$$

Resposta: C

2 **(FUVEST)** – O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é:

a) 0,0264 b) 0,0336 c) 0,1056 d) 0,2568 e) 0,6256

RESOLUÇÃO:

0,008 + 0,0256 = 0,0336

Resposta: B

3 Se $a = 2^3$, $b = a^2$, $c = 2^a$, o valor de 2abc é:

a) 2^{15} b) 8^{18} c) 2^{18} d) 4^{15} e) 2^{12}

RESOLUÇÃO:

$2abc = 2 \,.\, 2^3 \,.\, a^2 \,.\, 2^a = 2 \,.\, 2^3 \,.\, (2^3)^2 \,.\, 2^{2^3} = 2 \,.\, 2^3 \,.\, 2^6 \,.\, 2^8 = 2^{18}$

Resposta: C

4 Dos números abaixo, o que está mais próximo de $\dfrac{(4{,}01)^6.(32{,}1)^7}{(10{,}03)^2\,.(128{,}1)^6}$ é

a) 0,0032 b) 0,032 c) 0,32 d) 3,2 e) 320

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(4{,}01)^6 \,.\, (32{,}1)^7}{(10{,}03)^2 \,.\, (128{,}1)^6} \cong \frac{4^6 \,.\, 32^7}{10^2 \,.\, (128)^6} = \frac{(2^2)^6 \,.\, (2^5)^7}{10^2 \,.\, (2^7)^6} =$$

$$= \frac{2^{12} \,.\, 2^{35}}{10^2 \,.\, 2^{42}} = \frac{2^{12\,+\,35\,-\,42}}{10^2} = \frac{2^5}{100} = \frac{32}{100} = 0{,}32$$

Resposta: C

5 O valor de $\dfrac{3^{-1} + 5^{-1}}{2^{-1}}$ é:

a) $\dfrac{4}{15}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) $\dfrac{16}{15}$ e) 4

RESOLUÇÃO:

$$\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\dfrac{5+3}{15}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{16}{15}$$

Resposta: D

6 O valor de $\dfrac{10^{-2} \,.\, 10^{-3} \,.\, 10^{-4}}{10^{-1} \,.\, 10^{-6}}$ é:

a) 1 b) 0,1 c) 0,01 d) 0,001 e) 0,0001

RESOLUÇÃO:

$$\dfrac{10^{-9}}{10^{-7}} = 10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$$

Resposta: C

7 **(FGV)** – Se x = 3200000 e y = 0,00002, então xy vale

a) 0,64 b) 6,4 c) 64 d) 640 e) 6400

RESOLUÇÃO:

$x = 3200000 = 32 \,.\, 10^5$

$y = 0{,}00002 = 2 \,.\, 10^{-5}$

$x \,.\, y = 32 \,.\, 10^5 \,.\, 2 \,.\, 10^{-5} = 64 \,.\, 10^0 = 64$

Resposta C

Exercícios Propostos – Módulo 4

1 Se $7^{5x} = 32$, então o valor de 7^{-2x} será

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) 0,2 d) 0,04 e) 0,25

RESOLUÇÃO:

$7^{5x} = 32 \Leftrightarrow (7^x)^5 = 2^5 \Leftrightarrow 7^x = 2 \Leftrightarrow (7^x)^{-2} = 2^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{-2x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 7^{-2x} = 0{,}25$

Resposta: E

2 **(MODELO ENEM)** – Você, vestibulando, tem cerca de 60 trilhões de células formando o seu corpo. Estas células possuem tamanhos diversos, de comprimento médio 30μm. Suponha colocarmos uma célula atrás da outra, formando uma longa fila. Esta fila seria igual a quantas vezes a distância Terra-Lua?

Dados: distância Terra-Lua = 400.000 km

$1\mu m = 10^{-6} m$

a) 4,5 b) 1 c) 1,5

d) a fila não chegaria à Lua

e) nenhuma das alternativas anteriores.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 1 \text{ trilhão} = 10^{12} \Rightarrow 60 \text{ trilhões} = 60 \,.\, 10^{12} \\ 30\mu m = 30 \,.\, 10^{-6} m \\ 400000km = 4 \,.\, 10^5 km = 4 \,.\, 10^5 \,.\, 10^3 m \end{cases}$$

$$n = \dfrac{\text{comprimento da fila (em metros)}}{\text{distância Terra-Lua (em metros)}}$$

$$n = \dfrac{60 \,.\, 10^{12} \,.\, 30 \,.\, 10^{-6}}{4 \,.\, 10^5 \,.\, 10^3} = \dfrac{1800 \,.\, 10^6}{4 \,.\, 10^8}$$

$$n = \dfrac{18 \,.\, \cancel{10^8}}{4 \,.\, \cancel{10^8}} = 4{,}5$$

Resposta: A

3 **(MACKENZIE)** – O número de algarismos do produto $4^9 \,.\, 5^{13}$ é

a) 20 b) 22 c) 18 d) 15 e) 17

RESOLUÇÃO:

$4^9 \,.\, 5^{13} = (2^2)^9 \,.\, 5^{13} = 2^{18} \,.\, 5^{13} = 2^5 \,.\, 2^{13} \,.\, 5^{13} =$

$= 32 \,.\, (2 \,.\, 5)^{13} = 32 \,.\, 10^{13} = 32\underbrace{0000000000000}_{13 \text{ zeros}}$

O número de algarismos de $4^9 \,.\, 5^{13}$ é 15

Resposta: D

4 **(FAAP)** – Em 2010, a população prevista de nosso planeta atingirá 6 bilhões e 900 milhões de habitantes. Escrevendo esse número em notação científica, temos:

a) $6{,}9 \,.\, 10^{11}$ b) $6{,}9 \,.\, 10^{10}$ c) $69 \,.\, 10^{11}$

d) $69 \,.\, 10^{10}$ e) $6{,}9 \,.\, 10^{9}$

RESOLUÇÃO:

6 bilhões e 900 milhões = 6900000000 = $69 \,.\, 10^8 = 6{,}9 \,.\, 10^9$

Resposta: E

Módulo 5

Definição de raiz e existência

Palavras-chave:
- Índice da raiz
- Raiz

1. Definição

Seja **a** um número real e **n** um número natural não nulo. O número **x** é chamado raiz enésima de **a** se, e somente se, elevado ao expoente **n** reproduz **a**.

x é raiz enésima de a ⇔ $x^n = a$

Exemplos

a) O número 7 é uma raiz quadrada de 49, pois $7^2 = 49$

b) O número –7 é uma raiz quadrada de 49, pois $(-7)^2 = 49$

c) O número –3 é uma raiz cúbica de –27, pois $(-3)^3 = -27$

2. Existência

Da definição, conclui-se que **determinar todas as raízes enésimas de a** é o mesmo que **determinar todas as soluções da equação $x^n = a$**. Temos, então, os seguintes casos a examinar:

• $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$

A única raiz enésima de zero é o próprio zero e é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{0}$. Logo: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• $a > 0$ e n par (e não nulo)

O número a possui duas raízes enésimas. Estas duas raízes são simétricas. A raiz enésima positiva de **a**, também chamada de raiz aritmética de **a**, é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. A raiz enésima negativa de **a**, por ser simétrica da primeira, é representada pelo símbolo $-\sqrt[n]{a}$.

Exemplo

O número 16 tem duas raízes quartas. A raiz quarta positiva de 16 é representada pelo símbolo $\sqrt[4]{16}$ e vale 2. A raiz quarta negativa de 16 é representada pelo símbolo $-\sqrt[4]{16}$ e vale – 2.

Assim sendo:

$\sqrt[4]{16} = 2$ $-\sqrt[4]{16} = -2$ $\pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

as raízes quartas de 16 são 2 e – 2.

• $a < 0$ e n par (e não nulo)

Não existe raiz índice par de número negativo.

Exemplo

Não existe raiz quadrada de – 4, pois não existe nenhum número real **x**, tal que $x^2 = -4$.

• *a ≠ 0 e n ímpar*

O número a possui uma única raiz enésima. Esta raiz tem o mesmo sinal de **a** e é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

Exemplos

a) O número 8 tem uma única raiz cúbica, que é representada com o símbolo $\sqrt[3]{8}$ e vale 2. Logo: $\mathbf{\sqrt[3]{8} = 2}$

b) O número – 8 tem uma única raiz cúbica, que é representada pelo símbolo $\sqrt[3]{-8}$ e vale – 2. Logo: $\mathbf{\sqrt[3]{-8} = -2}$

Observações

a) No símbolo $\sqrt[n]{a}$, dizemos que:

$\sqrt{\ }$ é o radical; **a** é o radicando; **n** é o índice da raiz

b) Por convenção, na raiz quadrada, omite-se o índice. Escreve-se, por exemplo, $\sqrt{4}$ em lugar de $\sqrt[2]{4}$.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M103**

Exercícios Resolvidos

1 **(MODELO ENEM)** – Assinale a **falsa**.

a) $\sqrt{25} = 5$ b) $-\sqrt{25} = -5$

c) $\pm\sqrt{25} = \pm 5$ d) $\sqrt{25} = \pm 5$

e) $(-5)^2 = 25$

Resolução

a) Verdadeira, pois a raiz quadrada positiva de 25 é 5.

b) Verdadeira, pois a raiz quadrada negativa de 25 é – 5.

c) Verdadeira, pois as duas raízes quadradas de 25 são 5 e – 5.

d) Falsa, pois o símbolo $\sqrt{25}$ representa apenas a raiz quadrada positiva de 25.

e) Verdadeira, pois $(-5)^2 = (-5) . (-5) = 25$.

Resposta: D

2 **(MODELO ENEM)** – O valor da expressão numérica $\sqrt[3]{6 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}$ é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} =$$

$$= \sqrt[3]{6 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + 3}}} =$$

$$= \sqrt[3]{6 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} =$$

$$= \sqrt[3]{6 + \sqrt{2 + 2}} =$$

$$= \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}} = \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Resposta: B

3 **(MODELO ENEM)** – Um dos números apresentados abaixo é o valor aproximado da raiz cúbica de 227. O valor aproximado de $\sqrt[3]{227}$ é:

a) 5,4 b) 5,9 c) 6,1

d) 6,8 e) 7,1

Resolução

1) $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$

2) $6^3 = 6 . 6 . 6 = 216$

3) $7^3 = 7 . 7 . 7 = 512$

4) $216 < 227 < 512 \Rightarrow 6 < \sqrt[3]{227} < 7$

5) $\sqrt[3]{227} \cong 6,1$, pois 227 está muito próximo de 216

Resposta: C

Exercícios Propostos

Nas questões de **1** a **9**, completar:

1 $\sqrt[3]{8} = \mathbf{2}$

2 $\sqrt[3]{-8} = \mathbf{-2}$

3 $\sqrt[5]{0} = \mathbf{0}$

4 $\sqrt{25} = \mathbf{5}$

5 $-\sqrt{25} = \mathbf{-5}$

6 $\pm\sqrt{25} = \mathbf{\pm 5}$

7 A raiz quadrada positiva de 25 é **5**

8 A raiz quadrada negativa de 25 é **– 5**

9 As raízes quadradas de 25 são **5** e **– 5**

10 O valor da expressão $\sqrt[4]{76 + \sqrt{31 - \sqrt{38 - \sqrt[3]{8}}}}$ é:

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 8

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt[4]{76 + \sqrt{31 - \sqrt{38 - \sqrt[3]{8}}}} = \sqrt[4]{76 + \sqrt{31 - \sqrt{38 - 2}}} =$$

$$= \sqrt[4]{76 + \sqrt{31 - 6}} = \sqrt[4]{76 + 5} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Resposta: A

⑪ **(MAUÁ)** – Calcule o valor da expressão:

$$(2+\sqrt{4})\left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{3}}\right)+\sqrt{8^2+6^2}$$

RESOLUÇÃO:

$$(2+2)\cdot\left(\frac{\frac{4-1}{6}}{\frac{3+1}{3}}\right)+\sqrt{64+36}=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{100}=\frac{3}{2}+10=\frac{23}{2}$$

⑫ Decomponha 2401 em fatores primos e em seguida calcule $\sqrt[4]{2401}$.

RESOLUÇÃO:

2 401	7
343	7
49	7
7	7
1	7^4

$$\sqrt[4]{2401}=\sqrt[4]{7^4}=7$$

⑬ **(MODELO ENEM)** – Um dos números apresentados nas alternativas é o valor aproximado da raiz cúbica de 389. O valor de $\sqrt[3]{389}$ é, aproximadamente:

a) 6,9 b) 7,3 c) 8,1 d) 8,9 e) 9,4

RESOLUÇÃO:

$6^3 = 6 . 6 . 6 = 216$

$7^3 = 7 . 7 . 7 = 343$

$8^3 = 8 . 8 . 8 = 512$

Assim: $7^3 < 389 < 8^3 \Leftrightarrow 7 < \sqrt[3]{389} < 8 \Rightarrow \sqrt[3]{389} \cong 7,3$

Resposta: B

Módulos 6 e 7 – Propriedades das raízes

Palavras-chave:
• Raiz de raiz • Raiz de potência
• Radicais de mesmo índice

Sendo **a** e **b** números reais positivos e **n** um número natural não nulo, valem as seguintes propriedades:

1. Radicais de mesmo índice

Para **multiplicar**, mantém-se o índice e **multiplicam-se os radicandos**.

Para **dividir**, mantém-se o índice e **dividem-se os radicandos**.

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\,.\,b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ ,\ b \neq 0$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$

b) $\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$

2. Raiz de raiz

Para calcular uma **raiz de outra raiz**, mantém-se o radicando e **multiplicam-se os índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\,.\,m]{a}\quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos

a) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=2$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{3}}}=\sqrt[24]{3}$

3. Raiz de potência

Calcular a raiz e em seguida a potência é o mesmo que **calcular a potência e em seguida a raiz**.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}\ ,\ m \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

a) $\sqrt{4^5}=\left(\sqrt{4}\right)^5=2^5=32$

b) $\sqrt[3]{8^2}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$

4. Alteração do índice

Multiplicar ou dividir **índice e expoente** por um mesmo número **não altera o resultado**.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}\ ,\ m \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}^*$$

Exemplos

a) $\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

Observação

Mantidas as respectivas restrições, as propriedades apresentadas são válidas também para **a** e **b** negativos, desde que nestes casos o índice seja **ímpar**.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M104**

Exercícios Resolvidos – Módulos 6 e 7

1 Escrever o número $\sqrt{768}$ na forma $a \,.\, \sqrt{b}$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$ e b primo.

Resolução

1) Decompondo 768 em fatores primos obtemos $2^8 \,.\, 3$.

2) $\sqrt{768} = \sqrt{2^8 \,.\, 3} = \sqrt{2^8} \,.\, \sqrt{3} = 2^4 \,.\, \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

Resposta: $16\sqrt{3}$

2 Escrever a expressão numérica $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$ na forma $a \,.\, \sqrt[3]{b}$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$ e b primo.

Resolução

1) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \,.\, 2} = \sqrt[3]{3^3} \,.\, \sqrt[3]{2} = 3 \,.\, \sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \,.\, 2} = \sqrt[3]{5^3} \,.\, \sqrt[3]{2} = 5 \,.\, \sqrt[3]{2}$

3) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = 3 \,.\, \sqrt[3]{2} + 5 \,.\, \sqrt[3]{2} = 8 \,.\, \sqrt[3]{2}$

Resposta: $8\sqrt[3]{2}$

3 Escrever $6\sqrt[3]{2}$ na forma $\sqrt[3]{a}$ com $a \in \mathbb{N}$

Resolução

$6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6^3} \,.\, \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6^3 \,.\, 2} = \sqrt[3]{432}$

Resposta: $\sqrt[3]{432}$

4 **(MODELO ENEM)** – Escrever $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[4]{3}$ na forma $\sqrt[n]{a}$, com $\{a, n\} \subset \mathbb{N}$ e para o menor valor possível de n.

Resolução

1) mmc(3,4) = 12

2) $\sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3.4]{2^{1.4}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$

3) $\sqrt[4]{3^1} = \sqrt[4.3]{3^{1.3}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

4) $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{16} \,.\, \sqrt[12]{27} =$

$= \sqrt[12]{16 \,.\, 27} = \sqrt[12]{432}$

Resposta: $\sqrt[12]{432}$

Exercícios Propostos – Módulo 6

Nas questões de **1** a **6**, completar, utilizando as propriedades:

1 $\sqrt[3]{9} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3$

2 $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

3 $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = 3$

4 $\sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = (4)^2 = 16$

5 $\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[8:2]{2^{6:2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

6 $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 . 3} = \sqrt{2^2} \,.\, \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

7 **(UNIMES)** $\sqrt{8} - \sqrt{72} + 5\sqrt{2} = x$, logo x é igual a

a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{8} - \sqrt{72} + 5\sqrt{2} = x \Rightarrow x = \sqrt{2^2 . 2} - \sqrt{2^2 \,.\, 2 \,.\, 3^2} + 5\sqrt{2} =$

$= 2\sqrt{2} - 2 \,.\, 3 \,.\, \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Resposta: D

8 Escrever $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}$ na forma de um único radical.

RESOLUÇÃO:

56	2
28	2
14	2
7	7
1	$2^3 \,.\, 7$

189	3
63	3
21	3
7	7
1	$3^3 \,.\, 7$

$\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} = 2\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3 \,.\, 7} = \sqrt[3]{125 \,.\, 7} = \sqrt[3]{875}$

9 **(MODELO ENEM)** – O número $\sqrt{2352}$ corresponde a:

a) $4\sqrt{7}$ b) $4\sqrt{21}$ c) $28\sqrt{3}$ d) $28\sqrt{21}$ e) $56\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

Decompondo 2352 em fatores primos, obtemos $2^4 \,.\, 3 \,.\, 7^2$.

Logo, $\sqrt{2352} = \sqrt{2^4 . 3 . 7^2} = \sqrt{2^4} \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt{7^2} = 2^2 \,.\, \sqrt{3} \,.\, 7 = 28\sqrt{3}$

Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 7

Nas questões de 1 a 6, escrever na forma de um único radical:

1 $\sqrt{5}\,.\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[2.3]{5^{1.3}}\,.\,\sqrt[3.2]{2^{1.2}} = \sqrt[6]{5^3}\,.\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{500}$

2 $\sqrt[4]{2}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{2^3}\,.\,\sqrt[12]{3^4}\,.\,\sqrt[12]{5^2} =$

$= \sqrt[12]{2^3\,.\,3^4\,.\,5^2} = \sqrt[12]{16\,200}$

3 $\sqrt{2\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{2^2\,.\,5}} = \sqrt[4]{20}$

4 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{4\,.\,2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{8\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{64\,.\,2}}} = \sqrt[8]{128}$

5 $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[12]{16}}{\sqrt[12]{27}} = \sqrt[12]{\dfrac{16}{27}}$

6 $\sqrt[3]{\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[12]{3}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{3}} =$

$= \sqrt[12]{\dfrac{2^4}{3}} = \sqrt[12]{\dfrac{16}{3}}$

7 **(UNICAMP)** – Dados os dois números positivos $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

RESOLUÇÃO:

$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}\\ \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}\end{array}\right\} \Rightarrow$ o maior é $\sqrt[3]{3}$

Módulo 8 – Potência de expoente racional e racionalização

Palavras-chave:
- Número racional
- Raiz de potência

1. Definição de potência de expoente racional

Seja **a** um número real positivo, **n** um número natural não nulo e $\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ um número racional na forma irredutível.

A potência de base **a** e expoente racional $\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ é definida por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Valem para as potências de expoente racional as mesmas propriedades válidas para as potências de expoente inteiro.

Exemplos

a) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$ b) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}$

2. Racionalização

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar os radicais do denominador, sem alterá-la.

Exemplos

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,.\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\,.\,\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$

Saiba mais

POR QUE RACIONALIZAR?

Porque é muito mais simples calcular $\frac{\sqrt{2}}{2}$ do que $\frac{1}{\sqrt{2}}$, por exemplo.

De fato:

a) calcular $\frac{\sqrt{2}}{2}$ significa dividir $\sqrt{2} \cong 1{,}4142$ por 2, ou seja $1{,}4142 \;\underline{|\;2\;}$

b) calcular $\frac{1}{\sqrt{2}}$ significa dividir 1 por $\sqrt{2} \cong 1{,}4142$, ou seja $1 \;\underline{|\;1{,}4142\;}$

É óbvio que é mais fácil efetuar a primeira divisão.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M105**

Exercícios Resolvidos

1 O valor da expressão numérica $27^{\frac{2}{3}} + 16^{0,25}$ é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Resolução

1) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2.3}{3}} = 3^2 = 9$

2) $16^{0,25} = (2^4)^{0,25} = 2^{4\,.\,0,25} = 2^1 = 2$

3) $27^{\frac{2}{3}} + 16^{0,25} = 9 + 2 = 11$

Resposta: D

2 Escrever o número $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ na forma $\sqrt[n]{a}$, com $\{a, n\} \subset \mathbb{N}$ e a primo.

Resolução

1º método

$$\frac{2}{\sqrt[4]{8}} = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2\,.\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{2\,.\,\sqrt[4]{2}}{2} = \sqrt[4]{2}$$

2º método

$$\frac{2}{\sqrt[4]{8}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{1-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Exercícios Propostos

1 Escrever cada potência na forma de radical:

a) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

b) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3^1} = \sqrt[5]{3}$

c) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

d) $2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

2 **(FUVEST)**

a) Qual a metade de 2^{22}?

RESOLUÇÃO:

$\frac{2^{22}}{2} = 2^{22-1} = 2^{21}$

b) Calcule $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$

RESOLUÇÃO:

$8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5} = (2^3)^{\frac{2}{3}} + (3^2)^{0,5} = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$

3 Calcule o valor numérico da expressão

$$-\sqrt[3]{-8} + 16^{-\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 8^{-\frac{4}{3}}$$

RESOLUÇÃO:

$$-\sqrt[3]{-8} + 16^{-\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 8^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= 2 + (2^4)^{-\frac{1}{4}} - [(-2)^{-1}]^{-2} + (2^3)^{-\frac{4}{3}} = 2 + 2^{-1} - (-2)^2 + 2^{-4} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{16} = \frac{32 + 8 - 64 + 1}{16} = \frac{-23}{16}$$

4 **(MODELO ENEM)** – O valor da expressão $\left(4^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ é:

a) 4 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{2}$ e) $\sqrt[8]{2}$

RESOLUÇÃO:

$$\left[(2^2)^{\frac{3}{2}} - (2^3)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^3 - 2^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[8 - 4\right]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

ou

$$\left(\sqrt[2]{4^3} - \sqrt[3]{8^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[(\sqrt{4})^3 - (\sqrt[3]{8})^2\right]^{\frac{1}{2}} = (2^3 - 2^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Resposta: B

Nas questões **5** e **6**, racionalizar o denominador das seguintes frações:

5 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8}}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{4}}{2}$$

Módulo 9

O que é fatorar, fator comum e agrupamento

Palavras-chave:
• Fatorar
• Fator comum • Agrupamento

1. O que é fatorar?

Fatorar é transformar soma em produto.

A expressão **ax + ay**, por exemplo, não está fatorada, pois é a soma da parcela **ax** com a parcela **ay**.

A expressão **a . (x + y)** está fatorada, pois é o produto do fator **a** pelo fator **(x + y)**. É simples verificar que **ax + ay = a . (x + y)**.

Fatorar a expressão **ax + ay**, portanto, é transformá-la no produto **a . (x + y)**.

A maneira prática de fatorar é enquadrar a expressão dada num dos **seis casos típicos** seguintes: **fator comum**, **agrupamento**, **diferença de quadrados**, **quadrado perfeito**, **soma e diferença de cubos**, **cubo perfeito**.

2. Fator comum

A expressão **ax + bx** é a soma de duas parcelas. A primeira parcela **a . x** é o produto do **fator a** pelo **fator x**. A segunda parcela **b . x** é o produto do **fator b** pelo **fator x**. Assim sendo, **x** é **fator comum** às duas parcelas. Este fator comum pode ser colocado **em evidência** transformando a soma no produto do **fator x** pelo **fator (a + b)**.

ax + bx = x.(a + b)

Observe como fazer

$$a \cdot x + b \cdot x = x \cdot (a + b)$$

Exemplos

a) $2m + 2n = 2 \,.\, (m + n)$

b) $3x + 6y = 3 \,.\, (x + 2y)$

c) $a^2b + ab^2 + a^2b^3 = a \,.\, b \,.\, (a + b + ab^2)$

d) $2x^3 + 4x^2 + 6x = 2 \,.\, x \,.\, (x^2 + 2x + 3)$

e) $3x^3 + 4x^3 - 2x^3 + x^3 = x^3 \,.\, (3 + 4 - 2 + 1) = x^3 \,.\, 6 = 6x^3$

3. Agrupamento

A expressão **ax + bx + ay + by** é a soma de quatro parcelas e não existe nenhum fator comum às quatro. **Agrupando**, porém, **ax + bx**, podemos colocar **x** em evidência, e **agrupando ay + by**, podemos colocar **y** em evidência. Desta forma, a expressão será transformada em duas parcelas, e em ambas vai aparecer um novo fator comum, **a + b**, que pode ser novamente colocado em evidência.

$$ax + bx + ay + by = (a + b).(x + y)$$

Observe como fazer

$\underbrace{ax + bx} + \underbrace{ay + by} = x.(a + b) + y.(a + b) =$

$= (a + b) . (x + y)$

Exemplos

a) $\underbrace{ax + ay} + \underbrace{2x + 2y} = a\,(x + y) + 2.\,(x + y) =$

$= (x + y) . (a + 2)$

b) $\underbrace{mn + 3m} + \underbrace{4n + 12} = m . (n + 3) + 4 . (n + 3) =$

$= (n + 3) . (m + 4)$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M106**

Exercícios Resolvidos

1 Fatorar a expressão $a^4 + a^3 + a^2$

Resolução

$a^4 + a^3 + a^2 = a^2 . (a^2 + a + 1)$

2 Fatorar a expressão $ab + 2a + b + 2$

Resolução

$ab + 2a + b + 2 = a . (b + 2) + 1 . (b + 2) = (b + 2)(a + 1)$

Exercícios Propostos

Fatore as expressões de **1** a **13**:

1 $ac + ad =$ **$a(c + d)$**

2 $2x^2 - 3xy =$ **$x(2x - 3y)$**

3 $36x^2y^2 - 48x^3y^4 =$ **$12x^2y^2(3 - 4xy^2)$**

4 $3x^2 + 6x^3 + 12x^4 =$ **$3x^2(1 + 2x + 4x^2)$**

5 $10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 - 30a^4b^3c^2 =$ **$5a^2b^2c^2(2bc^2 - 3ac^2 - 6a^2b)$**

6 $ac + bc + ad + bd =$ **$a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$**

7 $bx - ab + x^2 - ax =$ **$b(x - a) + x(x - a) = (x - a)\,(b + x)$**

8 $xy + 3y - 2x - 6 =$ **$x(y - 2) + 3(y - 2) = (y - 2)\,(x + 3)$**

9 $6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab =$ **$2x(3x - 2a) - 3b\,(3x - 2a) =$**
$= (3x - 2a)\,(2x - 3b)$

10 $xy + 3y + x + 3 =$ **$x(y + 1) + 3(y + 1) = (y + 1)\,(x + 3)$**

11 $ab + ac - b - c =$ **$b(a - 1) + c(a - 1) = (a - 1)(b + c)$**

12 $ab + a + b + 1 =$ **$a(b + 1) + b + 1 = (b + 1)\,(a + 1)$**

13 $ab + a - b - 1 =$ **$a(b + 1) - (b + 1) = (b + 1)\,(a - 1)$**

Módulo 10

Diferença de quadrados

Palavra-chave:

• Soma vezes diferença
$(a + b) \,.\, (a - b)$

A **diferença** entre dois quadrados **$(a^2 - b^2)$** é igual ao produto da soma **$(a + b)$** pela diferença **$(a - b)$**.

Assim:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)}$$

Observe a justificativa

$$(a + b) \,.\, (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemplos

a) $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1) \,.\, (2x - 1)$

b) $x^4 - b^4 = (x^2)^2 - (b^2)^2 = (x^2 + b^2) \,.\, (x^2 - b^2) =$
$= (x^2 + b^2) \,.\, (x + b) \,.\, (x - b)$

c) $(a + 1)^2 - 36 = (a + 1)^2 - 6^2 =$
$= [(a + 1) + 6] \,.\, [(a + 1) - 6] = (a + 7) \,.\, (a - 5)$

d) $4 - (x - y)^2 = 2^2 - (x - y)^2 = [2 + (x - y)] \,.\, [2 - (x - y)] =$
$= (2 + x - y) \,.\, (2 - x + y)$

e) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1$

Exercícios Resolvidos

1 Fatorar a expressão $16a^4 - 49a^2$

Resolução

$16a^4 - 49a^2 = a^2 \,.\, (16a^2 - 49) =$

$= a^2 \,.\, [(4a)^2 - 7^2] = a^2 \,.\, (4a + 7)(4a - 7)$

2 Qual o valor de $2354^2 - 2353^2$?

Resolução

$2354^2 - 2353^2 = (2354 + 2353)(2354 - 2353) =$

$= (2354 + 2353) \,.\, 1 = 4707$

Resposta: 4707

3 Escreva a fração $\dfrac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ na forma $\dfrac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{N}$

Resolução

$$\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \,.\, \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{18 - 12} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$$

Resposta: $\mathbf{\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}}$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M107**

Exercícios Propostos

Fatore as expressões de **1** a **8**:

1 $x^2 - y^2 =$ **$(x + y)\,(x - y)$**

2 $25x^2 - 4y^2 =$ **$(5x + 2y)\,(5x - 2y)$**

3 $36m^2 - 100n^2 =$ **$(6m + 10n)\,(6m - 10n)$**

4 $1 - m^2n^4 =$ **$(1 + mn^2)\,(1 - mn^2)$**

5 $y^2 - 1 =$ **$(y + 1)(y - 1)$**

6 $121 - 169a^2b^2 =$ **$(11 + 13ab)\,(11 - 13ab)$**

7 $y^4 - 16 =$ **$(y^2 + 4)(y^2 - 4) = (y^2 + 4)\,(y + 2)\,(y - 2)$**

8 $(2x + y)^2 - (x - 2y)^2 =$

$= [(2x + y) + (x - 2y)]\,[(2x + y) - (x - 2y)] =$

$= (3x - y)\,(x + 3y)$

9 Simplifique a expressão, supondo o denominador diferente de zero.

$$\frac{ab + a + b + 1}{a^2 - 1} = \frac{a(b+1) + b + 1}{(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{(b+1)(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{b+1}{a-1}$$

10 Racionalize o denominador da fração $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{4}}{3-2} = \sqrt{6} + 2$$

Módulo 11 — Quadrado perfeito

Palavras-chave:
- Quadrado da soma
- Quadrado da diferença

O **quadrado da soma** de duas parcelas, $\mathbf{(a + b)^2}$, é igual ao quadrado da primeira parcela, $\mathbf{a^2}$, somado com o dobro do produto das duas parcelas, **2ab**, somado com o quadrado da segunda parcela, $\mathbf{b^2}$.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

O **quadrado da diferença** entre duas parcelas, $\mathbf{(a - b)^2}$, é igual ao quadrado da primeira parcela, $\mathbf{a^2}$, menos o dobro do produto das duas parcelas, **2ab**, mais o quadrado da segunda parcela, $\mathbf{b^2}$.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Observe as justificativas

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b).(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos

a) $4a^2 + 4ab + b^2 = (2a)^2 + 2 \,.\, 2a \,.\, b + b^2 =$
$= (2a + b)^2$

b) $36 - 12x + x^2 = 6^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, x + x^2 = (6 - x)^2$

Saiba mais

Não confunda o **quadrado da diferença**, que é $\mathbf{(a - b)^2}$, com a **diferença de quadrados**, que é $\mathbf{a^2 - b^2}$.

Note que:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b) \,.\, (a - b)$

Note, ainda, pelo exemplo numérico, que:

$(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$

$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M108**

Exercícios Resolvidos

1 Fatorar a expressão $49 - 14x + x^2$

Resolução

$49 - 14x + x^2 = 7^2 - 2 \,.\, 7 \,.\, x + x^2 = (7 - x)^2$

2 Fatorar a expressão $a^2 + b^2 - (2ab + c^2)$

Resolução

$a^2 + b^2 - (2ab + c^2) = a^2 + b^2 - 2ab - c^2 =$

$= (a - b)^2 - c^2 = [(a - b) + c] \,.\, [(a - b) - c] = (a - b + c)(a - b - c)$

3 **(MODELO ENEM)** – O valor da expressão algébrica

$$\frac{(a+3)^2-4}{(a-1)^2+4a} \text{ para } a = 135 \text{ é}$$

a) 1 b) $\dfrac{35}{34}$ c) $\dfrac{34}{35}$ d) $\dfrac{3}{19}$ e) $\dfrac{19}{8}$

Resolução

1) $(a+3)^2 - 4 = (a+3)^2 - 2^2 = [a+3+2]\,.\,[a+3-2] = (a+5).(a+1)$

2) $(a-1)^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$

3) $\dfrac{(a+3)^2-4}{(a-1)^2+4a} = \dfrac{(a+5)(a+1)}{(a+1)^2} = \dfrac{a+5}{a+1}$

4) Para a = 135, o valor da expressão dada será:

$$\frac{135+5}{135+1} = \frac{140}{136} = \frac{35}{34}$$

Resposta: B

Exercícios Propostos

De **1** a **4**, desenvolver:

1 $(x+y)^2 = \mathbf{x^2 + 2xy + y^2}$

2 $(x-y)^2 = \mathbf{x^2 - 2xy + y^2}$

3 $(2-x)^2 = \mathbf{4 - 4x + x^2}$

4 $(3a-2b)^2 = \mathbf{9a^2 - 12ab + 4b^2}$

De **5** a **9**, fatorar:

5 $m^2 + 2m + 1 = \mathbf{(m+1)^2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sqrt{m^2} = m \qquad \sqrt{1} = 1$

6 $4y^2 + 4y + 1 = \mathbf{(2y+1)^2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sqrt{4y^2} = 2y \qquad \sqrt{1} = 1$

7 $9x^4 - 24x^2y + 16y^2 = \mathbf{(3x^2 - 4y)^2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sqrt{9x^4} = 3x^2 \qquad \sqrt{16y^2} = 4y$

8 $25 - 10x + x^2 = \mathbf{(5-x)^2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{x^2} = x$

9 $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = \mathbf{(x+y)^2 - 1 = [(x+y)+1][(x+y)-1] =}$
$\mathbf{= (x+y+1)(x+y-1)}$

10 Simplificar a fração, supondo o denominador diferente de zero.

$$\frac{5x^2-5}{x^2-2x+1} = \frac{\mathbf{5(x^2-1)}}{\mathbf{(x-1)^2}} = \frac{\mathbf{5(x+1)\,(x-1)}}{\mathbf{(x-1)^2}} = \frac{\mathbf{5(x+1)}}{\mathbf{x-1}}$$

Módulo 12 – Soma de cubos e cubo perfeito

Palavras-chave:
• Soma de cubos • Diferença de cubos
• Cubo da soma • Cubo da diferença

1. Soma de cubos

A **soma** de dois cubos, $\mathbf{a^3 + b^3}$, é igual ao produto do fator $\mathbf{(a+b)}$ pelo fator $\mathbf{(a^2 - ab + b^2)}$.

$$a^3 + b^3 = (a+b)\,.\,(a^2 - ab + b^2)$$

Observe a justificativa

$$(a+b)\,.\,(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

2. Diferença de cubos

A **diferença** entre dois cubos, $\mathbf{a^3 - b^3}$, é igual ao produto do fator $\mathbf{(a-b)}$ pelo fator $\mathbf{(a^2 + ab + b^2)}$.

$$a^3 - b^3 = (a-b)\,.\,(a^2 + ab + b^2)$$

Observe a justificativa

$$(a-b)\,.\,(a^2 + ab + b^2) =$$

$$= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

3. Cubo da soma

O **cubo da soma** de duas parcelas, $\mathbf{(a + b)^3}$, é igual ao cubo da primeira parcela, $\mathbf{a^3}$, mais três vezes o quadrado da primeira pela segunda, $\mathbf{3 \cdot a^2 \cdot b}$, mais três vezes a primeira pelo quadrado da segunda, $\mathbf{3 \cdot a \cdot b^2}$, mais o cubo da segunda parcela, $\mathbf{b^3}$.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Observe a justificativa

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

4. Cubo da diferença

O **cubo da diferença** entre duas parcelas, $\mathbf{(a - b)^3}$, é igual ao cubo da primeira parcela, $\mathbf{a^3}$, menos três vezes o quadrado da primeira pela segunda, $\mathbf{3 \cdot a^2 \cdot b}$, mais três vezes a primeira pelo quadrado da segunda, $\mathbf{3 \cdot a \cdot b^2}$, menos o cubo da segunda parcela, $\mathbf{b^3}$.

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Observe a justificativa

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Saiba mais

Não confunda o **cubo da soma**, que é $\mathbf{(a + b)^3}$, com a **soma de cubos**, que é $\mathbf{a^3 + b^3}$.

Note que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

Note, ainda, pelo exemplo numérico, que: $(3 + 2)^3 = 5^3 = 125$

$3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$

De modo análogo, não confundir o **cubo da diferença** com a **diferença de cubos**.

Note que: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

Exercícios Resolvidos

1 Desenvolva a expressão $(a - 1)(a^2 + a + 1)$, usando a propriedade distributiva.

Resolução

$(a - 1).(a^2 + a + 1) =$

$= a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1 = a^3 - 1$

2 Utilizando o exercício anterior, simplificar a expressão $\dfrac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1}$.

Resolução

$$\frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1} = \frac{(a - 1).(a^2 + a + 1)}{a^2 + a + 1} = a - 1$$

3 Desenvolver $(a - 2)^3$

Resolução:

$(a - 2)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 - 2^3 =$

$= a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

4 Calcular o valor da expressão algébrica

$\dfrac{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}{a^2 - 2a + 4}$ para $a = 132$

Resolução

1) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$ conforme exercício anterior.

2) $a^2 - 2a + 4 = (a - 2)^2$

3) $$\frac{a^3 - 6a^2 + 12a - 8}{a^2 - 2a + 4} = \frac{(a - 2)^3}{(a - 2)^2} = a - 2$$

4) Para $a = 132$, o valor da expressão é $132 - 2 = 130$

Resposta: 130

Exercícios Propostos

1 Desenvolva a expressão $(x + 1)(x^2 - x + 1)$, usando a propriedade distributiva

RESOLUÇÃO:

$(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

2 Utilizando o exercício anterior, e supondo $x^2 \neq 1$, simplifique a expressão $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)\,.\,(x^2-x+1)}{(x+1).(x-1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

3 Desenvolver $(2x + 3y)^3$

RESOLUÇÃO:

$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3\,.\,(2x)^2\,.\,3y + 3\,.\,2x\,.\,(3y)^2 + (3y)^3 =$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M109**

4 Utilizando o exercício anterior, simplifique a expressão $\dfrac{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}{(4x^2-9y^2)(4x^2+12xy+9y^2)}$, supondo $4x^2 \neq 9y^2$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}{(4x^2-9y^2)(4x^2+12xy+9y^2)} =$$

$$= \frac{(2x+3y)^3}{(2x+3y).(2x-3y).(2x+3y)^2} = \frac{1}{2x-3y}$$

5 Desenvolva $(a - 2b)^3$

RESOLUÇÃO:

$(a-2b)^3 = a^3 - 3a^2\,.\,2b + 3\,.\,a\,.\,(2b)^2 - (2b)^3 =$

$= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

Módulos 13 e 14 – Simplificação de expressões algébricas

Palavras-chave:
- Fatorar
- Simplificar

Lembre-se de que:

$$ax + bx = x\,.\,(a+b)$$

$$ax + bx + ay + by = (a+b)\,.\,(x+y)$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,.\,(a-b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 13 e 14

1 **(MODELO ENEM)** – O valor de $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{10a^2-6b}$, para $a = 9$ e $b \neq 135$, é:

a) 41 b) 43 c) 82 d) 123 e) 164

Resolução

$$\frac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{10a^2-6b} = \frac{5a^2(a^2+1)-3b(a^2+1)}{2(5a^2-3b)} =$$

$$= \frac{(a^2+1)(5a^2-3b)}{2(5a^2-3b)} = \frac{a^2+1}{2}$$

Para $a = 9$, o valor da expressão é

$$\frac{9^2+1}{2} = \frac{82}{2} = 41$$

Resposta: A

2 Simplificar a fração $\dfrac{ax-bx}{mx-nx}$, supondo cada denominador diferente de zero.

Resolução

$$\frac{ax-bx}{mx-nx} = \frac{x(a-b)}{x(m-n)} = \frac{a-b}{m-n}$$

Exercícios Propostos – Módulo 13

De 1 a 6, simplificar as frações, supondo cada denominador diferente de zero.

1) $\dfrac{3ab + 15a^2b^3}{2x + 10ab^2x} = \dfrac{\mathbf{3ab(1 + 5ab^2)}}{\mathbf{2x(1 + 5ab^2)}} = \dfrac{\mathbf{3ab}}{\mathbf{2x}}$

2) $\dfrac{2xy - 2x^2}{2x^2y} = \dfrac{\mathbf{2x(y - x)}}{\mathbf{2x^2y}} = \dfrac{\mathbf{y - x}}{\mathbf{xy}}$

3) $\dfrac{ax^3 - x^2}{x^2y} = \dfrac{\mathbf{x^2(ax - 1)}}{\mathbf{x^2y}} = \dfrac{\mathbf{ax - 1}}{\mathbf{y}}$

4) $\dfrac{2a^2b + a^2b^2}{a^3 \,.\, b} = \dfrac{\mathbf{a^2b(2 + b)}}{\mathbf{a^3b}} = \dfrac{\mathbf{2 + b}}{\mathbf{a}}$

5) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \dfrac{\mathbf{(a + b)(a - b)}}{\mathbf{a(a - b)}} = \dfrac{\mathbf{a + b}}{\mathbf{a}}$

6) $\dfrac{x^2 + xy + x + y}{x^2 - 1} = \dfrac{\mathbf{x(x + y) + 1(x + y)}}{\mathbf{(x + 1)(x - 1)}} =$

$= \dfrac{\mathbf{(x + y)(x + 1)}}{\mathbf{(x + 1)(x - 1)}} = \dfrac{\mathbf{x + y}}{\mathbf{x - 1}}$

Exercícios Propostos – Módulo 14

De 1 a 4, simplificar as frações, supondo cada denominador diferente de zero.

1) $\dfrac{x^3 + x^2 - xy^2 - y^2}{x^2 + xy + x + y} = \dfrac{\mathbf{x^2(x + 1) - y^2(x + 1)}}{\mathbf{x(x + y) + 1\,(x + y)}} =$

$= \dfrac{\mathbf{(x + 1)\,(x^2 - y^2)}}{\mathbf{(x + y)\,(x + 1)}} = \dfrac{\mathbf{(x + y)\,(x - y)}}{\mathbf{x + y}} = \mathbf{x - y}$

2) $\dfrac{(a - b)^2 + 4ab}{3a + 3b} = \dfrac{\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}}{\mathbf{3(a + b)}} =$

$= \dfrac{\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}}{\mathbf{3(a + b)}} = \dfrac{\mathbf{(a + b)^2}}{\mathbf{3(a + b)}} = \dfrac{\mathbf{a + b}}{\mathbf{3}}$

3) $\dfrac{3x^2 - 18x + 27}{3x^2 - 9x} = \dfrac{\mathbf{3(x^2 - 6x + 9)}}{\mathbf{3x(x - 3)}} = \dfrac{\mathbf{(x - 3)^2}}{\mathbf{x(x - 3)}} = \dfrac{\mathbf{x - 3}}{\mathbf{x}}$

4) $\dfrac{4x^2 + 20x + 25}{4x^2 - 25} = \dfrac{\mathbf{(2x + 5)^2}}{\mathbf{(2x - 5)(2x + 5)}} = \dfrac{\mathbf{2x + 5}}{\mathbf{2x - 5}}$

5) **(MODELO ENEM)** – Simplificando-se a fração

$\dfrac{m^2 + m}{5m^2 + 10m + 5}$, obtém-se:

a) $\dfrac{1}{11}$ b) $\dfrac{m}{5(m + 1)}$ c) $\dfrac{m}{5(m - 1)}$

d) $\dfrac{m + 1}{5m}$ e) $\dfrac{m - 1}{5m}$

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{\mathbf{m^2 + m}}{\mathbf{5m^2 + 10m + 5}} = \dfrac{\mathbf{m(m + 1)}}{\mathbf{5(m^2 + 2m + 1)}} = \dfrac{\mathbf{m(m + 1)}}{\mathbf{5(m + 1)^2}} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{5(m + 1)}}$

Resposta: B

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M110**

Módulos 15 e 16 Exercícios complementares

Exercícios Resolvidos – Módulos 15 e 16

1 Provar que
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Resolução

$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 =$

$= (a + b)^2 + 2(a + b) \, . \, c + c^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2 Os números naturais a e b, com a > b, são tais que $a^2 - b^2 = 11$. Determinar **a** e **b**.

Resolução

1) $a^2 - b^2 = 11 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) = 11$

2) A única maneira de escrever 11 na forma de produto é **1 . 11** ou **(–1) .(– 11)**

3) Como a > b, a + b e a – b são positivos

4) a + b > a – b

5) $\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ 2a = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}$

Resposta: a = 6; b = 5

3

a) Desenvolver, usando a propriedade distributiva, $(x + 1)(x + 2)$

b) Calcular o valor da expressão

$$\frac{4x + 8}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - 1}, \text{ para } x = 6$$

Resolução

a) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 2x + x + 2 =$
$= x^2 + 3x + 2$

b) $$\frac{4x + 8}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{4(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{3(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} =$$

$$= \frac{4}{x + 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{7}{x + 1}$$

Para x = 6, temos $\dfrac{7}{6 + 1} = \dfrac{7}{7} = 1$

Exercícios Propostos – Módulo 15

1 A metade de $4^8 + 8^4$ é:

a) 320 b) $2^8 + 4^4$ c) $17 \, . \, 2^{12}$
d) $2^8 + 2^6$ e) $17 \, . \, 2^{11}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{4^8 + 8^4}{2} = \frac{(2^2)^8 + (2^3)^4}{2} = \frac{2^{16} + 2^{12}}{2} = \frac{2^{16}}{2} + \frac{2^{12}}{2} =$$

$= 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \, . \, (2^4 + 1) = 2^{11} \, . \, 17 = 17 \, . \, 2^{11}$

Resposta: E

2 **(UFF)** – A expressão $\dfrac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$ é equivalente a:

a) $1 + 10^{10}$ b) $\dfrac{10^{10}}{2}$ c) 10^{-10}

d) 10^{10} e) $\dfrac{10^{10} - 1}{2}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{10^{10} \, . \, \cancel{(1 + 10^{10} + 10^{20})}}{10^{20} \, . \, \cancel{(1 + 10^{10} + 10^{20})}} = \frac{10^{10}}{10^{20}} = 10^{10-20} = 10^{-10}$$

Resposta: C

3 Sendo n um número natural, a expressão

$$\frac{(2^{n+1}+2^{n+2}) \, . \, (3^{n+2}-3^{n+1})}{6^{n+2}} \text{ é igual a}$$

a) 1 b) 3^n c) 2^n d) 6^n e) 6

RESOLUÇÃO:

$$\frac{(2^{n+1}+2^{n+2}) \, . \, (3^{n+2}-3^{n+1})}{6^{n+2}} =$$

$$= \frac{(2^n \, . \, 2 + 2^n \, . \, 2^2) \, . \, (3^n \, . \, 3^2 - 3^n \, . \, 3^1)}{6^n \, . \, 6^2} =$$

$$= \frac{2^n \, . \, (2+2^2) \, . \, 3^n \, . \, (3^2-3)}{6^n \, . \, 6^2} = \frac{6^n \, . \, 6 \, . \, 6}{6^n \, . \, 6^2} = 1$$

Resposta: A

4 **(MODELO ENEM)** – O valor de $\sqrt[4]{\dfrac{2^{14}+2^{16}}{2^6+2^8}}$ é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt[4]{\frac{2^{14}+2^{16}}{2^6+2^8}} = \sqrt[4]{\frac{2^{12} \, . \, (2^2+2^4)}{2^4 \, . \, (2^2+2^4)}} = \frac{2^3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Resposta: B

5 Se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, então o valor de

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}} \text{ será}$$

a) $\dfrac{4}{n}$ b) $\dfrac{1}{4\sqrt[n]{2n}}$ c) $\dfrac{1}{2n}$

d) $\sqrt[n]{2n+1}$ e) $\dfrac{1}{4}$

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{20}{4^n \, . \, 4^2 + 2^{2n} \, . \, 2^2}} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{20}{16 \, . \, 4^n + 4 \, . \, 4^n}} = \sqrt[n]{\frac{20}{20 \, . \, 4^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4}$$

Resposta: E

1 Fatorar $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

RESOLUÇÃO:
$a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 =$
$= (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$

2 Desenvolver $(a + b + c)^2$

RESOLUÇÃO:
$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 =$
$= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

3 **(MACKENZIE)** – O valor de

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$$, para $x = 111$ e $y = 112$, é

a) 215 b) 223 c) 1 d) – 1 e) 214

RESOLUÇÃO:
Com $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 \neq 0$, temos

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \frac{(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2)}{x^2(x - y) + y^2(x - y)} =$$

$$= \frac{(x + y) \cdot (x - y) \cdot (x^2 + y^2)}{(x - y) \cdot (x^2 + y^2)} = x + y$$

Para $x = 111$ e $y = 112$, o valor da expressão é $111 + 112 = 223$

Resposta: B

4 Calcular o valor de $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$, sabendo que $a + \dfrac{1}{a} = 5$.

RESOLUÇÃO:

$$a + \frac{1}{a} = 5 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 25 \Leftrightarrow a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 23$$

5 Os números naturais a e b, com $a > b$, são tais que $a^2 - b^2 = 7$. O valor de $a - b$ é:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 4 e) 7

RESOLUÇÃO:

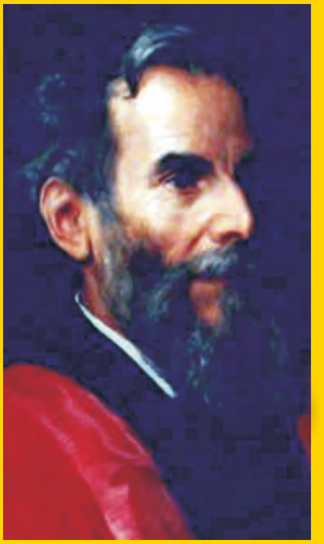
$$a^2 - b^2 = 7 \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a - b) = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Resposta: B

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

OBJETIVO
FRENTE 2

MATEMÁTICA



John Venn – (1834-1923)
Diagramas de Venn

Conjuntos e Funções – Módulos

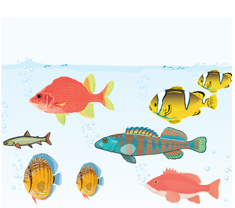
Módulos 1 e 2

Primeiros conceitos de conjuntos – Operações entre conjuntos

Palavras-chave:
• Conjunto • Pertinência • Diagrama
• Subconjunto • União • Intersecção

1. Conceitos primitivos

O conceito de **conjunto** é **primitivo**, ou seja, **não definido**. Um cacho de bananas, um cardume de peixes ou uma coleção de livros são todos exemplos de conjuntos de coisas.



Conjuntos, como usualmente são concebidos, têm **elementos**. Um elemento de um conjunto pode ser uma banana, um peixe ou um livro. **Convém frisar que um conjunto pode ele mesmo ser elemento de algum outro conjunto**. Por exemplo, uma reta é um conjunto de pontos; um feixe de retas é um conjunto em que cada elemento (reta) é também conjunto (de pontos).

Em geral, indicaremos os conjuntos pelas letras maiúsculas A, B, C, ..., X, ..., e os elementos pelas letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, ...

Um outro conceito fundamental é o de **relação de pertinência**, que nos dá um relacionamento entre um elemento e um conjunto.

Se **x** é um **elemento** de um **conjunto**, escreveremos **$x \in A$**. Lê-se: **"x é elemento de A"** ou **"x pertence a A"**
Se **x não** é um **elemento** de **um conjunto A**, escreveremos **$x \notin A$**. Lê-se: **"x não é elemento de A"** ou **"x não pertence a A"**.

2. Notações

Quanto à notação dos conjuntos, estabelecemos três formas, entre as usuais, de apresentar um conjunto.

Conjunto determinado pela designação de seus elementos

É o caso em que o conjunto é dado pela enumeração de seus elementos. Indicamo-lo escrevendo os seus elementos entre chaves e separando-os, dois a dois, por vírgula, ou ponto e vírgula.

Exemplos

a) {3, 6, 7, 8} indica o conjunto formado pelos elementos: **3**, **6**, **7** e **8**.

b) {a; b; m} indica o conjunto constituído pelos elementos: **a**, **b** e **m**.

c) Conjunto dos números naturais é

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$$

d) Conjunto dos números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

e) Conjunto dos múltiplos naturais de 3, menores que 20, é {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18}

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M111**

Conjunto determinado pela propriedade de seus elementos

Conhecida uma propriedade **P** que caracterize os elementos de um conjunto **A**, este fica bem determinado.

O termo "**propriedade P que caracteriza os elementos de um conjunto A**" significa que, dado um elemento **x** qualquer, temos:

x ∈ A, se, e somente se, **x satisfaz P**.

x ∉ A, se e somente se, **x não satisfaz P**.

Assim sendo, **o conjunto dos elementos x que possuem propriedade P** é indicado por:

{x, tal que x tem a propriedade P}

Podemos substituir **tal que** por **t. q.** ou | ou **:** .

Exemplos

a) {x, **t. q.** x é vogal} é o mesmo que {a, e, i, o, u}

b) {x | x é um número natural menor que 4} é o mesmo que {0, 1, 2, 3}

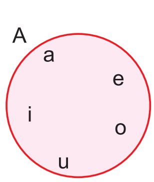
c) {x : x é um número inteiro e $x^2 = x$} é o mesmo que {0; 1}

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$

e) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\} = \{2\}$

Conjunto determinado pelo diagrama de Venn-Euler

O Diagrama de Venn-Euler consiste em representar o conjunto por meio de um círculo de tal forma que seus elementos, e somente eles, estejam no círculo. A figura abaixo é o Diagrama de Venn-Euler do conjunto A = {a, e, i, o, u}.



3. Conjunto vazio

Seja **A** um conjunto. Se para todo elemento **x**, x ∉ A, dizemos que **A** é um conjunto que não possui elementos. Chamamo-lo **conjunto vazio** e o indicamos pela letra **Ø** do alfabeto norueguês.

$$A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x, x \notin A$$

Exemplos

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} = \{-2; 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\} = \{2\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -4\} = \varnothing$

Observação

O símbolo **n(A)** indica o número de elementos do conjunto **A**. Assim:

a) $A = \{1, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 3$

b) $A = \varnothing \Rightarrow n(A) = 0$

4. Subconjunto ou parte

Definição

Sejam **A** e **B** dois conjuntos. Se **todo** elemento de **A** é também elemento de **B**, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou **parte** de **B** e indicamos por **A ⊂ B**.

Em símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Por outro lado, **A ⊄ B** significa que **A** não é um **subconjunto (parte)** de **B**.

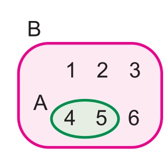
Portanto, A ⊄ B se, e somente se, existe pelo menos um elemento de **A** que não é elemento de **B**.

Em símbolos:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ e } x \notin B)$$

Exemplos

a) O conjunto A = {4; 5} é subconjunto do conjunto B = {1,2,3,4,5,6}



b) {2; 4} ⊂ {2, 3, 4}

c) {2; 3, 4} ⊄ {2; 4}

d) {5; 6} ⊂ {5; 6}

Relação de inclusão e relação de pertinência

A definição de **subconjunto** nos dá um relacionamento entre dois conjuntos que recebe o nome de **relação de inclusão**.

A **relação de pertinência** (∈) e a **relação de inclusão** (⊂) são conceitualmente muito diferentes.

O símbolo ∈ relaciona **elemento com conjunto**. O símbolo ⊂ relaciona **conjunto com conjunto**.

Apesar disso, **inclusão** e **pertinência** se **interligam** da seguinte maneira:

$$x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A \qquad x \notin A \Leftrightarrow \{x\} \not\subset A$$

Exemplos

a) 2 ∈ {1, 2, 3}

b) $\{1; 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

c) $\{\mathbf{5}\} \in \{1, 3, \{\mathbf{5}\}\}$

d) $\mathbf{4} \in \{1, 2, 3, \mathbf{4}, \{4\}\}$

e) $\{\mathbf{4}\} \subset \{1, 2, 3, \mathbf{4}, \{4\}\}$

f) $\{\mathbf{4}\} \in \{1, 2, 3, 4, \{\mathbf{4}\}\}$

g) $\{\{\mathbf{4}\}\} \subset \{1, 2, 3, 4, \{\mathbf{4}\}\}$

5. Igualdade de conjuntos

Sejam **A** e **B** dois conjuntos. Dizemos que **A** é **igual** a **B** e indicamos por **A = B** se, e somente se, **A** é subconjunto de **B** e **B** é também subconjunto de **A**. Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Segue-se da definição que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos.

Por outro lado, **A** ≠ **B** significa que **A** é diferente de **B**. Portanto, **A** ≠ **B** se e somente se, **A** não é subconjunto de **B** ou **B** não é subconjunto de **A**.

Em símbolos:

$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A$$

Observe que:

a) Demonstrar que dois conjuntos **A** e **B** são iguais equivale, segundo a definição, a demonstrar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

b) $\{2, 4\} = \{4, 2\}$, pois $\{2, 4\} \subset \{4, 2\}$ e $\{4, 2\} \subset \{2, 4\}$

Isto nos mostra que a ordem dos elementos de um conjunto não deve ser levada em consideração. Em outras palavras, um conjunto fica determinado pelos elementos que ele possui e não pela ordem em que esses elementos são descritos.

c) $\{2, 2, 2, 4\} = \{2, 4\}$, pois $\{2, 2, 2, 4\} \subset \{2, 4\}$ e $\{2, 4\} \subset \{2, 2, 2, 4\}$. Isto nos mostra que a repetição de elementos é desnecessária.

d) $\{a, b\} = \{a\} \Leftrightarrow a = b$

6. Conjunto das partes de um conjunto

Definição

Dado um conjunto **A**, podemos construir um novo conjunto formado por **todos** os subconjuntos (partes) de **A**. Esse novo conjunto chama-se **conjunto dos subconjuntos** (**ou das partes**) de **A** e é indicado por $\mathbb{P}(A)$.

Em símbolos:

$$\mathbb{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

ou

$$X \in \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

Propriedades

Seja **A** um conjunto qualquer. Valem as seguintes propriedades:

a) $A \in \mathbb{P}(A)$

b) $\varnothing \in \mathbb{P}(A)$

c) Se A tem k elementos, então A possui 2^k ***subconjuntos, ou seja:*** $\mathbb{P}(A)$ ***tem*** 2^k ***elementos.***

Exemplos

a) $A = \{2, 4, 6\}$

$\mathbb{P}(A) = \{\varnothing, \{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},A\}$

$n(A) = 3$

$n(\mathbb{P}(A)) = 2^3 = 8$

b) $B = \{3, 5\}$

$\mathbb{P}(B) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, B\}$

$n(B) = 2$

$n(\mathbb{P}(B)) = 2^2 = 4$

c) $C = \{8\}$

$\mathbb{P}(C) = \{\varnothing, C\}$

$n(C) = 1$

$n(\mathbb{P}(C)) = 2^1 = 2$

d) $D = \varnothing$

$\mathbb{P}(D) = \{\varnothing\}$

$n(D) = 0$

$n(\mathbb{P}(D)) = 2^0 = 1$

7. Características gerais dos conjuntos

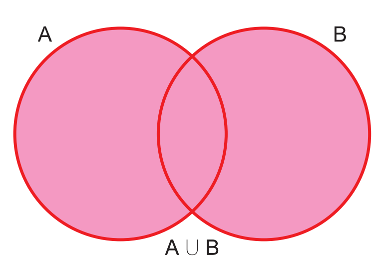
$\forall A;\ A \notin A$	$\forall A;\ A \subset A$	$\forall A;\ \varnothing \subset A$	$\forall x;\ x \notin \varnothing$
$\forall A;\ x \neq \{x\}$	$\forall A;\ A \neq \{A\}$	$\varnothing \neq \{\varnothing\}$	$\{a,a\} = \{a\}$

8. Reunião ou união

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, chama-se **reunião** (ou **união**) de **A** e **B**, e indica-se por **A ∪ B**, ao conjunto formado pelos elementos de **A** ou de **B**.

Em símbolos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplos

a) $\{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$

c) $\{2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

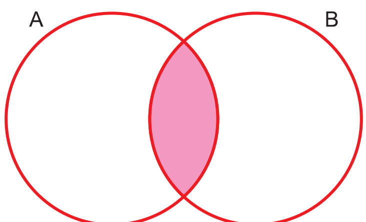
d) $\{a, b\} \cup \varnothing = \{a, b\}$

9. Intersecção

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, chama-se **intersecção** de **A** e **B**, e indica-se por **A ∩ B**, ao conjunto formado pelos elementos de **A** e de **B**.

Em símbolos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$$



A ∩ B

Exemplos

a) $\{2, 3, 4\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$

b) $\{2, 4\} \cap \{3, 5, 7\} = \varnothing$

Observação

Se **A ∩ B = Ø**, dizemos que **A** e **B** são **conjuntos disjuntos**.

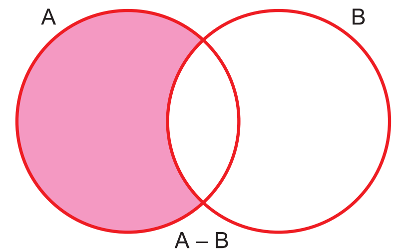
Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, por exemplo, são disjuntos, pois $A \cap B = \varnothing$.

10. Subtração

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, chama-se **diferença** entre **A** e **B**, e se indica por **A – B**, ao conjunto formado pelos elementos que **são** de **A** e **não são** de **B**.

Em símbolos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



A – B

Exemplo

Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{1, 3, 4\}$, então $A - B = \{5, 7\}$

11. Complementar

O conjunto **B – A** é também conhecido por **conjunto complementar de A em relação a B** e, para tal, usa-se a notação $\complement_B A$. Portanto:

$$\complement_B A = B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplos

a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2\}$

$\complement_A B = A - B = \{1, 3\}$ e $\complement_B A = B - A = \varnothing$

b) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$

$\complement_A B = A - B = \{1\}$ e $\complement_B A = B - A = \{4\}$

Observações

a) Alguns autores definem o conjunto complementar de **A** em **B** só no caso em que **A ⊂ B**.

b) Se $A \subset B$, então $\complement_B A = \overline{A}$. Simbolicamente:

$$B \subset A \Rightarrow \overline{B} = A - B = \complement_A B$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 1 e 2

1 **(MODELO ENEM)** – Sendo $S = \{3; 4; 5; 8\}$, assinale a afirmação **falsa**:

a) $3 \in S$ b) $4 \in S$ c) $8 \in S$
d) $\{8\} \in S$ e) $6 \notin S$

Resolução

Os únicos elementos do conjunto S são 3, 4, 5 e 8 e, portanto:

a) Verdadeira, pois 3 é elemento de S

b) Verdadeira, pois 4 é elemento de S

c) Verdadeira, pois 8 é elemento de S

d) Falsa, pois {8} não é elemento de S

e) Verdadeira, pois 6 não é elemento de S

Resposta: D

2 **(MODELO ENEM)** – Sendo $S = \{3; 4; 5; 8\}$, assinale a **falsa**:

a) $\varnothing \subset S$ b) $\varnothing \notin S$ c) $\{8\} \subset S$
d) $\{3; 5\} \subset S$ e) $\{3; 6\} \subset S$

Resolução

a) Verdadeira, pois o conjunto Ø é subconjunto de qualquer conjunto.

b) Verdadeira, pois Ø não é elemento de S.

c) Verdadeira, pois o único elemento de {8} é também elemento de S.

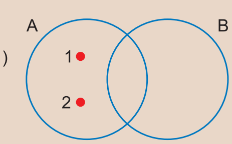
d) Verdadeira, pois os dois elementos de {3; 5} são também elementos de S.

e) Falsa, pois $6 \in \{3; 6\}$ e $6 \notin S$.

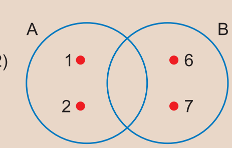
Resposta: E

3 Obter os conjuntos A e B, sabendo que $A - B = \{1; 2\}$, $B - A = \{6; 7\}$ e $A \cup B = \{1; 2; 4; 6; 7\}$

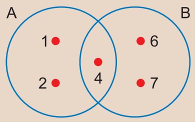
Resolução

1) 

pois A - B = { 1; 2}

2) 

pois B - A = { 6; 7}

3) 

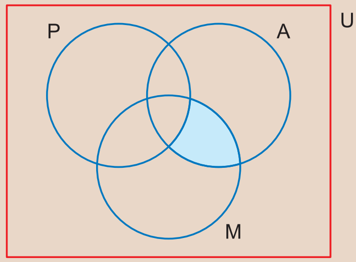
pois A ∪ B = { 1; 2; 4; 6; 7}

Resposta: A = {1; 2; 4}; B = {4; 6; 7}

4 **(MODELO ENEM)** – Para a identificação de pacientes com sintomas de gripe influenza A, a Anvisa (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) informou hoje que os voos procedentes de Reino Unido, Espanha e Nova Zelândia também serão inspecionados por uma equipe da agência e por médicos da Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária (Infraero).
Inicialmente, apenas os voos vindos de México, Canadá e Estados Unidos eram inspecionados. A decisão foi tomada durante reunião da Anvisa com representantes das companhias aéreas, da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac) e da Infraero, no Aeroporto Internacional de Cumbica, em Guarulhos, na Grande São Paulo.

(Adaptado de: http://noticias.uol.com.br/cotidiano/2009/04/28/ult5772u3774.jhtm, Acesso em: 09.05.2009.)

Em um voo proveniente de Miami, a Anvisa constatou que entre todas as pessoas a bordo (passageiros e tripulantes) algumas haviam passado pela Cidade do México.



No diagrama, U representa o conjunto das pessoas que estavam nesse voo; P o conjunto dos passageiros; M o conjunto das pessoas que haviam passado pela Cidade do México e A o conjunto das pessoas com sintomas da gripe influenza A.
Considerando verdadeiro esse diagrama, conclui-se que a região sombreada representa o conjunto das pessoas que, de modo inequívoco, são aquelas caracterizadas como

a) passageiros com sintomas da gripe que não passaram pela Cidade do México.
b) passageiros com sintomas da gripe que passaram pela Cidade do México.
c) tripulantes com sintomas da gripe que passaram pela Cidade do México.
d) tripulantes com sintomas da gripe que não passaram pela Cidade do México.
e) tripulantes sem sintomas da gripe que passaram pela Cidade do México.

Resolução
A região sombreada tem intersecção vazia com o conjunto P (está fora do conjunto P), portanto não representa passageiros e sim tripulantes. Como essas pessoas estão dentro do conjunto M e do conjunto A, passaram pela Cidade do México e apresentam sintomas da gripe influenza A.

Resposta: C

5 Determine os conjuntos X tais que
{1} ⊂ X ⊂ {1, 2, 3}
Resolução
O número **1** é obrigatoriamente elemento do conjunto X. Os elementos **2** e **3** podem ou não ser elementos de X.
Os possíveis conjuntos são: {1}, {1; 2}, {1; 3}, {1; 2; 3}

Exercícios Propostos – Módulo 1

1 Sendo S = {1, 2, 3, 5, 6}, assinale (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:

(0) 2 ∈ S	(1) 7 ∈ S	(2) 3 ∉ S
(3) 0 ∉ S	(4) 5 ∈ S	(5) 9 ∈ S
(6) 6 ∉ S	(7) 8 ∈ S	

RESOLUÇÃO:
0) V 1) F 2) F 3) V 4) V 5) F 6) F 7) F

2 Sendo S = {1, 2, 3, 4, 5}, assinale (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:

(0) {1, 3} ⊂ S	(1) {1, 6} ⊂ S	(2) {1, 2, 3} ⊂ S
(3) {1, 2, 5} ⊄ S	(4) {1, 2, 4} ⊄ S	(5) {1, 2, 3, 4, 5} ⊂ S

RESOLUÇÃO:
0) V 1) F 2) V 3) F 4) F 5) V

3 Dados os conjuntos A = {1, 2, 8, 9}, B = {8, 9}, C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, classifique as sentenças a seguir em verdadeiras (V) ou falsas (F):

(0) B ⊂ A	(1) A ⊄ B	(2) A ⊄ C
(3) Ø ⊂ A	(4) Ø ⊂ B	(5) Ø ⊂ C
(6) 2 ∈ C	(7) 2 ⊂ C	(8) {2} ⊂ C

RESOLUÇÃO:
(0) V; (1) V; (2) V; (3) V; (4) V; (5) V; (6) V; (7) F; (8) V

4 Assinale (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:
(0) {3, 5, 1} = {1, 3, 5}
(1) {3, 5, 1} = {3, 5, 1, 1, 1}
(2) A ⊂ B e B ⊂ A ⇔ A = B
(3) a > b e {1,a,b} = {1,2} ⇒ a = 2 e b = 1

RESOLUÇÃO:
0) V 1) V 2) V 3) V

1 Determine todos os subconjuntos de A = {1; 2} e B = {1, 3, 5}. Escreva em seguida o conjunto das partes de A e o conjunto das partes de B.

RESOLUÇÃO:
Subconjuntos de A: Ø, {1}, {2}, {1;2}
$\mathbb{P}$(A) = {Ø, {1}, {2}, {1;2}}
Subconjuntos de B: Ø, {1}, {3}, {5}, {1;3}, {1;5}, {3;5}, {1;3;5}
$\mathbb{P}$(B) = {Ø, {1}, {3}, {5}, {1;3}, {1;5}, {3;5}, {1;3;5}}

2 O número máximo de elementos do conjunto das partes de A = {a, b, c, d, e} é

a) 16 b) 21 c) 30 d) 32 e) 64

RESOLUÇÃO:
I) n(A) = 5
II) n($\mathbb{P}$(A)) = 2^5 = 32
Resposta: D

3 Dados os conjuntos S = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, A = {2, 4, 6} e B = {4, 6, 8, 10}, determine:

a) $A \cup B$ = **{2, 4, 6, 8, 10}**

b) $A \cap B$ = **{4, 6}**

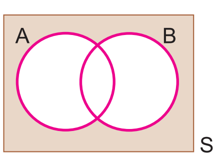
c) $A - B$ = **{2}**

d) $B - A$ = **{8, 10}**

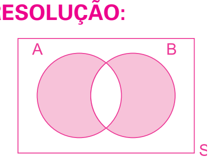
e) $\overline{B} = \complement_S B$ = **{2, 12}**

4 Destaque, no diagrama, o conjunto indicado:

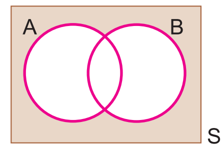
a) $(A - B) \cup (B - A)$



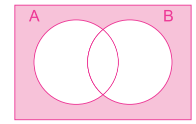
RESOLUÇÃO:



b) $\complement_S (A \cup B)$

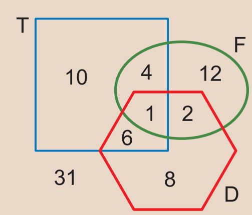


RESOLUÇÃO:



5 **(MODELO ENEM)**

O diagrama abaixo mostra a distribuição dos alunos de uma escola de Ensino Médio nos cursos optativos que são oferecidos no período da tarde:



T: curso de teatro

F: curso de fotografia

D: curso de dança

Note que o diagrama mostra, por exemplo, que apenas 1 aluno frequenta os três cursos ao mesmo tempo e que 31 alunos não frequentam nenhum dos cursos optativos.

Deverá ser entregue um aviso por escrito a todos os alunos que frequentam mais de um curso optativo. Assim, o número de alunos que receberá o aviso é igual a:

a) 30 b) 25 c) 13 d) 12 e) 9

RESOLUÇÃO:
O número de alunos que frequenta mais de um curso é
6 + 4 + 2 + 1 = 13
Resposta: C

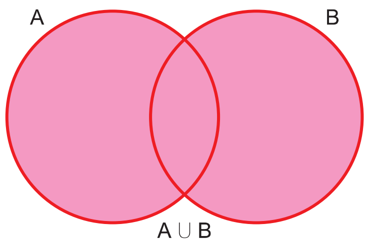
Módulo 3

Diagramas e número de elementos

Palavras-chave:
• União • Intersecção
• Número de elementos

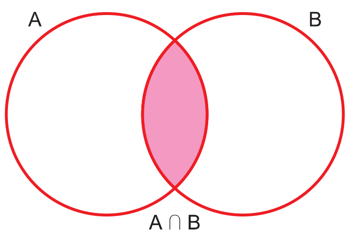
1. União

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



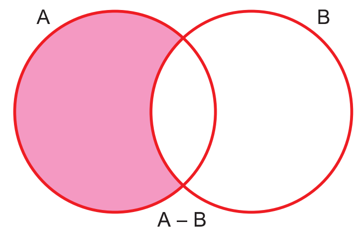
2. Intersecção

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$$



3. Subtração

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



4. Número de elementos

Se n(A), n(B), n(A ∪ B) e n(A ∩ B) representarem o número de elementos dos conjuntos A, B, A ∪ B, A ∩ B respectivamente, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

Exercícios Resolvidos

1 **(MODELO ENEM)** – Numa escola há **n** alunos. Sabe-se que 56 alunos leem o jornal A, 21 leem os jornais A e B, 106 leem apenas um dos dois jornais e 66 não leem o jornal B. O valor de **n** é:

a) 249 b) 137 c) 158
d) 127 e) 183

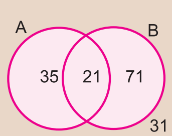
Resolução

I) Como 56 alunos leem o jornal A e 21 leem A e B, podemos concluir que 35 leem apenas o jornal A.

II) Como 106 alunos leem apenas um dos jornais e 35 leem apenas o jornal A, podemos concluir que 71 leem apenas o jornal B.

III) Como 66 alunos não leem o jornal B e 35 leem apenas o jornal A, podemos concluir que 31 não leem nenhum dos dois jornais.

IV) Podemos construir, portanto, o seguinte diagrama:



Assim, n = 35 + 21 + 71 + 31 = 158

Resposta: C

2 **(MODELO ENEM)** – No último clássico Corinthians x Flamengo, realizado em S.Paulo, verificou-se que só foram ao estádio paulistas e cariocas e que todos eles eram só corintianos ou só flamenguistas. Verificou-se também que, dos 100 000 torcedores, 85 000 eram corintianos, 84 000 eram paulistas e que apenas 4000 paulistas torciam para o Flamengo.

Pergunta-se:

a) Quantos paulistas corintianos foram ao estádio?
b) Quantos cariocas foram ao estádio?
c) Quantos flamenguistas foram ao estádio?
d) Dos cariocas que foram ao estádio, quantos eram corintianos?
e) Quantos eram corintianos ou paulistas?

Resolução

1) Pelo enunciado, temos:

	Corintianos	Flamenguistas	Total
Paulistas		4 000	84 000
Cariocas			
Total	85 000		100 000

2) Desses dados, é possível completar a tabela:

	Corintianos	Flamenguistas	Total
Paulistas	80 000	4 000	84 000
Cariocas	5 000	11 000	16 000
Total	85 000	15 000	100 000

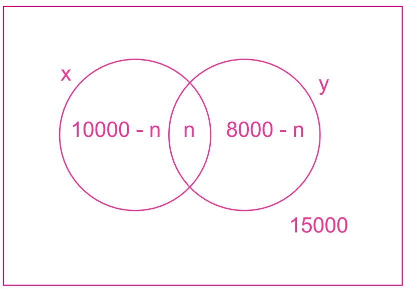
Respostas: a) 80 000 b) 16 000
c) 15 000 d) 5 000
e) 89 000

1 **(VUNESP)** – Numa cidade com 30000 domicílios, 10000 domicílios recebem regularmente o jornal da loja de eletrodomésticos **X**, 8000 recebem regularmente o jornal do supermercado **Y** e metade do número de domicílios não recebe nenhum dos dois jornais. Determine

a) o número de domicílios que recebem os dois jornais;

b) o número de domicílios da cidade que recebem o jornal da loja de eletrodomésticos **X** e não recebem o jornal do supermercado **Y**.

RESOLUÇÃO:



a) $10000 - n + n + 8000 - n = 15000$
$n = 3000$
b) $10000 - n = 10000 - 3000 = 7000$

2 **(MODELO ENEM)** – Objetivando conhecer a preferência musical dos seus ouvintes, certa emissora de rádio realizou uma pesquisa, dando como opção 3 compositores, **M**, **B** e **S**.
Os resultados são:

Votos	Opções
27	gostam de B
34	gostam de M
40	gostam de S
16	gostam de B e M
12	gostam de B e S
14	gostam de M e S
6	gostam de B, M e S
4	não gostam de B, M e S

Considerando estes dados, é **falso** afirmar que

a) **42** não gostam de **B**.

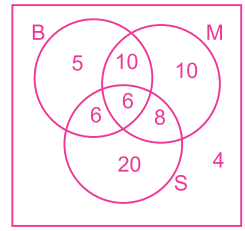
b) **18** gostam de **M** e não gostam de **B**.

c) **20** gostam exclusivamente de **S**.

d) **24** gostam de exatamente dois dos compositores.

e) **25** não gostam de **M**.

RESOLUÇÃO:

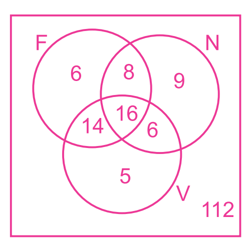


Resposta: E

3 **(MODELO ENEM)** – Em um grupo de 176 jovens, 16 praticam futebol, natação e voleibol; 24 praticam futebol e natação; 30 praticam futebol e voleibol; 22 praticam natação e voleibol; 6 praticam apenas futebol; 9 praticam apenas natação e 5 apenas voleibol. Os demais praticam outros esportes. Seja x o número de jovens desse grupo que praticam voleibol, y o daqueles que praticam futebol ou voleibol e z o número daqueles que não praticam nenhum dos três esportes citados. O valor de x + y + z é:

a) 41 b) 62 c) 112 d) 153 e) 208

RESOLUÇÃO:



I) $x = 16 + 14 + 6 + 5 = 41$
II) $y = x + 6 + 8 = 41 + 6 + 8 = 55$
III) $z = 112$
IV) $x + y + z = 41 + 55 + 112 = 208$
Resposta: E

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M112**

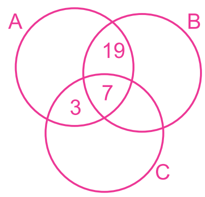
4 Dados três conjuntos finitos, A, B e C, determine o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ sabendo-se que

a) $A \cap B$ tem 26 elementos;

b) $A \cap C$ tem 10 elementos;

c) $A \cap B \cap C$ tem 7 elementos.

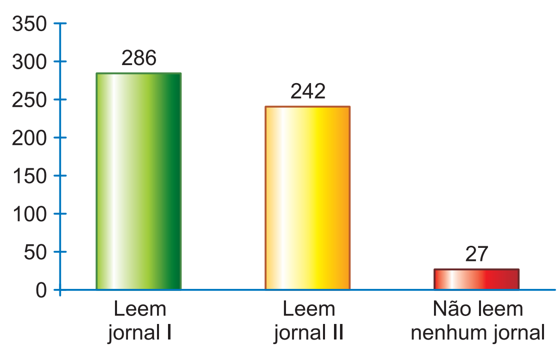
RESOLUÇÃO:



$n[A \cap (B \cup C)] = 19 + 7 + 3 = 29$

Resposta: 29

5 **(MODELO ENEM)** – O gráfico mostra uma pesquisa realizada com 500 pessoas sobre o seu hábito de leitura dos jornais I ou II:

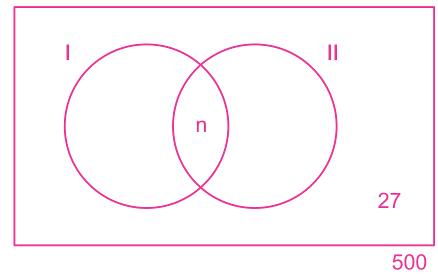


A partir dos dados do gráfico, pode-se concluir que o número de entrevistados que habitualmente leem os jornais I e II é igual a:

a) 44 b) 55 c) 63 d) 71 e) 82

RESOLUÇÃO:

Representando por *n* o número dos entrevistados que habitualmente leem os dois jornais, temos:



$286 + 242 - n + 27 = 500$

$n = 286 + 242 + 27 - 500$

$n = 55$

Resposta: B

Módulos 4 e 5 – Relação binária e def. de função; domínio, contradomínio e imagem

Palavras-chave:
• Par ordenado • Produto cartesiano
• Relação binária • Função

1. Par ordenado

O conceito de **par ordenado** é **primitivo**. A cada elemento **a** e a cada elemento **b** está associado um único elemento indicado por **(a; b)** chamado **par ordenado**, de tal forma que se tenha:

$$(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Dado o **par ordenado** (a; b), diz-se que **a** é o **primeiro elemento** e **b** é o **segundo elemento** do par ordenado (a; b).

Observações

a) Se $a \neq b$, então: $\{a; b\} = \{b; a\}$ e $(a; b) \neq (b; a)$

b) Se $a = b$, então: $\{a; b\} = \{a\}$ e $(a; b) = (b; a)$

c) $\{a; b\} \neq (a; b)$, $\forall a,b$

2. Produto cartesiano

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, chama-se **produto cartesiano** de **A** por **B**, e indica-se por **AxB**, ao conjunto formado por **todos** os **pares ordenados** (x; y), com $x \in A$ e $y \in B$.

Em símbolos:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplos

Se A = {2; 3} e B = {0; 1; 2}, então:

a) AxB = {(2; 0), (2; 1), (2; 2), (3; 0), (3; 1), (3; 2)}

b) BxA = {(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3)}

c) A^2 = {(2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3)}

Note que:

a) Se A = Ø ou B = Ø, por definição, AxB = Ø e reciprocamente. Em símbolos: A = Ø ou B = Ø ⇔ AxB = Ø

b) Se A = B, em vez de AxA, escreveremos A^2.

c) A ≠ B ⇔ AxB ≠ BxA

3. Representação gráfica do produto cartesiano

O **produto cartesiano** de dois conjuntos não vazios pode ser representado graficamente por **diagramas de flechas** ou **diagramas cartesianos**. Acompanhe esta representação para o caso em que A = {1,2,3}, B = {2,3} e, portanto, AxB = {(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3)}.

Diagrama de flechas

Consideramos, de um lado, o conjunto **A**, e, de outro, o conjunto **B**, e representamos cada **par ordenado** por uma **flecha**, adotando a seguinte convenção: a flecha parte do primeiro elemento do par ordenado e chega ao segundo.

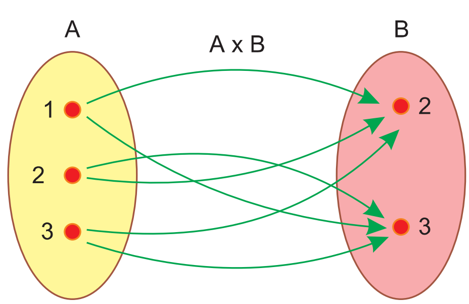
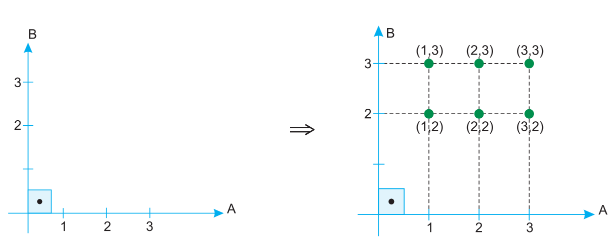


Diagrama cartesiano

a) Tomamos dois eixos ortogonais e representamos sobre o eixo horizontal os elementos de **A** e sobre o eixo vertical os elementos de **B**.

b) Traçamos, por estes elementos, paralelas aos eixos considerados.

c) As intersecções dessas paralelas representam, assim, os pares ordenados de **AxB**.



4. Número de elementos de um produto cartesiano

Se **A** tem **m** elementos e **B** tem **k** elementos, então o número de elementos de AxB é **m . k**, ou seja:

$$n(AxB) = n(A) \, . \, n(B) = m \, . \, k$$

Exemplo

Se A = {2, 3} e B = {4, 5, 6}, então:

AxB = {(2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 4), (3; 5), (3; 6)}

Portanto: n(A) = 2, n(B) = 3, e n(AxB) = 2 . 3 = 6

Observação

Se **A** ou **B** for infinito, então AxB será também infinito.

5. Relação binária

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, chama-se **Relação Binária de A em B a qualquer subconjunto f de AxB**.

f é uma relação binária de A em B ⇔ f ⊂ AxB

6. Representação gráfica de uma relação

Sendo a **relação binária** um conjunto de pares ordenados, podemos representá-la graficamente como já o fizemos com o Produto Cartesiano.

Exemplo

Se A = {1, 2, 4}, B = {2, 3} e f = {(x, y) ∈ AxB | x < y}, então f = {(1; 2), (1; 3), (2; 3)}, e a representação gráfica pode ser pelo diagrama de flechas ou pelo diagrama cartesiano.

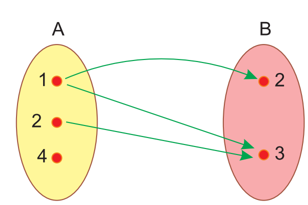


Diagrama de flechas

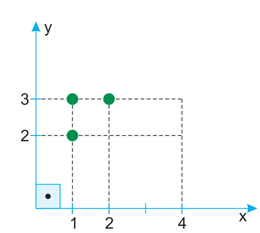


Diagrama cartesiano

7. Número de relações binárias

Se **A** e **B** forem dois conjuntos finitos tais que n(A) = m, n(B) = k e n(AxB) = m . k, então o número de **relações binárias** de **A** em **B** é igual ao número de subconjuntos de AxB. Logo:

O número de relações binárias de A em B é $2^{m\,.\,k}$

Exemplo

Se A = {2, 3, 8} e B = {5}, temos:

a) AxB = {(2, 5), (3, 5), (8, 5)}

b) n (AxB) = n (A) . n (B) = 3 . 1 = 3

c) o número de relações binárias de A em B é $2^3 = 8$

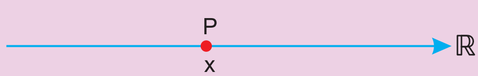
d) as 8 relações binárias são:

- $f_1 = \varnothing$
- $f_2 = \{(2; 5)\}$
- $f_3 = \{(3; 5)\}$
- $f_4 = \{(8; 5)\}$
- $f_5 = \{(2; 5), (3; 5)\}$
- $f_6 = \{(2; 5), (8; 5)\}$
- $f_7 = \{(3; 5), (8; 5)\}$
- $f_8 = \{(2; 5), (3; 5), (8; 5)\} = AxB$

Saiba mais

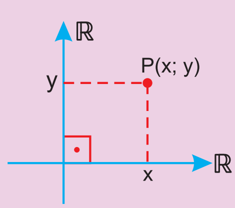
A **cada número real x** corresponde um **único ponto P** da reta euclidiana e a **cada ponto P** da reta euclidiana corresponde um **único número real x**.

Existe uma **correspondência biunívoca** entre os **pontos da reta** e os **números reais**.



Assim sendo, a reta euclidiana é a **representação gráfica** do conjunto dos números reais.

Do mesmo modo, existe uma **correspondência biunívoca** entre os pontos **P** do **plano euclidiano** e os pares ordenados (x;y) de ℝxℝ.



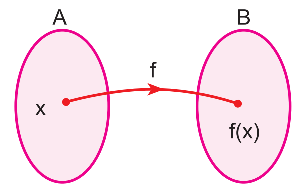
Assim sendo, o plano euclidiano é a representação gráfica do produto cartesiano de ℝ por ℝ ou $\mathbb{R}^2$ e é também chamado **plano cartesiano**.

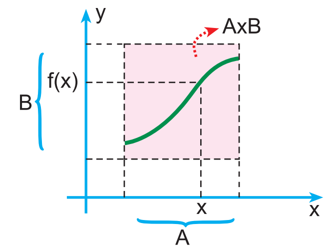
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M113**

8. Definição de função

Uma relação binária **f** de **A** em **B**, é uma **função de A em B** e indica-se f: A → B se, e somente se, associa **cada** x ∈ A com **um único** y ∈ B.

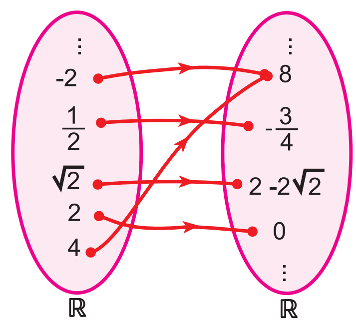




O número **y** é a **imagem de x pela função f** ou, ainda, **y é o valor de f em x** e escreve-se y = f(x).

Exemplo

Sendo **f:** ℝ → ℝ a função definida por $\mathbf{f(x) = x^2 - 2x}$, ou seja, $\mathbf{f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 2x\}}$, temos:



a) a imagem de 4 pela função **f** é 8, pois:

$f(4) = 4^2 - 2 \,.\, 4 = 16 - 8 = 8$

b) $f(2) = 2^2 - 2 \,.\, 2 = 4 - 4 = 0$

c) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 \,.\, \sqrt{2} = 2 - 2 \,.\, \sqrt{2}$

d) $f(-2) = (-2)^2 - 2 \,.\, (-2) = 4 + 4 = 8$

e) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 \,.\, \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} - 1 = \dfrac{-3}{4}$

9. Domínio, contradomínio e imagem

Domínio

Se **f** é uma função de **A** em **B**, então o conjunto **A** é chamado **domínio** de **f** e é representado por **D(f)**.

Assim: ***D(f) = A***

Contradomínio

Se f é uma função de **A** em **B**, então o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f** e é representado por **CD(f)**.

Assim:

$$\boxed{CD(f) = B}$$

Imagem da função

O conjunto de todos os elementos **y** de **B** para os quais existe, pelo menos, um elemento **x** de **A**, tal que f(x) = y, é chamado **conjunto imagem** de **f** e é indicado por **Im(f)**.

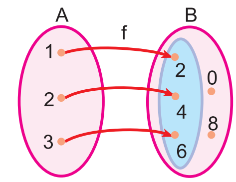
Observe que:

$$\boxed{Im(f) \subset CD(f)}$$

Exemplo

Sejam A = {1, 2, 3} e B = {0, 2, 4, 6, 8} e seja f : A → B tal que f(x) = 2x

- D(f) = A = {1, 2, 3}
- CD(f) = B = {0, 2, 4, 6, 8}
- Im(f) = {2, 4, 6} ⊂ CD(f)



Exercícios Resolvidos – Módulos 4 e 5

1 Os conjuntos A e B são tais que {(0; 2), (0; 3), (1; 2), (2; 3)} ⊂ AxB e o número de elementos de AxB é 6. Determinar:

a) A b) B

c) os outros elementos de AxB

Resolução

1) (0; 2) ∈ AxB ⇒ 0 ∈ A e 2 ∈ B
(0; 3) ∈ AxB ⇒ 0 ∈ A e 3 ∈ B
(1; 2) ∈ AxB ⇒ 1 ∈ A e 2 ∈ B
(2; 3) ∈ AxB ⇒ 2 ∈ A e 3 ∈ B

2) n(A) . n(B) = n(AxB) = 6

3) De (1) e (2), concluímos que A = {0; 1; 2} e B = {2; 3}

4) Os dois pares ordenados de AxB que não estão incluídos no enunciado são (1; 3) e (2; 2).

Respostas: a) A = {0; 1; 2}
b) B = {2; 3}
c) (1; 3) e (2; 2)

2 Se A = {1; 2; 3} e B = {4}, obter:

a) AxB

b) o número de relações binárias de A em B

c) as relações binárias de A em B

Resolução

a) A x B = {(1; 4), (2; 4), (3; 4)}

b) O número de elementos de AxB é 3 . 1 = 3
O número de relações binárias de A em B é $2^3 = 8$

c) As **relações binárias** são os **subconjuntos** de AxB:
$R_1 = \varnothing$
R_2 = {(1; 4)}
R_3 = {(2; 4)}
R_4 = {(3; 4)}
R_5 = {(1; 4); (2; 4}
R_6 = {(1; 4); (3; 4)}
R_7 = {(2; 4); (3; 4)}
R_8 = {(1; 4); (2; 4); (3; 4)} = AxB

De **3** a **5**:

Sejam A = {1; 2; 3}, B = {0; 2; 3; 4; 5; 6} e f: A → B definida por f(x) = x + 2

3 Representar **f** por meio de pares ordenados.

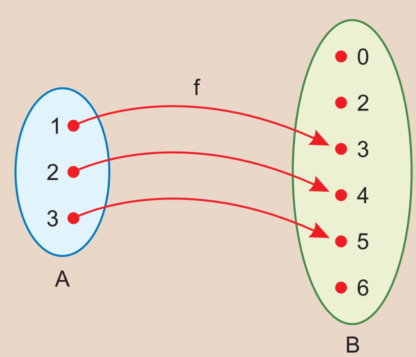
Resolução

f(1) = 1 + 2 = 3 ⇒ (1; 3) ∈ f
f(2) = 2 + 2 = 4 ⇒ (2; 4) ∈ f
f(3) = 3 + 2 = 5 ⇒ (3; 5) ∈ f

Assim sendo: f = {(1; 3), (2; 4), {3; 5}}

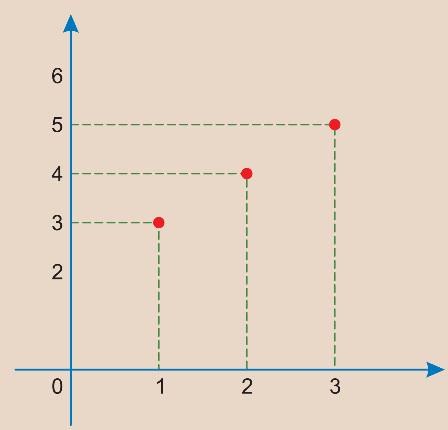
4 Represente **f** pelo diagrama de flechas e destaque o conjunto imagem de **f**.

Resolução



D(f) = A
CD(f) = B
Im(f) = {3; 4; 5}

5 Representar **f** no diagrama cartesiano.



6 **(MODELO ENEM)** – Um vasilhame de água mineral contendo 20 litros foi colocado à disposição dos participantes de um evento. Considerando que os copos, com capacidade para 200mℓ, eram servidos totalmente cheios, a expressão que representa a quantidade (y) de água, em mℓ, que restou no vasilhame, em função do número (x) de copos utilizados, é

a) y = 200x – 20000 b) y = 20000 – 200x
c) y = 20 – 200x d) y = 200x – 20
e) y = 20x – 200

Resolução

1) 20 ℓ = 20 000 mℓ

2) x copos, com capacidade de 200 mℓ cada um, representam (200 . x) mℓ de água.

3) A quantidade y de água que restou no vasilhame é
y = 20 000 – 200 x

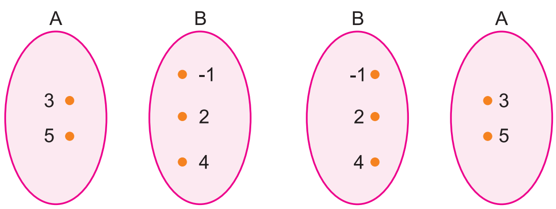
Resposta: B

1 Dados os conjuntos A = {3, 5} e B = {– 1, 2, 4}, represente A×B e B×A:

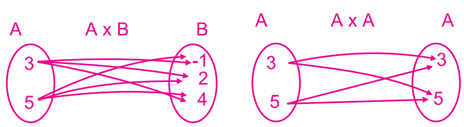
a) enumerando, um a um, seus elementos.

RESOLUÇÃO:
A×B = {(3, – 1), (3, 2), (3, 4), (5, – 1), (5, 2), (5, 4)}
B×A = {(–1, 3), (–1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5)}

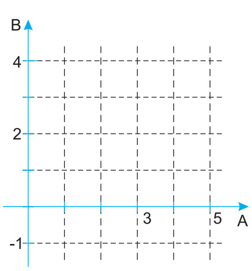
b) pelo diagrama de flechas

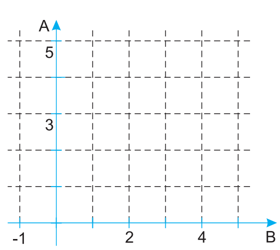


RESOLUÇÃO:

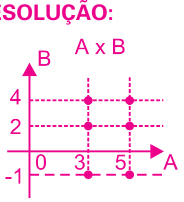


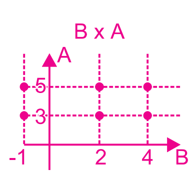
c) pelo diagrama cartesiano





RESOLUÇÃO:





2 Se o conjunto A tem 3 elementos e o conjunto B tem 4 elementos, então:

a) quantos elementos tem A×B?

b) quantos subconjuntos tem A×B?

c) quantas relações binárias de A em B existem?

RESOLUÇÃO:
a) 3 . 4 = 12
b) $2^{3\,.\,4} = 2^{12}$ = 4.096
c) $2^{3\,.\,4} = 2^{12}$ = 4.096

3 Os conjuntos A e B são tais que:
{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 3)} ⊂ A×B. Então:

a) (2, 1) ∈ A×B

b) A x B tem 6 elementos

c) A ∪ B = {0, 1, 2, 3} e A ∩ B = {2}

d) {(1, 3), (2, 2)} ⊂ A×B

e) (0, 0) ∈ A x B

RESOLUÇÃO:
I) 0 ∈ A, 1 ∈ A, 2 ∈ A
II) 2 ∈ B, 3 ∈ B
III) (1;3) ∈ A×B e (2;2) ∈ A×B, então {(1;3); (2;2)} ⊂ A×B
Resposta: D

4 **(MODELO ENEM)** – Numa escola com 1000 alunos, fez-se um estudo sobre o número de vezes que, em média, as moças e os rapazes da escola iam ao cinema por mês.
Com os dados recolhidos, construiu-se a tabela que se segue.

	Número de idas ao cinema por mês		
	1 vez	**2 vezes**	**3 vezes**
Moças	200	150	100
Rapazes	300	200	50

Qual dos gráficos que se seguem representa os dados da tabela?

Gráfico A

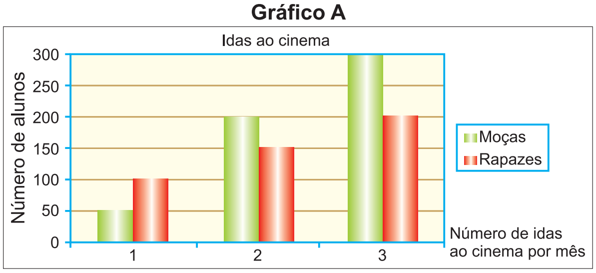


Gráfico B

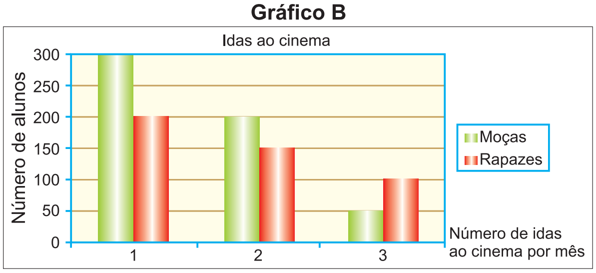


Gráfico C

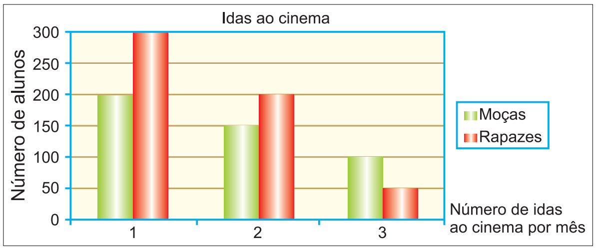


Gráfico D

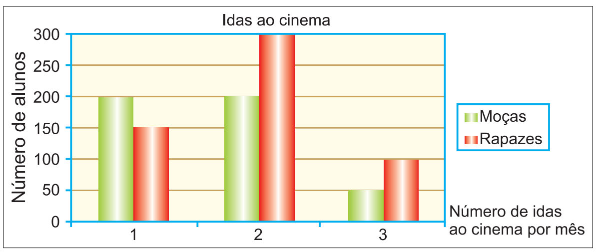
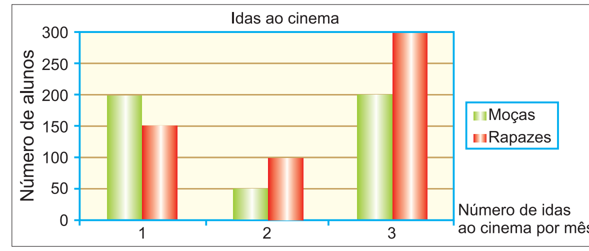


Gráfico E



RESOLUÇÃO:
Pela leitura da tabela e do gráfico, a correta é a alternativa C.
Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 5

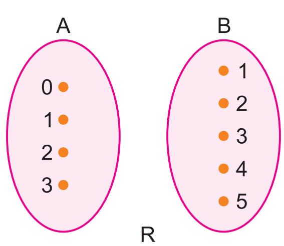
De 1 a 5:
Dados os conjuntos: A = {0, 1, 2, 3} e B = {1, 2, 3, 4, 5} e as relações binárias **R** e **S** definidas por
R = {(x; y) ∈ AxB | y = 2x + 1} e S = {(x; y) ∈ AxB | y = x + 1}, pede-se:

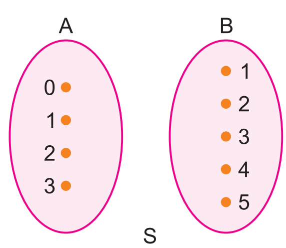
1 Represente **R** e **S** por meio de pares ordenados

R = **{(0;1), (1;3), (2;5)}**

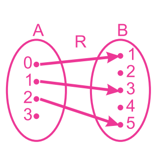
S = **{(0;1), (1;2), (2;3), (3;4)}**

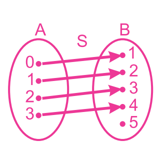
2 Represente **R** e **S** pelo diagrama de flechas



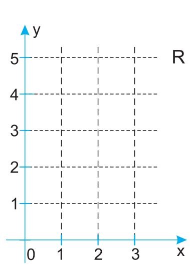


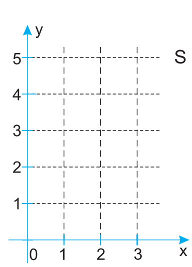
RESOLUÇÃO:



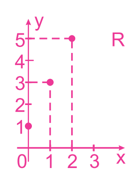


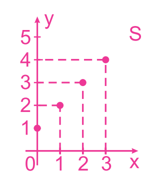
3 Represente **R** e **S** no diagrama cartesiano





RESOLUÇÃO:





4 A relação **R** é uma função? Em caso afirmativo, qual é o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem?

RESOLUÇÃO:
Não, pois existe x ∈ A que não se relaciona com nenhum y ∈ B.

5 A relação **S** é uma função? Em caso afirmativo, qual é o domínio, o contradomínio e conjunto imagem?

RESOLUÇÃO:
É FUNÇÃO: D(S) = A
CD(S) = B
Im(S) = {1; 2; 3; 4}

6 Seja f: ℝ → ℝ a função que a cada número real associa a soma do seu quadrado com o seu triplo. Determine:

a) f(2) = $\mathbf{2^2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10}$

b) f(3) = $\mathbf{3^2 + 3 \cdot 3 = 9 + 9 = 18}$

c) $f(\sqrt{2})$ = $\mathbf{(\sqrt{2})^2 + 3 \cdot \sqrt{2} = 2 + 3 \cdot \sqrt{2}}$

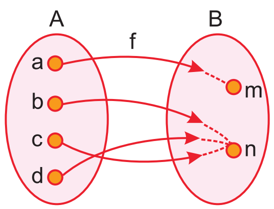
d) f(x) = $\mathbf{x^2 + 3x}$

Módulo 6 — Como reconhecer uma função

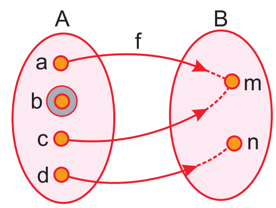
Palavras-chave:
- Diagrama de flechas
- Gráfico cartesiano

1. Pelo diagrama de flechas

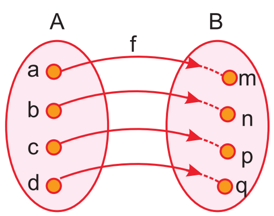
Uma relação **f** de **A** em **B** é uma **função** se, e somente se, **cada** elemento **x** de **A** se relaciona com um **único** elemento **y** de **B**, o que equivale a dizer que "**de cada elemento x de A parte uma única flecha**."



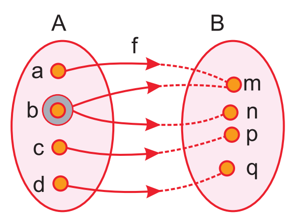
f é função



f não é função



f é função



f não é função

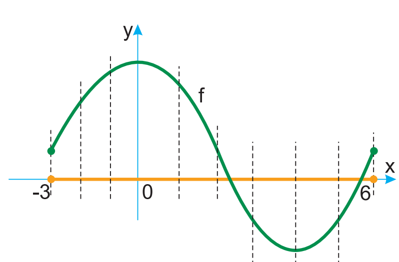
2. Pelo diagrama cartesiano

Seja **f** uma relação binária de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e consideremos o seu **gráfico cartesiano**.

A relação **f** é uma **função** definida em **A** com valores em $\mathbb{R}$ se, e somente se, **toda** reta paralela ao eixo Oy, que passa por um ponto de abcissa $x \in A$, "corta" o gráfico de **f** num **único** ponto.

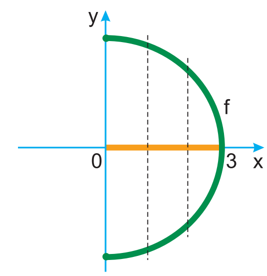
Portanto, a relação **f** de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ **não é função** se, e somente se, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que passa por um ponto de abscissa $x \in A$ tal que, ou intercepta o gráfico em **mais de um** ponto, ou **não** o intercepta.

(I)



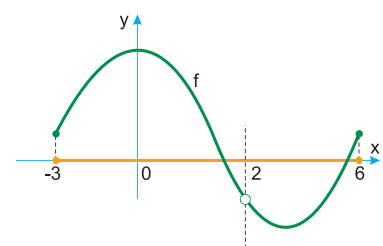
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 6\}$ e $B = \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$ é função

(II)



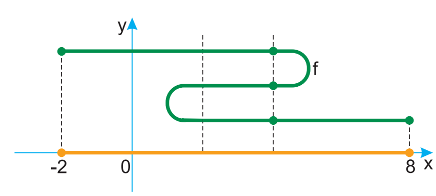
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 3\}$ e $B = \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$ não é função, pois existe $x \in A$ associado a 2 valores de B

(III)



$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 6\}$ e $B = \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$ não é função, pois $2 \in A$ não está associado com nenhum elemento de B

(IV)



$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 8\}$ e $B = \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$ não é função, pois existe $x \in A$ associado a 3 valores de B

Saiba mais

No gráfico (III) a reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto de abscissa $2 \in A$ não intercepta o gráfico de **f**, logo **f não é função** definida em **A** com valores em $\mathbb{R}$.

No entanto, se restringirmos **A** ao conjunto $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < 2 \text{ ou } 2 < x \le 6\}$, então a **relação** de A' em $\mathbb{R}$ é uma função.

Exercícios Resolvidos

1 Sejam A = {1; 2; 3}, B = {2; 4; 5; 6} e as seguintes relações binárias de A em B

a) f = {(x; y) ∈ A x B | y = x + 1}

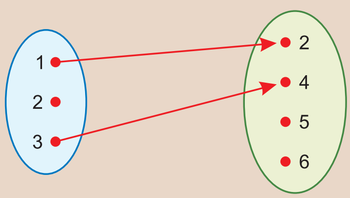
b) g = {(x; y) ∈ A x B | y = x + 3}

c) h = {(x; y) ∈ A x B | y > x}

Obter f, g e h; verificar se cada uma delas é ou não função; em caso afirmativo, escrever o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

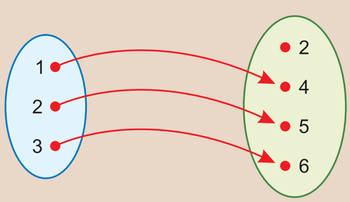
Resolução

a) f = {(x; y) ∈ A x B | y = x + 1} = {(1; 2), (3; 4)}



f não é função, pois 2 ∈ A não se relaciona com nenhum elemento de B.

b) g = {(x; y) ∈ A x B | y = x + 3} = {(1: 4), (2; 5), (3; 6)}

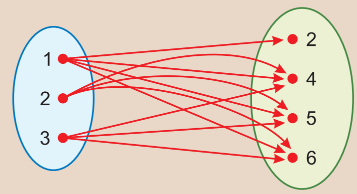


g é função de A em B; D(g) = A, CD(g) = B

Im(g) = {4; 5; 6}

c) h = {(x; y) ∈ A x B | y > x} =

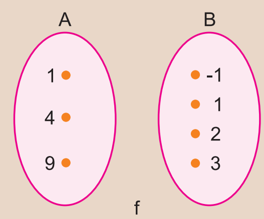
= {(1;2), (1;4), (1;5), (1;6), (2;4), (2;5), (2;6), (3;4), (3;5), (3;6)}

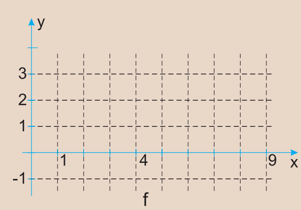


h não é função, pois 2, por exemplo, se relaciona com mais de um elemento de B.

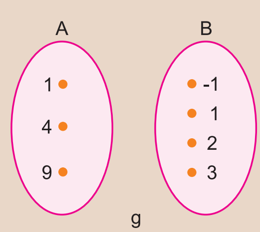
2 Dados os conjuntos A = {1, 4, 9} e B = {–1, 1, 2, 3}, represente, pelo diagrama de flechas e pelo diagrama cartesiano, as relações binárias

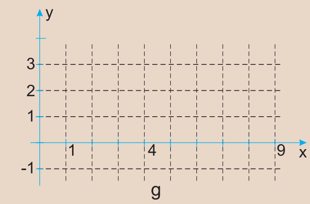
1º) f = {(x, y) ∈ AxB I y = x – 2}





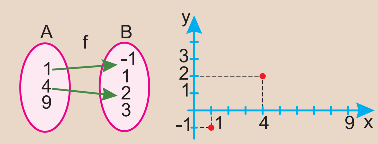
2º) g = {(x, y) ∈ AxB I y^2 = x}



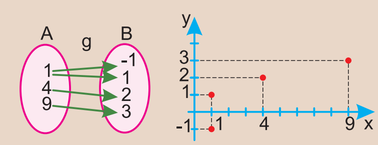


Resolução

1º)



2º)



3 **(MODELO ENEM)** – Catarina e seu filho Pedro mediram o comprimento de um palmo de suas mãos, obtendo 20 cm e 15 cm, respectivamente. Catarina mediu uma mesa obtendo 10 palmos da sua mão. Usando a mão de Pedro para medir a mesma mesa, obteremos

a) pouco menos de 13 palmos.

b) pouco mais de 13 palmos.

c) exatamente 13 palmos.

d) exatamente 14 palmos.

e) exatamente 15 pulsos.

Resolução

Se **p** for o número de palmos de Pedro, então:

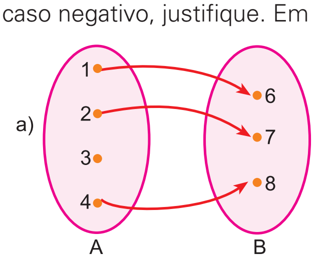
$p \cdot 15 = 10 \cdot 20 \Rightarrow p = \dfrac{200}{15} = 13{,}333\ldots$

Resposta: B

Exercícios Propostos

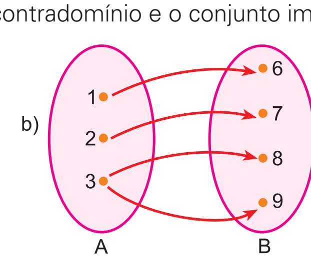
1 Os diagramas de flechas a seguir representam relações binárias de A em B. Dizer, para cada uma delas, se é ou não função. Em caso negativo, justifique. Em caso positivo, dizer qual é o o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

a)



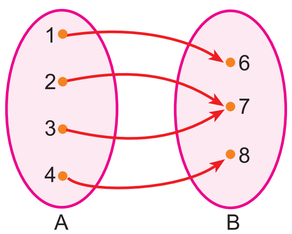
Não é função, pois 3 ∈ A não se relaciona com nenhum elemento de B

b)



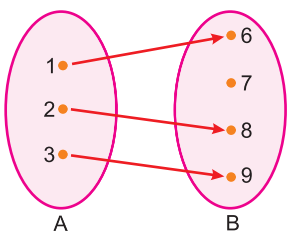
Não é função, pois 3 ∈ A está relacionado a dois elemento de B

c)



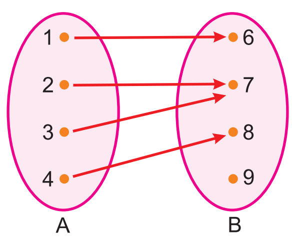
É função.
D = A
CD = B
Im = B

d)



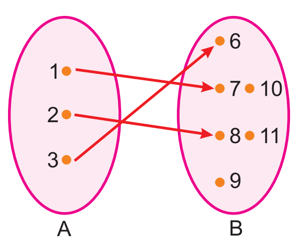
É função.
D = A
CD = B
Im = {6; 8; 9}

e)



É função.
D = A
CD = B
Im = {6; 7; 8}

f)



É função.
D = A
CD = B
Im = {6; 7; 8}

2 Considere os conjuntos A = {1, 3, 5} e B = {0, 1, 2, 3} e as relações binárias de A em B:

f = {(1, 0), (5, 2)} g = {(1, 0), (3, 1), (5, 2), (5, 3)}

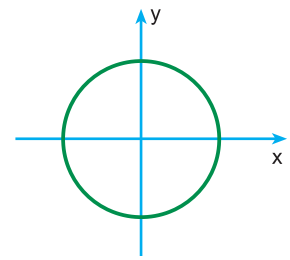
h = {(1, 0), (3, 2), (5, 2)} i = {(1, 1), (3, 2), (5, 3)}

Dizer, para cada uma delas, se é ou não função. Em caso negativo, justifique. Em caso positivo, dizer qual é o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

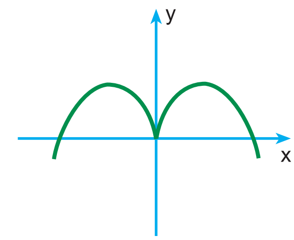
RESOLUÇÃO:
f) Não é função, pois 3 ∈ A não possui correspondente em B
g) Não é função, pois 5 ∈ A possui dois correspondentes em B.
h) É função.
D(h) = A
CD(h) = B
Im(h) = {0, 2}
i) É função.
D(i) = A
CD(i) = B
Im(i) = {1, 2, 3}

3 Quais dos gráficos podem representar funções de A em ℝ, com A ⊂ ℝ?

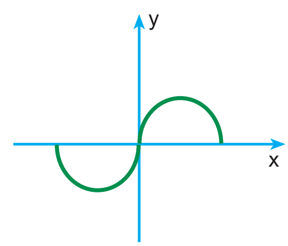
a)



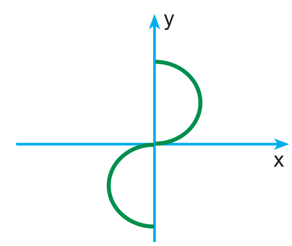
b)



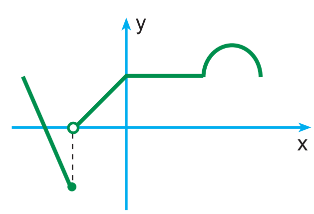
c)



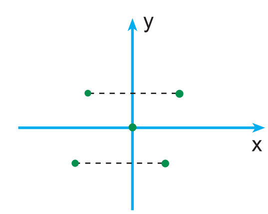
d)



e)



f)



Resposta: b, c, e, f

4 **(MODELO ENEM)** – Seja **n** um número qualquer, inteiro e positivo. Se **n** é par, divida-o por 2; se **n** é ímpar, multiplique-o por 3 e adicione 1 ao resultado. Esse procedimento deve ser repetido até que se obtenha como resultado final o número 1. Assim, por exemplo, se n = 12, tem-se:

12 → 6 → 3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

Ou seja, foram necessárias 9 passagens até obter-se o resultado 1. Nessas condições, se n = 11, o número de passagens necessárias para obter-se o resultado final 1 será

a) 7 b) 8 c) 11 d) 14 e) 17

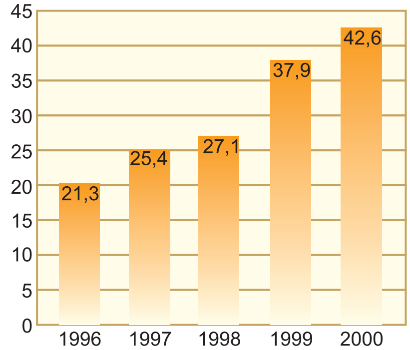
RESOLUÇÃO:
11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 →
→ 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
Resposta: D

No Portal Objetivo

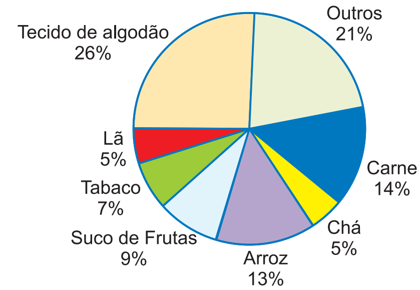
Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M114**

5 **(MODELO ENEM)** – Os gráficos a seguir fornecem informações relacionadas às exportações da Zedelândia, um país que utiliza o zed como sua moeda corrente.

Total das exportações anuais da Zedelândia, em milhões de zeds.



Distribuição das exportações da Zedelândia em 2000



Qual foi o valor total (em milhões de zeds) das exportações da Zedelândia em 1998?

a) 20,4 b) 25,4 c) 27,1 d) 37,9 e) 42,6

RESOLUÇÃO:
Pela simples leitura do gráfico, foi 27,1.
Resposta: C

Módulo 7 — Domínio e imagem por meio do gráfico

Palavras-chave:
• Gráfico cartesiano • Projeção horizontal • Projeção vertical

Um outro problema comum é o da determinação do **domínio** e da **imagem** de uma função **f** por meio do seu gráfico. De acordo com as definições e comentários feitos até aqui, dado o gráfico de uma função **f**, temos:

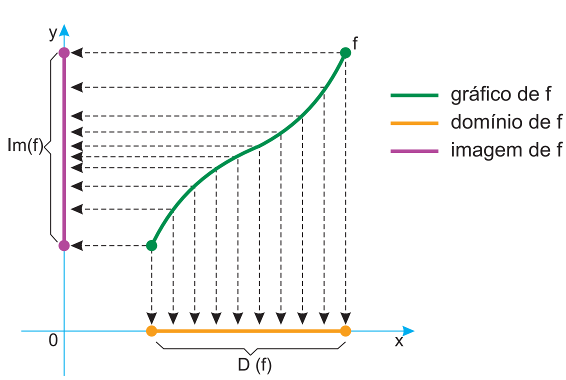
a) **D(f)** é o conjunto de todas as abscissas dos pontos do **eixo Ox** tais que as **retas verticais** por eles traçadas **interceptam** o gráfico de **f**.

b) **Im(f)** é o conjunto de todas as ordenadas dos pontos do **eixo Oy** tais que as **retas horizontais** por eles traçadas **interceptam** o gráfico de **f**.

Em outras palavras:

a) D(f) é o conjunto de todos os pontos do eixo Ox que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

b) Im(f) é o conjunto de todos os pontos do eixo Oy que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

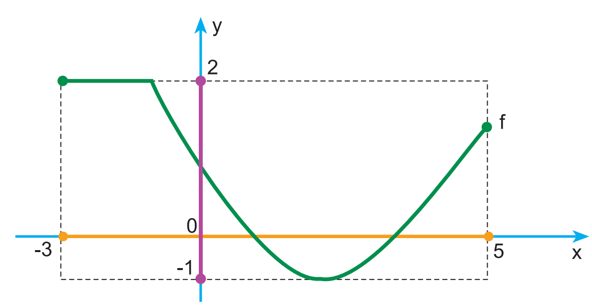


Exemplos

a) Na função **f** definida pelo gráfico abaixo, temos:

• **D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 5\}$**

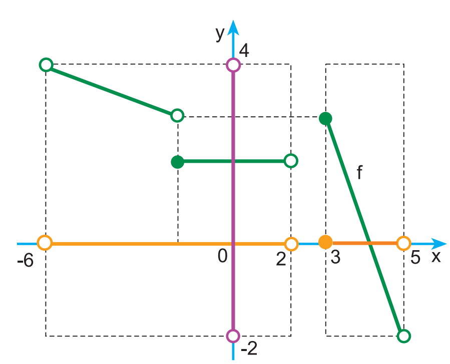
• **Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 2\}$**



b) Na função **f** definida pelo gráfico, temos:

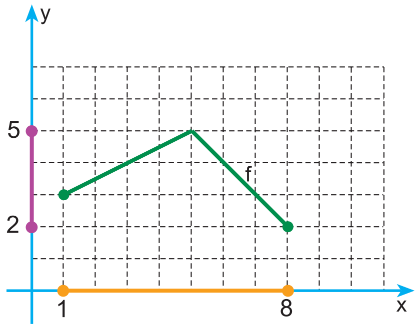
• **D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 2 \text{ ou } 3 \le x < 5\}$**

• **Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 4\}$**



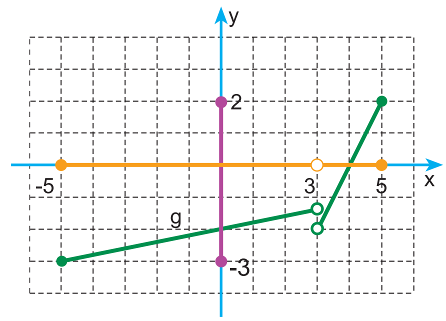
c) Na função **f** do gráfico, temos:

- **D(f) = [1; 8]**
- **Im(f) = [2; 5]**



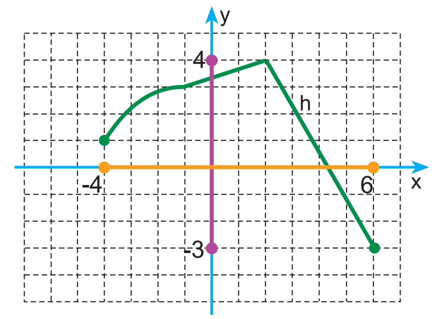
d) Na função **g** do gráfico, temos:

- **D(g) = [– 5; 3[∪]3; 5]**
- **Im(g) = [– 3; 2]**



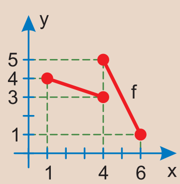
e) Na função **h** do gráfico, temos:

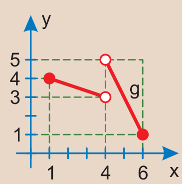
- **D(h) = [– 4; 6]**
- **Im(h) = [– 3; 4]**

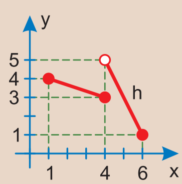


Exercícios Resolvidos

Sejam f, g e h três relações binárias de A = [1; 6] em ℝ representadas nos gráficos seguinte:







Verificar, nas questões de 1 a 3, se cada uma delas é função e em caso afirmativo determinar domínio, contradomínio e imagem.

1 A relação binária f

Resolução

f não é função, pois ao número 4 ∈ A estão associadas duas imagens distintas. A reta vertical que passa pelo ponto de abscissa 4 encontra o gráfico em dois pontos.

2 A relação binária g

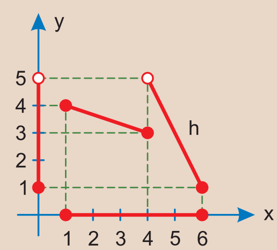
Resolução

g não é função, pois 4 ∈ A não se relaciona com nenhum elemento de ℝ. A reta vertical que passa pelo ponto da abscissa 4 não encontra o gráfico de g em nenhum ponto.

3 A relação binária h

Resolução

h é função. Qualquer reta vertical que passa pelo ponto de abscissa x, com x ∈ A, encontra o gráfico de h em **um** e **um só ponto**.



O domínio de h é a projeção do gráfico sobre o eixo horizontal. D(h) = [1; 6]

O contradomínio de h é ℝ

O conjunto imagem é a projeção do gráfico no eixo vertical. Im(h) = [1; 5[

4 **(MODELO ENEM)** – Analisando os custos e as vendas da produção artesanal de ovos de Páscoa, Cristina fez a seguinte relação:

- Despesas fixas de R$ 2 400,00 e R$ 3,60 por ovo produzido. Se x for o número de unidades, então a expressão do custo é 2 400 + 3,60x
- Cada ovo é vendido por R$ 10,00; assim, a expressão da venda é 10x.

Se Cristina produziu e vendeu 400 ovos de Páscoa, seu lucro será:

a) R$ 100,00 b) R$ 160,00
c) R$ 220,00 d) R$ 410,00
e) R$ 520,00

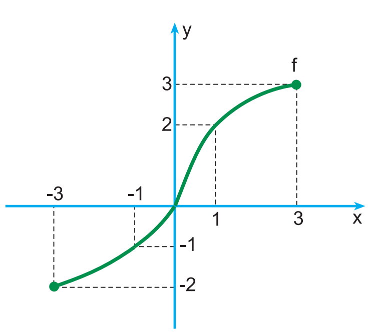
Resolução

- O custo em reais, para produzir 400 ovos é 2400 + 3,60 . 400 = 3 840
- A receita, em reais, pela venda dos 400 ovos é 10 . 400 = 4 000
- O lucro, em reais, será 4 000 – 3 840 = 160

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Considere o gráfico da função **f**.



a) determine f(3)
b) qual é a imagem de –3?
c) qual é o domínio de **f**?
d) qual é a imagem de **f**?
e) resolva a equação f(x) = 2.

RESOLUÇÃO:

a) 3

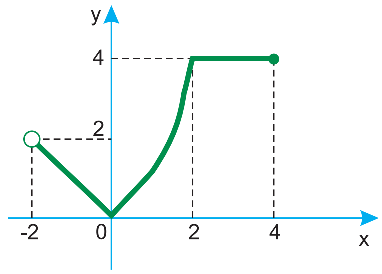
b) – 2

c) D(f) = {x ∈ ℝ | – 3 ≤ x ≤ 3}

d) Im(f) = {y ∈ ℝ | – 2 ≤ y ≤ 3}

e) f(x) = 2
x = 1
V = {1}

2 **(CESUPA)** – A função y = f(x) é representada graficamente por



Pela análise do gráfico, encontre

a) Dom(f) b) Im(f) c) f(3) d) x | f(x) = 0

RESOLUÇÃO:

a) D(f) =]– 2; 4] **b) Im(f) = [0;4]**

c) f(3) = 4 **d) f(x) = 0 ⇒ x = 0**

3 Dados os conjuntos

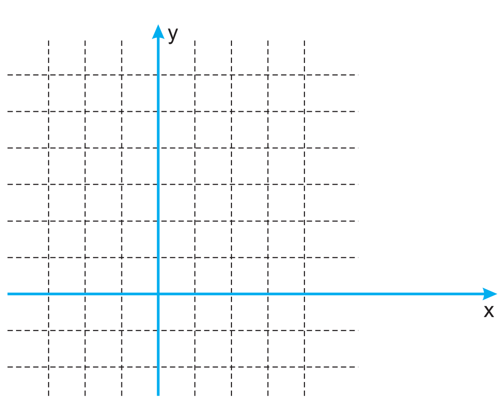
A = {–2, –1, 0, 1} e B = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, e a função f: A → B, definida por f(x) = 2x + 3:

a) complete a tabela;

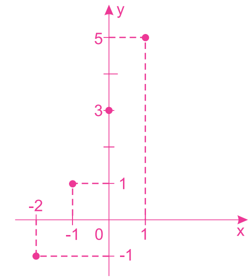
b) construa o gráfico de f;

c) obtenha o domínio, o contradomínio e a imagem de f.

x	f(x)	(x; f(x))
– 2	– 1	(– 2; – 1)
– 1	1	(– 1; 1)
0	3	(0; 3)
1	5	(1; 5)



RESOLUÇÃO:

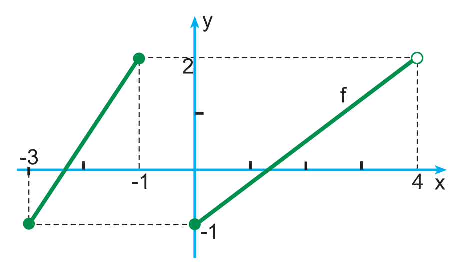


D(f) = A

CD(f) = B

Im(f) = { – 1; 1; 3; 5}

4 Considere o gráfico da função **f**, a seguir:



a) determine f(0).

b) qual é a imagem de – 3?

c) qual é o domínio de **f**?

d) qual é a imagem de **f**?

e) resolva a equação f(x) = 2.

RESOLUÇÃO:

a) – 1

b) – 1

c) D(f) = [– 3, – 1] ∪ [0, 4[

d) Im(f) = [– 1, 2]

e) f(x) = 2

x = – 1

V = {– 1}

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em “localizar”, digite **MAT1M115**

Módulo 8

Função sobrejetora, injetora e bijetora

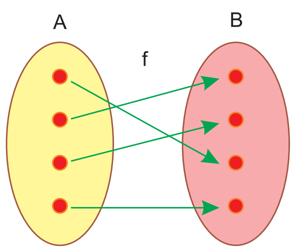
Palavras-chave:
• Função sobrejetora • Função injetora
• Função bijetora • Gráfico cartesino

1. Função sobrejetora

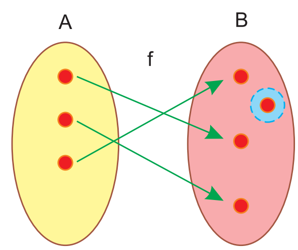
Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** se, e somente se, o seu conjunto imagem é igual ao contradomínio B.

$$f : A \to B \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow Im(f) = CD(f) = B$$

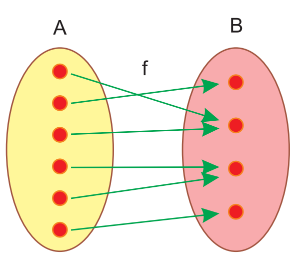
Pelo diagrama de flechas, uma função é sobrejetora se, e somente se, **todo elemento de B** é atingido por **pelo menos** uma flecha.



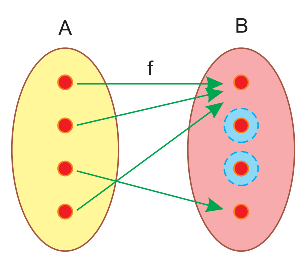
f é SOBREJETORA



f NÃO é SOBREJETORA

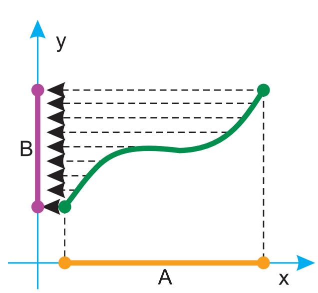


f é SOBREJETORA

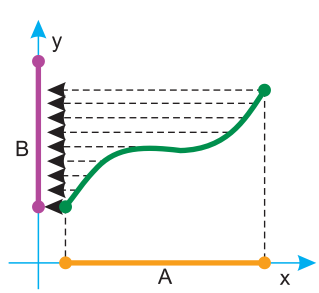


f NÃO é SOBREJETORA

Pelo **gráfico cartesiano**, uma função é sobrejetora se, e somente se, a projeção do gráfico sobre o eixo $\overrightarrow{Oy}$ é o contradomínio.



f é SOBREJETORA
pois Im(f) = B



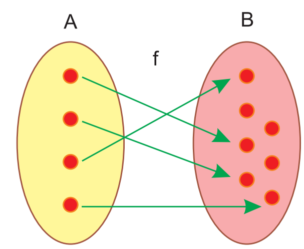
f NÃO é SOBREJETORA
pois $Im(f) \neq B$

2. Função injetora

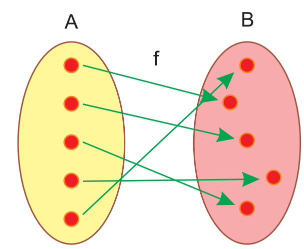
Uma função $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, elementos distintos de A têm imagens distintas em B.

$$f : A \to B \text{ é injetora} \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

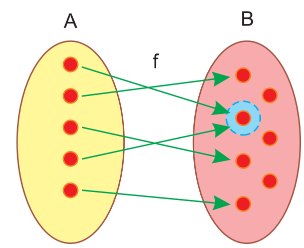
Pelo **diagrama de flechas**, uma função é injetora se, e somente se, **cada elemento de B** é atingido por, **no máximo**, uma flecha.



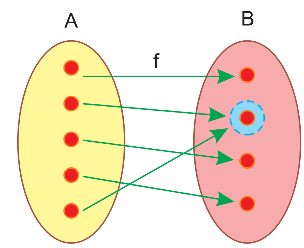
f é INJETORA



f é INJETORA

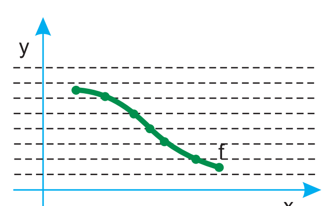


f NÃO é INJETORA

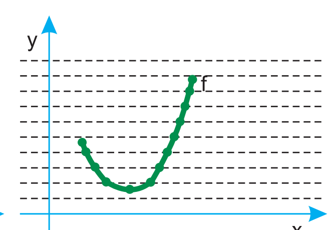


f NÃO é INJETORA

Pelo **gráfico cartesiano**, uma função é injetora se, e somente se, qualquer reta horizontal intercepta o gráfico, **no máximo**, **uma vez**.



f é INJETORA

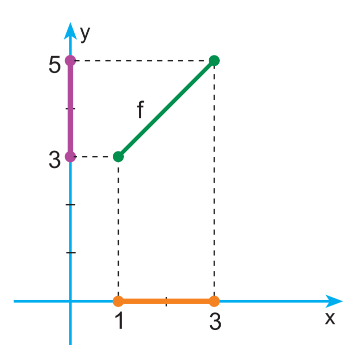


f NÃO é INJETORA

3. Função bijetora

Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** se, e somente se, **f** é **sobrejetora** e **injetora**.

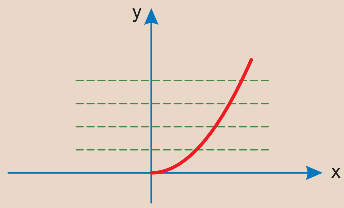
A função $f : [1; 3] \to [3; 5]$, definida por $f(x) = x + 2$, é uma função bijetora.



Verificar se a função apresentada é sobrejetora, injetora ou bijetora, nas questões de 1 a 4.

1 f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$

Resolução

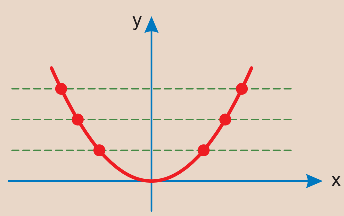


A função é injetora, pois qualquer reta horizontal encontra o gráfico no máximo em um ponto.
Não é sobrejetora, pois $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$

Resposta: só injetora

2 g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = x^2$

Resolução

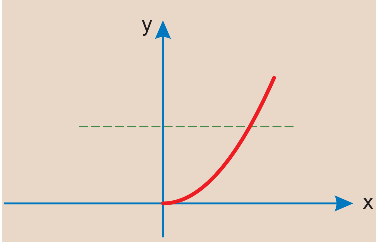


g não é injetora, pois existem retas horizontais que encontram o gráfico em mais de um ponto.
g é sobrejetora, pois $Im(g) = \mathbb{R}_+$

Resposta: só sobrejetora

3 h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $h(x) = x^2$

Resolução

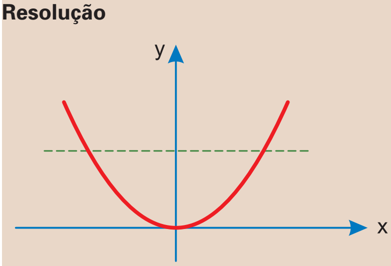


É injetora, pois qualquer reta horizontal encontra o gráfico no máximo uma vez. Também é sobrejetora, pois $Im(h) = \mathbb{R}_+$

Resposta: h é bijetora

4 ℓ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\ell(x) = x^2$

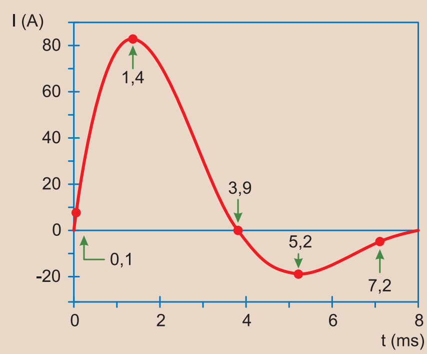
Resolução



Pelos motivos dos exercícios anteriores, ℓ não é injetora, nem sobrejetora.

Resposta: nem sobrejetora e nem injetora

5 **(MODELO ENEM)** – Um desfibrilador é um equipamento utilizado em pacientes durante parada cardiorrespiratória com objetivo de restabelecer ou reorganizar o ritmo cardíaco. O seu funcionamento consiste em aplicar uma corrente elétrica intensa na parede torácica do paciente em um intervalo de tempo da ordem de milissegundos.
O gráfico seguinte representa, de forma genérica, o comportamento da corrente aplicada no peito dos pacientes em função do tempo.



De acordo com o gráfico, o comportamento da corrente I, com $-40 \leq I \leq 100$, aplicada no peito dos pacientes, em função do tempo t, com $0 \leq t \leq 8$, caracteriza uma função

a) só injetora.
b) só sobrejetora.
c) bijetora.
d) nem injetora, nem sobrejetora.

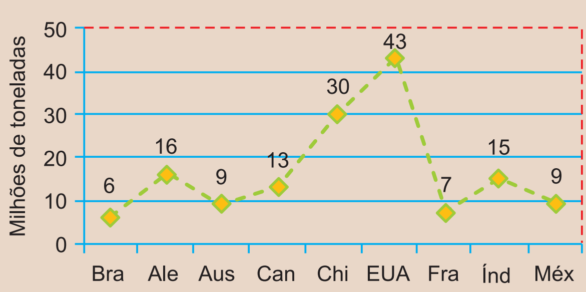
Resolução

1) Não é injetora, pois uma reta horizontal de ordenada 4, por exemplo, encontra o gráfico em 2 pontos.
2) Não é sobrejetora, pois o – 30, por exemplo, não é imagem de nenhum t pertencente ao intervalo [0; 8].

Resposta: D

6 **(MODELO ENEM)** – Embora o Brasil tenha uma das maiores jazidas de sal do mundo, sua produção anual, em milhões de toneladas, ainda é inferior à da Alemanha, à da Austrália, à do Canadá, à da China, à dos EUA, à da França, à da Índia e à do México. O gráfico a seguir mostra a produção de sal nesses países, no ano 2000.

Produção mundial de Sal em 2000



Considerando esses principais países produtores, **a melhor aproximação do percentual** de participação do Brasil, na produção mundial de sal, em 2000, foi de:

a) 4% b) 5% c) 6% d) 8% e) 11%

Resolução

1) A produção total, em milhões de toneladas, é
$6 + 16 + 9 + 13 + 30 + 43 + 7 + 15 + 9 = 148$
2) Desse total, o Brasil participa com 6 milhões de toneladas, que representa 4% da produção mundial, pois

$$\frac{6}{148} \cong \frac{6}{150} = \frac{4}{100} = 4\%$$

Resposta: A

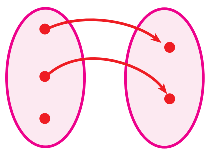
Exercícios Propostos

1 Os diagramas de flechas abaixo representam relações binárias. Pede-se para cada relação binária:

I) diga se é ou não função;

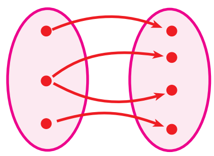
II) em caso afirmativo, verifique se a função é sobrejetora, injetora ou bijetora.

a)



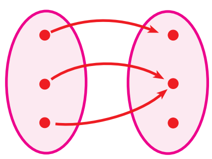
Não é função.

b)



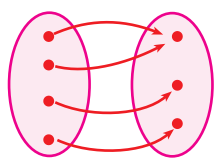
Não é função.

c)



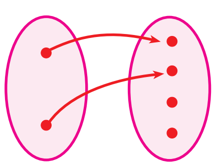
Função não sobrejetora nem injetora.

d)



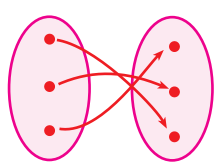
Apenas sobrejetora.

e)



Apenas injetora.

f)



Bijetora.

2 Sejam **A** e **B** subconjuntos de $\mathbb{R}$.

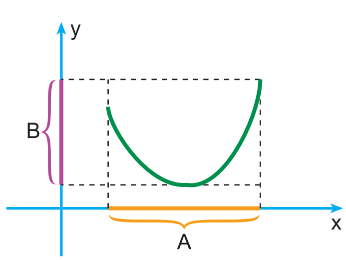
A seguir, são dados gráficos de relações binárias de A em B.

Pede-se para cada um:

I) diga se é ou não função de A em B;

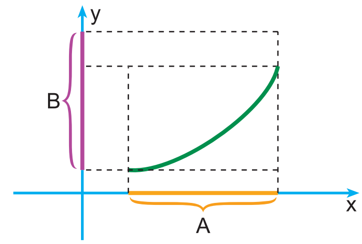
II) em caso afirmativo, verifique se a função é sobrejetora, injetora ou bijetora.

a)



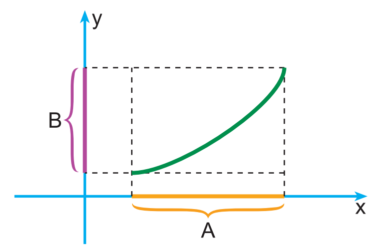
RESOLUÇÃO:
É uma função apenas sobrejetora.

b)



RESOLUÇÃO:
É uma função apenas injetora.

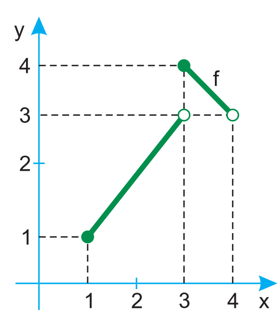
c)



RESOLUÇÃO:
É uma função bijetora.

3 As funções f e g, de contradomínio $\mathbb{R}$, são definidas pelos gráficos cartesianos. Determine, para cada uma, o domínio e o conjunto imagem. Classifique-as, em seguida, em sobrejetoras, injetoras ou bijetoras.

a)



RESOLUÇÃO:

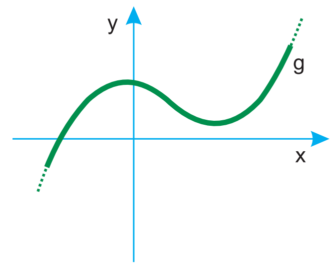
$D(f) = [1; 4[$

$Im(f) = [1; 4] - \{3\} \neq \mathbb{R}$

f é injetora

f não é sobrejetora

b)



RESOLUÇÃO:
D(g) = ℝ
Im(g) = ℝ
g é sobrejetora
g não é injetora

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M116**

4 **(MODELO ENEM)** – Como resultado do aquecimento da Terra, algumas geleiras estão derretendo. Doze anos depois do desaparecimento das geleiras, pequenas plantas chamadas liquens começaram a crescer nas pedras. Cada líquen cresce de forma mais ou menos circular. A relação entre o diâmetro desse circulo e a idade do líquen pode ser calculada, aproximadamente, pela fórmula $d = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12}$, para $t \geq 12$. Nessa fórmula, d representa o diâmetro do líquen em milímetros e t representa o número de anos passados depois do desaparecimento das geleiras. O diâmetro do líquen, em milímetros, 16 anos após o derretimento do gelo será:

a) 9,0 b) 10,5 c) 12,0 d) 14,0 e) 15,5

RESOLUÇÃO:
Para $t = 16$ e $d = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12}$, temos
$d = 7{,}0 \cdot \sqrt{16 - 12} = 7{,}0 \cdot \sqrt{4} = 7{,}0 \cdot 2 = 14{,}0$
Resposta: D

Módulo 9

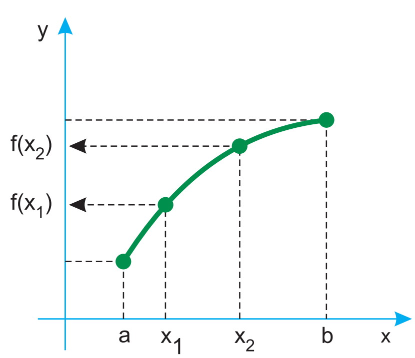
Funções monotônicas

Palavras-chave:
• Estritamente crescente • Estritamente decrescente • Função constante

1. Função estritamente crescente

Uma função $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ é **estritamente crescente** em [a; b] se, e somente se,

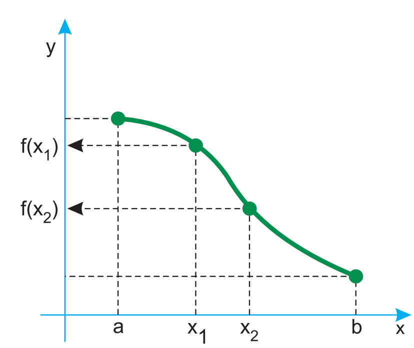
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);\ \forall x_1, x_2 \in [a; b]$$



2. Função estritamente decrescente

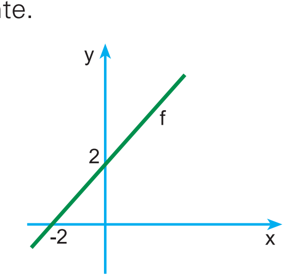
Uma função $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ é **estritamente decrescente** em [a; b] se, e somente se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);\ \forall x_1, x_2 \in [a; b]$$

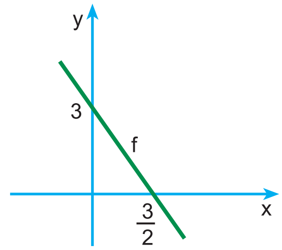


Exemplos

a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 2$ é estritamente crescente.



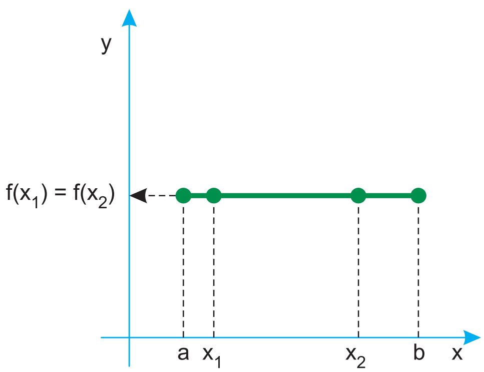
b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 3$ é estritamente decrescente.



3. Função constante

Uma função $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ é **constante** em [a; b] se, e somente se,

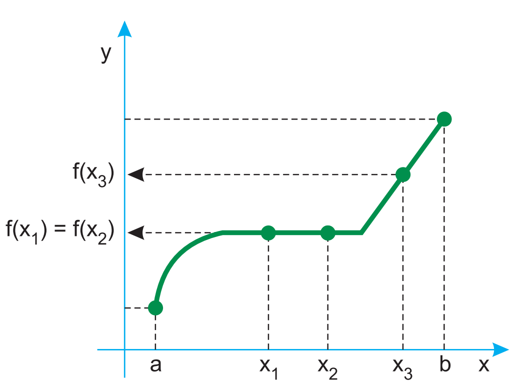
$$f(x_1) = f(x_2);\ \forall x_1, x_2 \in [a; b]$$



4. Função crescente (não decrescente)

Uma função $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ é crescente em [a; b] se, e somente se,

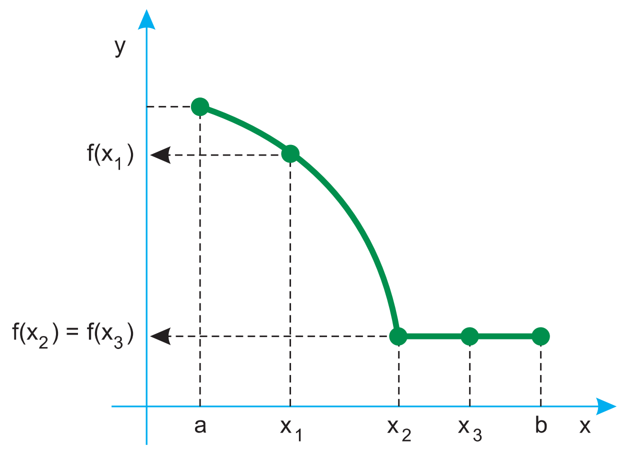
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);\ \forall x_1, x_2 \in [a; b]$$



5. Função decrescente (não crescente)

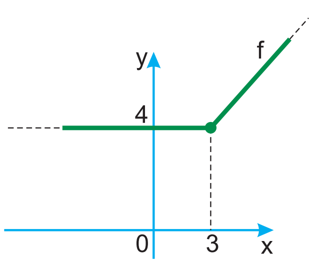
Uma função $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ é decrescente em [a; b] se, e somente se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);\ \forall x_1, x_2 \in [a; b]$$

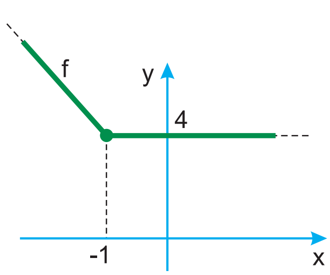


Exemplos

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x < 3 \\ 2x - 2, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$ é crescente.

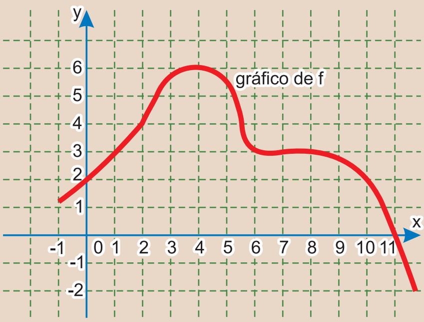


b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 4, \text{ se } x > -1 \end{cases}$ é decrescente.



Exercícios Resolvidos

Nos exercícios 1 e 2, utilize a função f representada no gráfico.



1 **(MODELO ENEM)** – Assinale a **falsa**.

a) $f(4) \geq f(x)$ para todo x entre – 1 e 11
b) $f(x) = 3$ para todo x entre 6 e 8
c) $f(5) > f(10)$
d) $f(0) = 11$
e) $f(2) = 4$

Resolução

Pela leitura do gráfico, podemos concluir que:
$f(4) = 6$; $f(x) \leq 6$, $\forall x \in [-1; 11]$; $f(5) > 5$; $f(10) = 2$; $f(0) = 2$; $f(2) = 4$

A falsa, portanto, é a alternativa d.

Resposta: D

2 Estude a monotonicidade da função **f** nos intervalos:

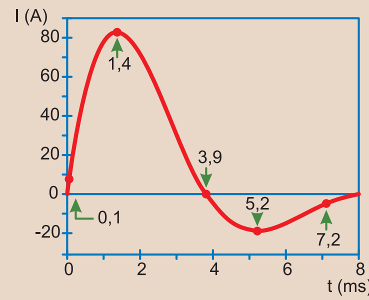
a) $[-1; 4]$ b) $[4; 8]$
c) $[8; 10]$ d) $[2; 8]$

Resolução

Pela leitura do gráfico, podemos concluir que
a) f é estritamente crescente no intervalo [1; 4]
b) f é decrescente no intervalo [4; 8]
c) f é estritamente decrescente no intervalo [8; 10]
d) f **não é** monotônica no intervalo [2; 8]

3 **(MODELO ENEM)** – Um desfibrilador é um equipamento utilizado em pacientes durante parada cardiorrespiratória com objetivo de restabelecer ou reorganizar o ritmo cardíaco. O seu funcionamento consiste em aplicar uma corrente elétrica intensa na parede torácica do paciente em um intervalo de tempo da ordem de milissegundos.

O gráfico seguinte representa, de forma genérica, o comportamento da corrente aplicada no peito dos pacientes em função do tempo.



De acordo com o gráfico, a contar do instante em que se inicia o pulso elétrico, a corrente elétrica atinge o valor máximo após

a) 0,1 ms b) 1,4 ms c) 3,9 ms
d) 5,2 ms e) 7,2 ms

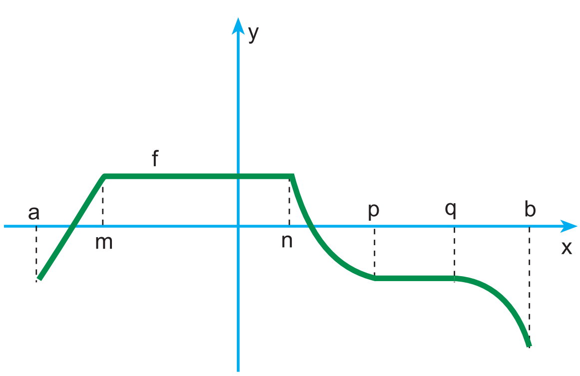
Resolução

A corrente elétrica atinge o máximo valor 1,4 ms após o início do pulso.

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico é dado abaixo:



Complete, classificando a função quanto à monotonicidade.

a) Em [a, m], f é .... **estritamente crescente**

b) Em [m, n], f é .... **constante**

c) Em [n, p], f é .... **estritamente decrescente**

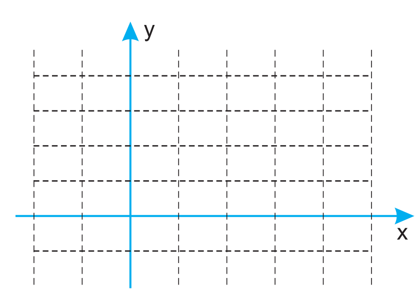
d) Em [q, b], f é .... **estritamente decrescente**

e) Em [a, n], f é .... **crescente**

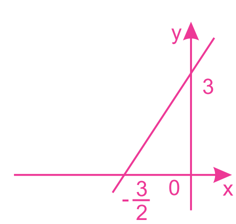
f) Em [m, b], f é .... **decrescente**

Nas questões 2 e 3, esboce o gráfico de cada função e classifique-a quanto à monotonicidade.

2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 3$

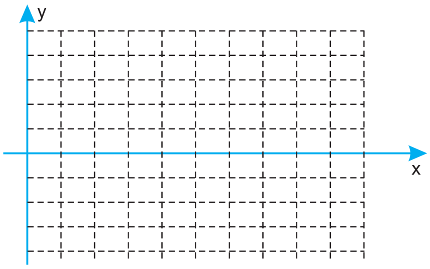


RESOLUÇÃO:

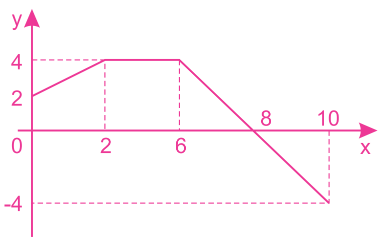


estritamente crescente

3 $f : [0; 10] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ para } 0 \le x < 2 \\ 4, \text{ para } 2 \le x < 6 \\ -2x + 16, \text{ para } 6 \le x \le 10 \end{cases}$

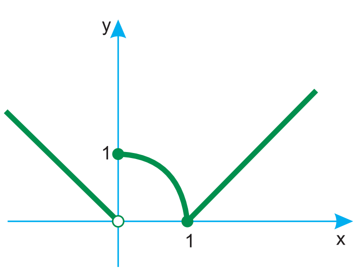


RESOLUÇÃO:



Em [0, 2], f é estritamente crescente.
Em [2, 6], f é constante.
Em [6, 10], f é estritamente decrescente.
Em [0, 6], f é crescente.
Em [2, 10], f é decrescente.

4 **(PUC-BA)** – O gráfico seguinte é da função f(x).

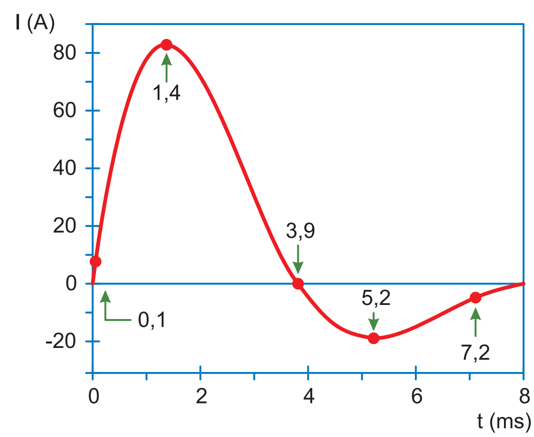


A sentença verdadeira é:

a) $f(1) = 1$;
b) o domínio de f(x) é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$;
c) o conjunto imagem de f(x) é $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$;
d) f(x) é estritamente decrescente para $0 < x < 1$;
e) f(x) é crescente para $x > 0$.

RESOLUÇÃO:
a) Falsa, pois f(1) = 0
b) Falsa, pois D(f) = $\mathbb{R}$
c) Falsa, pois Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\}$
d) Verdadeira
e) Falsa, pois para 0 < x < 1 f é decresccente
Resposta: D

5 **(MODELO ENEM)** – Um desfibrilador é um equipamento utilizado em pacientes durante parada cardiorrespiratória com objetivo de restabelecer ou reorganizar o ritmo cardíaco. O seu funcionamento consiste em aplicar uma corrente elétrica intensa na parede torácica do paciente em um intervalo de tempo da ordem de milissegundos.
O gráfico seguinte representa, de forma genérica, o comportamento da corrente aplicada no peito dos pacientes em função do tempo.



De acordo com o gráfico, a contar do instante em que se inicia o pulso elétrico, a corrente elétrica inverte o seu sentido após

a) 0,1 ms b) 1,4 ms c) 3,9 ms
d) 5,2 ms e) 7,2 ms

RESOLUÇÃO:
A corrente elétrica inverte o seu sentido após 3,9 ms.
Resposta: C

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M117**

Módulo 10

Função par, ímpar, periódica e limitada

Palavra-chave:

- Gráfico cartesiano

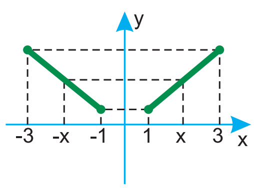
1. Função par

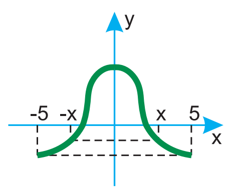
a) Uma função f : A → ℝ é **par** se, e somente se, f(– x) = f(x) para todo **x** de **A**.

Simbolicamente

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ é par} \Leftrightarrow f(-x) = f(x),\ \forall x \in A$$

b) Decorre da definição que uma função f : A → ℝ é **par** se, e somente se, seu gráfico cartesiano é simétrico em relação ao **eixo** $\overrightarrow{\mathbf{Oy}}$.





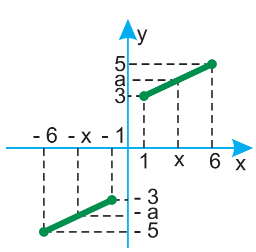
2. Função ímpar

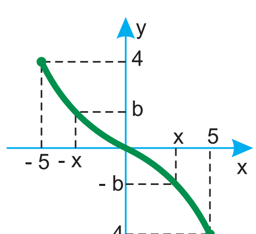
a) Uma função f : A → ℝ é **ímpar** se, e somente se, f(– x) = – f(x) para todo **x** de **A**.

Simbolicamente

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ é ímpar} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in A$$

b) Decorre da definição que uma função f : A → ℝ é **ímpar** se, e somente se, seu gráfico cartesiano é simétrico em relação à **origem**.





3. Função periódica

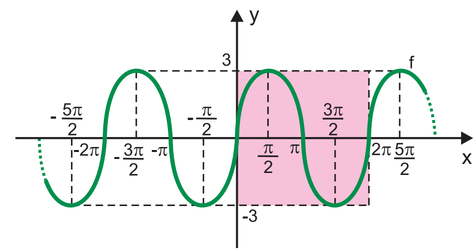
a) Uma função f : A → ℝ é **periódica** se, e somente se, existe p ∈ ℝ* tal que f(x + p) = f(x), para todo **x** em **A**.

b) Se f(x + p) = f(x) para todo **x** em **A**, então

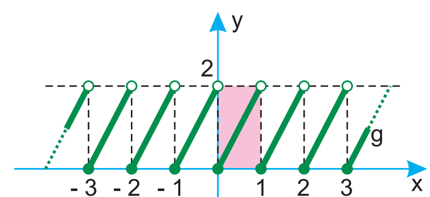
$$f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \ldots = f(x + kp)$$

para todo x ∈ A e k ∈ ℤ*.

c) Se f : A → ℝ é uma função **periódica**, então o **menor valor estritamente positivo** de **p** chama-se período de **f** e é indicado por **P(f)**.



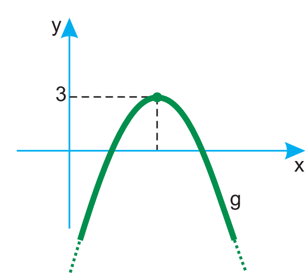
f é função periódica e P(f) = 2π



g é função periódica e P(g) = 1

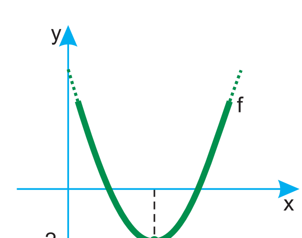
4. Função limitada

a) Uma função f : A → ℝ é **limitada superiormente** se, e somente se, existe b ∈ ℝ tal que f(x) ≤ b, para todo **x** em **A**.



g é limitada superiormente

b) Uma função f : A → ℝ é **limitada inferiormente** se, e somente se, existe a ∈ ℝ tal que f(x) ≥ a, para todo **x** em **A**.



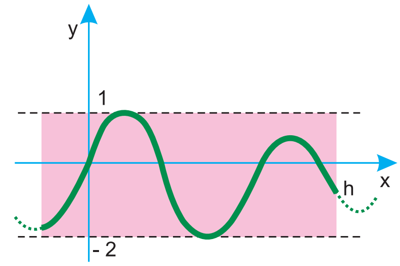
f é limitada inferiormente

c) Uma função f : A → ℝ é **limitada** se, e somente se, **f** é **limitada inferiormente** e **superiormente**.

Simbolicamente

$$f : A \to \mathbb{R} \text{ é limitada} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq f(x) \leq b, \forall x \in A$$

d) Decorre da definição que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é **limitada** se o seu gráfico cartesiano está inteiramente contido em uma faixa horizontal.



Exercícios Resolvidos

1 Provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x$, é ímpar.

Resolução

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x =$

$= -(x^3 - 2x) = -f(x)$

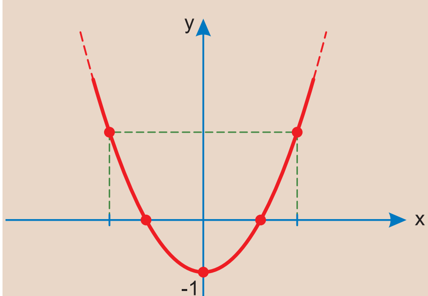
2 **(MODELO ENEM)** – Assinale a **falsa**.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 1$ é

a) par
b) limitada inferiormente
c) estritamente decrescente no intervalo]– ∞; 0]
d) estritamente crescente no intervalo [0; + ∞[
e) é periódica

Resolução

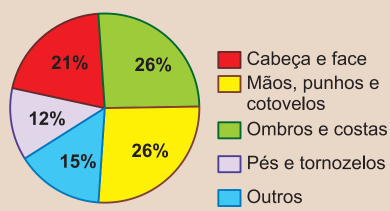
O gráfico de f é:



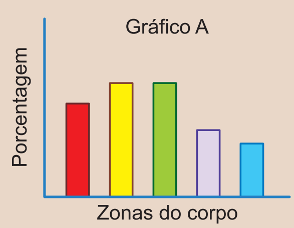
a) Verdadeira, $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$
b) Verdadeira, pois $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$
c) Verdadeira, pela leitura do gráfico.
d) Verdadeira, pela leitura do gráfico.
e) f não periódica.

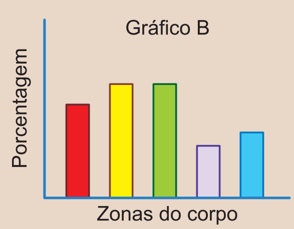
Resposta: E

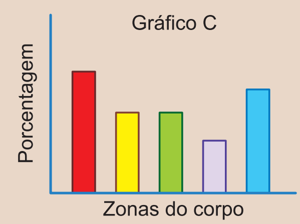
3 **(MODELO ENEM)** – O gráfico circular que se segue fornece informação sobre as zonas do corpo onde as lesões provocadas por mochilas são mais frequentes.

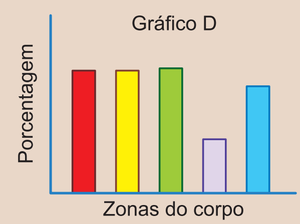


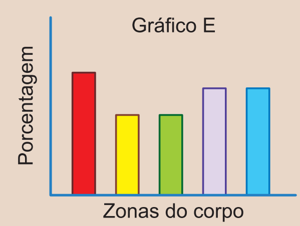
Marta e suas amigas começaram a construir, cada uma, um gráfico de barras que traduzisse a mesma informação deste gráfico circular. A seguir, é possível observar esses cinco gráficos. Assinale o que corresponde ao gráfico circular apresentado.











Resolução

Pelo gráfico circular, temos:

1) Mãos, punhos e cotovelos = ombros e costas
2) Cabeça e face < ombros e costas
3) Cabeça e face > outros
4) Pés e tornozelos < outros

Logo: **Alternativa B**

Exercícios Propostos

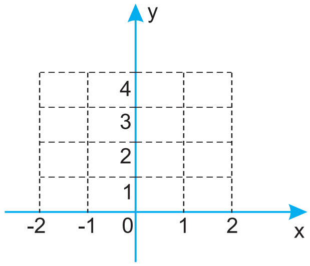
1 Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

a) Prove que **f** é par.

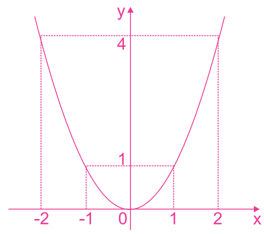
RESOLUÇÃO:
Seja $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = a^2 \\ f(-a) = (-a)^2 = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) = f(-a)$$

b) Esboce o gráfico de **f**.



RESOLUÇÃO:
b)



2 Seja a função f : ℝ → ℝ definida por $f(x) = x^3$

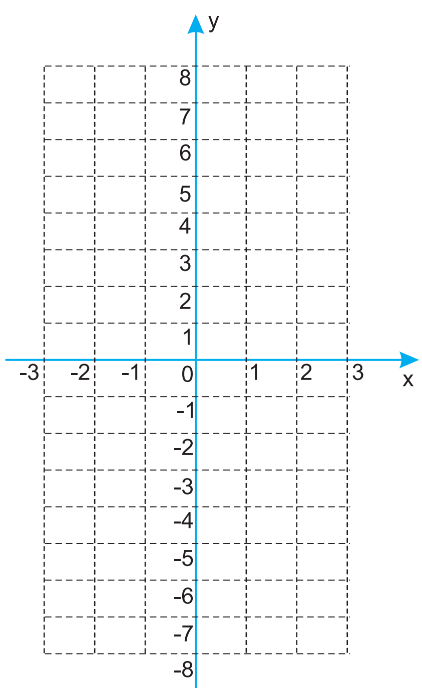
a) Prove que **f** é ímpar.

RESOLUÇÃO:

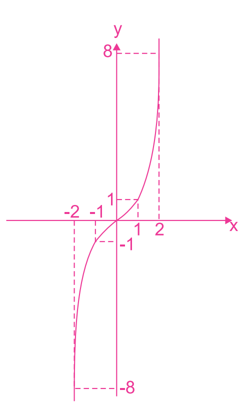
a) Seja $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) = a^3 \\ f(-a) = (-a)^3 = -a^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-a) = -f(a)$$

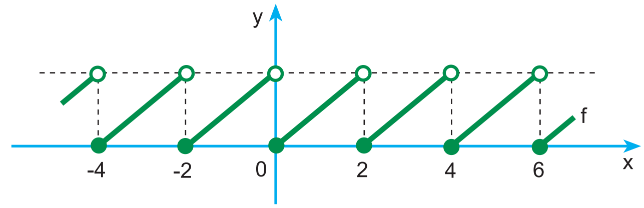
b) Esboce o gráfico de **f**.



RESOLUÇÃO:



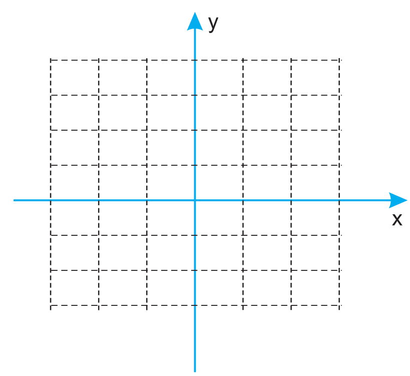
3 Seja a função f : ℝ → ℝ cuja representação gráfica é a seguinte:



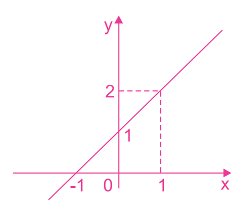
Verificando que a função é periódica, determine o período de **f**.

RESOLUÇÃO:
f é uma função periódica e P(f) = 2.

4 Seja a função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = x + 1. Esboce o gráfico de f e por meio de contraexemplos justifique que ela não é par nem ímpar.



RESOLUÇÃO:



f(1) = 2
f(– 1) = 0
f(1) ≠ f(– 1)
Não é par.
– f(1) ≠ f(– 1)
Não é ímpar.

5 Para a função f do exercício **4**, é **falso** afirmar que:

a) Im(f) = ℝ

b) f(1) = 2

c) f não é periódica

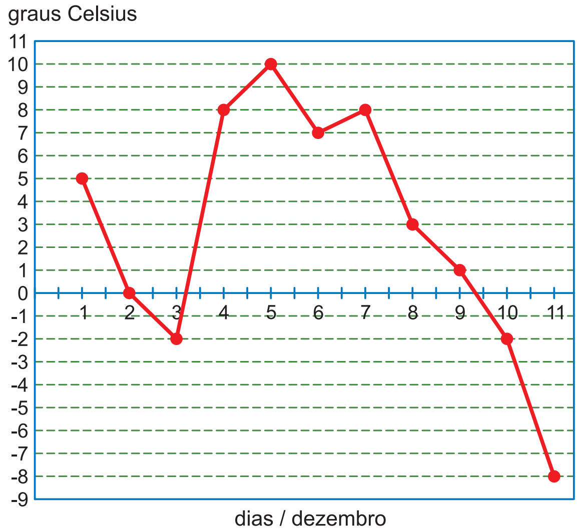
d) f é limitada

e) f é estritamente crescente

RESOLUÇÃO:
Resposta: D

6 **(MODELO ENEM)** – O gráfico refere-se às temperaturas de uma determinada cidade, nos 11 primeiros dias do mês de dezembro.

TEMPERATURA NO MÊS DE DEZEMBRO



Ao observar esse gráfico, você pode notar que, em alguns dias do mês de dezembro, ocorreram temperaturas negativas, e, em outros, temperaturas positivas.
De acordo com o gráfico, a maior temperatura do período considerado, em graus Celsius, foi:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

RESOLUÇÃO:
A maior temperatura do período aconteceu no 5º dia e o valor, em graus Celsius, foi 10.
Resposta: C

No Portal Objetivo

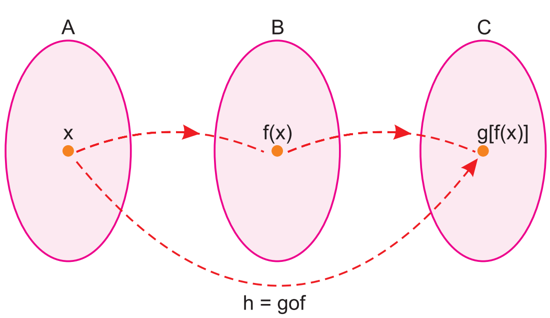
Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M118**

Módulo 11 e 12 Função composta

Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, chama-se **função composta** das funções **g** e **f** à função $h : A \to C$ tal que $\mathbf{h(x) = g[f(x)]}$.

É representada por **gof** (lê-se:g bola f).

$$h(x) = (gof)\,(x) = g[f(x)]$$



Observação

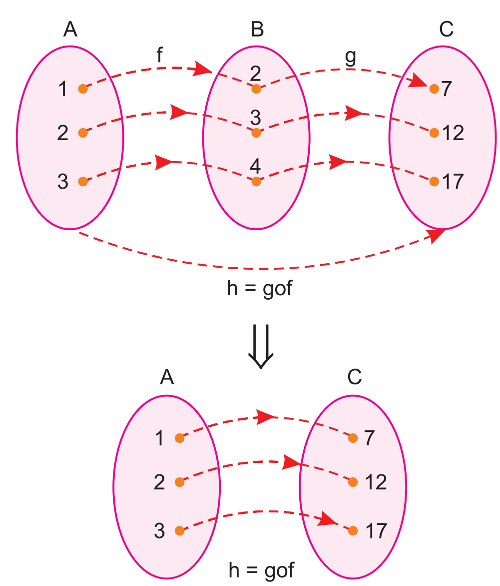
A imagem de um elemento qualquer **x** de **A** por meio da função composta **gof** é determinada em duas etapas: a primeira transforma o elemento **x** de **A** no elemento **f(x)** de **B** e a **segunda** transforma o elemento **f(x)** de **B** no elemento **g[f(x)]** de **C**.

Exemplos

a) Sejam os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ e $C = \{7; 12; 17\}$ e as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 5x - 3$.

A função $h : A \to C$, composta de **g** e **f**, definida por $h(x) = gof(x)$ é tal que:

$f(1) = 2$ e $g(2) = 7 \Rightarrow h(1) = (gof)\,(1) = g[f(1)] = g(2) = 7$
$f(2) = 3$ e $g(3) = 12 \Rightarrow h(2) = (gof)\,(2) = g[f(2)] = g(3) = 12$
$f(3) = 4$ e $g(4) = 17 \Rightarrow h(3) = (gof)\,(3) = g[f(3)] = g(4) = 17$



b) Sejam **f** e **g** duas funções de ℝ em ℝ, definidas por $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 2x + 4$.

A sentença que define a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (gof)(x)$ é $h(x) = 6x + 6$, pois:

$$h(x) = g[f(x)] = g[3x + 1] =$$
$$= 2(3x + 1) + 4 = 6x + 6$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 11 e 12

1 Dadas as funções **f** e **g**, de ℝ em ℝ, definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 3$, calcule:

a) $(fog)(x)$

b) $(gof)(x)$

Resolução

a) $(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 3) =$

$= 3(x^2 - 3) + 2 = 3x^2 - 7$

b) $(gof)(x) = g[f(x)] = g[3x + 2] = (3x + 2)^2 - 3 =$

$= 9x^2 + 12x + 4 - 3 = 9x^2 + 12x + 1$

Respostas: a) $(fog)(x) = 3x^2 - 7$

b) $(gof)(x) = 9x^2 + 12x + 1$

2 Sejam **f** e **g** duas funções de ℝ em ℝ, tais que $f(x) = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x \le 4 \\ 2x, \text{ se } x > 4 \end{cases}$ e $g(x) = 3x + 1$.

Então, $(fog)(x)$ é igual a:

a) $\begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x \le 1 \\ 6x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x \le 4 \\ 6x + 2, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2, \text{ se } x \le 4 \\ 6x - 2, \text{ se } x > 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x - 2, \text{ se } x \le 4 \\ 3x + 2, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2, \text{ se } x \le 1 \\ 6x - 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

Resolução

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) =$

$= \begin{cases} (3x + 1) - 3, \text{ se } 3x + 1 \le 4 \\ 2(3x + 1), \text{ se } 3x + 1 > 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x \le 1 \\ 6x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

Resposta: A

3 Sejam **f** e **g** duas funções de ℝ em ℝ, tais que $(gof)(x) = 2x + 4$ e $f(x) = x + 1$. A sentença que define a função **g** é:

a) $g(x) = x + 2$ b) $g(x) = 2x - 2$

c) $g(x) = 2x + 2$ d) $g(x) = x - 2$

e) $g(x) = 4x - 2$

Resolução

1) $(gof) = g[f(x)] = g(x + 1) = 2x + 4$

2) Fazendo $x + 1 = \alpha$, resulta $x = \alpha - 1$

3) $g(x + 1) = 2x + 4 \Rightarrow g(\alpha) = 2(\alpha - 1) + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\alpha) = 2\alpha + 2 \Rightarrow g(x) = 2x + 2$

Resposta: C

4 Sejam **f** e **g** duas funções de ℝ em ℝ, tais que $(gof)(x) = 2x + 4$ e $g(x) = 2x + 2$. A sentença que define a função **f** é:

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = 2x - 1$ d) $f(x) = 2x + 2$

e) $f(x) = x + 2$

Resolução

1) $(gof)(x) = g[f(x)]$

2) Se $g(x) = 2 \,.\, x + 2$, então $g[f(x)] = 2 \,.\, f(x) + 2$

3) $(gof)(x) = 2 \,.\, f(x) + 2 = 2x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f(x) = x + 1$

Resposta: A

5 O desenvolvimento da gestação de uma determinada criança, que nasceu com 40 semanas, 50,6 cm de altura e com 3 446 gramas de massa, foi modelado, a partir da 20ª semana, aproximadamente, pelas funções matemáticas

$$h(t) = 1{,}5t - 9{,}4 \text{ e}$$

$$p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246,$$

em que t indica o tempo em semanas, $t \ge 20$, h(t) a altura em centímetros e p(t) a massa em gramas. Admitindo o modelo matemático, determine quantos gramas tinha o feto quando sua altura era 35,6 cm.

a) 1506 b) 1720 c) 1840

d) 2120 e) 2480

Resolução

$h(t) = 1{,}5t - 9{,}4 = 35{,}6 \Leftrightarrow t = 30$

$p(30) = 3{,}8 \,.\, 30^2 - 72 \,.\, 30 + 246 = 1506$

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 11

1 Considere os conjuntos A = {1; 2; 3}, B = {4; 5; 6} e C = {13; 16; 19} e as funções

$f : A \to B$ tal que $f(x) = x + 3$

$g : B \to C$ tal que $g(x) = 3x + 1$

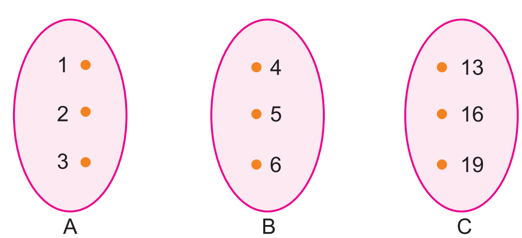
a) Complete:

$x = 1 \Rightarrow f(1) =$ ...4... $\Rightarrow g[f(1)] =$ ...13...

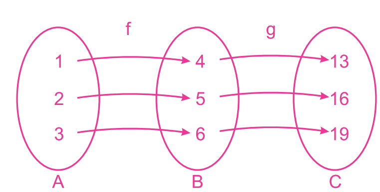
$x = 2 \Rightarrow f(2) =$ ...5... $\Rightarrow g[f(2)] =$ ...16...

$x = 3 \Rightarrow f(3) =$ ...6... $\Rightarrow g[f(3)] =$ ...19...

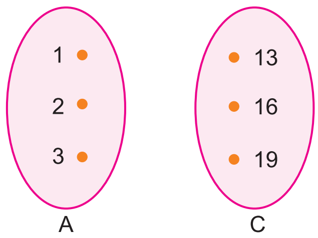
b) Represente as funções f e g pelo diagrama de flechas.



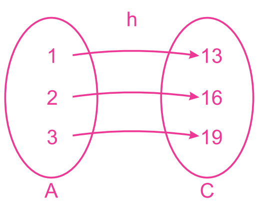
RESOLUÇÃO:



c) Represente a função $h : A \to C$ tal que $h(x) = g[f(x)]$ pelo diagrama de flechas.



RESOLUÇÃO:



$h(1) = g[f(1)] = 13$

$h(2) = g[f(2)] = 16$

$h(3) = g[f(3)] = 19$

2 Considere as funções **f** e **g** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x - 2$. Determine:

a) $g[f(1)] =$ **$g(4) = 2$**

b) $g[f(2)] =$ **$g(7) = 5$**

c) $g[f(x)] =$ **$g(3x + 1) = 3x + 1 - 2 = 3x - 1$**

d) $f[g(1)] =$ **$f(-1) = -2$**

e) $f[g(2)] =$ **$f(0) = 1$**

f) $f[g(x)] =$ **$f(x - 2) = 3(x - 2) + 1 = 3x - 5$**

3 Considere as funções reais f e g definidas por $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$, para todo x real. Determine:

a) $(fog)(x) =$ **$f[g(x)] = f(x^2) = x^2 + 2$**

b) $(gof)(x) =$ **$g[f(x)] = g(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$**

c) $(fof)(x) =$ **$f[f(x)] = f(x + 2) = x + 2 + 2 = x + 4$**

d) $(gog)(x) =$ **$g[g(x)] = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$**

Exercícios Propostos – Módulo 12

Nas questões de **1** a **4**, dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 3$, determine:

1 $(gof)\ (x) =$

RESOLUÇÃO:
$(gof) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 3$

2 $(fog)\ (x) =$

RESOLUÇÃO:
$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em “localizar”, digite **MAT1M119**

3 (fof) (x) =

RESOLUÇÃO:
$(fof)(x) = f[f(x)] = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

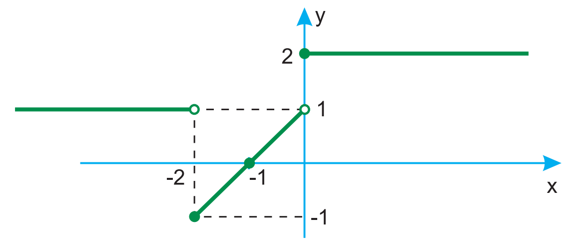
4 (gog) (x) =

RESOLUÇÃO:
$(gog)(x) = g[g(x)] = g(x + 3) = x + 3 + 3 = x + 6$

5 As funções **f** e **g**, de ℝ em ℝ, são tais que $f(x) = 2x - 3$ e $(fog)(x) = 2x - 7$. Determine g(x).

RESOLUÇÃO:
$(fog)(x) = 2x - 7$
$f[g(x)] = 2x - 7$
$2 \cdot g(x) - 3 = 2x - 7$
$2 \cdot g(x) = 2x - 4$
$g(x) = x - 2$

6 Com respeito à função f: ℝ → ℝ, cujo gráfico está representado abaixo, é correto afirmar:



a) $(fof)(-2) = 1$ b) $(fof)(-1) = 2$ c) $(fof)(-2) = -1$
d) $(fof)(-1) = 0$ e) $f(-2) = 1$

RESOLUÇÃO:
I) $f(-2) = -1$
II) $f(-1) = 0$
III) $f(0) = 2$
IV) $(fof)(-2) = f(f(-2)) = f(-1) = 0$
V) $(fof)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = 2$
Resposta: B

Módulo **13 e 14**

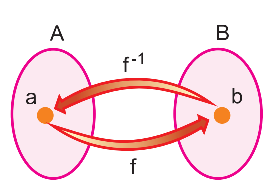
Função inversa

Palavra-chave:
• Gráficos de f e f^{-1}

1. Definição

Seja f : A → B uma função bijetora. A função f^{-1} : B → A é a **inversa** de **f** se, e somente se:

$$f^{-1}(b) = a,\ \forall b \in B$$
$$\Updownarrow$$
$$f(a) = b;\ \forall a \in A$$



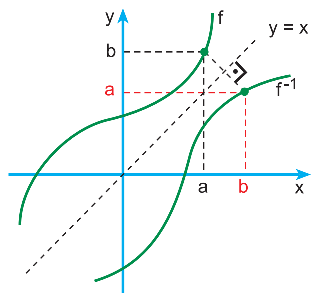
Observe que:
a) A função inversa $\mathbf{f^{-1}}$ desfaz o que a função **f** fez.
b) $A = D(f) = CD(f^{-1})$ e $B = D(f^{-1}) = CD(f)$
c) **f** é inversível ⇔ **f** é bijetora.
d) $(fof^{-1})(x) = x, \forall x \in B$ e $(f^{-1}of)(x) = x, \forall x \in A$

2. Gráficos de f e f^{-1}

De acordo com a definição, temos:

$$(a; b) \in f \Leftrightarrow (b; a) \in f^{-1}$$

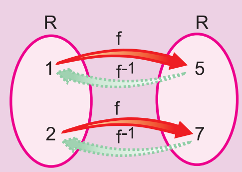
Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º), cuja equação é y = x.



Saiba mais

Se $f(x) = 2x + 3$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$, então:

a) $\begin{cases} f(1) = 2 \,.\, 1 + 3 = 5 \\ f^{-1}(5) = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} f(2) = 2 \,.\, 2 + 3 = 7 \\ f^{-1}(7) = \dfrac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$

3. Como obter a função inversa

A definição sugere uma regra prática para obter a sentença que define a inversa, que consiste em:

Regra prática	Exemplo
Substituir f(x) por **y**	$y = 2x + 3$
Trocar **x** por **y** e **y** por **x**	$x = 2y + 3$
"Isolar" o **y**	$x = 2y + 3 \Leftrightarrow 2y = x - 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \dfrac{x-3}{2}$
Substituir **y** por $f^{-1}(x)$	$f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

A inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$ é, pois, a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

Exercícios Resolvidos – Módulos 13 e 14

1 Obter a função inversa de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 4$

Resolução

a) substituir f(x) por y: $y = 2x - 4$

b) trocar x por y e y por x: $x = 2y - 4$

c) "isolar" o y: $x = 2y - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{x+4}{2}$

d) substituir y por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

Resposta: $\mathbf{f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}}$

2 Obter a função inversa de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 4$

Resolução

$f(x) = 2x + 4 \Rightarrow y = 2x + 4 \Rightarrow x = 2y + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = x - 4 \Rightarrow y = \dfrac{x-4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$

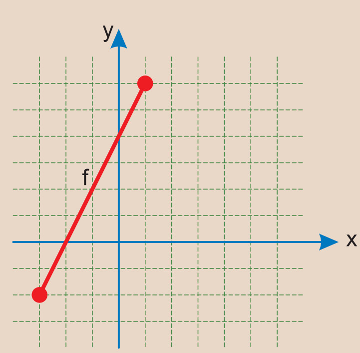
Resposta: $\mathbf{f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}}$

3 Esboçar, no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico da função $f: [-3; 1] \to B$ e da sua inversa $f^{-1}: B \to [-3; 1]$, sendo $f(x) = 2x + 4$

Resolução

1) $\begin{cases} f(-3) = 2(-3) + 4 = -2 \\ f(1) = 2 \,.\, 1 + 4 = 6 \end{cases}$

2) O gráfico de f é:



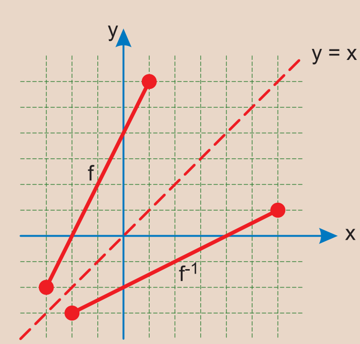
3) $B = [-2; 6]$

4) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$ conforme o exercício (2)

5) $f: [-3; 1] \to [-2; 6]$ e $f^{-1}: [-2; 6] \to [-3; 1]$

6) Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante.

7) Os gráficos de f e f^{-1} são:



4 **(MODELO ENEM)** – Para produzir um número **x** de peças, com **x** natural, uma empresa deve investir R\$ 200 000,00 em máquinas e além disso, gastar R\$ 0,50 na produção de cada peça. Nessas condições, o custo **y**, em reais, para a produção das **x** peças é uma função definida por:

a) $y = 200\,000 + 0{,}5$

b) $y = 200\,000\,x$

c) $y = \dfrac{x}{2} + 200\,000$

d) $y = 200\,000 - 0{,}5x$

e) $y = \dfrac{200\,000 + x}{2}$

Resolução

A despesa fixa é R$ 200 000,00 para adquirir as máquinas.

A despesa de uma peça é R$ 0,50 e, portanto, para produzir as x peças, gasta-se, ainda, 0,5 . x reais.

Assim: $y = 200\,000 + 0{,}5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} + 200\,000$

Resposta: C

5 **(MODELO ENEM)** – Com relação ao exercício anterior, com R$ 205 000,00, quantas peças serão produzidas?

a) 10 000 b) 20 000 c) 50 000
d) 80 000 e) 100 000

Resolução

Para $y = 205\,000$ e $y = \dfrac{x}{2} + 200\,000$, temos:

$205\,000 = \dfrac{x}{2} + 200\,000 \Leftrightarrow$

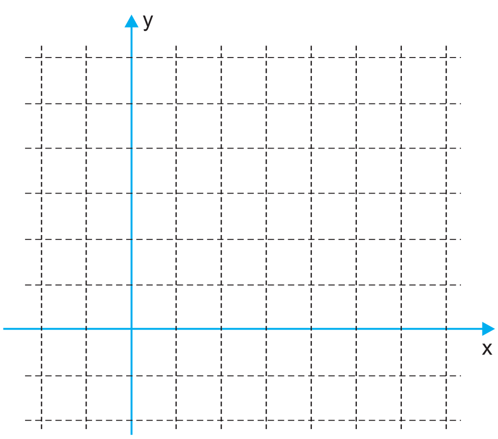
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = 5\,000 \Leftrightarrow x = 10\,000$

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 13

Nas questões de **1** a **4**, determine $\mathbf{f^{-1}}$ e esboce os gráficos de **f** e $\mathbf{f^{-1}}$ no mesmo sistema de coordenadas.

1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$



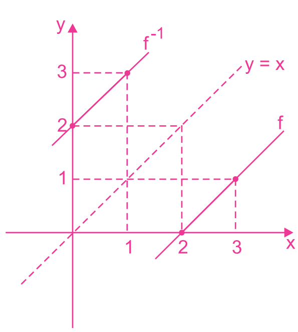
RESOLUÇÃO:

$\mathbf{y = x - 2}$

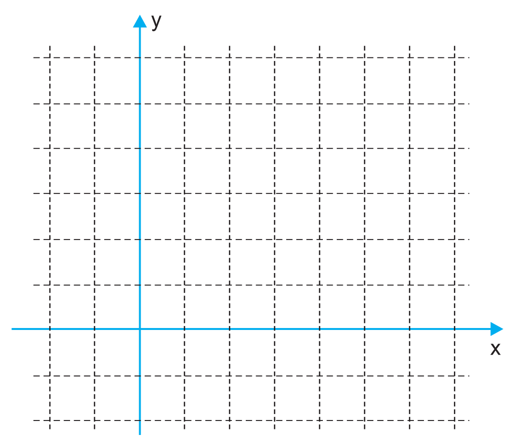
$\mathbf{x = y - 2}$

$\mathbf{y = x + 2}$

Logo, $\mathbf{f^{-1}(x) = x + 2}$



2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x$



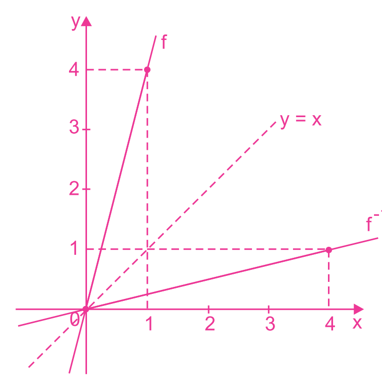
RESOLUÇÃO:

$\mathbf{y = 4x}$

$\mathbf{x = 4y}$

$\mathbf{y = \dfrac{x}{4}}$

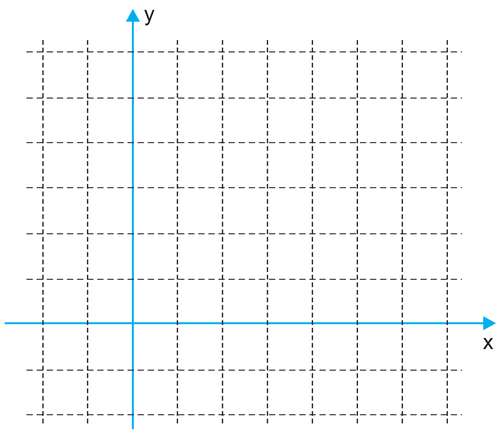
Logo, $\mathbf{f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}}$



No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M120**

3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$



RESOLUÇÃO:

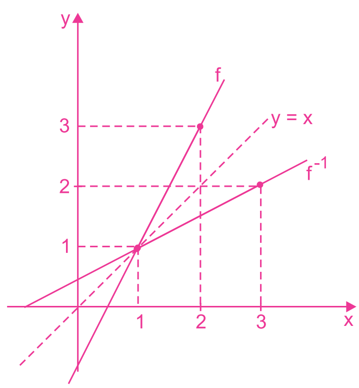
$y = 2x - 1$

$x = 2y - 1$

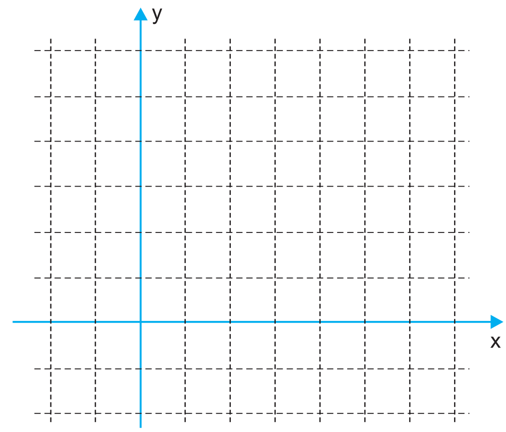
$2y = x + 1$

$y = \dfrac{x + 1}{2}$

Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{2}$



4 f: [0; 4] → [– 2; 6] tal que $f(x) = 2x - 2$



RESOLUÇÃO:

$y = 2x - 2$

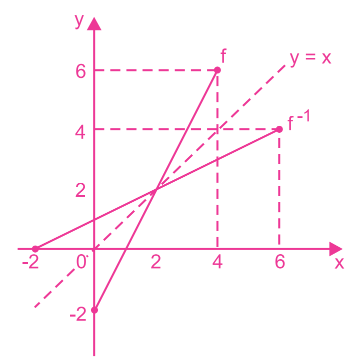
$x = 2y - 2$

$2y = x + 2$

$y = \dfrac{x + 2}{2}$

Logo, $f^{-1}:[-2; 6] \to [0; 4]$

tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{2}$



Exercícios Propostos – Módulo 14

1 O ponto A(1; 3) pertence ao gráfico de $f(x) = 2x + b$. Determine $f^{-1}(x)$.

RESOLUÇÃO:

I) $f(x) = 2x + b$ e $A(1; 3) \in f$, então:

$3 = 2 \,.\, 1 + b \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1$

II) $f(x) = 2x + 1$

$y = 2x + 1$

$x = 2y + 1$

$2y = x - 1$

$y = \dfrac{x - 1}{2}$, logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$

2 A função f: A → B, com A ⊂ ℝ e B ⊂ ℝ, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ é inversível. Calcular $f^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$.

RESOLUÇÃO:
$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$

$f^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right) = a \Leftrightarrow f(a) = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow a + 1 = 7 \Leftrightarrow a = 6$

Logo, $f^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right) = 6$

3 A função f: R – {2} → ℝ – {a}, definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ é inversível e f^{-1}: ℝ – {a} → ℝ – {2} é a sua inversa. Determine $f^{-1}(x)$ e **a**.

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

$x = \dfrac{3y-1}{y-2}$

$xy - 2x = 3y - 1$

$xy - 3y = 2x - 1$

$y(x - 3) = 2x - 1$

$y = \dfrac{2x-1}{x-3}$, **logo,** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$

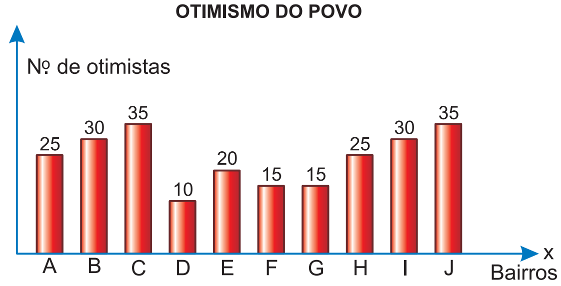
Sendo f: R – {2} → ℝ – {a} definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

e f^{-1}**: R – {a} → ℝ – {2} definida por** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$**, temos a = 3.**

(MODELO ENEM) – Texto para as questões **4** e **5**.

Foi feita uma pesquisa numa cidade que está organizada em 100 bairros tendo em média 400 habitantes cada um. Foram selecionados 10% dos bairros, representados no gráfico por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J e 10% dos habitantes de cada bairro. Considere que o índice de otimismo das pessoas pesquisadas representa, em cada bairro, o de todas as pessoas do mesmo bairro. Considere ainda que o índice de otimismo é a razão entre o número de otimistas e total de habitantes.

OTIMISMO DO POVO



4 O índice de otimismo das pessoas do bairro **C** é
a) 80% b) 84,5% c) 87,5%
d) 88% e) 89,5%

RESOLUÇÃO:
O número de pessoas de cada bairro que foram pesquisadas é 10% . 400 = 40.

O número de otimistas do bairro C é 35.

O índice de otimismo no bairro C é $\dfrac{35}{40} = 0{,}875 = 87{,}5\%$

Resposta: C

5 O menor índice de otimismo das pessoas dos 10 bairros pesquisados é
a) 25% b) 30% c) 35%
d) 38% e) 40%

RESOLUÇÃO:
O menor número de otimismo, entre os pesquisados, é do bairro D. Apenas 10 são otimistas. Para esse bairro, o índice de otimismo é $\dfrac{10}{40} = 0{,}25 = 25\%$

Resposta: A

Módulos 15 e 16

Exercícios complementares

Exercícios Propostos – Módulo 15

1 **(MODELO ENEM)** – Seja f(n) uma função definida para todo **n** inteiro tal que $\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(p + q) = f(p).f(q) \end{cases}$ em que **p** e **q** são inteiros. O valor de f(0) é:

a) – 1 b) 0 c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) 2

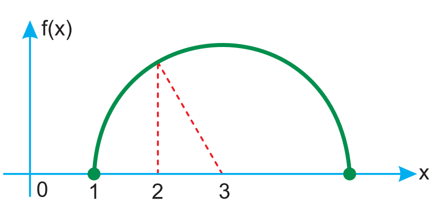
RESOLUÇÃO:

Como f(2) = 2 e f(p + q) = f(p) . f(q) para p e q inteiros, fazendo p = 0 e q = 2, temos

$f(0 + 2) = f(0) . f(2) \Leftrightarrow f(2) = f(0) . f(2) \Leftrightarrow 2 = f(0) . 2 \Leftrightarrow f(0) = 1$

Resposta: C

2 **(MODELO ENEM)** – A semicircunferência na figura abaixo tem centro em (3,0), uma extremidade em (1;0) e é o gráfico de uma função f.

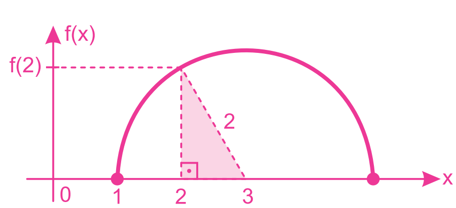


Podemos afirmar que f(2) é igual a:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 1,5 d) 1,7 e) $\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

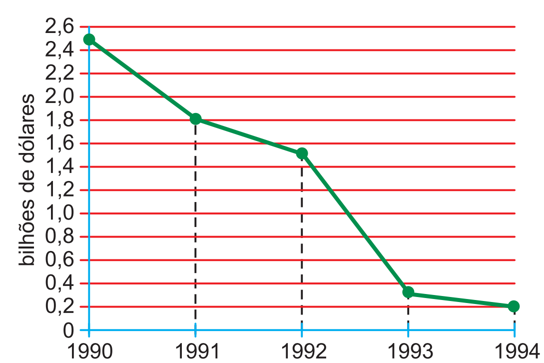
I) O raio da circunferência é 2.



II) No triângulo retângulo da figura, pelo Teorema de Pitágoras, temos: $(f(2))^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow (f(2))^2 = 3 \Rightarrow f(2) = \sqrt{3}$

Resposta: E

3 **(MODELO ENEM)** – O gráfico abaixo apresenta os investimentos anuais em transportes, em bilhões de dólares, feitos pelo governo de um certo país, nos anos indicados.



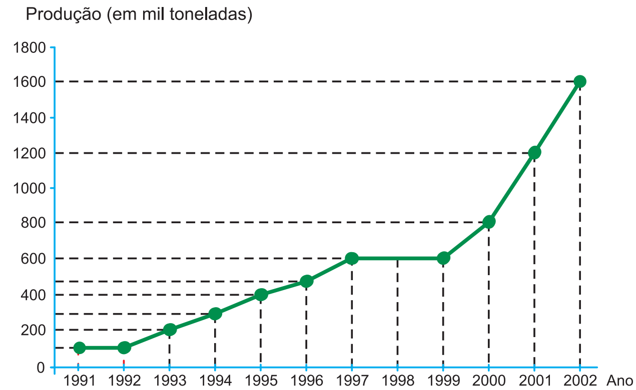
De acordo com esse gráfico, é verdade que o investimento do governo desse país, em transportes,

a) diminui, por ano, uma média de 1 bilhão de dólares.
b) vem crescendo na década de 1990.
c) em 1994, foi menor que a décima parte do que foi investido em 1990.
d) em 1994, foi o dobro do que foi investido em 1990.
e) em 1991 e 1992, totalizou 3,8 bilhões de dólares.

RESOLUÇÃO:

Resposta: C

4 O gráfico abaixo mostra a evolução da produção de biodiesel no mundo, no período 1991-2002, em milhares de toneladas por ano.



(Adaptado de <www.proespacocult.ong.br/equilibrioambiental.htm> Acesso em junho 2004.)

A partir das informações do gráfico, assinale a afirmativa correta.

a) A produção em 2002 foi o dobro da produção de 1999.

b) Se a variação da produção de biodiesel de 2001 a 2002 se mantiver constante nos anos seguintes, a produção de biodiesel em 2004 será 2.200.000 toneladas.

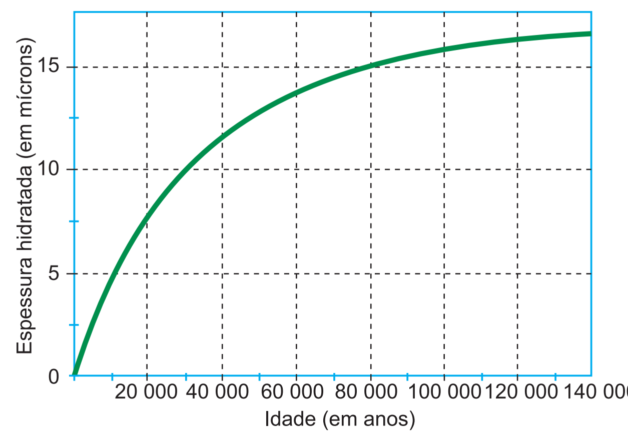
c) Se a produção de biodiesel, em mil toneladas, no período 2000-2002, for representada por uma função real $y = f(x)$, sendo y a produção de biodiesel no ano x, então $f(x) = 400x - 800.000$.

d) A produção em 2002 superou a de 1991 em mais de 1.400.000 toneladas.

e) Houve queda na produção no período 1997-1999.

RESOLUÇÃO:
Resposta: D

5 **(ENEM)** – A obsidiana é uma pedra de origem vulcânica que, em contato com a umidade do ar, fixa água em sua superfície formando uma camada hidratada. A espessura da camada hidratada aumenta de acordo com o tempo de permanência no ar, propriedade que pode ser utilizada para medir sua idade. O gráfico abaixo mostra como varia a espessura da camada hidratada, em mícrons (1 mícron = 1 milésimo de milímetro), em função da idade da obsidiana.



Com base no gráfico, pode-se concluir que a espessura da camada hidratada de uma obsidiana

a) é diretamente proporcional à sua idade.

b) dobra a cada 10 000 anos.

c) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais jovem.

d) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais velha.

e) a partir de 100 000 anos não aumenta mais.

RESOLUÇÃO:
Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 16

1 O custo C de enviar um pacote pesando P kg (P inteiro) é de R$ 0,10 para o primeiro quilograma e de R$ 0,03 por quilograma adicional. A sentença que estabelece esse custo é:

a) $C = 0,10 + 0,03P$ b) $C = 0,10P + 0,03$

c) $C = 0,10 + 0,03(P - 1)$ d) $C = 0,09 + 0,03P$

e) $C = 0,10(P - 1) - 0,07$

RESOLUÇÃO:
Resposta: C

2 Um vendedor tem um salário fixo mensal de R$ 300,00 e uma comissão de 7% sobre o total de x reais de suas vendas no mês. Seu salário mensal total, em reais, pode ser expresso por

a) $300 + 7x$ b) $300 + 0,07x$ c) $307 + x$

d) $300,07x$ e) $307x$

RESOLUÇÃO:
Resposta: B

3 Sabe-se que, nos pulmões, o ar atinge a temperatura do corpo e que, ao ser exalado, tem temperatura inferior à do corpo, já que é resfriado nas paredes do nariz. Por meio de medições realizadas em um laboratório, foi obtida a função $T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A$, $12° \leq T_A \leq 30°$, em que T_E e T_A representa, respectivamente, a temperatura do ar exalado e a do ambiente. Calcule

a) a temperatura do ambiente quando $T_E = 25°C$;

b) o maior valor que pode ser obtido para T_E.

RESOLUÇÃO:

Sendo todas as temperaturas em °C, temos:

$T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A$

a) Para $T_E = 25$, temos:

$25 = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A$

$$T_A = \frac{16{,}5}{0{,}75}$$

$T_A = 22$

b) Como $12° \leq T_A \leq 30°$, T_E será máximo para $T_A = 30$, então:

$T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot 30 = 8{,}5 + 22{,}5 = 31$

Respostas: a) 22°C

b) 31°C

4 Numa certa localidade, os usuários pagam, à Companhia Telefônica, um valor mensal fixo de R$ 40,00 pelo uso da linha telefônica e pelo uso de, no máximo, 90 impulsos mensais. Esta mesma companhia cobra, ainda, R$ 0,30 por cada impulso que ultrapassar a cota mensal dos 90 impulsos não cobrados.

Pedem-se:

a) a sentença que permite calcular o valor **V**, cobrado mensalmente, em reais, em função do número **i** de impulsos utilizados no mês;

b) o gráfico de **V** em função de **i**;

c) o valor da conta telefônica, em reais, de um usuário que gastou, num determinado mês, apenas 70 impulsos;

d) o valor da conta telefônica, em reais, de um usuário que gastou, num determinado mês, 240 impulsos.

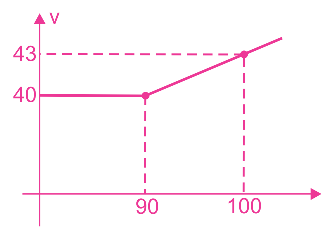
RESOLUÇÃO:

a) A sentença que permite calcular V é:

$$\begin{cases} V(i) = 40, \text{ para } 0 \leq i \leq 90 \\ V(i) = 40 + 0{,}30\,(i - 90), \text{ para } i > 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V(i) = 40, \text{ para } 0 \leq i \leq 90 \\ V(i) = 13 + 0{,}3i, \text{ para } i > 90 \end{cases}$$

b)



c) V(70) = 40

d) V(240) = 13 + 0,3 . 240 = 85