OBJETIVO FRENTE 1

MATEMÁTICA

Abul Wafa (940 – 998) – Responsável por grande parte do conhecimento da trigonometria de hoje.

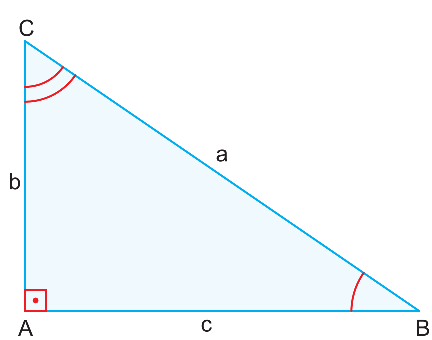
Trigonometria – Módulos

Módulo 17 – Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

Palavras-chave:

• Ângulos complementares
• Hipotenusa • Cateto

Consideremos um triângulo retângulo ABC, reto em A. Os outros dois ângulos B e C são agudos e complementares, isto é, B + C = 90°. Para ângulos agudos, temos por definição:



$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto oposto a } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto oposto a } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto adjacente a } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos C = \frac{\text{cateto adjacente a } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{cateto oposto a } B}{\text{cateto adjacente a } B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto oposto a } C}{\text{cateto adjacente a } C} = \frac{c}{b}$$

Observações

a) Os **senos** e **cossenos** de ângulos agudos são números compreendidos entre **0** e **1**, pois a medida do cateto é sempre menor do que a medida da hipotenusa.

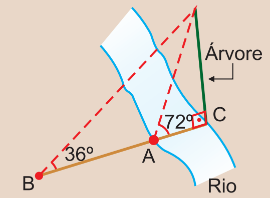
b) O **seno de um ângulo** é igual ao **cosseno do seu complemento** e reciprocamente:

$$\text{sen } x = \cos(90° - x) \qquad \cos x = \text{sen}(90° - x)$$

c) No triângulo retângulo vale o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Exercício Resolvido

1 **(MODELO ENEM)**

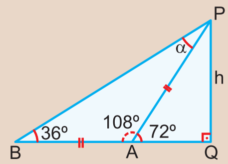


Um observador situado em A, na margem de um rio, avista o topo de uma árvore, situada na margem oposta, sob um ângulo de 72° em relação à horizontal. Desejando calcular a altura da árvore, sem atravessar o rio, afasta-se do ponto A na direção da reta AC até que o ângulo de visão, seja a metade do anterior, chegando assim em B, distante 50m de A.

A altura da árvore, desprezando a do observador, considerando sen 72° ≅ 0,95 é, em metros:

a) 42,4 b) 45,5 c) 47
d) 47,5 e) 49

Resolução



Sendo h a altura da árvore e α o ângulo $B\hat{P}A$ temos:

a) $\alpha + 36° + 108° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

b) $A\hat{B}P = B\hat{P}A = 36° \Leftrightarrow AP = AB = 50$

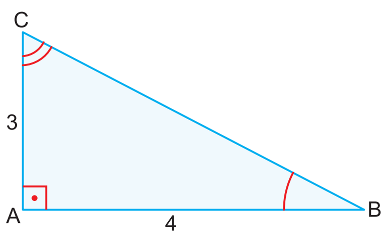
c) $\text{sen } 72° = \dfrac{h}{AP} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}95 = \dfrac{h}{50} \Rightarrow h = 47{,}5$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 No triângulo retângulo da figura, determinar:



a) a hipotenusa BC
b) sen $\hat{B}$
c) cos $\hat{B}$
d) tg $\hat{B}$
e) sen $\hat{C}$
f) cos $\hat{C}$
g) tg $\hat{C}$

RESOLUÇÃO:

a) 5 **b) $\frac{3}{5}$** **c) $\frac{4}{5}$** **d) $\frac{3}{4}$**

e) $\frac{4}{5}$ **f) $\frac{3}{5}$** **g) $\frac{4}{3}$**

2 A partir da questão anterior, é falso afirmar que:

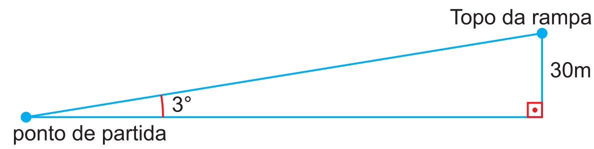
a) $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ b) cos B = sen C c) sen B = cos C
d) tg B < 1 e) tg C < 1

RESOLUÇÃO:

$\text{tg } C = \frac{4}{3} > 1$

Resposta: E

3 **(MODELO ENEM)** – Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é

a) 2,5. b) 7,5. c) 10. d) 15. e) 30.

RESOLUÇÃO:

I) Sendo x, em metros, o comprimento da rampa, temos:

$$\text{sen } 3° = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30}{0{,}05} \Leftrightarrow x = 600$$

II) Observando que 4 metros por segundo correspondem a 240 metros por minuto e sendo t o tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa, temos:

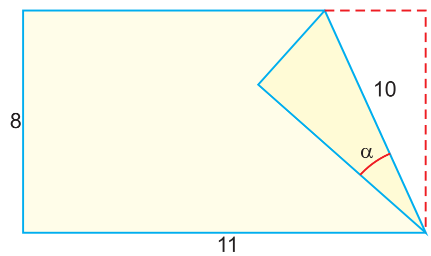
$$t = \frac{600}{240} = 2{,}5$$

Resposta: A

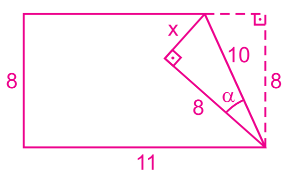
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M201 e MAT1M202**

4 Um folha de papel retangular é dobrada, conforme a figura a seguir. Determine o valor de 40 . tg α.



RESOLUÇÃO:

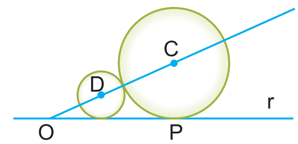


I) $x^2 + 8^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 6$

II) $\text{tg } \alpha = \dfrac{x}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

III) $40 \cdot \text{tg } \alpha = 40 \cdot \dfrac{3}{4} = 30$

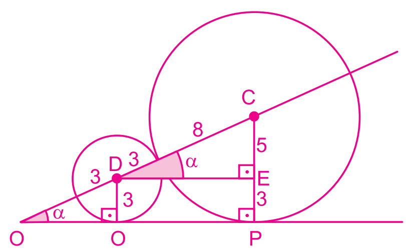
5 **(UNESP – MODELO ENEM)** – A figura mostra duas circunferências de raios 8 cm e 3 cm, tangentes entre si e tangentes à reta r. C e D são os centros das circunferências.



Se α é a medida do ângulo CÔP, o valor de sen α é:

a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{5}{11}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{8}{23}$ e) $\dfrac{3}{8}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo retângulo DEC, temos:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{5}{3+8} = \dfrac{5}{11}$

Resposta: B

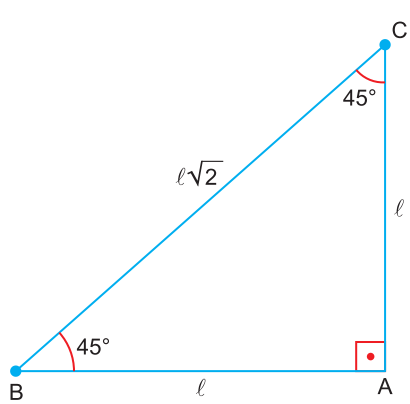
Módulos 18 a 20

Arcos notáveis

Palavras-chave:
- Triângulo retângulo isósceles
- Triângulo equilátero

1. Sen 45°, cos 45°, tg 45°

Num triângulo retângulo isósceles qualquer, se ℓ for a medida de cada cateto então $\ell\sqrt{2}$ será a medida da hipotenusa pois $(BC)^2 = \ell^2 + \ell^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 2\ell^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BC = \ell\sqrt{2}$.



Assim sendo:

a) $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \textbf{sen 45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \hat{B} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \textbf{cos 45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg } \hat{B} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \text{tg } 45° = \dfrac{\ell}{\ell} \Rightarrow \textbf{tg 45° = 1}$

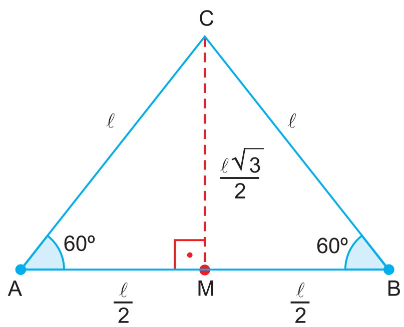
2. Sen 60°, cos 60° e tg 60°

Num triângulo equilátero qualquer, se ℓ for a medida de cada um dos lados então $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ será a medida da altura, pois:

$$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow \ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (MC)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MC)^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MC)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Leftrightarrow MC = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Assim sendo:

a) $\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{MC}{AC} \Rightarrow \text{sen}\,60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **sen 60° =** $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $\cos\hat{A} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **cos 60° =** $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

c) $\text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{MC}{AM} \Rightarrow \text{tg}\,60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Leftrightarrow$ **tg 60° =** $\mathbf{\sqrt{3}}$

3. Sen 30°, cos 30° e tg 30°

No triângulo retângulo AMC do item anterior temos:

a) $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow \text{sen}\,30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

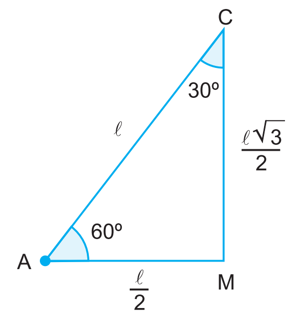
$\Leftrightarrow$ **sen 30° =** $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

b) $\cos\hat{C} = \dfrac{MC}{AC} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **cos 30° =** $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

c) $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{AM}{MC} \Rightarrow \text{tg}\,30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ **tg 30° =** $\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$



Note que:

$\text{sen}\,30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

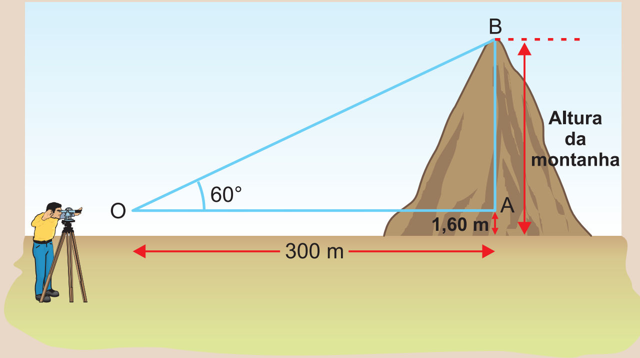
$\text{sen}\,45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. Valores notáveis (30°, 45°, 60°)

x	sen x	cos x	tg x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercício Resolvido – Módulos 18 a 20

1 **(MODELO ENEM)** – Para determinar a altura de uma montanha, um topógrafo colocou-se com seu teodolito a 300 m da montanha.



Posiciona o aparelho que lhe fornece a medida do ângulo de visada de parte do morro, igual a 60º.

Sabendo que o teodolito tem altura de 1,60 m, o topógrafo pode determinar a altura da montanha. Adotando $\sqrt{3} = 1,7$, a altura determinada é:

a) 510 m. b) 420 m. c) 511,6 m.
d) 421,6 m. e) 610 m.

Resolução

No triângulo OAB, retângulo em A, temos:

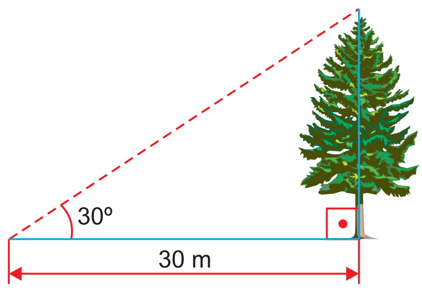
$$\text{tg } 60^\circ = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{300} \Rightarrow AB = 300 . \sqrt{3} = 300 \;.\; 1,7 = 510 \text{ m.}$$

O topógrafo conclui que a montanha tem 510 + 1,6 = 511,6 m de altura.

Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 18

1 **(USF – MODELO ENEM)** – Na figura abaixo, uma árvore é vista sob um ângulo de 30°, a uma distância de 30 m de sua base. A altura da árvore, em metros, é igual a



a) 35 b) 17 c) 14 d) 28 e) 30

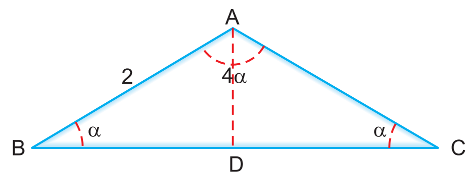
RESOLUÇÃO:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = 10 \;.\; \sqrt{3} \cong 10 \;.\; 1,7 \cong 17 \text{ m}$$

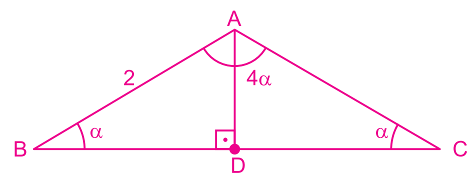
Resposta: B

2 **(MACKENZIE)** – Na figura, a medida da bissetriz $\overline{AD}$ é:

a) 2 b) 1 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 3



RESOLUÇÃO:



Sendo o ΔABC isósceles e AD mediana, tem-se que AD é altura.

Como $4\alpha + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

Então, no ΔBDA, retângulo em D, tem-se:

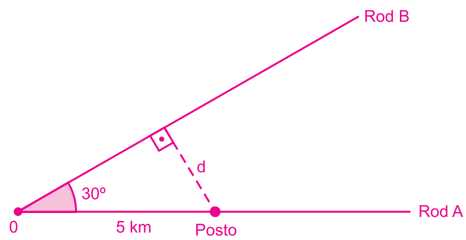
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow AD = 1$$

Resposta: B

3 Duas rodovias **A** e **B** encontram-se em **O**, formando um ângulo de 30°. Na rodovia **A** existe um posto de gasolina que dista 5 km de **O**. A distância do posto de gasolina à rodovia **B** é

a) 5 km b) 10 km c) 2,5 km
d) 15 km e) 1,25 km

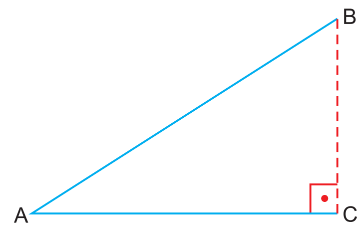
RESOLUÇÃO:



$$\text{sen } 30° = \frac{d}{5km} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{5km} \Leftrightarrow d = 2{,}5km$$

Resposta: C

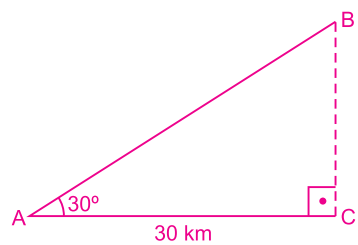
4 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Três cidades, A, B e C, são interligadas por estradas, conforme mostra a figura.



As estradas AC e AB são asfaltadas. A estrada CB é de terra e será asfaltada. Sabendo-se que AC tem 30 km, o ângulo entre AC e AB é de 30°, e o triângulo ABC é retângulo em C, a quantidade de quilômetros da estrada que será asfaltada é

a) $30\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{3}$ c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo ABC, retângulo em C, tem-se

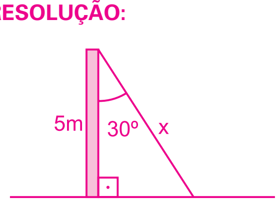
$$\text{tg } 30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BC}{30km} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 10\sqrt{3} \text{ km}$$

Resposta: B

Exercícios Propostos – Módulo 19

1 **(MODELO ENEM)** – Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 5 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 30°. Qual é o comprimento da escada, em metros?

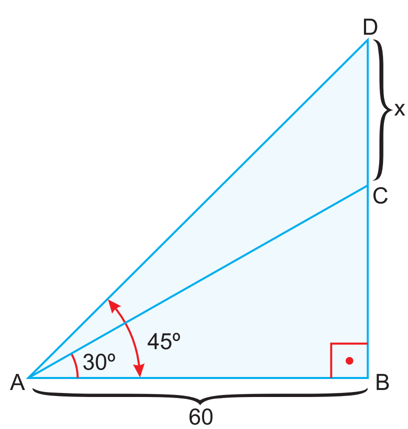
RESOLUÇÃO:



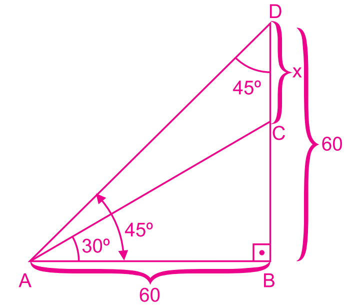
$$\cos 30° = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ **m**

2 Determinar o valor de x, na figura abaixo:



RESOLUÇÃO:



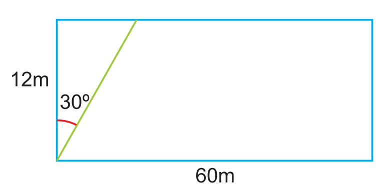
O triângulo ABD é isósceles.

AB = BD ⇒ BD = 60

$\mathbf{tg\ 30° = \dfrac{BC}{60} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BC}{60} \Rightarrow BC = 20\sqrt{3}}$

$\mathbf{x = 60 - 20\sqrt{3} = 20(3 - \sqrt{3})}$

3 **(MODELO ENEM)** – A figura indica um terreno retangular repartido em dois lotes, um na forma de triângulo e o outro na de trapézio:



Lembrando que a área de um triângulo é $\dfrac{\textbf{base} \times \textbf{altura}}{\textbf{2}}$, concluímos que a área do lote na forma de trapézio, em m^2, é igual a

a) $50\sqrt{3}$

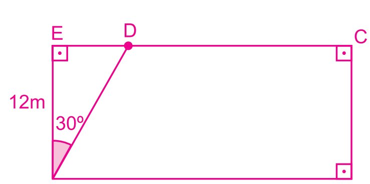
b) $60\sqrt{3}$

c) $6(15 + \sqrt{3})$

d) $24(30 - \sqrt{3})$

e) $60(15 - \sqrt{3})$

RESOLUÇÃO:



$\mathbf{I)\ tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{ED}{12} \Leftrightarrow ED = 4\sqrt{3}}$

$\mathbf{II)\ S_{ADE} = \dfrac{DE\ .\ AE}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}\ .\ 12}{2} = 24\sqrt{3}}$

$\mathbf{III)\ S_{ABCE} = 60\ .\ 12 = 720}$

$\mathbf{IV)\ S_{ABCD} = 720 - 24\sqrt{3} = 24(30 - \sqrt{3})}$

Resposta: D

4 **(MACKENZIE)** – Na figura, tg α vale

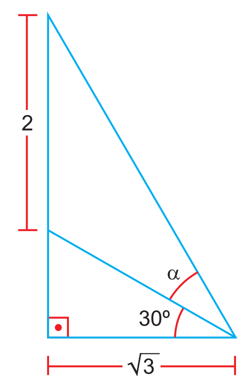
a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

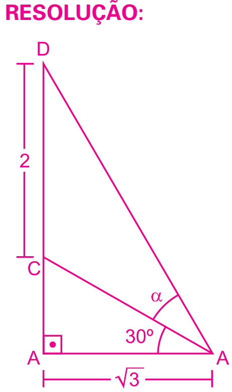
c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{2}{3}$



RESOLUÇÃO:



1) No triângulo retângulo ABC, tem-se

$\mathbf{tg\ 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{AC}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 1}$

2) No triângulo retângulo ABD, tem-se

$\mathbf{tg(\alpha + 30°) = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow}$

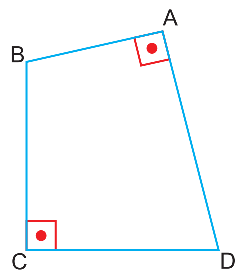
$\mathbf{\Rightarrow tg(\alpha + 30°) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow \alpha + 30° = 60° \Rightarrow \alpha = 30°}$

$\mathbf{Portanto\ tg\ \alpha = tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

Resposta: C

5 **(VUNESP)** – Do quadrilátero ABCD da figura, sabe-se que os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos $C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B$ medem, respectivamente, 45° e 30°; o lado CD mede 2dm. Então os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:



a) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$

e) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO:

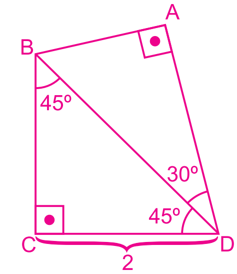
I) BCD é isósceles (BC = CD = 2 e BD = $2 \cdot \sqrt{2}$)

II) $\text{sen } 30° = \dfrac{AB}{2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

III) $\cos 30° = \dfrac{AD}{2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$

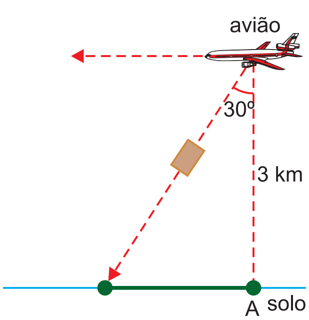
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AD}{2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{6}$



Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 20

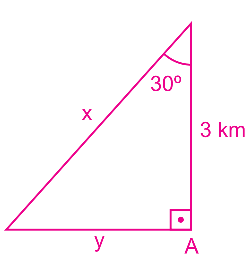
1 **(MODELO ENEM)** – Um volume é lançado de um avião que está a 3 km de altitude. Devido à velocidade do avião e à ação do vento o volume cai segundo uma reta que forma um ângulo de 30° com a vertical. Assumindo que $\sqrt{3}$ = 1,7, calcular:



a) a distância percorrida por este volume desde o lançamento até tocar o chão.

b) a distância do ponto A até o ponto em que o volume toca o chão.

RESOLUÇÃO:



a) $\cos 30° = \dfrac{3}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3{,}4$ **km**

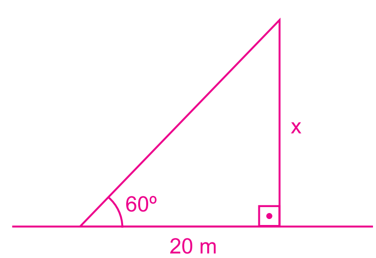
b) $\text{tg } 30° = \dfrac{y}{3} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow y = 1{,}7$ **km**

2 **(MODELO ENEM)** – Ao meio-dia, Sol a pino, um garoto empina pipa, e a linha que a segura, bem esticada, forma com o chão um ângulo de 60°. Como a sombra da pipa está distante 20 m de onde se encontra o garoto e considerando $\sqrt{3}$ = 1,73, podemos afirmar que a pipa está a uma altura de:

a) 17,40 m b) 28,10 m c) 34,60 m

d) 38,50 m e) 35,14 m

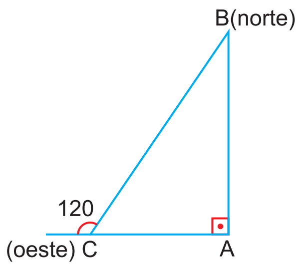
RESOLUÇÃO:



$\text{tg } 60° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 20 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow x = 34{,}6$ **m**

Resposta: C

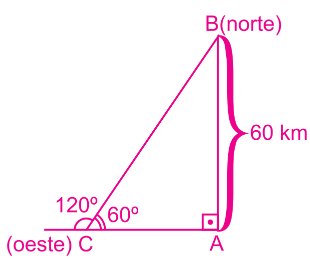
3 **(VUNESP – MODELO ENEM)** – Um pequeno avião deveria partir de uma cidade A rumo a uma cidade B ao norte, distante 60 quilômetros de A. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto C, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.



Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou partindo de A até chegar a B é

a) $30\sqrt{3}$ b) $40\sqrt{3}$ c) $60\sqrt{3}$ d) $80\sqrt{3}$ e) $90\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:
A partir do enunciado, no triângulo ABC, temos:



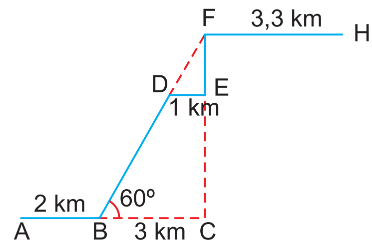
$$\text{sen } 60° = \frac{60}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{BC} \Rightarrow BC = 40\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{60}{AC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{AC} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}$$

A distância em quilômetros, que o avião percorreu partindo de A até chegar a B, é: $AC + BC = 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

Resposta: C

4 **(VUNESP)** – Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos AB, BD, DE, EF e FH, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e DE é paralelo a BC.



Assumindo o valor $\sqrt{3}$ = 1,7 e sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine

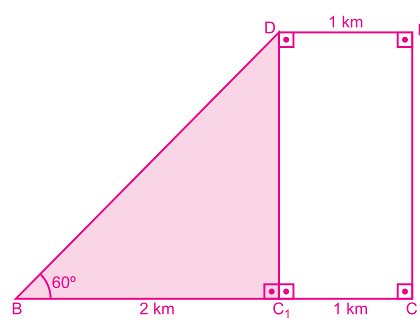
a) as medidas dos segmentos BD e EF em quilômetros;
b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função y = 4 + 0,8x sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais.

RESOLUÇÃO:

a) De acordo com o enunciado, $C\hat{B}D = E\hat{D}F = 60°$ (ângulos correspondentes). No triângulo retângulo DEF, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{EF}{ED} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{EF}{1} \Rightarrow EF = \sqrt{3} \Rightarrow EF = 1{,}7\text{km}.$$

Na figura seguinte, com $\overline{DC_1}$ // $\overline{EC}$, temos o triângulo BC_1D retângulo em C_1 e portanto



$$\cos 60° = \frac{BC_1}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{BD} \Rightarrow BD = 4\text{km}$$

b) A distância de A a H, em quilômetros, é igual a
AB + BD + DE + EF + FH = 2 + 4 + 1 + 1,7 + 3,3 = 12
Como o preço da corrida do táxi é dado pela função
y = 4 + 0,8 . x, para x = 12km, tem-se:
y = 4 + 0,8 . 12 ⇒ y = 13,60 reais

Respostas: a) BD = 4km e EF = 1,7km
b) R$ 13,60

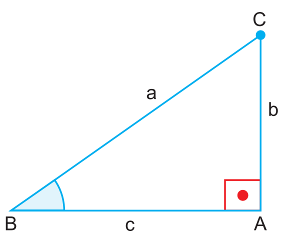
Módulos 21 e 22

Relações fundamentais

Palavras-chave:
• Seno • Cosseno • Tangente
• Cotangente • Secante • Cossecante

1. $sen^2x + cos^2x = 1$

Num triângulo retângulo de catetos **b** e **c** e hipotenusa **a** temos, de acordo com o teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$.



Assim sendo, se **x** for a medida do ângulo agudo **B** então:

$$sen^2x + cos^2x = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Note que

a) $sen^2x = (sen\ x)^2$

b) $cos^2x = (cos\ x)^2$

c) $sen^2x = 1 - cos^2x$

d) $cos^2x = 1 - sen^2x$

2. $tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$

Num triângulo retângulo de catetos **b** e **c** e hipotenusa **a**, se **x** for a medida do ângulo agudo **B** então

$$tg\ x = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\ x}{cos\ x} \Rightarrow tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

3. Cotangente

A **cotangente** de um ângulo agudo **x** é, por definição **o inverso da tangente**. É representada com o símbolo **cotg x**. Assim sendo:

$$cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

4. Secante

A **secante** de um ângulo agudo **x** é, por definição, **o inverso do cosseno**. É representada com o símbolo **sec x**. Assim sendo:

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

5. Cossecante

A **cossecante** de um ângulo agudo **x** é, por definição, **o inverso do seno**. É representada com o símbolo **cossec x**.

Assim sendo:

$$cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

6. Relações auxiliares

a) Dividindo ambos os membros da relação fundamental, $sen^2x + cos^2x = 1$, por cos^2x, temos:

$$\frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow tg^2x + 1 = sec^2x$$

b) Dividindo ambos os membros da relação fundamental, $sen^2x + cos^2x = 1$, por sen^2x, temos:

$$\frac{sen^2x}{sen^2x} + \frac{cos^2x}{sen^2x} = \frac{1}{sen^2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + cotg^2x = cossec^2x$$

De (a) e (b) temos:

$$sec^2x = 1 + tg^2x$$

$$cossec^2x = 1 + cotg^2x$$

7. Conclusões

Sendo x a medida de um ângulo agudo qualquer, valem as seguintes relações:

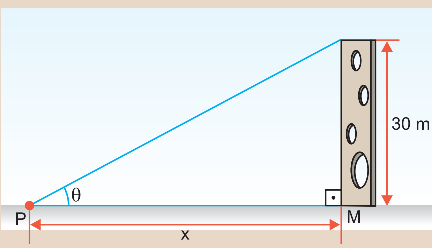
$sen^2x + cos^2x = 1$	
$tg\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$	$cotg\ x = \dfrac{cos\ x}{sen\ x} = \dfrac{1}{tg\ x}$
$sec\ x = \dfrac{1}{cos\ x}$	$cossec\ x = \dfrac{1}{sen\ x}$
$sec^2x = 1 + tg^2x$	$cossec^2x = 1 + cotg^2x$

Exercícios Resolvidos – Módulos 21 e 22

1 **(MODELO ENEM)** – Uma prefeitura pretende asfaltar um caminho, em uma região plana, desde um ponto inicial P até um monumento de 30 metros de altura, ao custo de R$ 50,00 o metro quadrado. Do ponto P ao topo do monumento foi determinado um ângulo de inclinação θ, com o plano desse caminho. Sabendo que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ e que o caminho deve ter 2 metros de largura, calcular o valor do menor custo dessa obra.

a) R$ 2 000,00 b) R$ 4 000,00
c) R$ 1 000,00 d) R$ 40 000,00
e) R$ 20 000,00

Resolução



O menor custo da obra será obtido quando do ponto inicial P ao monumento, o caminho for representado por um segmento de reta, conforme figura.

Sendo $\text{sen}\,\theta = 3/5$ e $\cos\theta = 4/5$, temos:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, na figura temos:

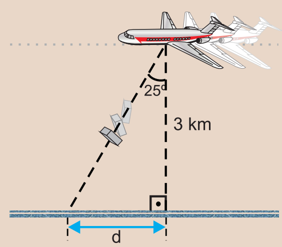
$$\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = 40 \text{ m}.$$

O custo da obra, com 2 m de largura e R$ 50,00 o metro quadrado, resulta:

C = 2 . 40 . R$ 50,00 = R$ 4 000,00

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)**



Um volume é lançado de um avião que está a 3 km de altitude. Devido à velocidade do avião e à ação do vento, o volume cai segundo uma reta que forma um ângulo de 25° com a vertical. Que distância aproximadamente **d**, medida no solo, esse volume percorreu?

Dado: sen 25° = 0,42

a) 1,38 km b) 1,08 km
c) 2,13 km d) 1,75 km
e) 0,98 km

Resolução

$$\text{tg}\,25° = \frac{d}{3} \Rightarrow d = 3 \cdot \text{tg}\,25°$$

Se $\text{sen}\,25° = 0{,}42$ e $\text{sen}^2 25° + \cos^2 25° = 1$,

então, $\cos 25° = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,25°} =$

$= \sqrt{1 - (0{,}42)^2} = 0{,}91$

Logo: $\text{tg}\,25° = \dfrac{\text{sen}\,25°}{\cos 25°} = \dfrac{0{,}42}{0{,}91} = 0{,}46$

Então, $d = 3 \cdot 0{,}46 \Rightarrow d = 1{,}38$ km

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 21

1 Se 0° < x < 90° então a expressão $\dfrac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\cos x}$ é igual a:

a) sen x b) cos x c) tg x
d) cotg x e) sec x

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\text{sen}^2x + \cos^2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Resposta: E

2 **(UN.ESTÁCIO DE SÁ)** – Simplificando a expressão y = sen 17° . cotg 17° . cotg 73° . sec 73°, encontramos:

a) – 2 b) – 1 c) 2 d) 1 e) 5

RESOLUÇÃO:

$$y = \text{sen}\,17° \cdot \frac{\cos 17°}{\text{sen}\,17°} \cdot \frac{\cos 73°}{\text{sen}\,73°} \cdot \frac{1}{\cos 73°}$$

$$y = \cos 17° \cdot \frac{1}{\text{sen}\,73°}$$

Sendo 17° + 73° = 90°, resulta sen 73° = cos 17°, portanto

$$y = \cos 17° \cdot \frac{1}{\cos 17°} = 1$$

Resposta: D

3 Simplificando a expressão tg x . cos x . cossec x, para 0° < x < 90°, obtém-se:

a) 0 b) 1 c) – 1 d) sen x e) sec x

RESOLUÇÃO:

$$\text{tg}\,x \cdot \cos x \cdot \text{cossec}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\text{sen}\,x} = 1$$

Resposta: B

4 Se $0° < x < 90°$ e $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \dfrac{7}{25}$ então sen x será igual a:

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{10}$

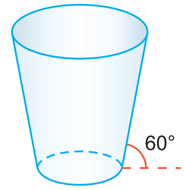
RESOLUÇÃO:

$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \dfrac{7}{25} \Leftrightarrow (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = \dfrac{7}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2\text{sen}^2 x = \dfrac{7}{25} \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow \text{sen } x = \dfrac{3}{5}$

(pois $0° < x < 90°$)

5 **(MODELO ENEM)** – Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



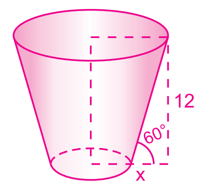
Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.

Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá ter raio igual a

a) $3\sqrt{3}$ m. b) $4\sqrt{3}$ m. c) $5\sqrt{3}$ m.

d) $6\sqrt{3}$ m. e) $7\sqrt{3}$ m.

RESOLUÇÃO:



Se $r = 2\sqrt{3}$ m é o raio da base, o raio da tampa é r + x, sendo

$\text{tg } 60° = \dfrac{12}{x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$

O raio da tampa é $(2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})\text{m} = 6\sqrt{3}$ m

Resposta: D

Exercícios Propostos – Módulo 22

1 Sabendo que $0° < x < 90°$ e $\text{sen } x = \dfrac{3}{5}$, calcular cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x.

RESOLUÇÃO:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$ (ângulo agudo)

$\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg } x = \dfrac{3}{4}$

$\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \text{cotg } x = \dfrac{4}{3}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \sec x = \dfrac{5}{4}$

$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \text{cossec } x = \dfrac{5}{3}$

2 Se $0° < x < 90°$ e $\text{tg } x = \sqrt[3]{3}$, então o valor de $\dfrac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\dfrac{5}{2}$ e) 3

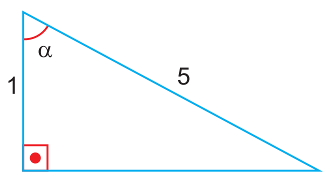
RESOLUÇÃO:

$$\frac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}^3 x - \cos^3 x} = \frac{\dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} + \dfrac{\cos^3 x}{\cos^3 x}}{\dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} - \dfrac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} =$$

$$= \frac{\text{tg}^3 x + 1}{\text{tg}^3 x - 1} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = 2$$

Resposta: C

3 **(MACKENZIE)** – Observando o triângulo da figura, podemos afirmar que $\dfrac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$ vale:



a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{25}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{2}{5}$

e) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

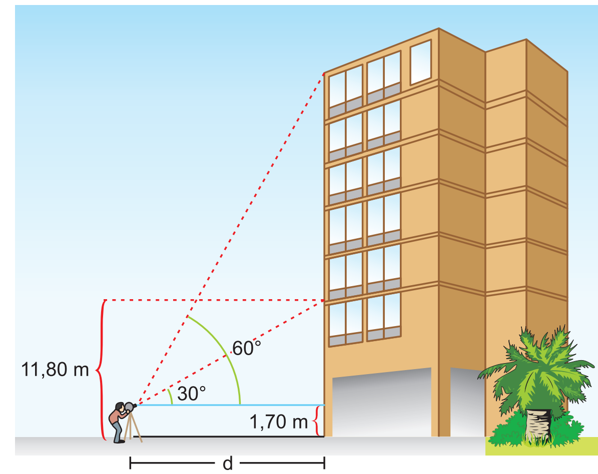
RESOLUÇÃO:

$$\frac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\dfrac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \cos\alpha = \frac{1}{5}$$

Resposta: A

4 **(UFPB – MODELO ENEM)** – Em um determinado edifício, os primeiros andares são destinados às garagens e ao salão de festas e os demais andares, aos apartamentos. Interessado nas dimensões desse prédio, um topógrafo coloca um teodolito (instrumento óptico para medir ângulos horizontais e ângulos verticais) a uma distância d do prédio. Com um ângulo vertical de 30°, esse topógrafo observou que o primeiro piso de apartamentos está a uma altura de 11,80 m do solo; e com um ângulo vertical de 60°, avistou o topo do edifício, conforme a figura abaixo.



De acordo com esses dados e sabendo-se que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, a altura do edifício é:

a) 31 m b) 23,60 m c) 30,30 m
d) 21,90 m e) 32 m

RESOLUÇÃO:
Sendo h, em metros, a altura do prédio temos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10,1}{d} \\[2ex] \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \dfrac{h - 1,7}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h - 1,7}{10,1} = 3 \Leftrightarrow h = 32$$

Resposta: E

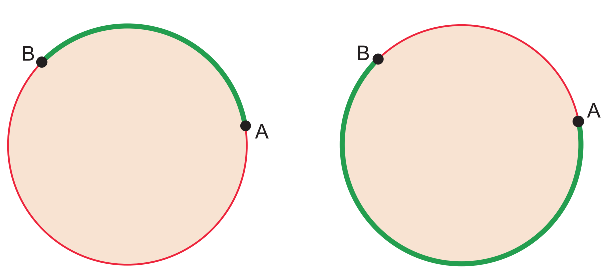
Módulo 23 – Medidas de arcos e ângulos

Palavras-chave:
• Graus • Radianos

1. Arcos na circunferência

Seja uma circunferência, na qual são tomados dois pontos **A** e **B**. A circunferência ficará dividida em duas partes chamadas **arcos**. Os pontos **A** e **B** são as extremidades desses arcos.

Quando A e B coincidem, um desses arcos é chamado arco nulo e o outro, arco de uma volta.



2. Medida de um arco em graus

O arco de **uma volta** mede **360°** e o arco **nulo** mede **0°**.

Assim sendo, o **arco de 1 grau** (representado pelo símbolo 1°) **é um arco igual a $\dfrac{1}{360}$ do arco de uma volta**.

Os submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

O arco de um minuto (representado pelo símbolo 1′) é um arco igual a $\dfrac{1}{60}$ do arco de um grau.

Simbolicamente: ***1° = 60′***

O arco de um segundo (representado pelo símbolo 1″) é um arco igual a $\dfrac{1}{60}$ do arco de um minuto.

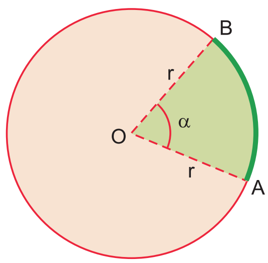
Simbolicamente: $1' = 60''$

Note, ainda que: $1° = 60' = 3600''$

3. Medida de um arco em radianos

A medida de um arco, em radianos, é a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência sobre a qual este arco está determinado; assim:

$$\alpha = \frac{compr\,(\overset{\frown}{AB})}{r}$$



Observações

- O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 radiano (1 rad), se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência.
- A medida de um arco, em radianos, é um número real "puro" e portanto é costume omitir o símbolo rad. Ao dizer ou escrever que um certo arco mede 3, por exemplo, fica subentendido que sua medida é de 3 radianos ou seja, que o comprimento do arco é o triplo da medida do raio.
- O arco de **uma volta**, cuja medida é **360°**, tem comprimento igual a **2 . π . r**. e sua medida em radianos será, portanto, **2π** pois $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{2.\pi.r}{r} = 2\pi \cong 6{,}28$.

4. Conversões

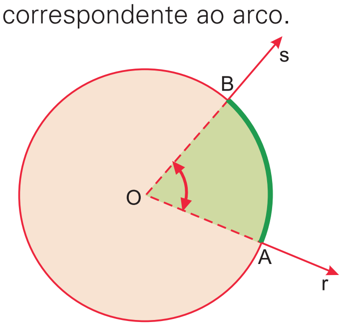
Sendo **G** a medida do arco em graus e **R** a medida em radianos, as conversões de unidades (Graus-Radianos) são feitas através de **uma regra de três simples** a partir da correspondência **360° ↔ 2π** ou **180° ↔ π**. Assim sendo:

$$\begin{cases} 360° \;\ldots\ldots\; 2\pi \\ G \;\ldots\ldots\; R \end{cases} \Leftrightarrow \frac{360°}{G} = \frac{2\pi}{R} \Leftrightarrow \frac{180°}{G} = \frac{\pi}{R}$$

5. Medida de ângulos

Seja $r\hat{O}s$ um ângulo de vértice O e lados nas semirretas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$. Tomemos uma circunferência de centro no ponto O e raio qualquer.

Os pontos da circunferência e que pertencem à região angular formam um arco $\overset{\frown}{AB}$. Adota-se como medida do ângulo $A\hat{O}B$, a própria medida (em graus ou radianos) do arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim sendo, a medida (em graus ou radianos) de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do ângulo central $A\hat{O}B$ correspondente ao arco.



Exercícios Resolvidos

1 Converter 120° em radianos.

Resolução

$$\begin{cases} 360° \ldots 2\pi \\ 120° \ldots R \end{cases} \Leftrightarrow \frac{360°}{120°} = \frac{2\pi}{R} \Leftrightarrow$$

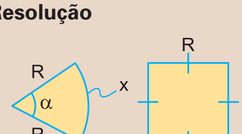
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{R} = 3 \Leftrightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

Resposta: $\mathbf{\frac{2\pi}{3}}$

2 **(FUVEST)** – O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então, α é igual a

a) π/3 b) 2 c) 1 d) 2π/3 e) π/2

Resolução



$R + R + x = 4R \Rightarrow x = 2R$

$\alpha = \frac{x}{R} = \frac{2R}{R} = 2$

Resposta: B

3 **(FGV – MODELO ENEM)** – Dois pontos, na linha do Equador, apresentam o sol a pino com defasagem de 3 horas. Sabe-se que a menor distância percorrida sobre essa linha, de um ponto ao outro, é 5.000 km. Qual deve ser o diâmetro aproximado do planeta Terra, em quilômetros?

a) $\frac{30000}{2\pi}$ b) $\frac{40000}{\pi}$

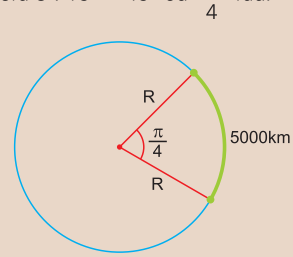
c) $\frac{20000}{\pi - 1}$ d) $\frac{30000}{(\pi - 2)^2}$

e) $\frac{40000}{\pi^2 - 2}$

Resolução

I) Para cada hora corresponde um ângulo equatorial de $\frac{360°}{24} = \frac{180°}{12} = 15°$, assim, para uma defasagem de 3 horas, o ângulo equatorial será $3 \,.\, 15° = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

II)



$$\frac{\pi}{4} = \frac{5000 \text{ km}}{R} \Leftrightarrow R = \frac{20000}{\pi} \text{ km} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2R = \frac{40000}{\pi} \text{ km}$$

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Quantos minutos tem o arco de 30°?

RESOLUÇÃO:

1° ——— 60′
30° ——— x
x = 1 800′

2 Quantos segundos tem o arco de 5° 15′?

RESOLUÇÃO:

1° ——— 3 600″
5° ——— x
x = 18 000″

1′ ——— 60″
15′ ——— y
y = 900″
5°15′ = 18 900″

3 Converter as seguintes medidas de graus para radianos.

a) 30° b) 36° c) 240°

RESOLUÇÃO:

a) π ——— 180°
x ——— 30°

$x = \dfrac{\pi}{6}$

b) 180° ——— π
36° ——— x

$x = \dfrac{36°\pi}{180°}$

$x = \dfrac{\pi}{5}$

c) 180° ——— π
240° ——— x

$x = \dfrac{240°\pi}{180°}$

$x = \dfrac{4\pi}{3}$

4 Converter as seguintes medidas de radianos para graus.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$

RESOLUÇÃO:

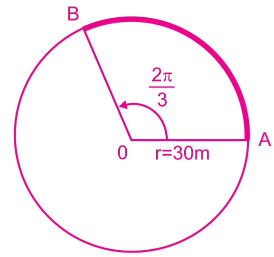
a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{\pi \text{ rad}}{3} = \dfrac{180°}{3} = 60°$

b) $\dfrac{\pi}{4}$ rad $= \dfrac{\pi \text{ rad}}{4} = \dfrac{180°}{4} = 45°$

5 **(MODELO ENEM)** – Uma pessoa caminha em uma pista circular, com raio igual a 30 m. Se essa pessoa percorrer, nessa pista, um ângulo central correspondente a $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos, qual será a distância percorrida em metros? (adotar π = 3,14).

a) 31,4 b) 73,6 c) 85,1 d) 62,8 e) 58,7

RESOLUÇÃO:



Pela definição de medida de arco, em radianos, temos:

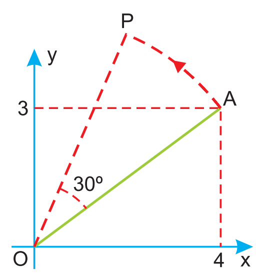
$\alpha = \dfrac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{r}$

$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{30} \Leftrightarrow \text{comp}(\overset{\frown}{AB}) = 20.\pi \text{ m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp}(\overset{\frown}{AB}) = 20.3{,}14 \text{ m} = 62{,}8 \text{ m}$

Resposta: D

6 **(MACKENZIE)** – O segmento OA descreve um ângulo de 30° em torno da origem, como indica a figura. Adotando π = 3, a distância percorrida pelo ponto A é:



a) 2,5
b) 5,5
c) 1,7
d) 3,4
e) 4,5

RESOLUÇÃO:

A distância do ponto A(4;3) à origem O(0;0) é

$d_{AO} = R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

O arco de circunferência de raio R = 5 e ângulo central $30° = \dfrac{\pi}{6}$ **radiano tem comprimento igual a** $\overset{\frown}{AP}$**, tal que:**

$\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\text{comp}(\overset{\frown}{AP})}{OA} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\text{comp}(\overset{\frown}{AP})}{5}$

Para $\pi = 3$**, resulta** $\text{comp}(\overset{\frown}{AP}) = \dfrac{5 \,.\, 3}{6} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5.$

Resposta: A

Módulo 24

Ciclo trigonométrico – determinações

Palavras-chave:
• Quadrantes • Determinações positivas • Determinações negativas

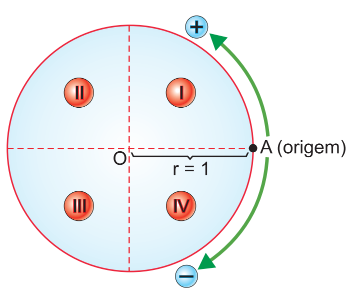
1. Ciclo trigonométrico

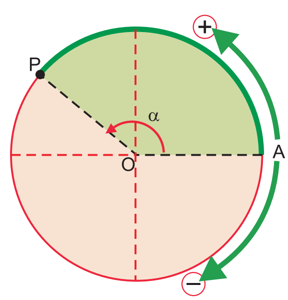
Chamamos de **ciclo trigonométrico** a uma circunferência de raio unitário na qual fixamos um ponto (A) como origem dos arcos e adotamos o sentido **anti-horário** como sendo o **positivo**.

2. Arco trigonométrico

Chamamos de **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos **"infinitos" arcos de origem A** e **extremidade P**. Esses arcos são obtidos partindo-se da origem **A** e girando em qualquer sentido (positivo ou negativo) até a extremidade **P**, seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

Analogamente, chamamos de **ângulo trigonométrico** $A\hat{O}P$ ao conjunto dos **"infinitos" ângulos** de **lado inicial** $\overrightarrow{OA}$ e **lado terminal** $\overrightarrow{OP}$.



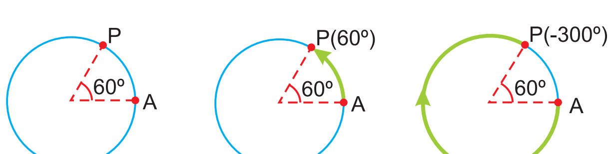


3. Conjunto das determinações de um arco

Seja **P** um ponto qualquer de um ciclo trigonométrico de origem **A**. A medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, de origem **A** e extremidade **P**, é, por convenção:

a) Positiva se o sentido de percurso de A para P for o anti-horário.

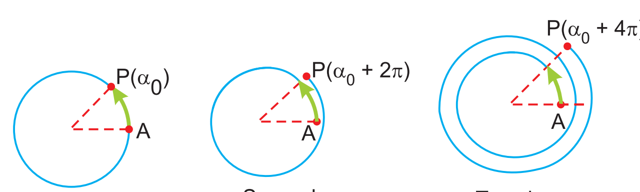
b) Negativa se o sentido de percurso de A para P for o horário.



O ponto **P** é extremidade de **infinitos** arcos de origem **A** e a medida de cada um deles é chamada **determinação**. A medida α_0 do arco $\overset{\frown}{AP}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, é chamada **primeira determinação positiva** do arco.

Adicionando à primeira determinação positiva o número **2π**, que equivale a "percorrer **uma volta** do sentido anti-horário", obtém-se o número $\boldsymbol{\alpha_0 + 2\pi}$ que é a **segunda determinação positiva** de $\overset{\frown}{AP}$.

Adicionando à primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = \boldsymbol{4\pi}$, que equivale a "percorrer **duas voltas** no sentido anti-horário", obtém-se o número $\boldsymbol{\alpha_0 + 4\pi}$ que é a **terceira determinação positiva** do arco $\overset{\frown}{AP}$, e assim por diante.



Primeira determinação positiva — Segunda determinação positiva — Terceira determinação positiva

Subtraindo da primeira determinação positiva o número **2π**, que equivale a "percorrer **uma volta** no sentido horário", obtém-se $\boldsymbol{\alpha_0 - 2\pi}$ que é a **primeira determinação negativa** do arco $\overset{\frown}{AP}$.

Subtraindo da primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = \boldsymbol{4\pi}$, que equivale a "percorrer **duas voltas** no sentido horário", obtém-se $\boldsymbol{\alpha_0 - 4\pi}$ que é a **segunda determinação negativa**, e assim por diante.

Primeira determinação negativa — Segunda determinação negativa

As infinitas determinações dos arcos de origem **A** e extremidade **P** são, pois:

	Determinações positivas	Determinações negativas
Primeira	α_0	$\alpha_0 - 1 \,.\, 2\pi$
Segunda	$\alpha_0 + 1 \,.\, 2\pi$	$\alpha_0 - 2 \,.\, 2\pi$
Terceira	$\alpha_0 + 2 \,.\, 2\pi$	$\alpha_0 - 3 \,.\, 2\pi$
Quarta	$\alpha_0 + 3 \,.\, 2\pi$	$\alpha_0 - 4 \,.\, 2\pi$
⋮	⋮	⋮

Todas estas determinações são do tipo $\alpha_0 + n \,.\, 2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e portanto o conjunto das determinações do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ é:

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \alpha_0 + n \,.\, 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

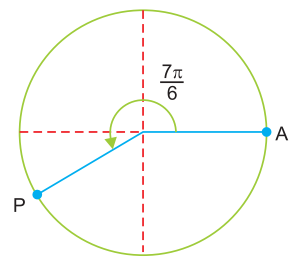
Observações

a) Se a medida dos arcos for expressa em graus, devemos escrever $\alpha = \alpha_0 + n \,.\, 360°$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) O número α_0, utilizado no conjunto das determinações, pode ser o valor de uma qualquer das determinações. É costume, porém, escolher o valor da primeira determinação positiva ou negativa.

c) A cada ponto **P** estão associados infinitos números reais, mas **a cada número real está associado um único ponto P**.

Exemplo



O conjunto das determinações dos arcos de origem **A** e extremidade **P** assinalados na figura é

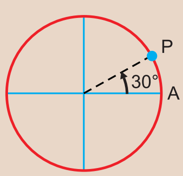
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + n \,.\, 2\pi\right\},$$

com $n \in \mathbb{Z}$

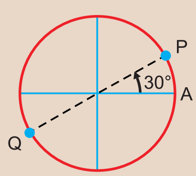
Exercício Resolvido

1 Determinar o conjunto das determinações dos arcos indicados, para cada figura.

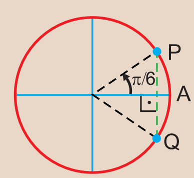
I)



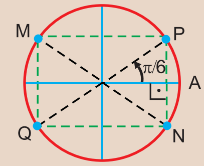
II)



III)



IV)



Resolução

A partir das figuras, temos:

I) $30° + n \,.\, 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$

II) $30° + n \,.\, 180°$ $(n \in \mathbb{Z})$

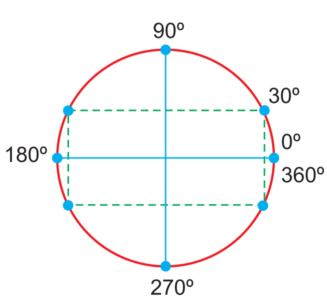
III) $\pm \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

IV) $\pm \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

Exercícios Propostos

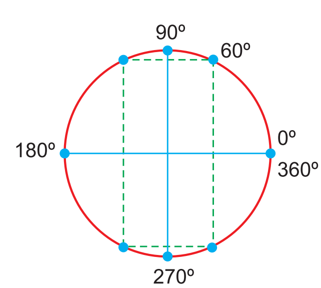
1 Escreva a 1ª determinação positiva dos arcos assinalados em cada ciclo trigonométrico:

a)



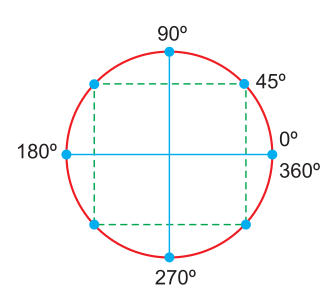
RESOLUÇÃO:
150°, 210° e 330°

b)



RESOLUÇÃO:
120°, 240° e 300°

c)



RESOLUÇÃO:
135°, 225° e 315°

2 Calcular a 1ª determinação positiva dos arcos:
a) 1630° b) –1630° c) 2100°

RESOLUÇÃO:

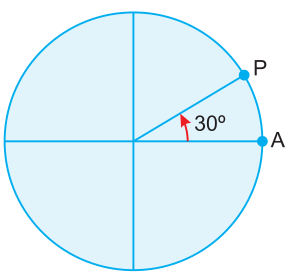
a) $1.630 \mid 360$, resto 190, quociente 4 $\Rightarrow a_0 = 190°$

b) $a_0 = 360° - 190° = 170°$

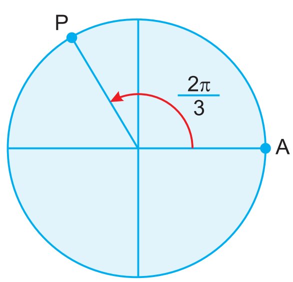
c) $2.100 \mid 360$, resto 300, quociente 5 $\Rightarrow a_0 = 300°$

3 Escrever o conjunto das determinações dos arcos assinalados, com extremidades no ponto **P**.

a)



b)



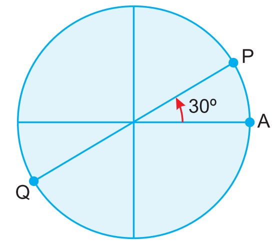
RESOLUÇÃO:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

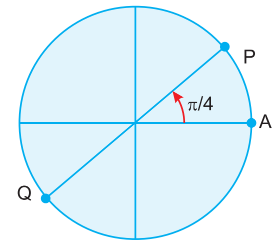
b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

4 Escrever, em uma única expressão, o conjunto dos arcos assinalados, com extremos em **P** e **Q**, conforme o caso.

a)



b)

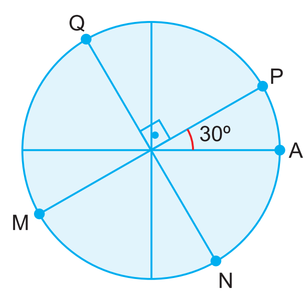


RESOLUÇÃO:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

5 Escrever, em uma única expressão, o conjunto dos arcos com extremos em **P**, **Q**, **M** e **N**.



RESOLUÇÃO:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 90°, n \in \mathbb{Z}\}$

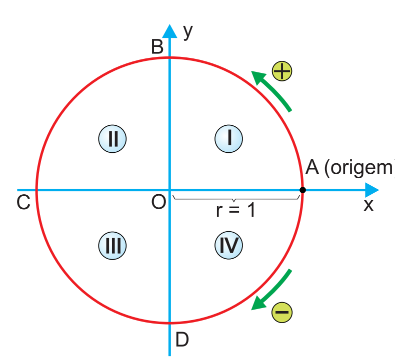
Módulo 25

Função seno

Palavras-chave:
- Seno

1. Introdução

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem **A**, um sistema cartesiano ortogonal xOy conforme mostra a figura. Os pontos A(1; 0), B(0; 1), C(–1;0) e D(0; –1) dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes. Quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AP}$ **pertence ao segundo quadrante**, por exemplo, queremos dizer que **a extremidade P pertence ao segundo quadrante**.

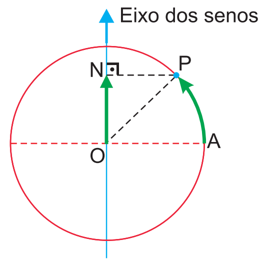


2. Definição da função seno

O **seno de um arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade P, é a **ordenada do ponto P**.

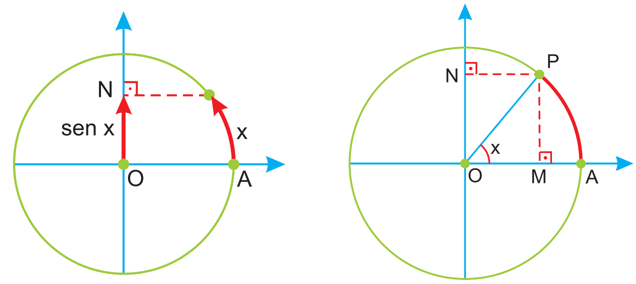
Representa-se:

$$\boxed{sen\ \overset{\frown}{AP} = ON}$$



Observação

A definição é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única ordenada chamada seno de x.

A função de ℝ em ℝ que a cada número real x associa a ordenada do ponto P é, por definição, **a função seno**.

Simbolicamente

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = sen\ x = ON}$$

De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio) e MP = ON.

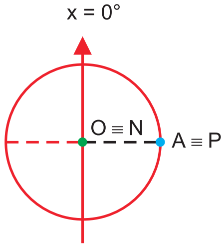
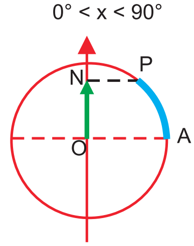
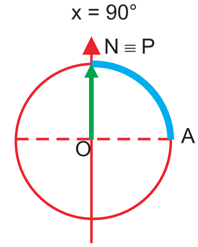
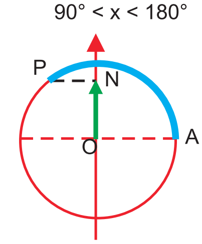
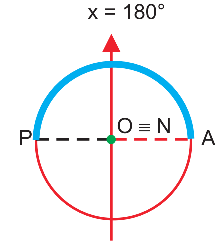
Assim sendo, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

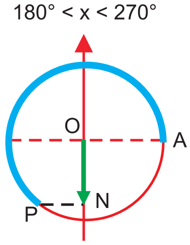
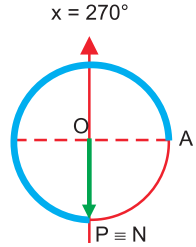
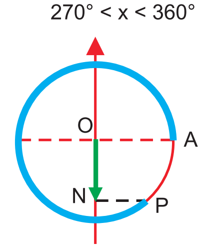
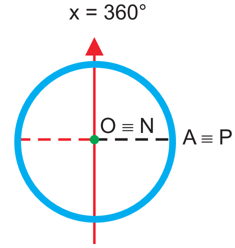
$$\boxed{sen\ x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} \Leftrightarrow sen\ x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\ x = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow \boxed{sen\ x = ON}$$

3. Variação da função seno

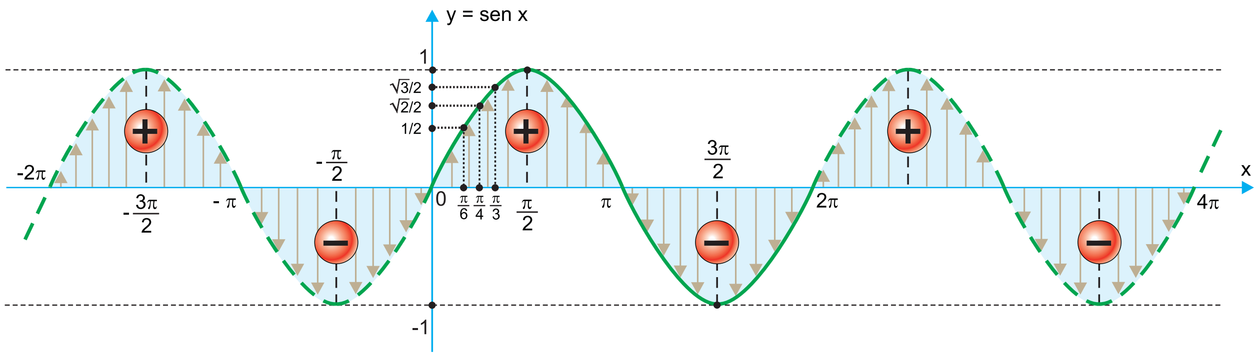
Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o seno de x varia de – 1 a 1. Observe, na tabela abaixo, as várias situações possíveis.

x = 0°	0° < x < 90°	x = 90°	90° < x < 180°	x = 180°
				
sen x = 0	0 < sen x < 1	sen x = 1 (máximo)	0 < sen x < 1	sen x = 0

180° < x < 270°	x = 270°	270° < x < 360°	x = 360°
			
-1 < sen x < 0	sen x = -1 (mínimo)	-1 < sen x < 0	sen x = 0

4. Gráfico

Notando que sen x = sen (x ± 2π), pois **x** e **x ± 2π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = sen x é:



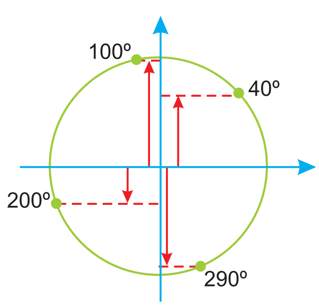
e o conjunto imagem é {y ∈ ℝ | – 1 ≤ y ≤ 1}.

5. Propriedades

Do que foi apresentado nos itens (2), (3) e (4), podemos concluir que a função seno é:

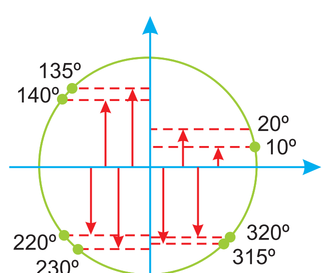
a) **Positiva** no **primeiro** e **segundo** quadrantes; **negativa** no **terceiro** e **quarto** quadrantes.

sen 40° > 0
sen 100° > 0
sen 200° < 0
sen 290° < 0



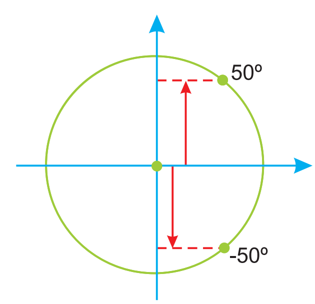
b) **Crescente** no **primeiro** e **quarto** quadrantes; **decrescente** no **segundo** e **terceiro** quadrantes.

sen 20° > sen 10°
sen 135° > sen 140°
sen 220° > sen 230°
sen 320° > sen 315°



c) **Ímpar** pois **sen (–x) = – sen x**.

sen (– 50°) = – sen 50°

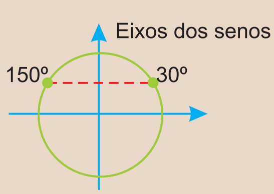


d) **Periódica** de período **2π**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação sen x = $\frac{1}{2}$ sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°

Resolução



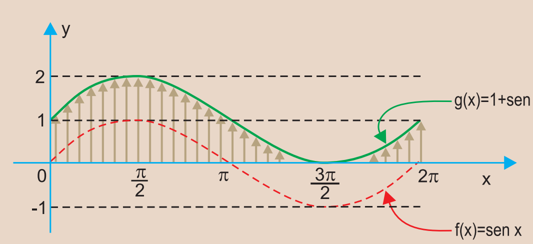
$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } x = \frac{1}{2} \\ 0° \le x \le 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ x = 30° ou x = 150°

Resposta: V = {30°; 150°}

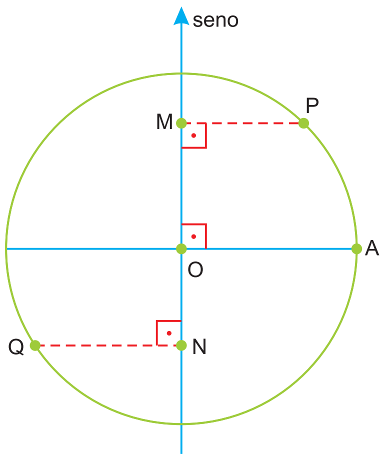
2 Esboçar o gráfico da função g(x) = 1 + sen x, no intervalo [0; 2π].

Resolução



Observe que o gráfico do seno se deslocou de uma unidade para cima, resultando imagem Im [g(x)] = [0; 2] e mantendo o período P = 2π.

1 Utilizando a figura, complete as definições:



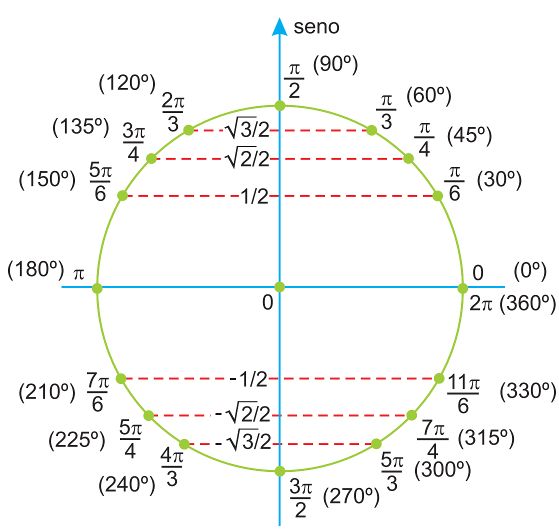
sen $\overset{\frown}{AP}$ = ...

sen $\overset{\frown}{AQ}$ = ...

RESOLUÇÃO:

sen $\overset{\frown}{AP}$ = OM **sen $\overset{\frown}{AQ}$ = ON**

2 Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete:



a) sen 30° = sen 150° = $\boxed{\frac{1}{2}}$

b) sen 210° = sen 330° = $\boxed{-\frac{1}{2}}$

c) sen 45° = sen 135° = $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

d) sen 225° = sen 315° = $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

e) sen 60° = sen 120° = $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

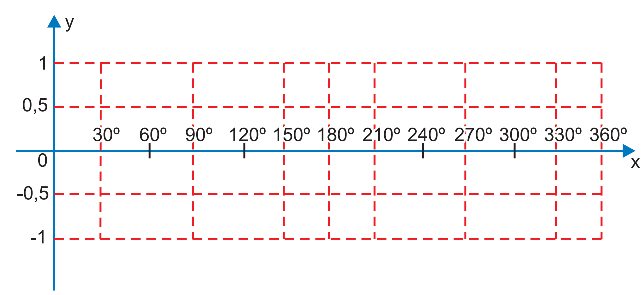
f) sen 240° = sen 300° = $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

g) sen 0° = sen 180° = sen 360° = $\boxed{0}$

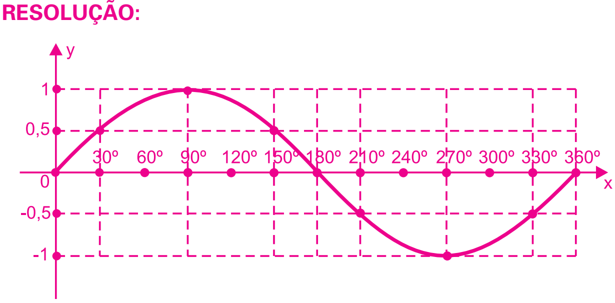
h) sen 90° = $\boxed{1}$

i) sen 270° = $\boxed{-1}$

3 Esboce o gráfico da função $f:[0;\ 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\ x$



RESOLUÇÃO:



4 Com base no gráfico do exercício anterior, complete:

a) O período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = \text{sen}\ x$ é $\boxed{p = 2\pi}$

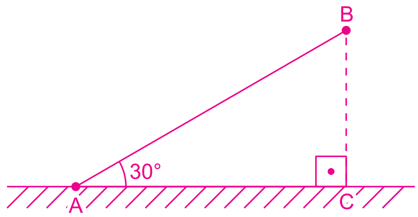
b) O conjunto imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}\ x$

é $\boxed{Im(f) = [-1;\ 1]}$

5 **(MODELO ENEM)** – Uma rampa lisa de 40 m de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe esta rampa inteira eleva-se verticalmente

a) 10 m b) 16 m c) 20 m d) 25 m e) 30 m

RESOLUÇÃO:



Seja $\overline{AB}$ a rampa e $\overline{BC}$ a elevação vertical, então

$$AB = 40\text{ m},\ B\hat{A}C = 30° \text{ e } \text{sen}\, B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{40} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **BC = 20 m**

Resposta: C

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M203**

Módulo 26 – Equações e inequações que envolvem a função seno

Resumo teórico

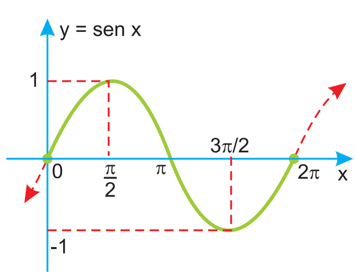
A função seno definida em $\mathbb{R}$ por f(x) = sen x tem as seguintes características:

a) Domínio de f: **D(f) = $\mathbb{R}$**

b) Contradomínio de f: **CD(f) = $\mathbb{R}$**

c) Conjunto imagem: **Im(f) = [– 1; 1]**

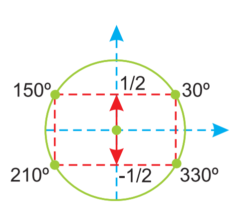
d) Gráfico: **senoide**



e) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$$\text{sen } 30° = \text{sen } 150° = \frac{1}{2}$$

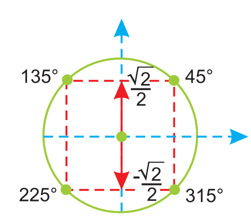
$$\text{sen } 210° = \text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$$



f) Para 45°, 135°, 225°, 315° temos:

$$\text{sen } 45° = \text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

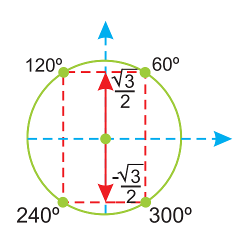
$$\text{sen } 225° = \text{sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



g) Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$$\text{sen } 60° = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 240° = \text{sen } 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

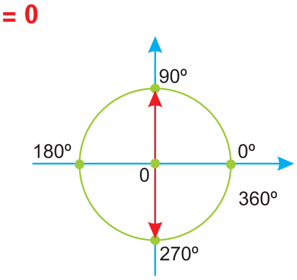


h) Para 0°, 90°, 180°, 270° e 360° temos:

sen 0° = sen 180° = sen 360° = 0

sen 90° = 1

sen 270° = – 1



Exercícios Propostos

1 Resolver a equação

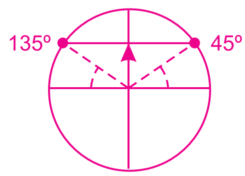
$2 \text{ sen } x - \sqrt{2} = 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

RESOLUÇÃO:

$2 \text{ sen } x - \sqrt{2} = 0$

$2 \text{ sen } x = \sqrt{2}$

$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

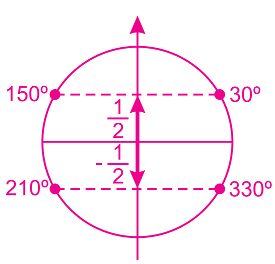


$V = \{45°, 135°\}$

2 **(FGV)** – A equação $4 \, . \, \text{sen}^2 x = 1$, para $0° \leq x \leq 360°$, tem conjunto verdade igual a:

a) {30°}
b) {60°}
c) {30°; 210°}
d) {30°; 150°}
e) {30°; 150°; 210°; 330°}

RESOLUÇÃO:



Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:

$\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \text{sen } x = \pm \dfrac{1}{2}$

Portanto:

$x = 30°$ ou $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 330°$

Resposta: E

3 Os valores de x tal que $\text{sen}^2 x - 1 = 0$ e $0 \leq x \leq 2\pi$ são:

a) 0 e π
b) $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$
c) $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\pi}{3}$
d) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$
e) $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{5\pi}{3}$

RESOLUÇÃO:

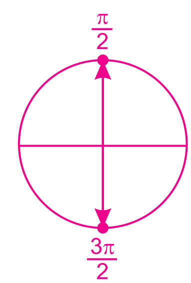
$\text{sen}^2 x - 1 = 0$

$\text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \pm \sqrt{1}$

$\text{sen } x = \pm 1$

$V = \left\{ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right\}$



Resposta: B

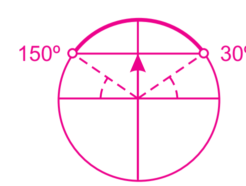
4 Resolver a inequação $2 \text{ sen } x - 1 > 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

RESOLUÇÃO:

$2 \text{ sen } x - 1 > 0$

$2 \text{ sen } x > 1$

$\text{sen } x > \dfrac{1}{2}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 30° < x < 150°\}$

Módulo 27

Função cosseno

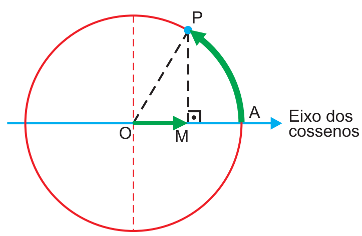
Palavras-chave:

• Cosseno

1. Definição

O **cosseno de um arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade **P**, é a **abscissa do ponto P**. Representa-se:

$$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$$



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única abscissa chamada cosseno de x.

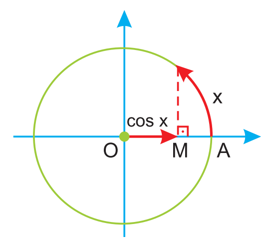
A função de ℝ em ℝ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P é, por definição, **a função cosseno**.

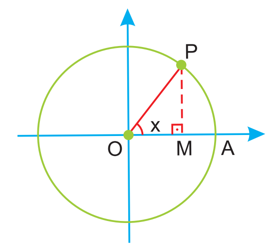
Simbolicamente

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos x = OM$$

Observações

A definição dada é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.





De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio).

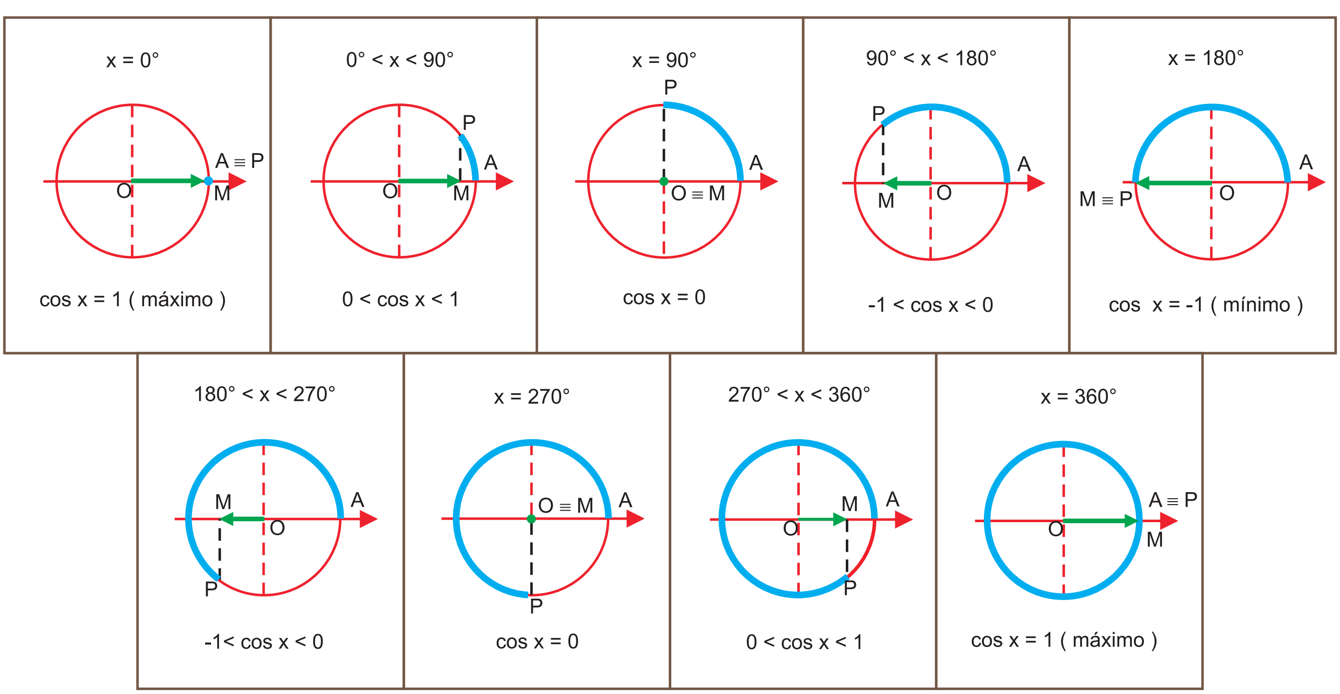
Assim sendo, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \cos x = OM$$

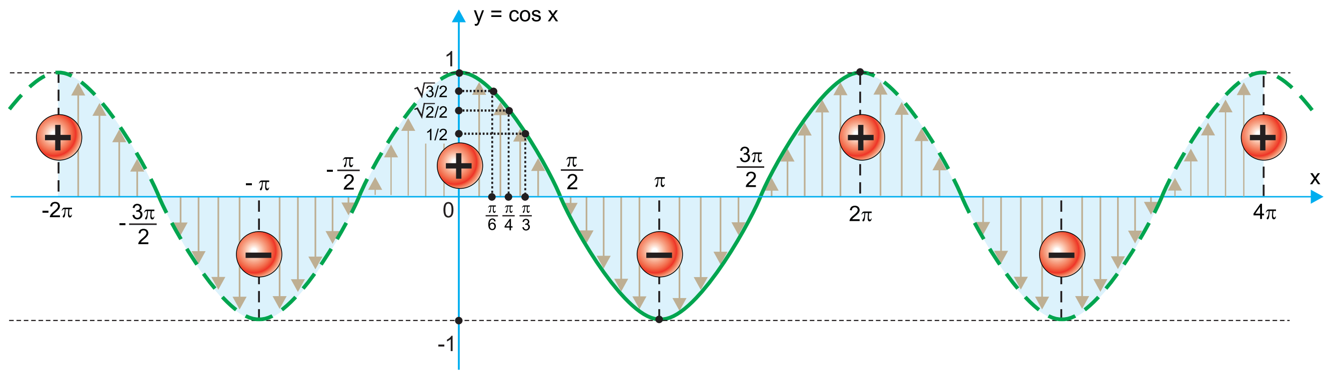
2. Variação da função cosseno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o cosseno de x varia de – 1 a 1. Observe, na tabela a seguir, as várias situações possíveis:



3. Gráfico

Notando que cos x = cos(x ± 2π), pois **x** e **x ± 2π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = cos x é:



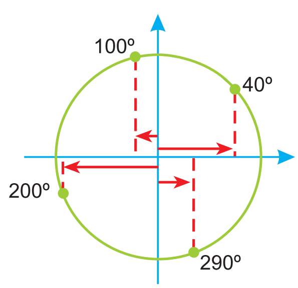
e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 1\}$.

4. Propriedades

Do que foi apresentado nos itens (1), (2) e (3), podemos concluir que a função cosseno é:

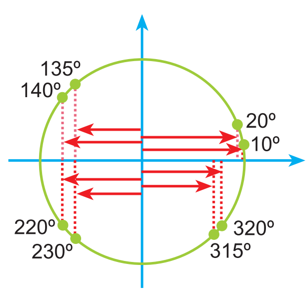
a) **Positiva** no **primeiro** e **quarto** quadrantes; **negativa** no **segundo** e **terceiro** quadrantes.

cos 40° > 0
cos 100° < 0
cos 200° < 0
cos 290° > 0



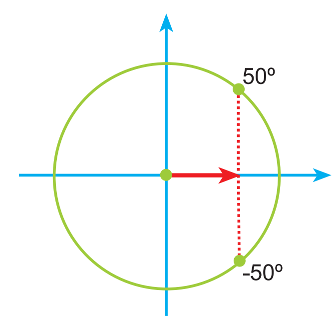
b) **Crescente** no **terceiro** e **quarto** quadrantes; **decrescente** no **primeiro** e **segundo** quadrantes.

cos 10° > cos 20°
cos 135° > cos 140°
cos 230° > cos 220°
cos 320° > cos 315°



c) **Par**, pois **cos (– x) = cos x**.

cos (– 50°) = cos 50°

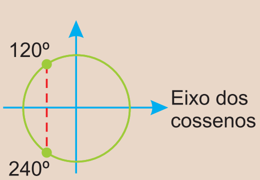


d) **Periódica** de período **2π**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°

Resolução



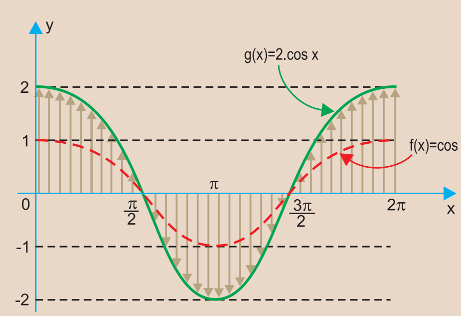
$$\left.\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ 0° \le x \le 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 120° \text{ ou } x = 240°$$

Resposta: V = {120°; 240°}

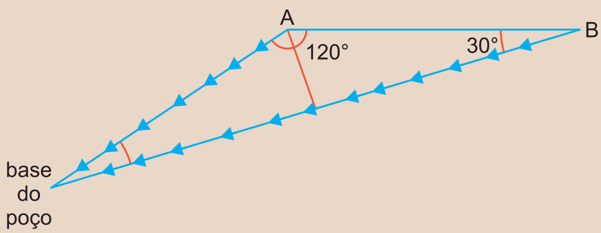
2 Esboçar o gráfico da função g(x) = 2 . cos x, no intervalo [0; 2π].

Resolução



Observe que o gráfico do cosseno abriu no sentido **vertical**, resultando imagem Im [g(x)] = [– 2; 2] e mantendo o período P = 2π.

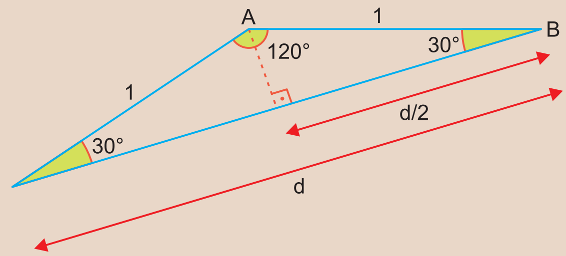
3 **(MODELO ENEM)** – Duas plataformas marítimas (A e B) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a 120° e 30°, conforme indica a figura a seguir:



Admitindo-se que os sinais se desloquem em linha reta até a base do poço e que a distância entre as plataformas A e B, em linha reta, seja AB = 1 km, a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é, aproximadamente, igual a:

a) 1,7 b) 1,5 c) 1,3 d) 1,1 e) 1,0

Resolução



$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{d/2}{1} \Rightarrow d = \sqrt{3} \cong 1,7$

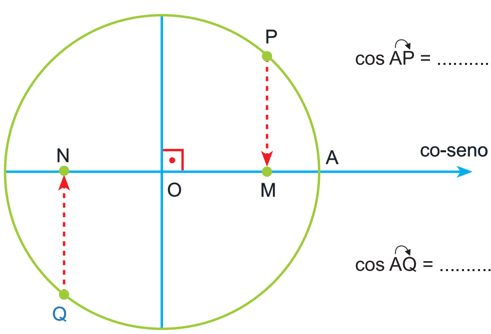
Resposta: A

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M204**

Exercícios Propostos

1 Utilizando a figura, complete as definições:



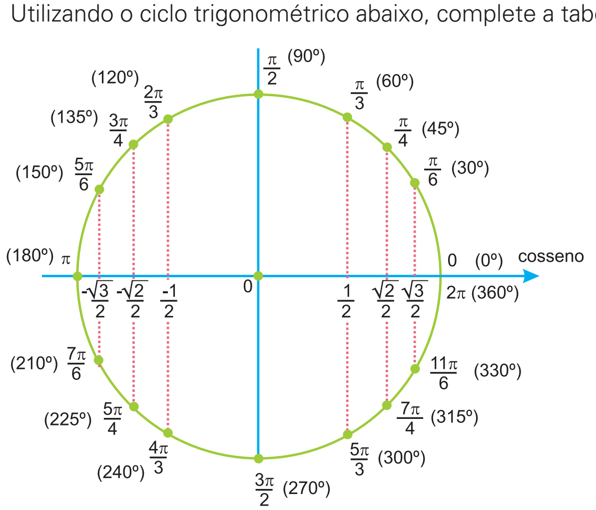
$\cos \overset{\frown}{AP}$ = ...

$\cos \overset{\frown}{AQ}$ = ...

RESOLUÇÃO:

$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$ **$\cos \overset{\frown}{AQ} = ON$**

2 Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete a tabela.



a) cos 30° = cos 330° = $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

b) cos 150° = cos 210° = $\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

c) cos 45° = cos 315° = $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

d) cos 135° = cos 225° = $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

e) cos 60° = cos 300° = $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

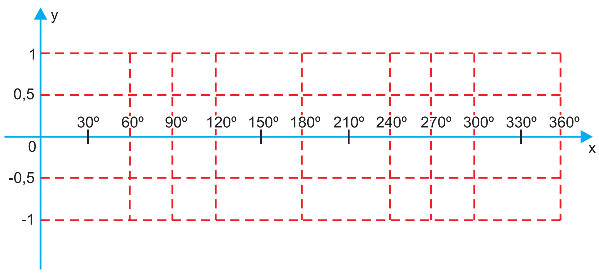
f) cos 120° = cos 240° = $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

g) cos 90° = cos 270° = $\boxed{0}$

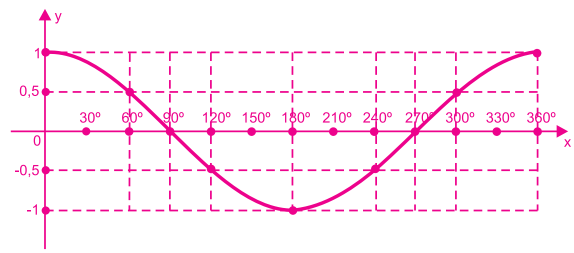
h) cos 0° = cos 360° = $\boxed{1}$

i) cos 180° = $\boxed{-1}$

3 Esboce o gráfico da função $f:[0;\ 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$



RESOLUÇÃO:



4 Com base no gráfico do exercício anterior, complete:

a) O período da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = \cos x$ é **$p = 2\pi$**

b) O conjunto imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = \cos x$ é **$Im(f) = [-1;\ 1]$**

5 **(MODELO ENEM)** – Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção C(x) e o valor de venda V(x) são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \text{ e } V(x) = 3\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right),\ 0 \le x \le 6.$$

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é

a) 500. b) 750. c) 1000. d) 2000. e) 3000.

RESOLUÇÃO:

Para x dezenas de certo produto, o lucro em milhares de reais é obtido por: $L(x) = V(x) - C(x)$

Para x = 3, resulta:

$$L(3) = 3\,.\,\sqrt{2}\,.\,\text{sen}\left(\frac{3\,.\,\pi}{12}\right) - \left[2 - \cos\left(\frac{3\,.\,\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 3\,.\,\sqrt{2}\,.\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3\,.\,\sqrt{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 0 = 3 - 2 = 1.$$

Portanto, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas dessas peças é 1000.

Resposta: C

Módulo 28 — Equações e inequações que envolvem a função cosseno

Resumo teórico

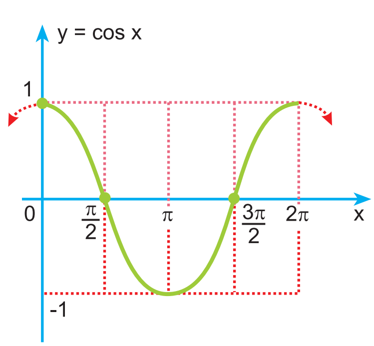
A função cosseno definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \cos x$ tem as seguintes características:

a) Domínio de f: **$D(f) = \mathbb{R}$**

b) Contradomínio de f: **$CD(f) = \mathbb{R}$**

c) Conjunto-imagem: **$Im(f) = [-1;\ 1]$**

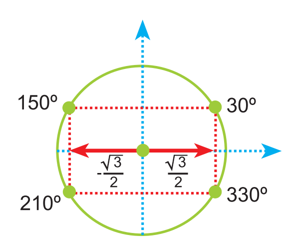
d) Gráfico: **cossenoide**



e) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$$\cos 30° = \cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

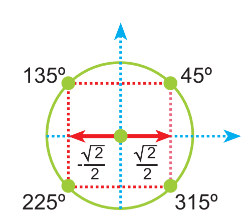
$$\cos 150° = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



f) Para 45°, 135°, 225°, 315° temos:

$$\cos 45° = \cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

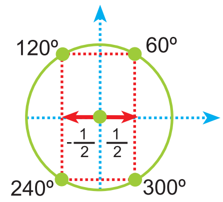
$$\cos 135° = \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



g) Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$$\cos 60° = \cos 300° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 120° = \cos 240° = -\frac{1}{2}$$

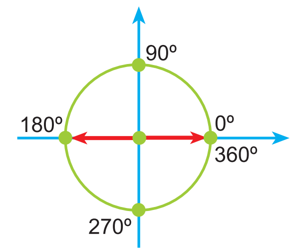


h) Para 0°, 90°, 180°, 270° e 360° temos:

$$\cos 0° = \cos 360° = 1$$

$$\cos 90° = \cos 270° = 0$$

$$\cos 180° = -1$$



Exercício Resolvido

1 **(MODELO ENEM)** – No setor de pintura de peças em uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão:

$P(t) = 50 + 30 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$.

O valor de t para o qual a pressão é mínima pode ser:

a) 3π b) π c) 2π d) $\frac{5\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

Resolução

Como $-1 \leq \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$, o valor mínimo de P(t) é obtido quando $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Como $t > 0$, temos:

$t + \frac{\pi}{2} = \pi + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{N})$.

Os possíveis valores de t, são: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; ...

Dentre as alternativas, temos: $t = \frac{5\pi}{2}$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 Resolver a equação $2 \cos x - 1 = 0$ sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$.

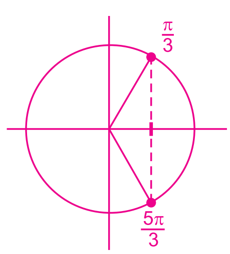
RESOLUÇÃO:

$2 \cos x - 1 = 0$

$2 \cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$V = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$



2 O valor de x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tal que $4 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 3$ é

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) 0

RESOLUÇÃO:

$4 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, resulta $x = \frac{\pi}{6}$.

Resposta: D

3 Resolva a equação $4 \cos^2 x - 3 = 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

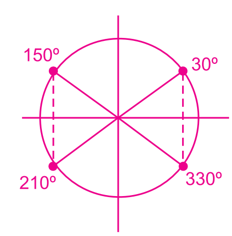
RESOLUÇÃO:

$4 \cos^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

V = {30°; 150°; 210°; 330°}



4 Resolver a inequação $2 \cos x - 1 < 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

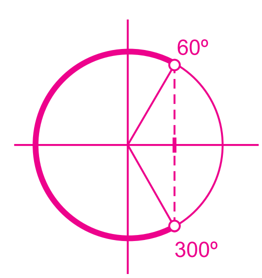
RESOLUÇÃO:

$2 \cos x - 1 < 0$

$2 \cos x < 1$

$\cos x < \frac{1}{2}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 60° < x < 300°\}$



5 Resolver a inequação $\sqrt{2} \cdot \cos x + 1 \leq 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

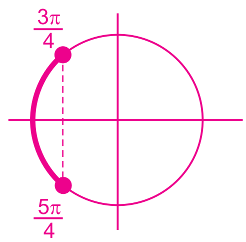
RESOLUÇÃO:

$\sqrt{2} \cdot \cos x + 1 \leq 0$

$\sqrt{2} \cdot \cos x \leq -1$

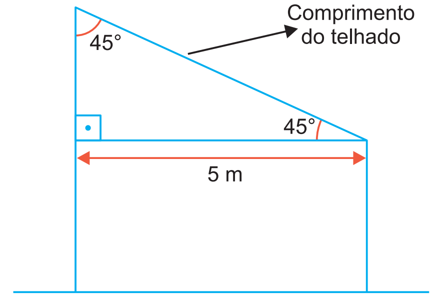
$\cos x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

6 **(MODELO ENEM)** – A figura a seguir representa uma casa de campo que possui uma varanda.



O comprimento do telhado, em metros, será de:

a) 5 b) $5 \cdot \sqrt{2}$ c) $10 \cdot \sqrt{2}$

d) $25 \cdot \sqrt{2}$ e) $50 \cdot \sqrt{2}$

Dados: seno 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno 45° = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

tangente 45° = 1

RESOLUÇÃO:

Se ℓ for o comprimento do telhado, então:

$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\ell} \Rightarrow \ell = \dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Resposta: B

Módulo 29 – Função tangente

Palavras-chave:

- Tangente

1. Definição

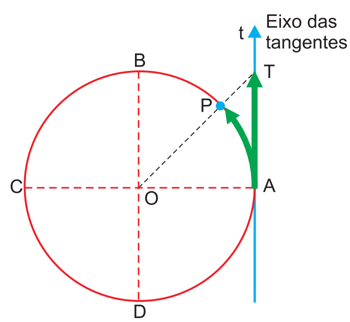
Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, o eixo **t** perpendicular ao eixo **x** e de origem A, chamado eixo das tangentes.

Seja, ainda, T a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo t.

A tangente do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade P, com P ≠ B e P ≠ D, é a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Representa-se:

$\boxed{tg\ \overset{\frown}{AP} = AT}$



A cada número real **x** corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida **x**. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única medida algébrica AT, chamada tangente de **x**.

A função de ℝ em ℝ que a cada número real x associa a medida algébrica AT é, por definição, **a função tangente.**

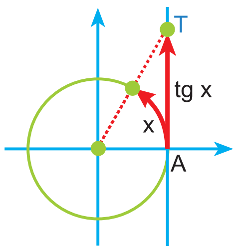
Simbolicamente

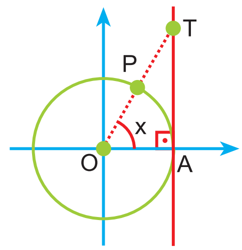
$$f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = tg\ x = AT$$

Observação

A definição é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.

De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OA = 1 (raio).





Assim sendo, no triângulo OAT retângulo em A, temos:

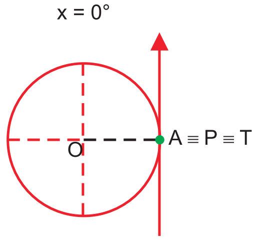
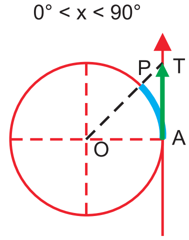
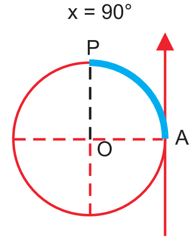
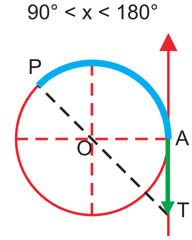
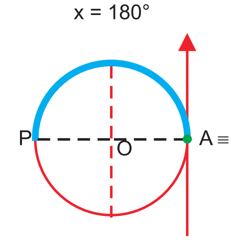
$$\boxed{\textbf{\textit{tg x}} = \frac{\textbf{\textit{cateto oposto}}}{\textbf{\textit{cateto adjacente}}}} \Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{AT}{OA} \Leftrightarrow$$

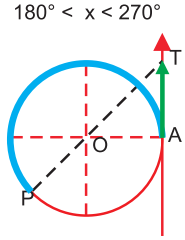
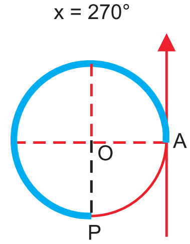
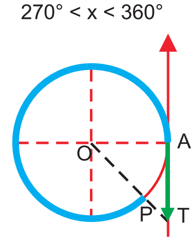
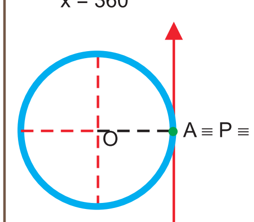
$$\Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{AT}{1} \Leftrightarrow \boxed{\textbf{\textit{tg x = AT}}}$$

2. Variação da função tangente

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360°, e a tangente varia de – ∞ a + ∞.

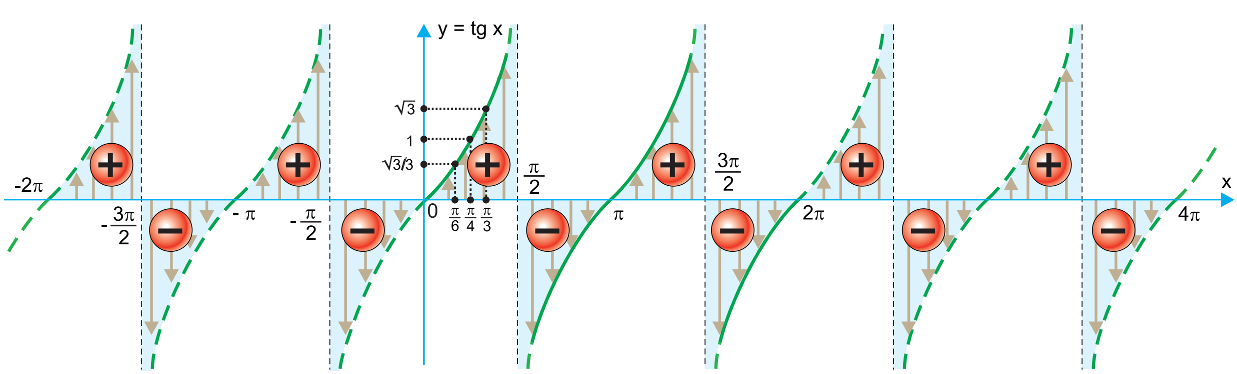
Observe na tabela a seguir as várias situações possíveis.

x = 0°	0° < x < 90°	x = 90°	90° < x < 180°	x = 180°
				
tg x = 0	tg x > 0	∄ tg x	tg x < 0	tg x = 0

180° < x < 270°	x = 270°	270° < x < 360°	x = 360°
			
tg x > 0	∄ tg x	tg x < 0	tg x = 0

3. Gráfico

Notando que tg x = tg(x ± π), pois **x** e **x ± π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = tg x é:



e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

4. Propriedades

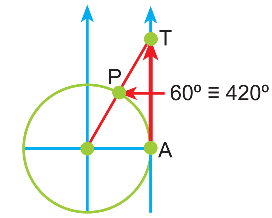
Do que foi exposto nos itens (1), (2) e (3), podemos concluir que a função tangente é:

a) **Positiva** no **primeiro** e **terceiro** quadrantes; **negativa** no **segundo** e **quarto** quadrantes.

b) **Crescente** em cada quadrante

c) **Ímpar**, pois **tg(–x) = – tg x**

d) **Periódica** de período π.



$tg(60°) = tg(60° + 360°) =$

$= tg\ 420° = \sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação tg x = 1 sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°.

Resolução

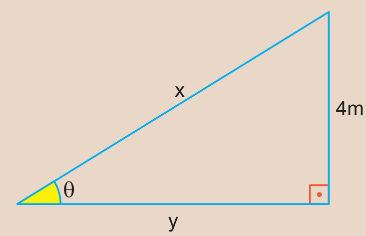
$\left.\begin{array}{l} tg\ x = 1 \\ 0° \le x \le 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 45° \text{ ou } x = 225°$

Resposta: V = {45°; 225°}

2 **(MODELO ENEM)** – Quando Eugênio entrou em sua sala de aula, havia o seguinte problema no quadro-negro: "Numa indústria deseja-se construir uma rampa com inclinação de θ graus para vencer um desnível de 4 m. Qual será o comprimento da rampa?" Mas, o professor já havia apagado os valores de sen θ e cos θ, restando apenas tg $\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$. Eugênio usou seus conhecimentos de trigonometria e determinou que o comprimento da rampa é:

a) $6\sqrt{6}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{2}$ e) $14\sqrt{2}$

Resolução



$tg\ \theta = \dfrac{4}{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \sqrt{2}\ y = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 10\sqrt{2}$

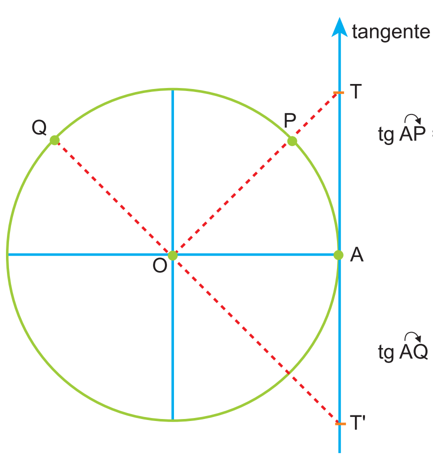
$x^2 = 4^2 + (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 216 \Rightarrow x = 6\sqrt{6}$

Resposta: A

Exercícios Propostos

1 Utilizando a figura, complete as definições



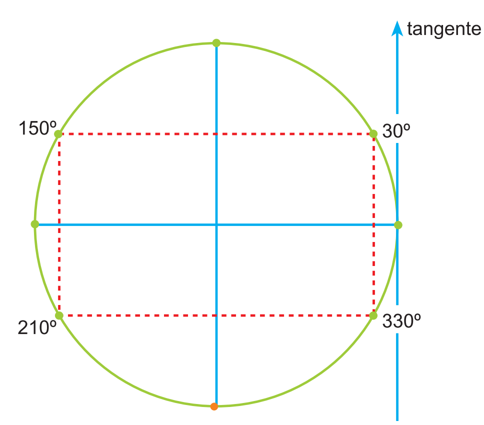
tg $\overset{\frown}{AP}$ = ...

tg $\overset{\frown}{AQ}$ = ...

RESOLUÇÃO: tg $\overset{\frown}{AP}$ = AT tg $\overset{\frown}{AQ}$ = AT'

2 Determinar graficamente e completar os itens abaixo.

a)

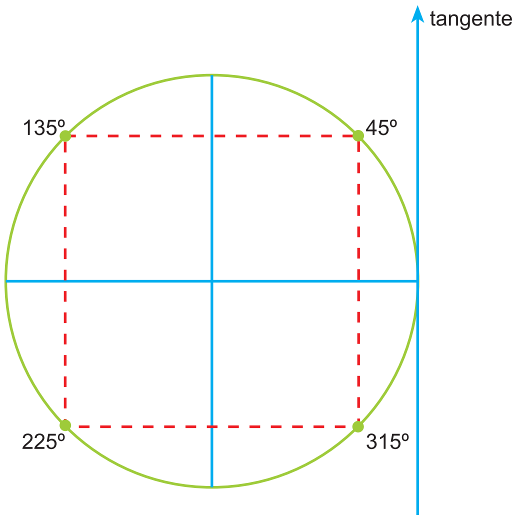


$tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $tg\ 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$tg\ 210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $tg\ 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

No Portal Objetivo

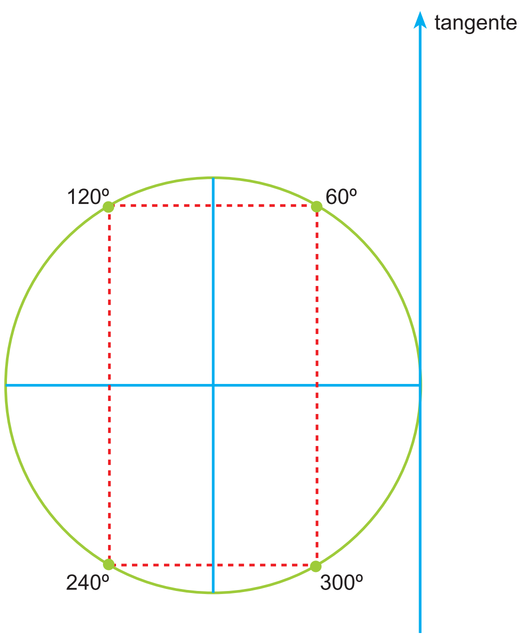
Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M205** b)



tg 45° = **1** tg 135° = **– 1**

tg 225° = **1** tg 315° = **– 1**

c)

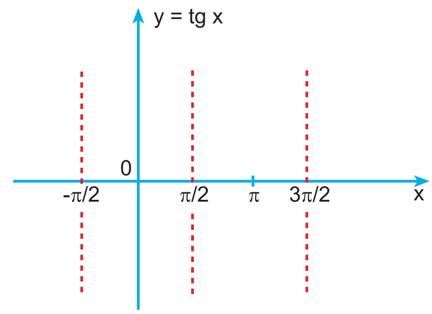


tg 60° = $\sqrt{3}$ tg 120° = $-\sqrt{3}$

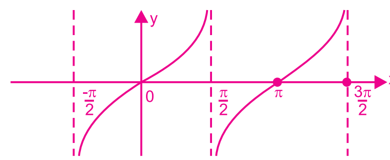
tg 240° = $\sqrt{3}$ tg 300 ° = $-\sqrt{3}$

3 Completar a tabela abaixo e em seguida esboçar o gráfico da função y = tg x no intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, determinando o conjunto imagem e o período da mesma.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
tg x	∄	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∄	0	∄



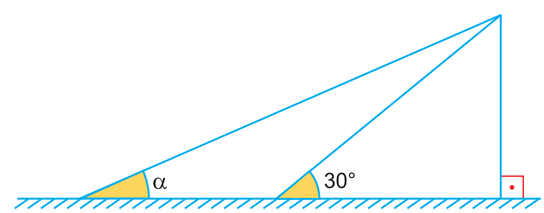
RESOLUÇÃO:



Im = ℝ

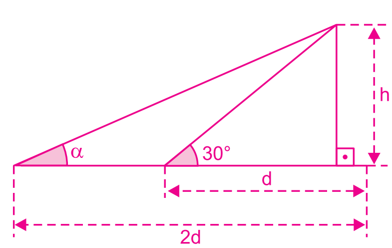
p = π

4 **(MODELO ENEM)** – Um mastro vertical está instalado em um local em que o terreno é horizontal.
Uma pessoa que está à distância **d** da base do mastro vê o seu topo sob um ângulo de 30°. Se ela se afastar do mastro e parar à distância 2d da base do mastro, verá o topo do mastro sob um ângulo α, conforme figura.



Então é correto afirmar que
a) a medida de α é 60°.
b) a medida de α é 15°.
c) a tangente de α é a metade da tangente de 30°.
d) a tangente de α é o dobro da tangente de 30°.
e) a medida de α é 30°.

RESOLUÇÃO:



Sendo h a altura do mastro, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{h}{2d} \\ \text{tg}\,30° = \dfrac{h}{d} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,30°} = \frac{h}{2d} \cdot \frac{d}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,30°}{2}$$

Resposta: C

Módulo 30

Equações e inequações que envolvem a função tangente

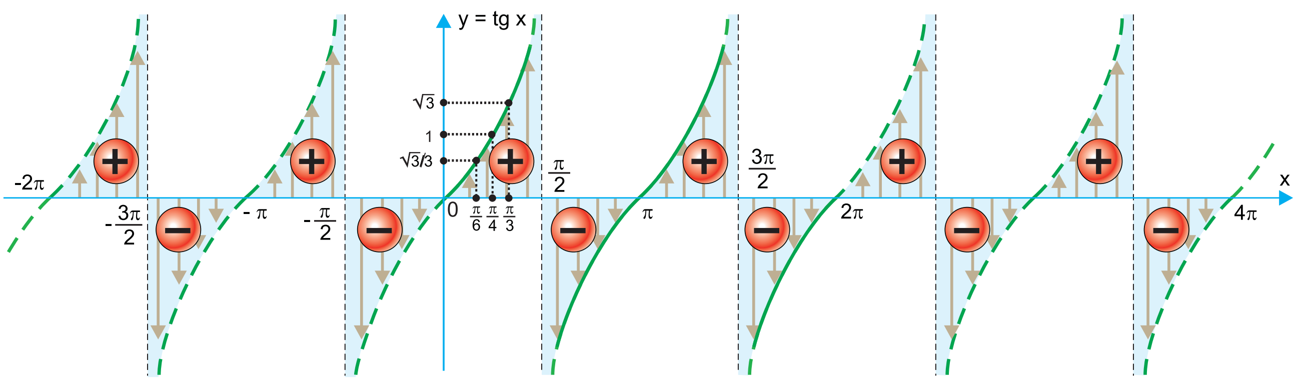
Resumo teórico

A função tangente definida por f(x) = tg x, tem as seguintes características:

a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi}\right\} \ (n \in \mathbb{Z})$

b) $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$

c) Gráfico



d) É **periódica** de período **π**.

e) É **crescente** em cada quadrante.

f) É **ímpar** pois tg(–x) = – tgx

g) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$$\mathbf{tg30° = tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\mathbf{tg150° = tg\ 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

h) Para 45°, 135°, 225° e 315° temos:

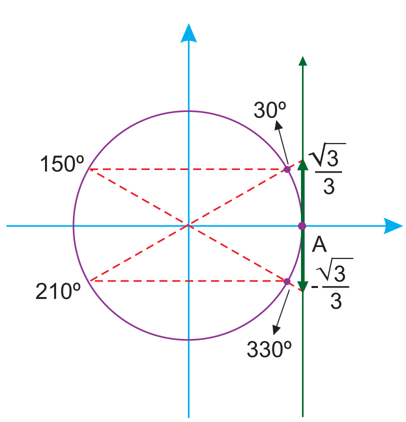
$$\mathbf{tg\ 45° = tg\ 225° = 1}$$

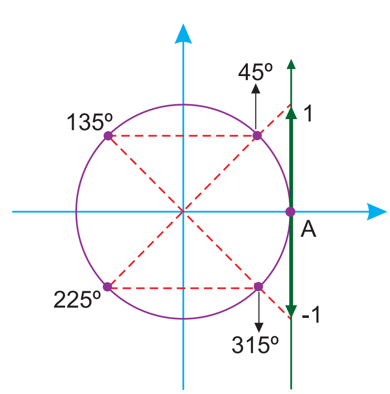
$$\mathbf{tg\ 135° = tg\ 315° = -1}$$

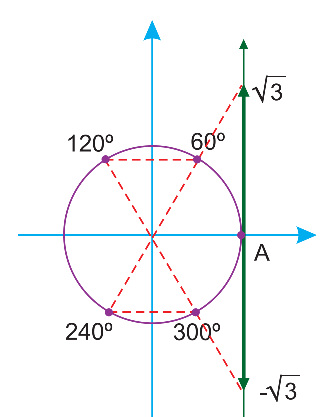
i) Para 60°, 120°, 240° e 330° temos:

$$\mathbf{tg\ 60° = tg\ 240° = \sqrt{3}}$$

$$\mathbf{tg\ 120° = tg\ 300° = -\sqrt{3}}$$



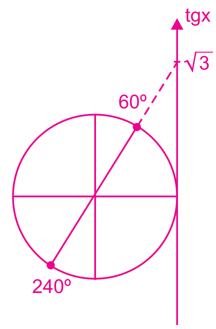




Exercícios Propostos

1 Resolver a equação tg x = $\sqrt{3}$, supondo 0° ≤ x < 360°.

RESOLUÇÃO:
tg x = $\sqrt{3}$
V = {60°; 240°}

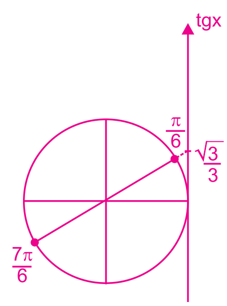


2 Resolva a equação 3 tg x – $\sqrt{3}$ = 0 supondo 0 ≤ x < 2π.

RESOLUÇÃO:
$3\,\text{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$

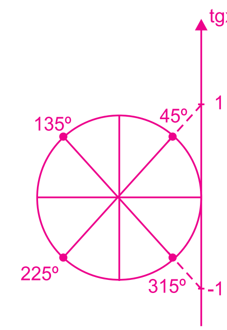
$\text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$V = \left\{ \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6} \right\}$



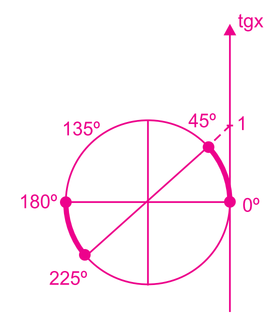
3 Resolver a equação $3\text{tg}^2x - 3 = 0$ supondo 0° ≤ x < 360°.

RESOLUÇÃO:
$3\,\text{tg}^2x - 3 = 0$
$\text{tg}^2x = 1$
tg x = ± 1
V = {45°; 135°; 225°; 315°}



4 Resolver a inequação 0 ≤ tg x ≤ 1 supondo 0° ≤ x < 360°.

RESOLUÇÃO:
0 ≤ tg x ≤ 1



V = {x ∈ ℝ | 0° ≤ x ≤ 45° ou 180° ≤ x ≤ 225°}

Módulo 31 e 32 — Equações trigonométricas

Resumo teórico

1. Função seno

a) f : ℝ → ℝ tal que **f(x) = sen x = ON**

b) o conjunto imagem é **[–1; 1]** e o período é **2π**

2. Função cosseno

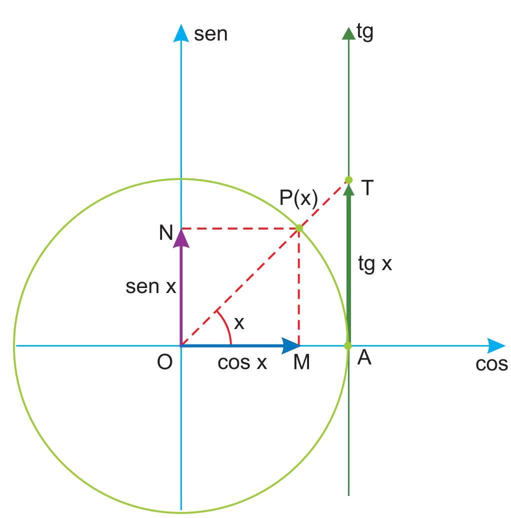
a) f : ℝ → ℝ tal que **f(x) = cos x = OM**

b) o conjunto imagem é **[–1; 1]** e o período é **2π**

3. Função tangente

a) f : {x ∈ ℝ | x ≠ $\dfrac{\pi}{2}$ + n π} → ℝ tal que **f(x) = tg x = AT**

b) o conjunto imagem é ℝ e o período é **π**



4. Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$\text{sen } 30° = \text{sen } 150° = \dfrac{1}{2}$;

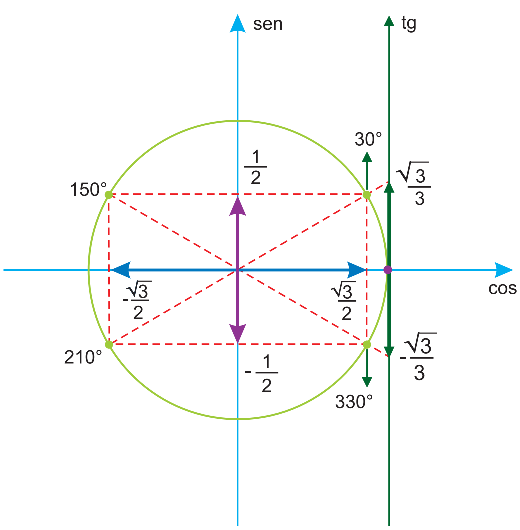
$\text{sen } 210° = \text{sen } 330° = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \cos 330° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 150° = \cos 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \text{tg } 210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\text{tg } 150° = \text{tg } 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



5. Para 45°, 135°, 225° e 315° temos:

$\text{sen } 45° = \text{sen } 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

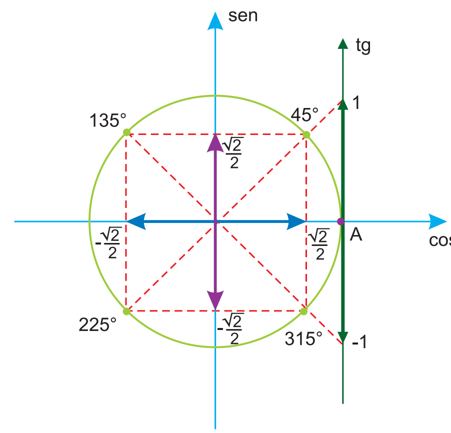
$\text{sen } 225° = \text{sen } 315° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \cos 315° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 135° = \cos 225° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } 45° = \text{tg } 225° = 1$;

$\text{tg } 135° = \text{tg } 315° = -1$



6. Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$\text{sen } 60° = \text{sen } 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

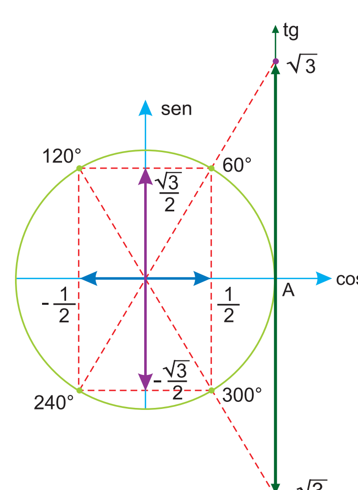
$\text{sen } 240° = \text{sen } 300° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \cos 300° = \dfrac{1}{2}$;

$\cos 120° = \cos 240° = -\dfrac{1}{2}$

$\text{tg } 60° = \text{tg } 240° = \sqrt{3}$;

$\text{tg } 120° = \text{tg } 300° = -\sqrt{3}$



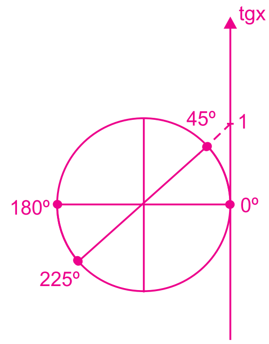
1 Resolva a equação $tg^2x - tg\ x = 0$, supondo $0° \leq x < 360°$

RESOLUÇÃO:

$tg^2x - tg\ x = 0$

$tg\ x\ (tg\ x - 1) = 0 \begin{cases} tg\ x = 0 \\ tg\ x = 1 \end{cases}$

$V = \{0°; 45°; 180°; 225°\}$



2 Se $sec^2x + tg\ x - 7 = 0$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, então o valor de sec x será

a) $\sqrt{5}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) 5

RESOLUÇÃO:

$sec^2x + tg\ x - 7 = 0 \Leftrightarrow tg^2x + tg\ x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\ x = 2$ ou $tg\ x = -3 \Leftrightarrow tg\ x = 2\ \left(\text{pois } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow tg^2x + 1 = 5 \Leftrightarrow sec^2x = 5 \Leftrightarrow sec\ x = \sqrt{5}$

Resposta: A

3 **(FUVEST)** – O dobro do seno de um ângulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUÇÃO:

Sendo $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$2\ .\ sen\ \theta = 3\ .\ tg^2\theta \Leftrightarrow 2\ .\ sen\ \theta = 3\ .\ \dfrac{sen^2\theta}{cos^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 3\ .\ \dfrac{sen\ \theta}{cos^2\theta} \Leftrightarrow 2\ cos^2\theta = 3\ .\ sen\ \theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ .\ (1 - sen^2\theta) = 3\ .\ sen\ \theta \Leftrightarrow 2\ .\ sen^2\theta + 3\ .\ sen\ \theta - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\ \theta = \dfrac{1}{2}$ ou $sen\ \theta = -2$(impossível)

Para $sen\ \theta = \dfrac{1}{2}$ e $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, temos $cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: B

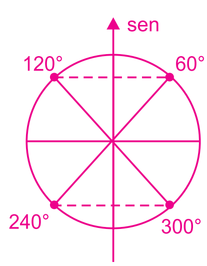
4 Resolva a equação $4\ sen^2(x) - 3 = 0$ supondo $0° \leq x < 360°$.

RESOLUÇÃO:

$4\ .\ sen^2(x) - 3 = 0$

$sen^2(x) = \dfrac{3}{4}$

$sen(x) = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$



$sen(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} x = 60° \\ x = 120° \end{cases}$

$sen(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} x = 240° \\ x = 300° \end{cases}$

$V = \{60°; 120°; 240°; 300°\}$

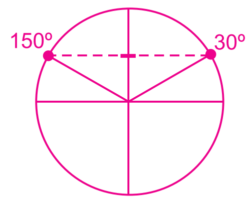
Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de 1 a 4.

1 $2\,\text{sen}(x) - 1 = 0$

RESOLUÇÃO:

$2\,\text{sen}\,(x) - 1 = 0$

$\text{sen}\,(x) = \dfrac{1}{2}$



$x = 30° + n\,.\,360°$

ou

$x = 150° + n\,.\,360°$

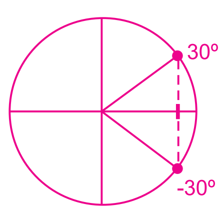
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n\,.\,360° \text{ ou } x = 150° + n\,.\,360°,\ n \in \mathbb{Z}\}$

2 $2\cos x = \sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

$2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 30° + n\,.\,360°,\ n \in \mathbb{Z}\}$

3 $3\,\text{tg}^2x - \sqrt{3}\,\text{tg}\,x = 0$

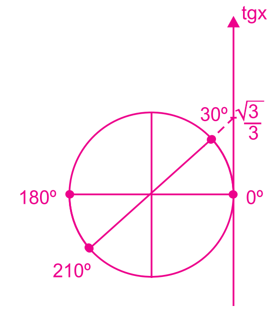
RESOLUÇÃO:

$\text{tg}\,x\,.\,(3\,.\,\text{tg}\,x - \sqrt{3}) = 0$

$\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow x = n\,.\,180°$

ou

$\text{tg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30° + n\,.\,180°$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n\,.\,180° \text{ ou } x = 30° + n\,.\,180°,\ n \in \mathbb{Z}\}$

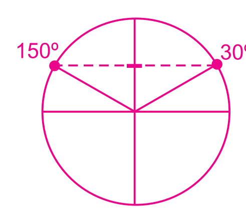
4 $2\cos^2x + 5\,\text{sen}\,x - 4 = 0$

RESOLUÇÃO:

$2\cos^2x + 5\,.\,\text{sen}\,x - 4 = 0$

$2(1 - \text{sen}^2x) + 5\,\text{sen}\,x - 4 = 0$

$-2\,.\,\text{sen}^2x + 5\,.\,\text{sen}\,x - 2 = 0$



Fazendo $y = \text{sen}\,x$, temos:

$-2\,.\,y^2 + 5\,.\,y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = \dfrac{1}{2}$

$y = \text{sen}\,x = 2,\ \nexists\,x$

$y = \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + n\,.\,360° \\ \text{ou} \\ x = 150° + n\,.\,360° \end{cases}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n\,.\,360° \text{ ou } x = 150° + n\,.\,360°,\ n \in \mathbb{Z}\}$

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

OBJETIVO

FRENTE 2

MATEMÁTICA

Gottfried Leibniz (1946 – 1716)
A ele é atribuída a criação do termo "função"

Álgebra – Módulos

Módulo 17

Equações do 1º grau

Palavras-chave:
- Raiz (ou solução)
- Conjunto verdade

1. Sentença aberta e equação

Analisando as sentenças

(I) $2 \,.\, 6 - 1 = 13$

(II) $2 \,.\, 7 - 1 = 13$

(III) $2 \,.\, x - 1 = 13$

podemos fazer as seguintes considerações:
a sentença (I) é falsa, pois $2 \,.\, 6 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 13$;
a sentença (II) é verdadeira, pois $2 \,.\, 7 - 1 = 14 - 1 = 13$;
a sentença $2x - 1 = 13$ não é verdadeira nem falsa, pois **x**, chamado **variável**, representa qualquer número. Este tipo de sentença é um exemplo de **sentença aberta**.

Toda **sentença aberta** na forma de **igualdade** é chamada **equação**.

Substituindo **x** por **7**, a sentença aberta $2x - 1 = 13$ se transforma em $2 \,.\, 7 - 1 = 13$, que é uma sentença verdadeira. Dizemos então que **7** é uma **raiz** (ou uma **solução**) da equação $2x - 1 = 13$.

Substituindo **x** por **6** a sentença aberta $2x - 1 = 3$ se transforma em $2 \,.\, 6 - 1 = 13$ que é falsa. Dizemos então que **6** não é **raiz** da equação $2x - 1 = 13$.

2. Raiz e conjunto verdade

Raiz (ou solução) de uma equação é um número que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira. **Conjunto verdade** ou **conjunto solução** de uma equação é o conjunto de todas, e somente, as raízes. **Resolver uma equação é determinar o seu conjunto verdade.**

Exemplos

1. O número 2 é raiz da equação $3x - 1 = 5$, pois substituindo x por 2 a sentença aberta $3x - 1 = 5$ se transforma em $3 \,.\, 2 - 1 = 5$, que é uma sentença verdadeira.
2. O número 4 não é raiz da equação $3x - 1 = 5$, pois, substituindo x por 4, a sentença aberta $3x - 1 = 5$ se transforma em $3 \,.\, 4 - 1 = 5$, que é uma sentença falsa.

3. Equação do 1º grau

Equação do 1º grau é toda **sentença aberta**, em **x**, redutível à forma $\boxed{ax + b = 0}$ onde **a** e **b** são números reais dados e $\mathbf{a \neq 0}$.

Notando que $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, para $a \neq 0$, concluímos que o conjunto verdade da equação é $V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

4. A equação ax + b = 0, resolvida em ℝ

Analisando a equação **ax + b = 0**, com **a**, **b** $\in \mathbb{R}$, temos as seguintes hipóteses:

- Para **a ≠ 0**, a equação **ax + b = 0** admite **uma única solução**, pois é do primeiro grau.

Assim: $\boxed{V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}}$.

- Para **a = 0** e **b ≠ 0**, a equação **ax + b = 0 não tem solução**, pois a sentença é **sempre falsa**. Neste caso, $\boxed{V = \varnothing}$

- Para **a = 0** e **b = 0**, a equação **ax + b = 0 admite todos os números reais como solução**, pois a sentença $0 \cdot x + 0 = 0$ é sempre verdadeira. Neste caso $\boxed{V = \mathbb{R}}$.

Exercícios Resolvidos

1 O conjunto-solução da equação $2x - 6 = 0$ é $V = \{3\}$, pois $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

2 O conjunto-verdade da equação $x + 2 = x + 3$ é $\varnothing$, pois $x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 1$, que é uma sentença sempre falsa.

3 Resolvendo, em ℝ, a equação $4x - 12 = 4 \cdot (x - 3)$ obtemos, como conjunto verdade, o próprio ℝ, pois $4x - 12 = 4 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x - 12 = 4x - 12 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, que é uma sentença sempre verdadeira.

4 Resolvendo a equação

$\frac{3x}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}$ obtemos

$V = \left\{\frac{6}{7}\right\}$ pois:

$$\frac{3x}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x - 2(x+2)}{6} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x - 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow 7x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$$

5 Qual a distância percorrida por uma bicicleta sabendo que a roda da frente, que tem 65 cm de diâmetro, deu 100 voltas a mais que a roda traseira, que tem 70 cm de diâmetro?

Supor $\pi = \frac{22}{7}$

Resolução

Sendo x o número de voltas dadas pela roda traseira e $2\pi R$ o comprimento de uma circunferência de raio R temos:

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{65}{2} \cdot (x + 100) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{70}{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65 \cdot (x + 100) = 70\,x \Leftrightarrow x = 1300$$

Se a roda traseira, de diâmetro 70 cm, deu 1300 voltas então a distância percorrida é:

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{70}{2} \cdot 1\,300 \cong \frac{22}{7} \cdot 70 \cdot 1\,300 =$$

$= 286\,000$ (cm)

Resposta: A distância percorrida pela bicicleta é 2,86 km.

6 **(FAAP – MODELO ENEM)** – Uma escola resolveu descobrir qual é a modalidade esportiva preferida pelos alunos. Cada estudante poderia escolher apenas uma modalidade. Do total de alunos pesquisados, 2/5 escolheram o futebol e 1/4 dos restantes indicaram o voleibol. 72 alunos não optaram nem por futebol, nem por vôlei. O total de alunos pesquisados foi:

a) 120 b) 144 c) 160
d) 288 e) 320

Resolução

Sendo x o número de alunos pesquisados, temos:

$$x = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \left(x - \frac{2}{5} \cdot x\right) + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot x + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x = 8x + 3x + 1440 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 1440 \Leftrightarrow x = 160$$

Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Resolva, em ℝ, a equação $x\,[2x - (3 - x)] - 3 \cdot (x^2 - 1) = 0$.

RESOLUÇÃO:

$2x^2 - 3x + x^2 - 3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$V = \{1\}$

2 Resolva, em ℝ, a equação $x - \frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{6} + 2$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{6x - 2x + 2}{6} = \frac{x + 1 + 12}{6} \Leftrightarrow 4x + 2 = x + 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \Rightarrow V = \left\{\frac{11}{3}\right\}$$

3 **(ESPM – MODELO ENEM)** – Do centro de uma cidade até o aeroporto são 40 km por uma grande avenida. Os táxis que saem do aeroporto cobram R$ 3,60 pela bandeirada e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Os que saem do centro cobram R$ 2,00 pela bandeirada e R$ 0,60 por quilômetro rodado. Dois amigos se encontraram num restaurante que fica nessa avenida, sendo que um tomou o táxi que sai do aeroporto e o outro tomou o que parte do centro e, para surpresa dos dois, os seus gastos foram exatamente iguais. A distância do restaurante ao aeroporto é de:

a) 10 km; b) 12 km; c) 14 km;
d) 16 km; e) 18 km.

RESOLUÇÃO:
Sendo x a distância em km do restaurante (R) ao aeroporto (A), e 40 km a distância do centro (C) ao aeroporto (A), temos:

$3,6 + 0,8.x = 2 + 0,6 \,.\, (40 - x) \Leftrightarrow 3,6 + 0,8.x = 2 + 24 - 0,6 \,.\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1,4.x = 22,4 \Leftrightarrow x = 16$
Resposta: D

4 **(UFV – MODELO ENEM)** – Em um programa de televisão, um candidato deve responder a 20 perguntas. A cada pergunta respondida corretamente, o candidato ganha R$ 500,00, e perde R$ 300,00 por pergunta não respondida ou respondida incorretamente. Se o candidato ganhou R$ 7 600,00, o número de perguntas que acertou é:

a) 19 b) 16 c) 20 d) 17 e) 18

RESOLUÇÃO:
Sendo x o número de perguntas respondidas corretamente, temos:
$500.x - 300.(20 - x) = 7600 \Leftrightarrow 5.x - 60 + 3x = 76 \Leftrightarrow 8x = 136 \Leftrightarrow x = 17$
Resposta: D

5 **(MODELO ENEM)** – Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que 10 pessoas haviam desistido de participar da festa e que cada participante deveria contribuir com mais R$ 6,40, pois o valor total da festa não seria alterado.
De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das pessoas participantes?

a) R$ 14,00. b) R$ 17,00. c) R$ 22,00.
d) R$ 32,00. e) R$ 57,00.

RESOLUÇÃO:
Sendo x a cota de cada uma das pessoas do grupo participante, em reais, temos:
$50 \,.\, (x - 6,40) = (50 - 10) \,.\, x \Leftrightarrow 50 \,.\, (x - 6,40) = 40 \,.\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - 32 = 4x \Leftrightarrow x = 32$
Resposta: D

6 **(MODELO ENEM)** – Como resultado do aquecimento da Terra, algumas geleiras estão derretendo. Doze anos depois do desaparecimento das geleiras, pequenas plantas chamadas liquens começaram a crescer nas pedras. Cada líquen cresce de forma mais ou menos circular. A relação entre o diâmetro desse círculo e a idade do líquen pode ser calculada, aproximadamente, pela fórmula

$$d = 7,0 \,.\, \sqrt{t - 12}\,, \text{ para } t \geq 12.$$

Nessa fórmula, d representa o diâmetro do líquen em milímetros e t representa o número de anos passados depois do desaparecimento das geleiras.
O número de anos após o desaparecimento das geleiras para que o diâmetro do líquen seja 35mm, é:

a) 21 b) 28 c) 35 d) 37 e) 48

RESOLUÇÃO:
Na relação $d = 7,0 \,.\, \sqrt{t - 12}$, para d = 35, temos:

$35 = 7,0 \,.\, \sqrt{t - 12} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{t - 12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t - 12 = 25 \Leftrightarrow t = 37$

Resposta: D

Módulo 18 — Sistemas de equações

Palavras-chave:

• Substituição • Adição

Note que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação $x + y = 9$.

Além disso, $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação $x - y = 7$.

Note ainda que **x = 8** e **y = 1** é solução das equações $x + y = 9$ e $x - y = 7$, e portanto o par (8, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Assim sendo, solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas **x** e **y** é qualquer par ordenado (x; y) que satisfaz as duas equações.

Exercícios Resolvidos

1 Determinar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$, pelo método da substituição

Resolução

Fazendo $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \quad \text{(I)} \\ 3x + 2y = -4 \quad \text{(II)} \end{cases}$, de (I) temos:

$$\boxed{y = \frac{1 - 2x}{5}} \quad (\alpha)$$

Substituindo em (II) resulta

$$3x + 2\left(\frac{1 - 2x}{5}\right) = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x + 2 - 4x = -20 \Leftrightarrow 11x = -22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -2} \quad (\beta)$$

Substituindo (β) em (α) obtém-se:

$$y = \frac{1 - 2(-2)}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = 1}$$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

2 Determinar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$, pelo método da adição.

Resolução

Façamos $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \quad \text{(I)} \\ 3x + 2y = -4 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Adicionaremos membro a membro as equações, depois de multiplicar (I) por (– 2) e (II) por 5.

$$\begin{cases} -4x - 10y = -2 \\ 15x + 10y = -20 \end{cases}$$

$$11x = -22 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

Agora, adicionaremos membro a membro as equações, depois de multipicar (I) por 3 e (II) por (– 2).

$$\begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$11y = 11 \Leftrightarrow \boxed{y = 1}$$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

3 **(MODELO ENEM)** – Atualmente, as montadoras têm concentrado sua fabricação em veículos bicombustíveis, ou seja, veículos movidos a álcool e/ou gasolina. Fabiana comprou um veículo bicombustível e gastou R$ 79,20 (setenta e nove reais e vinte centavos) para encher o tanque, que comporta 50 litros. Considerando-se que, no posto em que Fabiana abasteceu, um litro de gasolina custa R$ 2,40 (dois reais e quarenta centavos) e um litro de álcool custa R$ 1,20 (um real e vinte centavos), as quantidades de litros, respectivamente, de gasolina e de álcool, utilizadas para encher o tanque foram de

a) 38 e 12. b) 34 e 16. c) 25 e 25.
d) 16 e 34. e) 12 e 38.

Resolução

Se a for a quantidade de litros de álcool e g a de gasolina, então:

$$\begin{cases} a + g = 50 \\ 1{,}2a + 2{,}4g = 79{,}20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12a - 12g = -600 \\ 12a + 24g = 792 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + g = 50 \\ 12g = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + g = 50 \\ g = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 34 \\ g = 16 \end{cases}$$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 Resolva, o sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

Método da adição:

Façamos: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Adicionaremos membro a membro as equações, depois de multiplicar (I) por 2:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$7x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \quad (\alpha)$$

Substituindo-se (α) em uma das equações, (I) por exemplo, obtemos: $2 \cdot (1) - y = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

$V = \{(1; 1)\}$

2 **(ENEM)** – Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.

O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados.

O número esperado de carros roubados da marca Y é:

a) 20. b) 30. c) 40. d) 50. e) 60.

RESOLUÇÃO:

Sendo x e y respectivamente, o número de carros roubados durante um ano, das marcas X e Y tem-se:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 60\% \cdot 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y + y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$$

O número esperado de carros roubados da marca Y, *durante um ano*, é 30.

Resposta: B

3 **(UNIFESP – MODELO ENEM)** – Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e um estojo é R$ 10,00. O preço do estojo é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. A soma dos preços de aquisição de um estojo e de um lápis é

a) R$ 3,00. b) R$ 4,00. c) R$ 6,00.

d) R$ 7,00. e) R$ 12,00.

RESOLUÇÃO:

Sendo x o preço de 1 lápis e y o preço de 1 estojo, então:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$

Portanto: $x + y = 7$

Resposta: D

4 As idades de um pai e de seu filho somam hoje 30 anos. Daqui a 12 anos, a idade do pai será o dobro da do filho. A idade do pai é hoje:

a) 6 anos b) 18 anos c) 24 anos

d) 30 anos e) 36 anos

RESOLUÇÃO:

Sendo x a idade atual do pai e y a idade atual do filho, em anos, temos:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x + 12 = 2 \cdot (y + 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 3x = 72 \Leftrightarrow x = 24$$

Resposta: C

5 **(FEI – MODELO ENEM)** – O professor João tem R$ 275,00 em notas de R$ 5,00 e R$ 10,00; se o número total de cédulas é 40, a diferença entre o número de notas de R$ 5,00 e R$ 10,00 é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 15 e) 20

RESOLUÇÃO:

Se x for o número de cédulas de R$ 5,00 e y for o número de cédulas de R$ 10,00, então:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 10y = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x - y = 10$$

Resposta: C

Módulo 19

Equações do 2º grau – Fórmula de Báskara

Palavras-chave:
- Raízes (ou soluções)
- Conjunto verdade

1. Definição

É toda sentença aberta, em x, redutível ao tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. Resolução para o caso $c = 0$ e $b \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x\,(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow V = \left\{0; -\dfrac{b}{a}\right\}$

3. Resolução para o caso $b = 0$ e $c \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow V = \left\{\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$ se a e c forem de sinais contrários, ou $V = \varnothing$ se a e c forem de mesmo sinal, para $x \in \mathbb{R}$.

4. Resolução para o caso $b = 0$ e $c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$

5. Resolução do caso geral

A sentença $ax^2 + bx + c = 0$ é equivalente a $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação.

Assim, sendo V o conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, temos:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow V = \varnothing$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 - 8x = 0$

Resolução

$2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x\,.\,(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4 \Leftrightarrow V = \{0; 4\}$

2

a) Resolver, em $\mathbb{R}$ a equação $3x^2 - 12 = 0$

Resolução

$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow V = \{-2; 2\}$

b) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3x^2 + 12 = 0$

Resolução

$3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -12 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow V = \varnothing$

3 Resolver a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Resolução

Notando que $\Delta = (-3)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-2) = 25$, temos:

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\,.\,2} = \dfrac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + 5}{4}$ ou

$x = \dfrac{3 - 5}{4} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \left\{2; -\dfrac{1}{2}\right\}$

4 **(MODELO ENEM)** – A partir do instante em que foi identificado um vazamento em um tanque de água, os técnicos afirmaram que a quantidade total, em litros, de água no tanque, indicada por Q(t), após **t** horas de vazamento, seria dada pela função $Q(t) = t^2 - 24t + 144$. Dividindo-se o total de água no tanque, no instante em que o vazamento foi identificado, pelo total de horas que ele levou para esvaziar totalmente, pode-se concluir que o escoamento médio, nesse intervalo, em litros por hora, foi igual a:

a) 12 b) 12,5 c) 13
d) 13,5 e) 14

Resolução

I. $Q(0) = 144$ e, portanto, a quantidade de litros de água, no instante em que o vazamento foi identificado, era 144.

II. $Q(t) = t^2 - 24t + 144 = 0 \Rightarrow t = 12$

III. Após 12 horas, o tanque estará vazio.

IV. O escoamento médio, nesse intervalo, em litros por hora, foi $\dfrac{144}{12} = 12$.

Resposta: A

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M206**

Saiba mais

Provar que a fórmula resolutiva para a equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, é $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$ significa provar que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Essa demonstração foi feita por Báskara, muito tempo atrás, valendo-se de alguns artifícios.

Observe como foi

1) $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$
2) Multiplicando ambos os membros por 4a obtém-se: $ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
3) Somando b^2 aos dois membros da igualdade temos: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
4) Substituindo $b^2 - 4ac$ por Δ e supondo $\Delta > 0$ temos: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = \Delta \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Logo: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$

Exercícios Propostos

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
$V = \{-2, 2\}$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$V = \varnothing$

3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $5x^2 - 10x = 0$.

RESOLUÇÃO:
$5x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$
$V = \{0, 2\}$

4 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $12x^2 - 7x + 1 = 0$

RESOLUÇÃO:
I) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1$

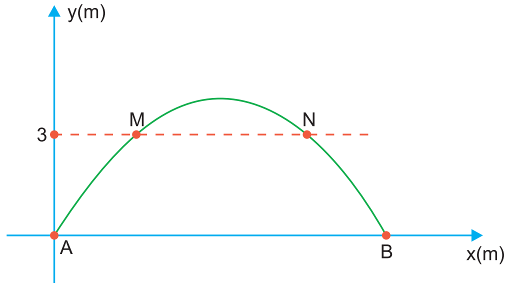
II) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 12} \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm 1}{24} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

$V = \left\{ \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3} \right\}$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$.

RESOLUÇÃO:
Notemos que: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, logo, $V = \varnothing$

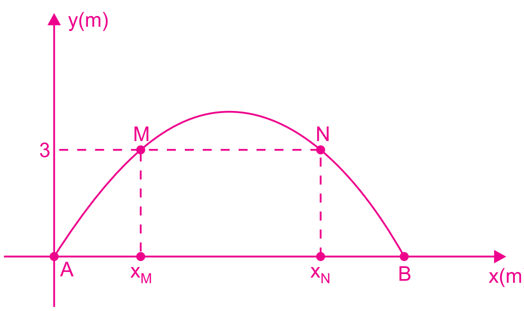
6 O gráfico representa a trajetória de um projétil, desde o seu lançamento (ponto A) até retornar ao solo (ponto B).



Essa trajetória está contida na parábola de equação $y = -2x^2 + 7x$ e os pontos M e N, distam 3 m do solo. A distância em metros, entre os pontos M e N é:

a) 2 b) 2,5 c) 3 d) 3,5 e) 4

RESOLUÇÃO:



Devemos calcular as abscissas dos pontos M e N sabendo que a ordenada desses pontos é 3. Logo:

$y = -2x^2 + 7x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7+5}{4} = 3 \text{ ou } x = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Assim sendo, $x_M = 0{,}5$, $x_N = 3$ e a distância pedida, em metros, é $x_N - x_M = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$

Resposta: B

Módulo 20 — Soma e produto – método da tentativa

Palavras-chave:
- Soma das raízes
- Produto das raízes

1. Soma e produto

Se $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ forem as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, **S** a soma das raízes e **P** o produto das mesmas, então:

a) $$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

b) $$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo:

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

O método da tentativa consiste em obter as raízes de uma equação do 2º grau utilizando estas propriedades, sem o uso da fórmula de Baskara.

2. Obtenção de uma equação do 2º grau a partir de suas raízes

Sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$, então uma equação do 2º grau cujo conjunto verdade é $\{x_1; x_2\}$ será:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 5$

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 6$

Logo, as raízes são 2 e 3, pois: $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$

Resposta: S = {2; 3}

2 Obter uma equação do 2º grau cujas raízes são 3 e 4.

Resolução

Sendo $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$ com $a \neq 0$, temos: $x^2 - (3 + 4)x + 3 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

Resposta: $x^2 - 7x + 12 = 0$

3 **(PUC-ADAPTADO – MODELO ENEM)** – Um professor propôs a seus alunos a resolução de certa equação do 2º grau. Um dos alunos copiou errado apenas o coeficiente do 1º grau e encontrou as raízes 1 e – 3; outro copiou errado apenas o termo constante, encontrando as raízes – 2 e 4. A soma dos quadrados das raízes da equação proposta por aquele professor é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 18

Resolução

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a equação proposta pelo professor e $\{x_1; x_2\}$ seu conjunto solução. Lembrando que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ temos:

1) O aluno que copiou **errado** apenas o coeficiente **b acertou** os coeficientes **a** e **c** e obteve o valor correto do produto das raízes e, portanto,

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 1 \cdot (-3) = -3$

2) O aluno que copiou **errado** apenas o termo constante **acertou** o valor da soma das raízes e, portanto

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = (-2) + 4 = 2$

3) Se a soma é 2 e o produto é – 3, **por tentativa**, obtém-se as raízes 3 e – 1 e a soma dos seus quadrados é $3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10$.

4) Outra forma de resolução é obter a equação correta e resolvê-la pois

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$$

5) Poder-se-ia, ainda, obter a soma dos quadrados sem obter as raízes pois

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot (-3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 = x_1^2 + x_2^2 - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10$

Resposta: B

Exercícios Propostos

Empregando as propriedades da soma e do produto das raízes, resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de **1** a **3**.

1 $x^2 - 7x + 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \dfrac{-(-7)}{1} = 7$ $\quad P = \dfrac{10}{1} = 10$

Logo $x = 2$ ou $x = 5$. $\quad V = \{2, 5\}$

2 $x^2 + 4x + 3 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \dfrac{-4}{1} = -4$ $\quad P = \dfrac{3}{1} = 3$

Logo $x = -1$ ou $x = -3$. $\quad V = \{-3, -1\}$

3 $x^2 - 3x - 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \dfrac{-(-3)}{1} = 3$ $\quad P = \dfrac{-10}{1} = -10$

Logo $x = -2$ ou $x = 5$. $\quad V = \{-2, 5\}$

4 Determine uma equação do 2º grau cujas raízes são 4 e – 6.

RESOLUÇÃO:

Lembrando que $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$, temos:
$x^2 - [4 + (-6)]x + [4 \cdot (-6)] = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$

5 Determine **m** para que uma das raízes da equação $x^2 - 12x + (5m + 2) = 0$ seja o dobro da outra.

RESOLUÇÃO:

Seja V = {α, 2α} o conjunto-verdade da equação

Assim, $S = \alpha + 2\alpha = \dfrac{-(-12)}{1} \Leftrightarrow \alpha = 4$

Como α = 4 é raiz, temos: $4^2 - 12 \cdot 4 + (5m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 6$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M207**

6 **(FUVEST)** – A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)\,x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então m + n é igual a

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

RESOLUÇÃO:

Sabendo-se que na equação $ax^2 + bx + c = 0$, a soma S das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o produto P das raízes é $\frac{c}{a}$, tem-se:

$$\begin{cases} S = \dfrac{5n}{4m+3n} = \dfrac{5}{8} \\ P = \dfrac{m-2}{4m+3n} = \dfrac{3}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5.(4m+3n) = 5n\,.\,8 \\ 32.(m-2) = 3\,.\,(4m+3n) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m - 25n = 0 \\ 20m - 9n = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}$$

Logo, m + n = 9

Resposta: A

7 **(MODELO ENEM)** – As promoções do tipo "leve 5 e pague 4", ou seja, levando-se um conjunto de 5 unidades, paga-se o preço de 4, acenam com um desconto sobre cada conjunto vendido de

a) 10% b) 15% c) 20% d) 25% e) 30%

RESOLUÇÃO:

Na promoção, a cada 5 se tem o desconto de uma unidade e, portanto, desconto de $\frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$

Resposta: C

Módulo 21 Equações redutíveis a 1º e 2º graus

Palavras-chave:
• Substituição
• Fatoração • Verificação

1. Troca de variáveis

A equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$, por exemplo, pode ser transformada numa equação do 2º grau fazendo uma **troca de variáveis**.

Substituindo $\mathbf{x^3}$ por **y** obtém-se **y** resolvendo a equação do 2º grau. Em seguida desfaz-se a troca e determina-se a incógnita inicial **x**.

2. Equação "tipo produto"

Lembrando que $a\,.\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \;\text{ ou }\; b = 0$ pode-se resolver uma equação de grau maior que dois se for possível transformá-la num produto de fatores do 1º e 2º graus.

3. Equações irracionais

a) Definição

Equação irracional é uma equação em que a incógnita aparece sob um ou mais radicais.

b) Resolução

Para resolver uma equação irracional, devemos transformá-la eliminando os radicais. Para isso, elevamos ambos os membros da equação a expoentes convenientes.

c) Verificação

Elevando os dois membros da equação a expoentes pares obtemos uma nova equação, nem sempre equivalente à equação inicial.

Note, por exempo, que $x = 2$ e $x^2 = 4$ não possuem o mesmo conjunto verdade. Isto nos obriga a verificar se cada raiz encontrada é realmente raiz da equação original.

Exercícios Resolvidos

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Resolução

a) substituindo x^3 por y temos:

$y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{9 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 8$

b) Desfazendo a troca temos:

$y = x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$y = x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Resposta: V = {1; 2}

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$

Resolução

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x - 3) - 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

Resposta: V = $\{3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

3 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x+2} + x = 4$.

Resolução

$\sqrt{x+2} + x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 4 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 2$

Verificação

$\boxed{x = 7} \Rightarrow \sqrt{x+2} + x = \sqrt{7+2} + 7 = 10;$

logo 7 não é raiz.

$\boxed{x = 2} \Rightarrow \sqrt{x+2} + x = \sqrt{2+2} + 2 = 4;$

logo 2 é raiz.

Resposta: V = {2}

4 **(MODELO ENEM)** – De acordo com a fórmula de Báskara, o conjunto solução da equação $x^2 - x - 12 = 0$ é {4; – 3}, pois:

$1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -3$$

O conjunto solução da equação $(1,4x - 0,2)^2 = 1,4x + 11,8$ é {a; b} com a > b.

O valor de 3a – 2b é:

a) 21 b) 18 c) 16 d) 13 e) 8

Resolução

1) $(1,4x - 0,2)^2 = 1,4x + 11,8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1,4x - 0,2)^2 = (1,4x - 0,2) + 12$

2) Substituindo 1,4x – 0,2 por y, temos:
$y^2 = y + 12 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 4$ ou $y = -3$

3) Se $1,4x - 0,2 = 4$, então $x = 3$.

4) Se $1,4x - 0,2 = -3$, então $x = -2$.

5) De acordo com o enunciado, a = 3 e b = – 2; portanto:
$3a - 2b = 3 \cdot 3 - 2(-2) = 9 + 4 = 13$

Resposta: D

Exercícios Propostos

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de **1** a **4**:

1 $(x + 4)^2 - 3(x + 4) - 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

Fazendo-se x + 4 = y, temos: $y^2 - 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 5$
Assim, $x + 4 = -2$ ou $x + 4 = 5 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 1$
V = {– 6, 1}

2 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

RESOLUÇÃO:

Fazendo-se $x^2 = y$, temos: $x^4 = y^2$ e a equação
$y^2 - 13y + 36 = 0$, cujas raízes são y = 4 ou y = 9.
Assim, $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = -3$ ou $x = 3$
V = {– 3; – 2; 2; 3}

3 $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

RESOLUÇÃO:

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) - 4(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 4) \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
V = {– 2; 2; 4}

4 $\sqrt{2x + 5} = x + 1$

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
Verificação:
$\boxed{x = 2} \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 2 + 5} = 2 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 = 2 + 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, logo 2 é raiz
$\boxed{x = -2} \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot (-2) + 5} = -2 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 = -2 + 1 \Leftrightarrow 1 = -1$, logo – 2 não é raiz
V = {2}

A temperatura T, em °C, na qual a água ferve, relaciona-se com a altitude h, em metros, sobre o nível do mar, de acordo com a fórmula:

$$\mathbf{h = 1000\,(100 - T) + 580(100 - T)^2,}$$
$$\mathbf{\text{válida para } 95 \le T \le 100}$$

A Fórmula da Báskara permite, além disso, concluir que a raiz positiva da equação $29x^2 + 50x - 442 = 0$ é, aproximadamente, igual a 3,14.

Supondo que a fórmula apresentada seja válida, resolva a questão **5**.

5 **(MODELO ENEM)** – O cume do Monte Everest está 8840m acima do nível do mar. A temperatura em que ferve a água, nesse local, em °C, é aproximadamente

a) 96,86 b) 96,40 c) 96,00
d) 95,98 e) 95,42

RESOLUÇÃO:

Sendo h = 8840 e substituindo 100 – T por x, temos:
$8840 = 1000 \cdot x + 580 \cdot x^2 \Leftrightarrow 58x^2 + 100x - 884 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 29x^2 + 50x - 442 = 0$
Só interessa a solução positiva dessa equação (pois T ≤ 100 e 100 – T ≥ 0) e pelo enunciado este valor é 3,14
Assim sendo, 100 – T = 3,14 ⇔ T = *96,86*
Resposta: A

Módulo 22

Problemas de 1º e 2º graus

1 **(MODELO ENEM)** – A soma dos gastos efetuados por um município para erradicar as doenças X e Y é igual a R$ 77.000,00. Reduzindo-se R$ 5.000,00 nos gastos com a erradicação da doença X e mantendo-se os gastos para a erradicação de Y, a razão entre os gastos para a erradicação de X e Y, nessa ordem, será igual a $\frac{5}{4}$.

Nessas condições, é correto afirmar que os gastos para erradicar a doença X superam os gastos para erradicar a doença Y em:

a) R$ 9.000,00
b) R$ 11.000,00
c) R$ 12.000,00
d) R$ 13.000,00
e) R$ 15.000,00

RESOLUÇÃO:
Se "x" e "y" forem as quantias gastas para erradicar as doenças "X" e "Y", respectivamente, então:

$$\begin{cases} x + y = 77000 \\ \dfrac{x - 5000}{y} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -308000 \\ 4x - 5y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 77000 \\ -9y = -288000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 77000 \\ y = 32000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 45000 \\ y = 32000 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 13000$$

Resposta: D

2 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

RESOLUÇÃO:
Se ℓ, m e a são as quantias em reais que Lúcia, Maria e Amélia possuem, então

$$\begin{cases} \ell + 3 = a - 3 \\ \ell + \dfrac{m}{3} = a + 6 \\ \dfrac{a}{2} = \dfrac{m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3\ell - 3a + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3.(\ell - a) + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3.(-6) + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3a - 2m = 0 \\ m = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 18 \\ m = 36 \\ a = 24 \end{cases}$$

Resposta: Amélia possui 24 reais, Lúcia possui 18 reais e Maria possui 36 reais.

3 **(PUCC – MODELO ENEM)** – Certo pai disse a seu filho: "Hoje, a minha idade é o quadrado da sua, mas daqui a 10 anos, a minha excederá a sua em 30 anos." A soma das idades do pai e do filho, hoje, é:

a) 90 anos
b) 72 anos
c) 56 anos
d) 42 anos
e) 30 anos

RESOLUÇÃO:
Sejam x e y as idades atuais do pai e do filho, respectivamente.

Assim, $\begin{cases} x = y^2 & \text{(I)} \\ x + 10 = (y + 10) + 30 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo-se (I) em (II), temos:

$y^2 + 10 = (y + 10) + 30 \Leftrightarrow y^2 - y - 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 6}$ **ou** $\boxed{y = -5}$ **(não convém)**

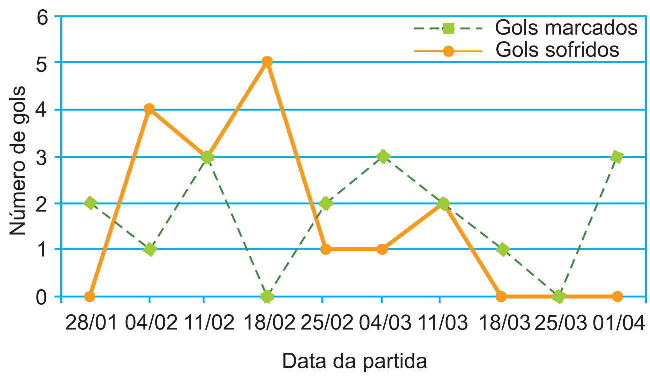
Substituindo y = 6 em (I) obtém-se $x = 6^2 = 36$
Assim, as idades atuais do pai e filho são, respectivamente, 36 anos e 6 anos. A soma das idades é, portanto, 42 anos.

Resposta: D

4 **(UNICAMP)** – Ache dois números inteiros, positivos e consecutivos, sabendo que a soma de seus quadrados é 481.

RESOLUÇÃO:
Sejam x e x + 1 os números procurados.
$x^2 + (x + 1)^2 = 481 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 481 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ **ou** $x = -16$
Como x deve ser positivo, temos que x = – 16 não convém, logo, x = 15.
Assim, os números procurados são 15 e 16.

5 **(MODELO ENEM)** – No gráfico, estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a

a) 15 b) 17 c) 18 d) 20 e) 24

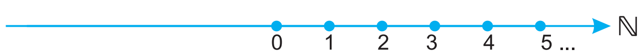
RESOLUÇÃO:
A equipe em questão ganhou 5 partidas, empatou 3, e perdeu 2.
O número de pontos acumulados ao final da 10a. partida é
3 . 5 + 1 . 3 = 18
Resposta: C

Módulo 23 Conjuntos numéricos

Palavras-chave:
• Naturais • Inteiros
• Racionais • Irracionais • Reais

1. O conjunto ℕ dos números naturais

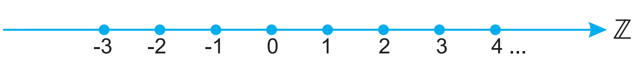
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$



Note que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

2. O conjunto ℤ dos números inteiros

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e além disso:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\dots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\mathbb{Z}_- = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0\}$

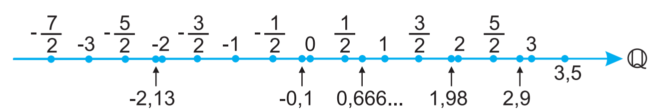
$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots -4, -3, -2, -1\}$

3. O conjunto ℚ dos números racionais

Um número é **racional** se puder ser representado na forma $\dfrac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Todo número **racional** é **inteiro** ou **decimal exato** ou **dízima periódica.**



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

4. O conjunto ℝ dos números reais

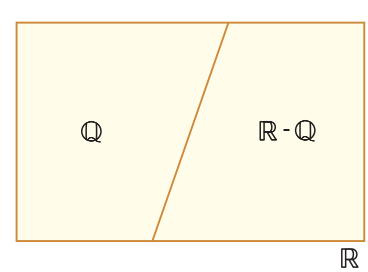
É a união o conjunto ℚ dos racionais com o conjunto ℝ – ℚ dos irracionais. Demonstra-se que o conjunto ℝ dos números reais está em correspondência biunívoca com os pontos da reta. Assim:

Observe que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$



São normalmente utilizados os seguintes subconjuntos de ℝ:

a) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ é o conjunto dos números reais diferentes de zero.

b) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ é o conjunto dos números reais positivos.

c) $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ é o conjunto dos números reais estritamente positivos.

d) $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ é o conjunto dos números reais negativos.

e) $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ é o conjuntos dos números reais estritamente negativos.

5. Desigualdade em $\mathbb{R}$

Sendo a, b $\in \mathbb{R}$, assumimos que:

I) $a \leq b$ é equivalente a $a < b$ ou $a = b$

II) $a < b$ é equivalente a $b > a$

III) $a < b$ é equivalente a $a - b < 0$

IV) $a > b$ é equivalente a $a - b > 0$

V) $a \neq b$ é equivalente a $a - b \neq 0$

VI) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$

VII) $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \,.\, b > 0$

VIII) $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \,.\, b < 0$

Saiba mais

1) O número inteiro 3, por exemplo, é racional pois $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{30}{10} = \ldots$

2) O número decimal exato 4,17, por exemplo, é racional pois $4{,}17 = \frac{417}{100} = \frac{834}{200} = \ldots$

3) O número decimal não-exato e periódico (chamado dízima periódica) 0,414141…, por exemplo, é racional pois $0{,}414141\ldots = \frac{41}{99}$

4) $\frac{41}{99}$ é chamada geratriz da dízima periódica 0,414141… . Para obter a dízima, a partir da geratriz, basta dividir 41 por 99.

5) 0,414141… é a dízima periódica. Para obter a geratriz $\frac{41}{99}$ a regra é:

a) O numerador 41 é o período da dízima.

b) O denominador é sempre formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período. Como no caso o período (41) de **2 algarismos**, o denominador é formado por **2 algarismos** iguais a 9.

6) Os únicos números reais que não são racionais são os decimais não exatos e não periódicos. Esses números são os irracionais.

Números irracionais

São aqueles que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Os únicos números desse tipo são os decimais não exatos e não periódicos. Representa-se o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplos

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

b) $\pi = 3{,}1415926\ldots$

c) $\sqrt{n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e não quadrado perfeito.

d) $e = 2{,}718281827\ldots$

6. Intervalos

Sendo $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, com $a < b$, intervalo é qualquer um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos e representados a seguir como subconjuntos da reta real.

a) $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

b) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

c) $[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

d) $]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

e) $[a, +\infty[\ = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

f) $]a, +\infty[\ = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

g) $]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

h) $]-\infty, a[\ = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Exercícios Resolvidos

1 Provar que se $\{a;b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ então $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

Resolução

$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + b)(a - b) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - b > 0$ (pois $a + b > 0$) $\Leftrightarrow a > b$

2 Dos números abaixo, o mais próximo de

$\dfrac{(6{,}01)^3 \cdot (9{,}92)^2}{(11{,}9)^2}$ é:

a) 1500 b) 150 c) 25
d) 15 e) 2,5

Resolução

O número mais próximo de $\dfrac{(6{,}01)^3 \cdot (9{,}92)^2}{(11{,}9)^2}$ é:

$$\frac{6^3 \cdot 10^2}{12^2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6} = 150$$

Resposta: B

3 Para cada número real x, admita que [x] seja igual a x se x for inteiro, e igual ao maior inteiro menor que x se x não for inteiro.

O valor de $\left[\dfrac{[-2{,}7]}{[0{,}7] + \left[\dfrac{16}{3}\right]}\right]$ é:

a) – 2 b) – 1 c) 0
d) 1 e) 2

Resolução

1) $[-2, 7] = -3$; $[0{,}7] = 0$; $\left[\dfrac{16}{3}\right] = 5$

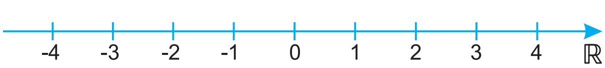
2) $\left[\dfrac{[-2, 7]}{[0{,}7] + \left[\dfrac{16}{3}\right]}\right] = \left[\dfrac{-3}{0 + 5}\right] =$

$= \left[-\dfrac{3}{5}\right] = [-0{,}6] = -1$

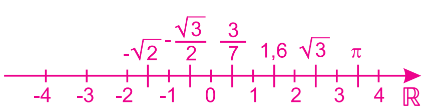
Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Na reta real, marque aproximadamente a posição dos números $1{,}6$, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{3}{7}$, π, $\sqrt{5}$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



RESOLUÇÃO:



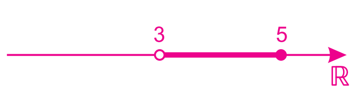
2 Represente na reta real os conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

RESOLUÇÃO:

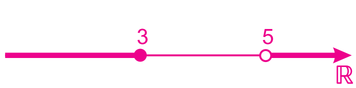
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

RESOLUÇÃO:



c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3$ ou $x > 5\}$

RESOLUÇÃO:



3 Descreva os conjuntos representados nas retas reais por uma propriedade e também na forma [a,b], [a,b[,]a,b[ou]a,b].

a)

RESOLUÇÃO:
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} =]-\infty, 3[$

b)

RESOLUÇÃO:
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty[$

c)

RESOLUÇÃO:
$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\} = [-1, 3[$

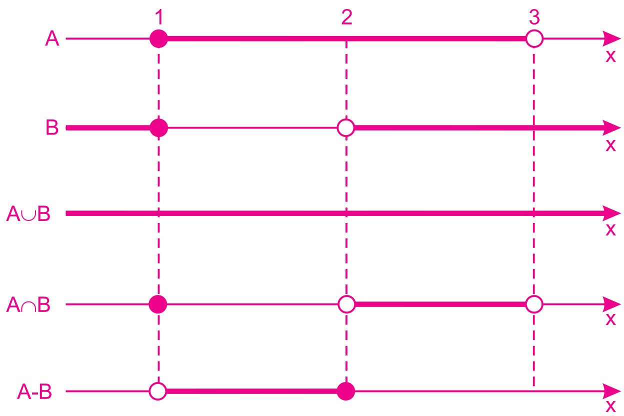
d)

RESOLUÇÃO:
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x > 3\} =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$

4 Sendo A = {x ∈ ℝ | 1 ≤ x < 3} e B = {x ∈ ℝ | x ≤ 1 ou x > 2}, determinar:

a) A ∪ B b) A ∩ B c) A – B

RESOLUÇÃO:



a) ℝ **b) {1} ∪]2, 3[** **c)]1, 2]**

5 **(MODELO ENEM)** – Na receita de bolo de Maria constam as seguintes informações:

⋮

dois ovos

meio quilograma de farinha de trigo

duzentos gramas de manteiga

⋮

Asse-o à temperatura de duzentos graus celsius e resfrie-o à temperatura de cinco graus abaixo de zero.

⋮

Para melhor representar as quantidades de ovos, farinha, manteiga e as temperaturas citadas na receita, podemos utilizar, respectivamente, números:

a) naturais, racionais, naturais, inteiros
b) naturais, inteiros, racionais, reais
c) inteiros, naturais, reais, racionais
d) racionais, inteiros, inteiros, naturais
e) naturais, racionais, inteiros, naturais

RESOLUÇÃO:
A quantidade de ovos é sempre expressa por números naturais; meio quilograma de farinha $\left(\frac{1}{2}\text{ kg}\right)$ é expressa por um número racional; 200g de manteiga é expressa por um número natural; – 5°C é expressa por um número inteiro.
Resposta: A

6 **(MODELO ENEM)** – Os números de identificação

utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade etc.) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou na digitação de documentos. Um dos métodos usados para gerar esse dígito compõe-se dos seguintes passos:

- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1 e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2;
- soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que 10 ou igual a 10;
- somam-se os resultados obtidos;
- calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se, assim, o dígito de verificação.

O dígito de verificação para o número 24685 fornecido pelo processo descrito anteriormente é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

RESOLUÇÃO:
1) 1 . 2 + 2 . 4 + 1 . 6 + (2 . 8 + 1) + 1 . 5 = 2 + 8 + 6 + 17 + 5 = 38

2) $\begin{array}{r|l} 38 & 10 \\ \hline 8 & 3 \end{array}$

3) O dígito é 8.

Resposta: E

Módulo 24

Função polinomial do 1º grau

Palavras-chave:
• Reta
• Crescente • Decrescente

1. Definição

Chama-se **função polinomial do 1º grau** a toda função f : ℝ → ℝ definida por:

$\boxed{f(x) = ax + b}$, a ∈ ℝ* e b ∈ ℝ

2. Como obter o gráfico

Exemplo 1

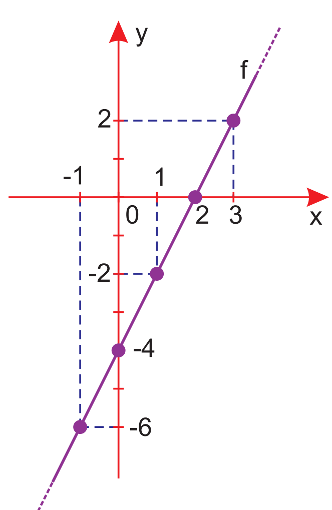
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = 2x – 4.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	y = 2x – 4	x
– 1	y = 2 . (– 1) – 4 = – 6	(– 1; – 6)
0	y = 2 . 0 – 4 = – 4	(0; – 4)
1	y = 2 . 1 – 4 = – 2	(1; – 2)
2	y = 2 . 2 – 4 = 0	(2; 0)
3	y = 2 . 3 – 4 = 2	(3; 2)

Localizamos os pontos obtidos no sistema de coordenadas cartesianas.



Exemplo 2

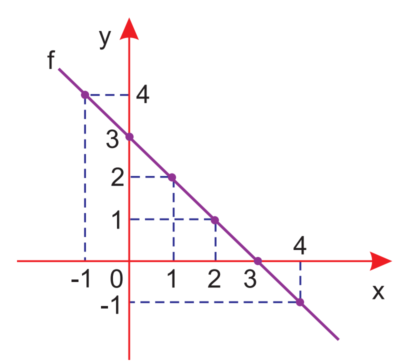
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = – x + 3

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	y = – x + 3	x
– 1	y = – (– 1) + 3 = 4	(– 1; 4)
0	y = – 0 + 3 = 3	(0; 3)
1	y = – 1 + 3 = 2	(1; 2)
2	y = – 2 + 3 = 1	(2; 1)
3	y = – 3 + 3 = 0	(3; 0)
4	y = – 4 + 3 = – 1	(4; – 1)

Localizamos os pontos obtidos no sistema de coordenadas cartesianas.



Demonstra-se que:

a) O gráfico da função polinomial do **1º grau** é sempre uma **reta oblíqua**.

b) Se a > 0 então a função é **estritamente crescente**.

c) Se a < 0 então a função é **estritamente decrescente**.

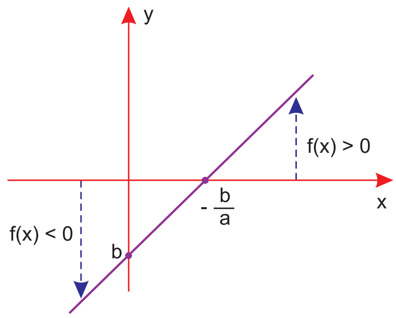
d) O gráfico de **f** intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ no ponto

$\left(-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}; \mathbf{0}\right)$ ou seja: $-\dfrac{b}{a}$ é a raiz de **f**.

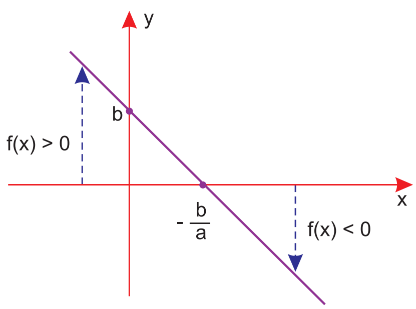
e) O gráfico de **f** intercepta o eixo $\overrightarrow{Oy}$ no ponto **(0; b)**

f) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é **bijetora** e seu gráfico é sempre do tipo:

a > 0



a < 0



Saiba mais

Analisando o gráfico conclui-se que:

a) Se $a > 0$ então:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

b) Se $a < 0$ então:

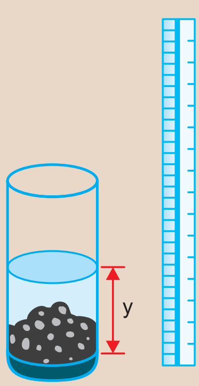
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Exercícios Resolvidos

1 **(ENEM)** – Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura ao lado. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em; www.penta.ufrgs.br
Acesso em: 13 jan 2009 (adaptado)

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$. b) $y = 25x + 20{,}2$.
c) $y = 1{,}27x$. d) $y = 0{,}7x$.
e) $y = 0{,}07x + 6$.

Resolução

Se a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x) é do primeiro grau, então $y = ax + b$.

Para os resultados do experimento, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 5 + b = 6{,}35 \\ a \cdot 10 + b = 6{,}70 \\ a \cdot 15 + b = 7{,}05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}07 \\ b = 6 \end{cases}$$

Logo, $y = 0{,}07x + 6$.

Resposta: E

2 **(MODELO ENEM)** – Uma artesã que produz pequenas esculturas em argila. Pensando em ampliar seu negócio, elaborou a tabela a seguir para calcular seus custos mensais.

Salário do auxiliar	R$ 450,00
Energia elétrica e água	R$ 60,00
Impostos	R$ 160,00
Combustível	R$ 70,00
Material para uma peça	R$ 3,40
Embalagem de uma peça	R$ 0,60

Utilizando-se os dados da tabela, a relação entre o custo C e o número de peças N produzidas mensalmente pode ser estabelecida na sentença matemática dada por:

a) $C = 740N$ b) $C = 4 + 740N$
c) $C = 740 - 4N$ d) $C = 4N + 740$
e) $C = 4N + 820$

Resolução

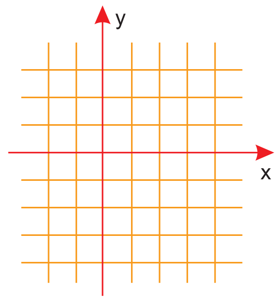
O custo C para produzir N peças é:
$C = 450 + 60 + 160 + 70 + 3{,}40N + 0{,}60N$
$C = 740 + 4N$

Resposta: D

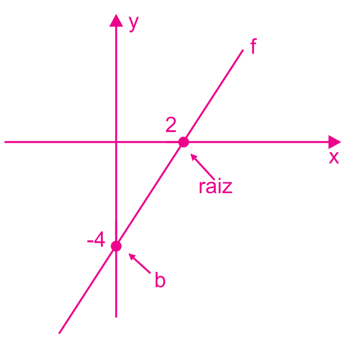
Exercícios Propostos

1 Seja f: ℝ → ℝ a função definida por $f(x) = 2x - 4$. Complete a tabela e esboce o gráfico de **f**.

x	f(x)
0	
2	



RESOLUÇÃO:



x	f(x)
0	– 4
2	0

2 Analisando o gráfico da função **f** do exercício anterior, complete as sentenças abaixo:

a) A função f : ℝ → ℝ definida por $f(x) = 2x - 4$ é estritamente

crescente

b) O conjunto solução da equação $f(x) = 0$ ou

$2x - 4 = 0$ é V = **{2}**

c) O conjunto solução da inequação $f(x) > 0$ ou

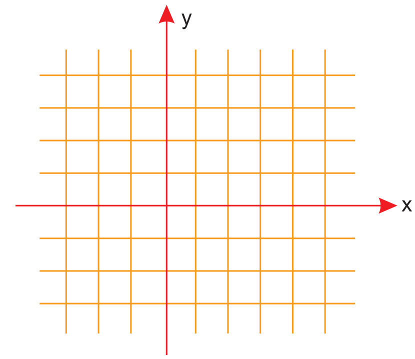
$2x - 4 > 0$ é V = **{x ∈ ℝ | x > 2}**

d) O conjunto solução da inequação $f(x) < 0$ ou

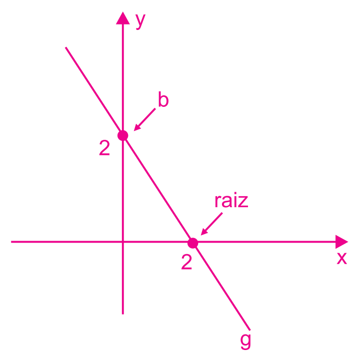
$2x - 4 < 0$ é V = **{x ∈ ℝ | x < 2}**

3 Seja g : ℝ → ℝ a função definida por $g(x) = -x + 2$. Complete a tabela e esboce o gráfico de **g**.

x	g(x)
0	
2	



RESOLUÇÃO:



x	g(x)
0	2
2	0

4 A função **f**, do 1º grau, é definida por $f(x) = 3x + k$. Determine:

a) O valor de **k** para que o gráfico de **f** "corte" o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5.

b) O ponto em que o gráfico de **f** "corta" o eixo das abscissas.

c) O gráfico de **f**.

RESOLUÇÃO:

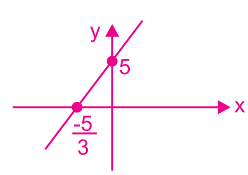
a) O gráfico de f "corta" o eixo das ordenadas no ponto (0; 5), logo, f(0) = 5.
Assim: $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 + k = 5 \Leftrightarrow k = 5$

b) A função f é definida por $f(x) = 3x + 5$ e seu gráfico "corta" o eixo das abscissas no ponto (x; 0), logo, f(x) = 0.

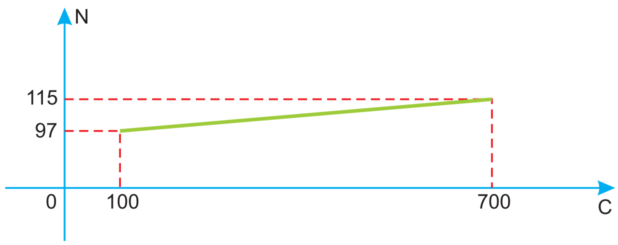
Assim: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

Portanto, o ponto é $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$

c) Utilizando as intersecções com os eixos, temos o seguinte gráfico:



5 **(MODELO ENEM)** – Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO_2 (dióxido de enxofre). Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista "Science" em 1972 concluiu que o número (N) de mortes por semana, causadas pela inalação de SO_2, estava relacionado com a concentração média (C), em μg/m³, do SO_2 conforme o gráfico abaixo: os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura.



Com base nos dados apresentados, a relação entre N e C($100 \le C \le 700$) pode ser dada por:

a) N = 100 – 700 C
b) N = 94 + 0,03 C
c) N = 97 + 0,03 C
d) N = 115 – 94 C
e) N = 97 + 600 C

RESOLUÇÃO:

O gráfico representa uma função do 1º grau do tipo N = a . C + b, passando pelos pontos (100; 97) e (700; 115), então:

$$\begin{cases} 97 = a \cdot 100 + b \\ 115 = a \cdot 700 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -97 = -100 \cdot a - b \\ 115 = 700 \cdot a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 = 600 \cdot a \\ 115 = 700 \cdot a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,03 \\ b = 94 \end{cases}$$

Portanto, a relação entre N e C é N = 0,03 . C + 94

Resposta: B

6 **(MODELO ENEM)** – Várias escalas podem ser usadas para a graduação de um termômetro. As mais usadas são a Celsius e a Fahrenheit.
Na tabela a seguir, são mostrados alguns valores dessas escalas.

	Celsius	**Fahrenheit**
Temperatura de fusão do gelo	0 grau	32 graus
Temperatura de ebulição da água	100 graus	212 graus

Se uma temperatura corresponde a x graus na Celsius e a y graus na Fahrenheit, a relação entre essas duas escalas é dada por $y = \frac{9}{5}x + 32$. Com base nessas informações, em um dia em que a diferença entre a temperatura máxima e a mínima foi 18 graus na escala Fahrenheit, é correto afirmar que essa diferença, na escala Celsius, foi de

a) 32 graus.
b) 18 graus.
c) 14 graus.
d) 10 graus.
e) 12 graus.

RESOLUÇÃO:

Sejam y_M e y_m as temperaturas máxima e mínima em graus Fahrenheit e sejam ainda x_M e x_m as temperaturas máxima e mínima em graus Celsius. Assim:

$$\begin{cases} y_M = \frac{9}{5}x_M + 32 \\ y_m = \frac{9}{5}x_m + 32 \end{cases} \Rightarrow y_M - y_m = \frac{9}{5} \cdot (x_M - x_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = \frac{9}{5} \cdot (x_M - x_m) \Leftrightarrow x_M - x_m = 10$$

Resposta: D

Módulo 25

Função polinomial do 2º grau

Palavras-chave:

• Parábola • Concavidade

1. Definição

Chama-se **função polinomial do 2º grau**, ou função quadrática, a toda função f : ℝ → ℝ definida por:

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$, a ∈ ℝ*, b ∈ ℝ e c ∈ ℝ

2. Como obter o gráfico

Exemplo 1

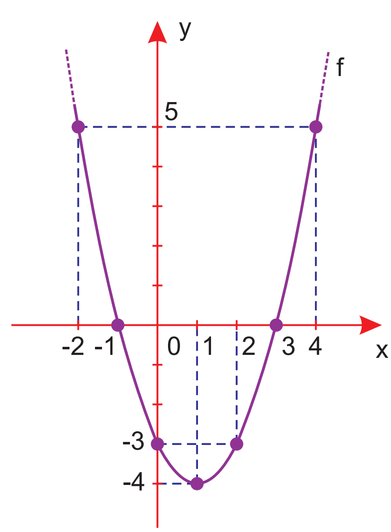
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = x^2 - 2x - 3$	(x; y)
– 2	$y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$	(– 2; 5)
– 1	$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$	(– 1; 0)
0	$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$	(0; – 3)
1	$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$	(1; – 4)
2	$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$	(2; – 3)
3	$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$	(3; 0)
4	$y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$	(4; 5)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas:



Exemplo 2

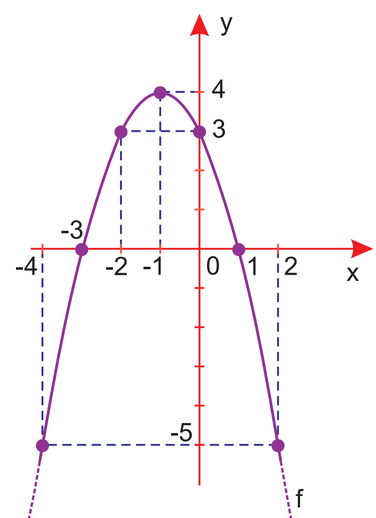
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = -x^2 - 2x + 3$	(x; y)
– 4	$y = -(-4)^2 - 2 \cdot (-4) + 3 = -5$	(– 4; – 5)
– 3	$y = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 3 = 0$	(– 3; 0)
– 2	$y = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 3$	(– 2; 3)
– 1	$y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$	(– 1; 4)
0	$y = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$	(0; 3)
1	$y = -1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 0$	(1; 0)
2	$y = -2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = -5$	(2; – 5)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas:



Exemplo 3

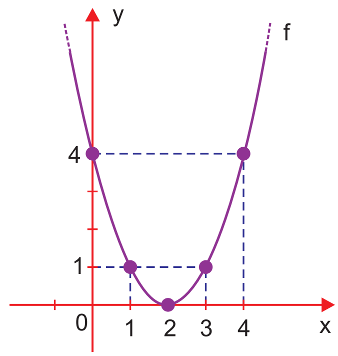
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por $y = f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$	(x; y)
0	$y = (0 - 2)^2 = 4$	(0; 4)
1	$y = (1 - 2)^2 = 1$	(1; 1)
2	$y = (2 - 2)^2 = 0$	(2; 0)
3	$y = (3 - 2)^2 = 1$	(3; 1)
4	$y = (4 - 2)^2 = 4$	(4; 4)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas.



Exemplo 4

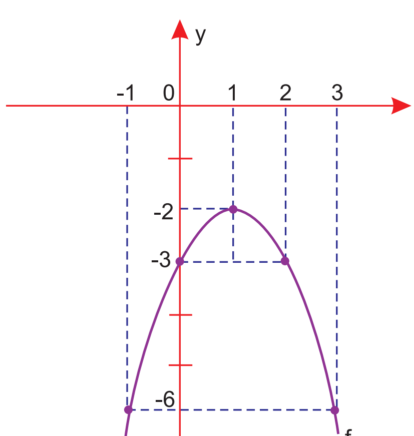
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

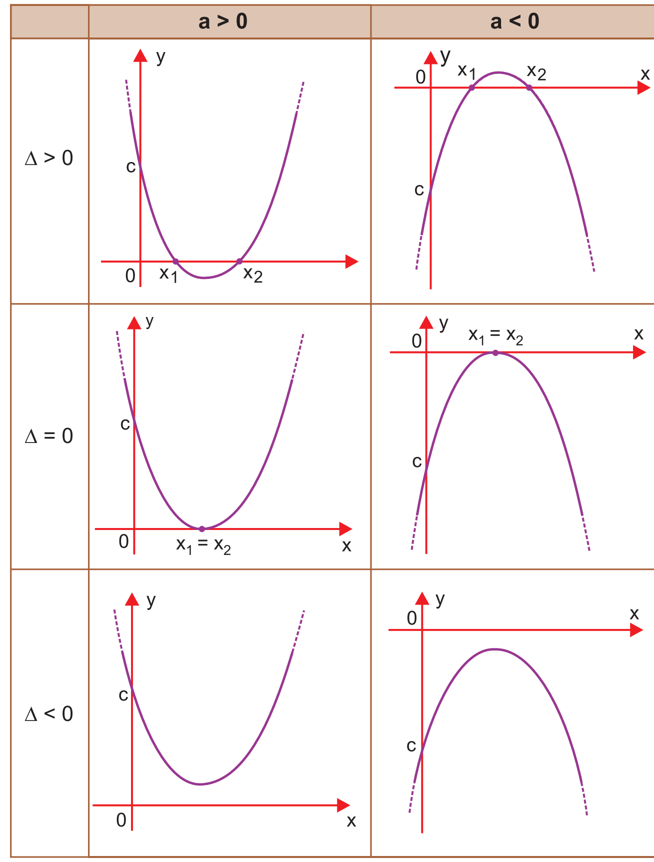
x	$y = -x^2 + 2x - 3$	(x; y)
– 1	$y = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -6$	(– 1; – 6)
0	$y = -0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$	(0; – 3)
1	$y = -1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -2$	(1; – 2)
2	$y = -2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = -3$	(2; – 3)
3	$y = -3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = -6$	(3; – 6)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas.



3. Tipos de gráfico

O gráfico da função polinomial do 2º grau é sempre uma **parábola**. Dependendo do valor de **a** e do valor de **Δ** temos os seguintes tipos de gráficos:



Saiba mais

a) O gráfico de f é sempre uma **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo $\overrightarrow{Oy}$.

b) Se a > 0 então a parábola tem a "concavidade voltada para cima".

c) Se a < 0 então a parábola tem a "concavidade voltada para baixo".

d) A parábola **sempre intercepta** o eixo $\overrightarrow{Oy}$ no ponto (0; c)

e) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então **f** não admite raízes reais. A parábola não intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

f) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então **f** admite uma única raiz. A parábola tangencia o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

g) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então **f** admite duas raízes reais distintas. A parábola intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos.

h) A função polinomial do 2º grau, definida em ℝ, não é nem injetora e nem sobrejetora.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M208**

Exercício Resolvido

1 **(ENEM)** – Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10\,000 + 50x - x^2$.
b) $V = 10\,000 + 50x + x^2$.
c) $V = 15\,000 - 50\,x - x^2$.
d) $V = 15\,000 + 50x - x^2$.
e) $V = 15\,000 - 50x + x^2$.

Resolução

A partir do enunciado, o valor arrecadado V, em R$, por dia, com a venda do álcool, deve obedecer à seguinte expressão:

$V = (10000 + 100\,.\,x)\,.\,(1,50 - 0,01\,.\,x)$

$V = 15000 + 150\,.\,x - 100\,.\,x - x^2$

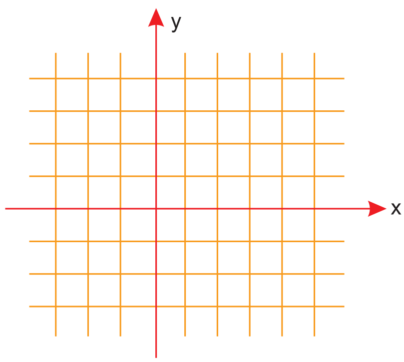
$V = 15000 + 50\,.\,x - x^2$

Resposta: D

Exercícios Propostos

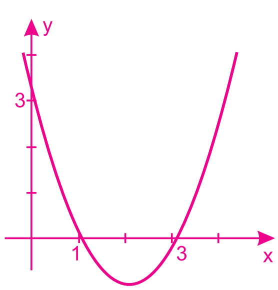
1 Complete a tabela e esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

x	f(x)
0	
1	
2	
3	
4	

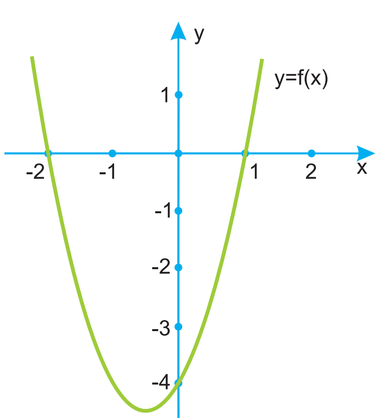


RESOLUÇÃO:

x	f(x)
0	3
1	0
2	– 1
3	0
4	3



2 **(UNESP)** – A expressão que define a função quadrática f(x), cujo gráfico está esboçado, é:



a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.
b) $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
c) $f(x) = x^2 + x - 2$.
d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$.

RESOLUÇÃO:

Sugestão: A sentença que define f, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode também assumir a forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ onde x_1 e x_2 são as raízes.

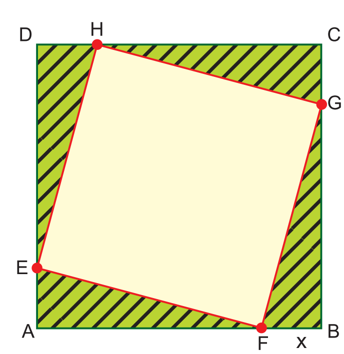
Sendo – 2 e 1, as raízes da função quadrática, a expressão que define a função f, cujo gráfico foi dado, é tal que

$$\begin{cases} f(x) = a(x + 2)(x - 1) \\ f(0) = -4 \end{cases} \Rightarrow -4 = a\,.\,2\,.\,(-1) \Leftrightarrow a = 2$$

Portanto, a expressão é $f(x) = 2(x + 2)(x - 1) \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

Resposta: D

3 **(MODELO ENEM)** – Pretende-se fazer, numa escola, um jardim na forma de um quadrado ABCD de 7 m de lado, como mostra a figura.



A área hachurada representa o lugar onde se pretende plantar grama e o quadrado EFGH é o local destinado ao plantio de roseiras. Tem-se, em metros, AE = BF = CG = DH = x.

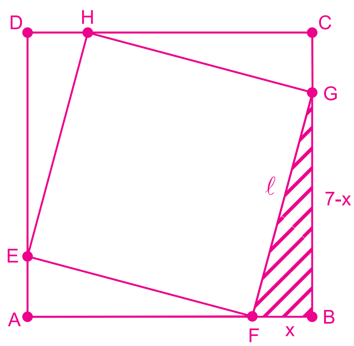
A função em x, para $0 \leq x \leq 7$, que permite calcular a área A(x), em metros quadrados, em que será plantada a grama é definida por:

a) $A(x) = 14x - 2x^2$ b) $A(x) = 7x - x^2$

c) $A(x) = \dfrac{7x - x^2}{2}$ d) $A(x) = x(x - 4)$

e) $A(x) = -x^2 + 4x$

RESOLUÇÃO:



A área do triângulo retângulo FBG é $\dfrac{x(7 - x)}{2}$

A área reservada ao plantio de grama é

$A(x) = 4 \cdot \dfrac{x(7 - x)}{2} = 2x(7 - x) = 14x - 2x^2$

Resposta: A

4 Um homem-bala é lançado de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola. Considerando que no instante de lançamento (t = 0) ele está a 3 metros do solo, 1 segundo após ele atinge a altura de 4 metros e 3 segundos após o lançamento ele atinge o solo, pede-se:

a) A altura **h** do homem-bala, medida em metros e a partir do chão, em função do tempo **t**, medido em segundos.

b) O valor de **h** para t = 2.

RESOLUÇÃO:

a) A sentença que permite calcular a altura h em função do tempo *t* é do tipo $h(t) = at^2 + bt + c$ passando esta função pelos pontos (0; 3), (1; 4) e (3; 0). Logo:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = -t^2 + 2t + 3$$

b) $t = 2 \Rightarrow h(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 3$

Módulos 26 e 27

Vértice e conjunto-imagem

Palavras-chave:

• Vértice • Máximo • Mínimo

1. Vértice da parábola

O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo $\overrightarrow{Oy}$.

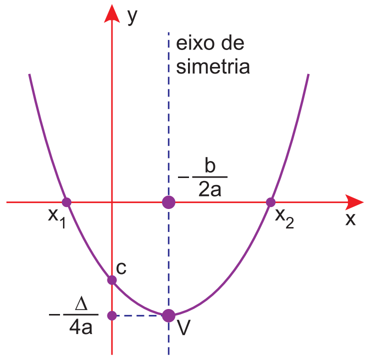
O **vértice** da parábola, representado por **V**, é o ponto de **ordenada mínima** (quando $a > 0$) ou o ponto de **ordenada máxima** (quando $a < 0$).

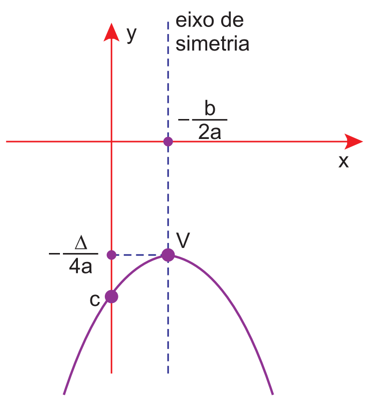
A abscissa do vértice é $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e coincide com o ponto médio entre as raízes reais, quando estas existem.

A ordenada de **V** pode ser obtida apenas substituindo, na sentença que define **f**, **x** pela abscissa já encontrada.

Pode também ser calculada utilizando a fórmula $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Assim sendo: $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$





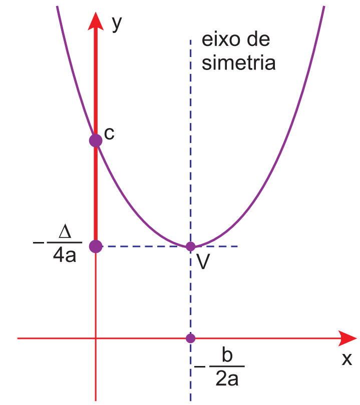
2. Conjunto-imagem

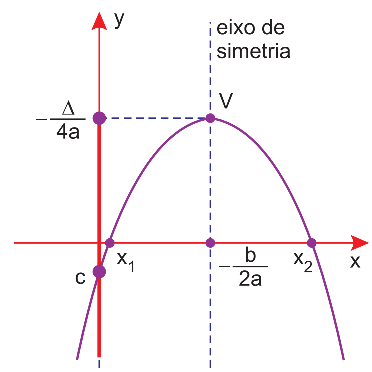
a) Se **a > 0** então **V** será ponto de **mínimo** da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O conjunto-imagem de **f**, representado por Im(f), será:

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\} = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty \right[$$

b) Se **a < 0** então **V** será ponto de **máximo** da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O conjunto-imagem de **f**, representado por Im(f), será:

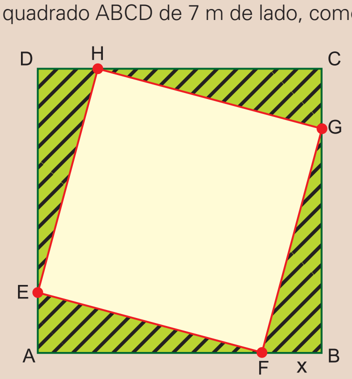
$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \;/\; y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\} = \left] -\infty; -\frac{\Delta}{4a} \right]$$





Exercício Resolvido – Módulos 26 e 27

1 **(MODELO ENEM)** – Pretende-se fazer, numa escola, um jardim na forma de um quadrado ABCD de 7 m de lado, como mostra a figura.



A área hachurada representa o lugar onde se pretende plantar grama e o quadrado EFGH é o local destinado ao plantio de roseiras. Cada roseira precisa, para poder se desenvolver, de uma área equivalente à de um quadrado de 20 cm de lado.

Tem-se, em metros, AE = BF = CG = DH = x.

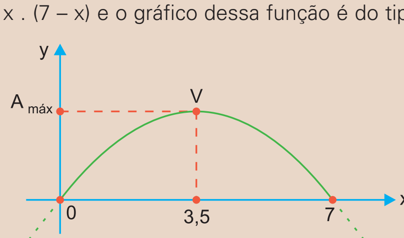
Visto que é muito caro plantar e cuidar das roseiras, deseja-se que a área a elas reservada seja a menor possível. Supondo que isso aconteça, podemos concluir que a área em que será plantada a grama, em metros quadrados, é:

a) 20 b) 21,5 c) 24 d) 24,5 e) 26

Resolução

A área reservada ao plantio de grama é $A(x) = 4 \cdot \frac{x \cdot (7 - x)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 2 \cdot x \cdot (7 - x)$ e o gráfico dessa função é do tipo



A área máxima, reservada ao plantio de grama, acontece para x = 3,5 e o seu valor é $A_{máx} = 2 \cdot 3{,}5 \cdot (7 - 3{,}5) = 24{,}5$

Resposta: D

1 Obter o vértice e o conjunto-imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

RESOLUÇÃO:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-6)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 5)}{4 \,.\, 1}$$

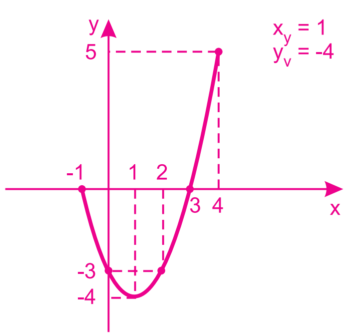
$$y_v = \frac{-16}{4} = -4$$

$V = (3; -4)$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$

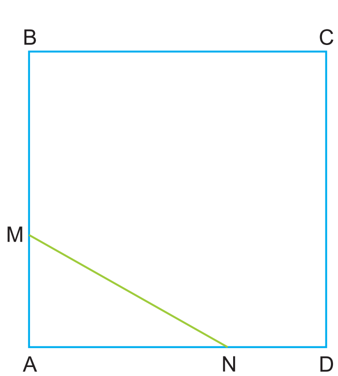
2 Esboçar o gráfico e obter o conjunto imagem da função $f: [-1; 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

RESOLUÇÃO:



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$

3 **(GV)** – A área do quadrado ABCD é 4 cm². Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ do quadrado são tomados dois pontos M e N, tais que AM + AN = AB. Desse modo, o maior valor que pode assumir a área do triângulo AMN é:



a) $\frac{1}{4}$ cm² b) 2 cm²

c) $\frac{1}{2}$ cm² d) 4 cm²

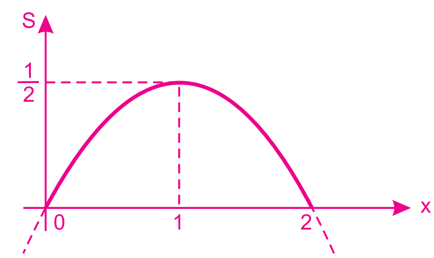
e) $\frac{1}{8}$ cm²

RESOLUÇÃO:

Sendo x e y as medidas, em centímetros, dos segmentos AM e AN, respectivamente, S a área, em centímetros quadrados, do triângulo AMN, e 4 cm² a área do quadrado ABCD, temos:

I) $AM + AN = AB \Rightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$

II) $S = \frac{x \,.\, y}{2} = \frac{x(2 - x)}{2}$, que possui valor máximo igual a $\frac{1}{2}$, pois o gráfico da função $S(x) = \frac{x \,.\, (2 - x)}{2}$ é do tipo:



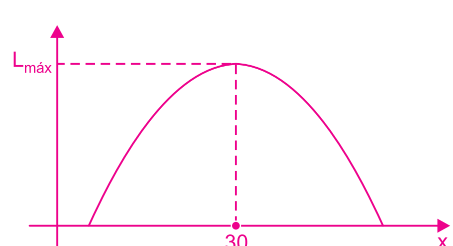
Resposta: C

4 **(MODELO ENEM)** – A empresa WQTU Cosmético vende uma quantidade x de determinado produto, cujo custo de fabricação é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo.
Considerando que o lucro obtido é dado pela diferença entre os valores de venda e custo, a quantidade de unidades a serem vendidas para se obter lucro máximo é:

a) 10 b) 30 c) 58 d) 116 e) 232

RESOLUÇÃO:
Sendo x a quantidade vendida do produto, $(3x^2 + 232)$ e $(180x - 116)$ respectivamente o custo de produção e a receita pela venda, temos o lucro:

$L(x) = (180x - 116) - (3x^2 + 232) = -3x^2 + 180x - 348$ que é máximo quando $x = \frac{-(+180)}{2 \,.\, (-3)} = 30$, como ilustra a figura:



Resposta: B

Exercícios Propostos – Módulo 27

1 **(MODELO ENEM)** – Considere as funções **f** e **g**, de ℝ em ℝ, definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 8$ e $g(x) = 2x + 2$.
O valor mínimo da função **h**, de ℝ em ℝ, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

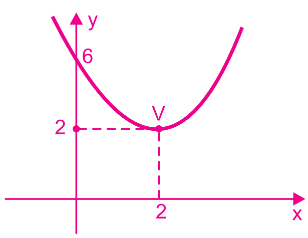
RESOLUÇÃO:

I) $h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 2x + 8) - (2x + 2) = x^2 - 4x + 6$

II) O vértice da parábola de equação $h(x) = x^2 - 4x + 6$ é V(2; 2); pois

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{-4}{2} = 2 \\ h(2) = 2^2 - 4 \,.\, 2 + 6 = 2 \end{cases}$$

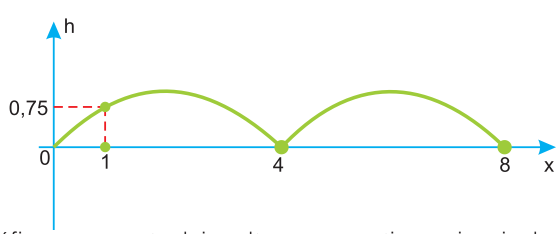
III) O gráfico da função h é do tipo



IV) A função h assume valor mínimo igual a 2.

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)** – O alcance horizontal de cada salto de uma rã, que é parabólico, é de 4dm.



O gráfico representa dois saltos consecutivos e iguais dessa rã, contém o ponto (1; 0,75) e permite obter a altura h em função de x, ambos em decímetros. A altura máxima atingida pela rã, em decímetros, é:

a) 0,8 b) 0,9 c) 1 d) 1,5 e) 1,8

RESOLUÇÃO:

$h(x) = a \,.\, (x - 0) \,.\, (x - 4) = a \,.\, x \,.\, (x - 4)$, para $0 \le x \le 4$

$h(1) = a \,.\, 1 \,.\, (-3) = 0{,}75 \Leftrightarrow a = -0{,}25$

Assim, $h(x) = -0{,}25 \,.\, x \,.\, (x - 4)$

Portanto, $x_v = 2$ e a altura máxima é

$h_v = h(2) = -0{,}25 \,.\, 2 \,.\, (2 - 4) = 1$

Resposta: C

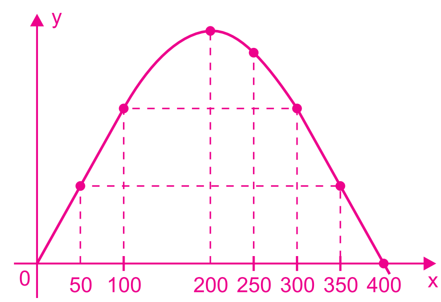
3 **(MODELO ENEM)** – Uma indústria tem seu lucro mensal, L(x), em reais, dado em função do número de peças produzidas (x) pela expressão $L(x) = 400x - x^2$. Desta forma, é incorreto afirmar que

a) o lucro obtido pela produção de 300 peças é menor que o lucro obtido pela produção de 250 peças.
b) o lucro máximo que pode ser obtido é de R$ 40 000,00.
c) produzindo 100 peças, obtém-se mais lucro que produzindo 350 peças.
d) para ter lucro de R$ 17 500,00 deve-se produzir, obrigatoriamente, 50 peças.
e) o lucro máximo que pode ser obtido ocorre se, e somente se, a indústria produzir 200 peças.

RESOLUÇÃO:

1) $L(x) = 400x - x^2 \Leftrightarrow L(x) = -(x - 0)(x - 400)$

2) O gráfico da função
$L(x) = -(x - 0)(x - 400)$, para $x \ge 0$, é do tipo



e deste gráfico concluímos que

3) L(250) > L(300) e portanto a afirmação a é correta.

4) O lucro máximo ocorre se, e somente se, x = 200; o valor desse lucro máximo é $L(200) = -(200 - 0)(200 - 400) = 40\,000$.
Assim sendo, as alternativas b e e são corretas.

5) L(100) = L(300) > L(350) e portanto c é verdadeira.

6) $L(50) = -(50 - 0)(50 - 400) = 17\,500$

7) L(50) = L(350) = 17 500 e portanto o lucro de R$ 17 500,00 pode também ser obtido com x = 350. A alternativa d é incorreta.

Resposta: D

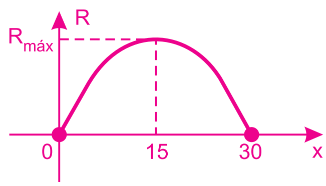
4 **(GV-Adaptado)** – Quando uma pizzaria cobra R$ 14,00 por pizza, 80 unidades são vendidas por dia. Quando o preço é R$ 12,00 por pizza, 90 unidades são vendidas. Admitindo que a quantidade vendida (y) seja função do 1º grau do preço (x), dada pela expressão y = –5x + 150, qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita diária?

RESOLUÇÃO:

A equação da função que determina a quantidade vendida (y) em função do preço (x), em reais, é y = – 5x + 150

Desta forma, a receita R, em função de x, é

$R(x) = x \cdot y = x\,(-5x + 150) = -5x^2 + 150x$, e é máxima para x = 15, pois seu gráfico é



Resposta: R$ 15,00

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M209**

Módulo 28

Inequações do 1º grau

Palavras-chave:

• Reta • Crescente • Decrescente

1. Definição

Chama-se **inequação do 1º grau** a toda sentença aberta do tipo ax + b > 0 ou ax + b ≥ 0 ou ax + b < 0 ou ax + b ≤ 0, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

2. Resolução

a) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 1º grau "do tipo" **ax + b > 0** é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de **f(x) = ax + b** se encontra **acima do eixo x**.

b) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 1º grau "do tipo" **ax + b < 0** é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de **f(x) = ax + b** se encontra **abaixo do eixo x**.

É mais prático, porém, apenas "isolar o x" lembrando que:

$$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a, \ \forall a \in \mathbb{R}$$

$$x < y \Leftrightarrow x \cdot a < y \cdot a, \ \forall a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$x < y \Leftrightarrow x \cdot a > y \cdot a, \ \forall a \in \mathbb{R}_-^*$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação – 4x + 12 > 0.

Resolução

– 4x + 12 > 0 ⇔ – 4x > – 12 ⇔

⇔ 4x < 12 ⇔ x < 3

Resposta: V = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x < 3}

2 **(MODELO ENEM)** – Para ser aprovado num curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais, durante o período letivo, e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média, no mínimo, igual a 7. Se um estudante obteve, nas provas parciais, as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota mínima que necessita obter, na prova final, para ser aprovado é:

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

Resolução:

Se **x** for a nota do estudante, na prova final, então:

$$\frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot x}{7} \geq 7 \Leftrightarrow$$

⇔ 22 + 3x ≥ 49 ⇔ 3x ≥ 27 ⇔ x ≥ 9

Resposta: A

Exercícios Propostos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$:

a) $3x - 6 < 0$

RESOLUÇÃO:

$3x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} =]-\infty, 2[$

b) $-3x + 6 < 0$

RESOLUÇÃO:

$-3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x > 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x < 3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 3\} = [-6, 3[$

b) $0 \leq \dfrac{x+1}{3} < 2$

RESOLUÇÃO:

$0 \leq \dfrac{x+1}{3} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 < 6 \Leftrightarrow -1 \leq x < 5$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\} = [-1; 5[$

3 As idades, em anos, de três crianças são números pares e consecutivos. A diferença entre a soma das idades das duas mais novas e a idade da mais velha é menor que 5 anos. Sabendo que a soma das idades é maior que 23 anos, determine a idade de cada criança.

RESOLUÇÃO:

Sendo x, x + 2 e x + 4 as idades das três crianças, temos:

$\begin{cases} (x + x + 2) - (x + 4) < 5 \\ x + (x + 2) + (x + 4) > 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 5 \\ 3x + 6 > 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > \dfrac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 6$, **pois** $x \in \mathbb{N}^*$

Logo, as idades são 6, 8 e 10 anos.

4 (**MACKENZIE – MODELO ENEM**) – Uma escola paga, pelo aluguel anual do ginásio de esportes de um clube A, uma taxa fixa de R$ 1 000,00 e mais R$ 50,00 por aluno. Um clube B cobraria pelo aluguel anual de um ginásio o equivalente a uma taxa fixa de R$ 1 900,00, mais R$ 45,00 por aluno. Para que o clube B seja mais vantajoso economicamente para a escola, o menor número N de alunos que a escola deve ter é tal que:

a) $100 \leq N < 150$ b) $75 \leq N < 100$ c) $190 \leq N < 220$
d) $150 \leq N < 190$ e) $220 \leq N < 250$

RESOLUÇÃO:

Se n for o número de alunos da escola, então o clube B será mais vantajoso que o clube A se, e somente se,
$1900 + 45n < 1000 + 50n \Leftrightarrow 5n > 900 \Leftrightarrow n > 180.$
Se N for o menor número de alunos para o qual o clube B é mais vantajoso, então N = 181 e, portanto, $150 \leq N < 190$.
Resposta: D

Módulo 29 – Inequações do 2º grau

Palavras-chave:

• Parábola • Raízes • Concavidade

1. Definição

Chama-se **inequação do 2º grau** a toda sentença aberta do tipo $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. Resolução

a) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 2º grau "do tipo" $\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ $(a \neq 0)$ é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encontra **acima do eixo x**.

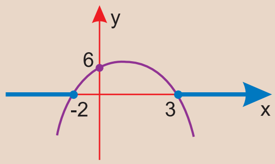
b) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 2º grau "do tipo" $\mathbf{ax^2 + bx + c < 0}$ $(a \neq 0)$ é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encontra **abaixo do eixo x**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a inequação $-x^2 + x + 6 \leq 0$

Resolução

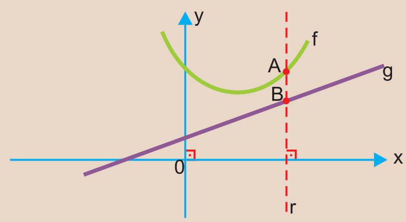
O gráfico da função $f(x) = -x^2 + x + 6$ é do tipo:



O conjunto verdade da inequação $-x^2 + x + 6 \leq 0$ é, pois:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3\}$

2 **(MODELO ENEM)** – No gráfico estão representadas as funções **f** e **g**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 8$ e $g(x) = 2x + 2$.



A reta r, paralela a 0y intercepta **f** e **g** em A e B, respectivamente. A função **h**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ fornece a medida do segmento $\overline{AB}$. Se a medida de $\overline{AB}$ for menor do que 3, então:

a) $x < 0$ b) $0 < x < 2$ c) $1 < x < 3$

d) $2 < x < 4$ e) $3 < x < 5$

Resolução

a) $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow$

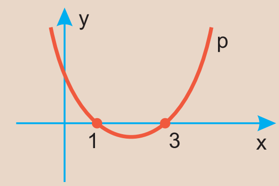
$\Rightarrow h(x) = (x^2 - 2x + 8) - (2x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) = x^2 - 4x + 6$

b) $h(x) < 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3,$

pois o gráfico de $p(x) = x^2 - 4x + 3$ é do tipo



Resposta: C

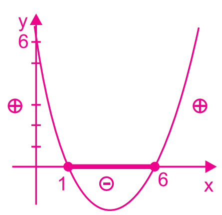
Exercícios Propostos

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de **1** a **5**.

1 $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

RESOLUÇÃO:
Raízes: 1 e 6

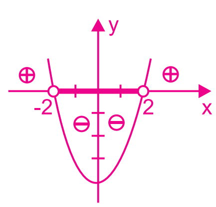
$x^2 - 7x + 6 \leq 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$



2 $x^2 < 4$

RESOLUÇÃO:
Raízes: – 2 e 2

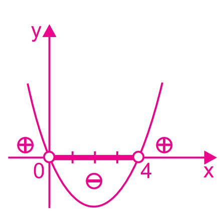
$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$



3 $x^2 < 4x$

RESOLUÇÃO:
Raízes: 0 e 4

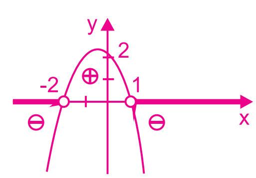
$x^2 < 4x \Rightarrow x^2 - 4x < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$



4 $-x^2 - x + 2 < 0$

RESOLUÇÃO:
Raízes: – 2 e 1

$-x^2 - x + 2 < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$



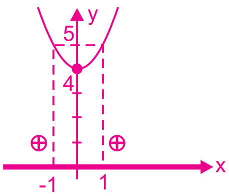
5 $x^2 + 4 > 0$

RESOLUÇÃO:

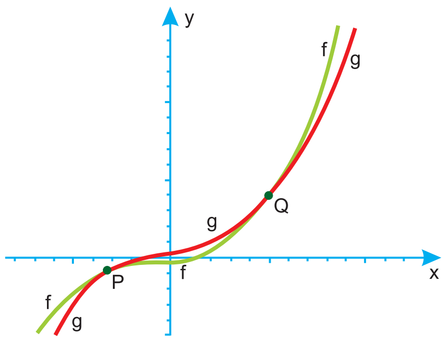
Raízes: não tem raiz real

$x^2 + 4 > 0$

$V = \mathbb{R}$



6 **(UNESP-adaptado – MODELO ENEM)** – Considere as funções polinomiais $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = x^3 + 3x + 1$, cujos gráficos se interceptam em dois pontos como esboçado na figura (não em escala).

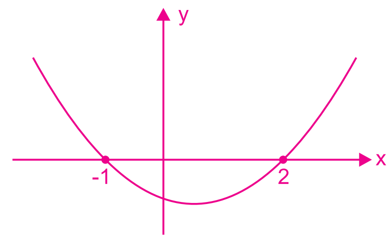


O conjunto de todos os valores de **x** para os quais $f(x) \le g(x)$ é:

a) [– 2; 0] b) [– 1; 1] c) [– 1; 2]
d) [– 2; 2] e) [0; 2]

RESOLUÇÃO:

$f(x) \le g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \le 0 \Rightarrow (x^3 + x^2 + 2x - 1) - (x^3 + 3x + 1) \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$, pois o gráfico da função $h(x) = x^2 - x - 2$ é do tipo



Resposta: C

Módulo 30 Sistemas de inequações

Palavras-chave:

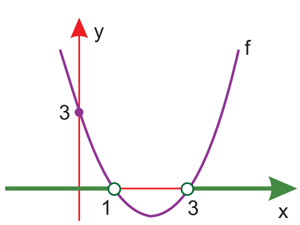
• Intersecção • Solução comum

Exemplo

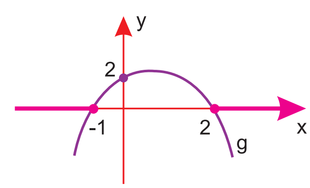
Resolver o sistema $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ -x^2 + x + 2 \le 0 \end{cases}$

Resolução

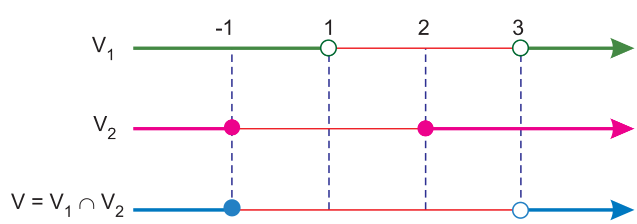
a) De acordo com o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ concluímos que o conjunto verdade da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$ é $V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$



b) De acordo com o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x + 2$ concluímos que o conjunto verdade da inequação $-x^2 + x + 2 \le 0$ é $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \text{ ou } x \ge 2\}$



c) O conjunto verdade do sistema é $\mathbf{V = V_1 \cap V_2}$



$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \text{ ou } x > 3\}$$

Exercícios Propostos

Resolver, em $\mathbb{R}$, os sistemas de **1** a **4**.

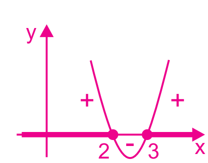
1 $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0 & ① \\ x - 1 > 0 & ② \end{cases}$

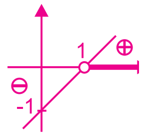
1) Raízes: $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

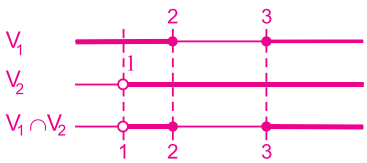
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2 \text{ ou } x \ge 3\}$



2) Raiz: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$





$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

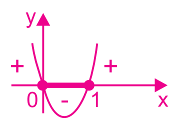
2 $\begin{cases} x^2 - x \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - x \leq 0 & ① \\ x^2 - 1 \geq 0 & ② \end{cases}$

1) Raízes: $x^2 - x = 0$

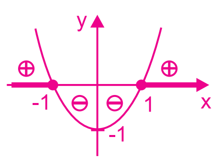
$x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$



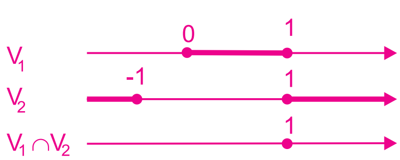
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

2) Raízes: $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$



$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$



$V = \{1\}$

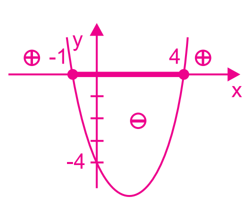
3 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ -1 < x - 2 \leq 3 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & ① \\ -1 < x - 2 \leq 3 & ② \end{cases}$

1) Raízes: $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 4$

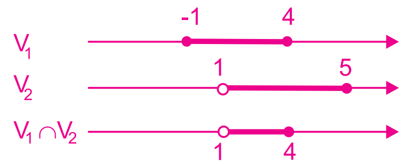


$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

2) $-1 < x - 2 \leq 3\,(+2)$

$1 < x \leq 5$

$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

4 $\begin{cases} 3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 \\ x^2 - 49 \leq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} 3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 & ① \\ x^2 - 49 \leq 0 & ② \end{cases}$

1) $3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 \;.\; (3)$

$9 < 2x - 1 < 15\ (+1)$

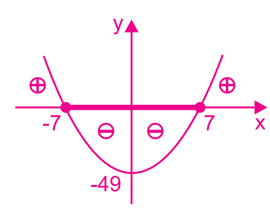
$10 < 2x < 16\ (:2)$

$5 < x < 8$

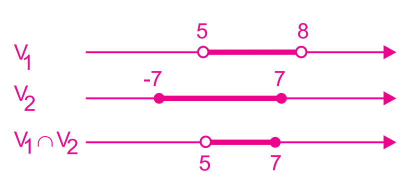
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$

2) Raízes: $x^2 - 49 = 0$

$x_1 = -7$ ou $x_2 = 7$



$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 7\}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}$

Módulo 31

Inequações tipo quociente e tipo produto

Palavra-chave:

• Sinal da função

1. Fatoração do trinômio do 2º grau

Se $\{x_1; x_2\}$ for o conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então a forma fatorada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ será:

$$f(x) = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$$

Se $x_1 = x_2$ então a forma fatorada será:

$$f(x) = a \,.\, (x - x_1)^2$$

Saiba mais

Toda inequação do "tipo quociente" pode ser transformada numa inequação equivalente do "tipo produto".

2. Propriedade

Lembrando que a "regra de sinais" para a multiplicação e para a divisão é a mesma, concluímos que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \,.\, g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \,.\, g(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \,.\, g(x) < 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \,.\, g(x) \leq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

Exercício Resolvido

1 Fatorar $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Resolução

As raízes da equação

$2x^2 - 10x + 12 = 0$ serão 2 e 3 pois:

$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$

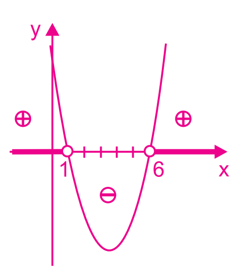
A forma fatorada é, pois: $\mathbf{f(x) = 2 \,.\, (x - 2) \,.\, (x - 3)}$

Exercícios Propostos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1)(x - 6) > 0$

RESOLUÇÃO:

$(x - 1)\,(x - 6) > 0$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 6\}$

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de 2 a 6.

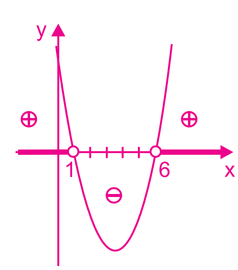
2 $\dfrac{x - 1}{x - 6} > 0$

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{x - 1}{x - 6} > 0$

$(x - 1)\,(x - 6) > 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 6\}$



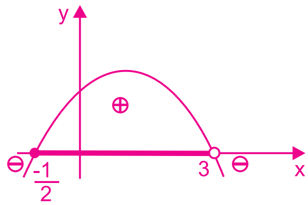
3 $\dfrac{2x + 1}{3 - x} \geq 0$

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{2x + 1}{3 - x} \geq 0$

$(2x + 1)\ (3 - x) \geq 0$ e $x \neq 3$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} \leq x < 3\right\}$



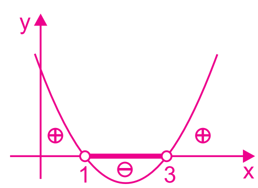
4 $\dfrac{1}{(x - 1)(x - 3)} < 0$

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{1}{(x - 1)\ (x - 3)} < 0$

$1\ .\ (x - 1)\ (x - 3) < 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$



5 $\dfrac{2x - 1}{x - 3} < 1$

RESOLUÇÃO:

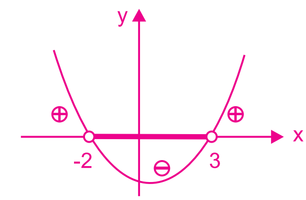
$\dfrac{2x - 1}{x - 3} < 1$

$\dfrac{2x - 1}{x - 3} - 1 < 0$

$\dfrac{2x - 1 - (x - 3)}{x - 3} < 0$

$\dfrac{x + 2}{x - 3} < 0$

$(x + 2)\ .\ (x - 3) < 0$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

6 $\dfrac{x + 1}{x} \geq 3$

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{x + 1}{x} \geq 3$

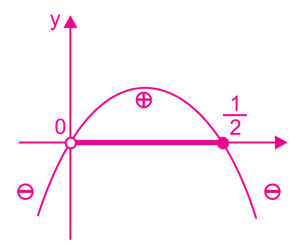
$\dfrac{x + 1}{x} - 3 \geq 0$

$\dfrac{x + 1 - 3x}{x} \geq 0$

$\dfrac{-2x + 1}{x} \geq 0$

$(-2x + 1)\ .\ x \geq 0$ e $x \neq 0$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \dfrac{1}{2}\right\}$



Módulo 32 — Quadro de sinais

Palavra-chave:

- Sinal da função

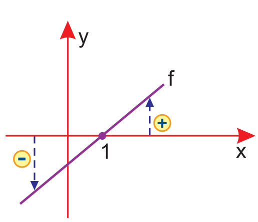
Exemplo

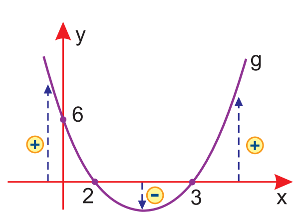
Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

Resolução

a) Analisamos, separadamente, os sinais de $\mathbf{x - 1}$ e $\mathbf{x^2 - 5x + 6}$ utilizando o gráfico de $f(x) = x - 1$ e de $g(x) = x^2 - 5x + 6$.





b) Deduzimos os sinais de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pelo quadro de sinais.

		1		2		3	
f(x)	−		+		+		+
g(x)	+		+		−		+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	−		+		−		+

Assim sendo, o conjunto verdade da inequação $\dfrac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0$ é: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

Observação

Lembrando que a regra de sinais para a multiplicação e para a divisão é a mesma, concluímos que o conjunto verdade da inequação $(x - 1)\ (x^2 - 5x + 6) < 0$ também é:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$$

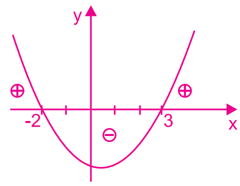
Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de 1 a 4.

1 $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} \geq 0$

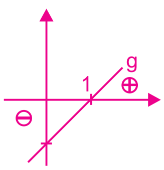
RESOLUÇÃO:

$\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$f(x) = x^2 - x - 6$



$g(x) = x - 1$



		-2		1		3	
f(x)	+		-		-		+
g(x)	-		-		+		+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-		+		-		+
		-2		1		3	

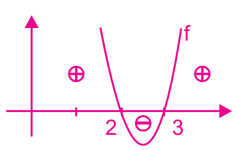
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

2 $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} < 0$

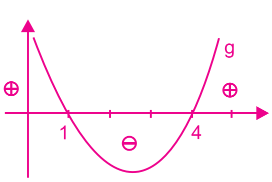
RESOLUÇÃO:

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} < 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$



$g(x) = x^2 - 5x + 4$



		1		2		3		4	
f(x)	+		+		-		+		+
g(x)	+		-		-		-		+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	+		-		+		-		+
		1		2		3		4	

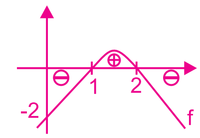
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

3 $(-x^2 + 3x - 2)\,(x^2 - x) < 0$

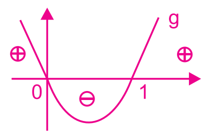
RESOLUÇÃO:

$(-x^2 + 3x - 2)\,(x^2 - x) < 0$

$f(x) = -x^2 + 3x - 2$



$g(x) = x^2 - x$



		0		1		2	
f(x)	-		-		+		-
g(x)	+		-		+		+
f(x).g(x)	-		+		+		-
		0				2	

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \;\text{ ou }\; x > 2\}$

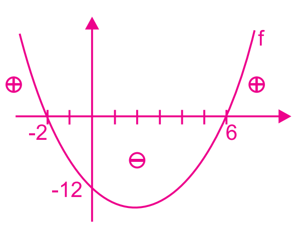
4 $\dfrac{x^2 - 12}{x} \leq 4$

RESOLUÇÃO:

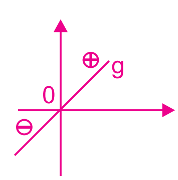
$\dfrac{x^2 - 12}{x} \leq 4 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 12}{x} - 4 \leq 0$

$\dfrac{x^2 - 12 - 4x}{x} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x} \leq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$f(x) = x^2 - 4x - 12$



$g(x) = x$



		-2		0		6	
f(x)	+		-		-		+
g(x)	-		-		+		+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-		+		-		+
		-2		0		6	

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 < x \leq 6\}$