FRENTE 1

MATEMÁTICA

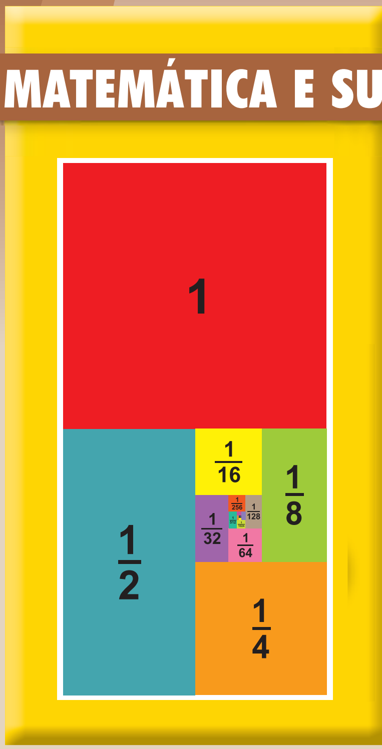


Diagrama mostrando a série geométrica 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... que converge para 2.

Progressões Aritmética e Geométrica – Módulos

Módulos 45 e 46 – Soma dos termos de uma P.A.

Palavras-chave:
• Primeiro termo • Último termo
• Equidistantes dos extremos

Se S_n for a soma dos **n** primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demonstração

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1)$$

Da propriedade dos termos equidistantes temos:
$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_n + a_1$ e, portanto,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M401**

Exercícios Resolvidos – Módulos 45 e 46

1. Calcular a soma dos 20 primeiros termos da P.A. (7, 10, 13, ...).

Resolução

a) O vigésimo termo da progressão em que $a_1 = 7$ e $r = 3$ é
$a_{20} = 7 + (20 - 1) \cdot 3 = 64$

b) A soma dos vinte primeiros termos é

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \text{ e, portanto, } S_{20} = \frac{(7 + 64) \cdot 20}{2} = 710$$

Resposta: $S_{20} = 710$

2 Obter a P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

Se $S_n = 3n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, para n = 1 e n = 2, temos:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 3 \,.\, 1^2 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$

$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 3 \,.\, 2^2 = 12 \Rightarrow a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow 3 + a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 9$

Se $a_1 = 3$ e $a_2 = 9$, então $r = 9 - 3 \Rightarrow r = 6$

Resposta: (3, 9, 15, ...)

3 Determinar a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $\left(\dfrac{1-n}{n}, \dfrac{2-n}{n}, \dfrac{3-n}{n}, \ldots\right)$.

Resolução

A razão da P.A. é:

$$r = \frac{2-n}{n} - \frac{1-n}{n} \Leftrightarrow r = \frac{2-n-1+n}{n} \Leftrightarrow r = \frac{1}{n}$$

Se $a_1 = \dfrac{1-n}{n}$, $r = \dfrac{1}{n}$ e $a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$, então

$$a_n = \frac{1-n}{n} + (n-1) \,.\, \frac{1}{n} \Leftrightarrow a_n = \frac{1-n+n-1}{n} \Leftrightarrow a_n = 0$$

Se $a_1 = \dfrac{1-n}{n}$, $a_n = 0$ e $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2}$, então

$$S_n = \frac{\left(\dfrac{1-n}{n} + 0\right) . \, n}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{\left(\dfrac{1-n}{n}\right) . \, n}{2} \Leftrightarrow S_n = \frac{1-n}{2}$$

Resposta: $S_n = \dfrac{1-n}{2}$

4 Em uma P.A., são dados $a_1 = 2$, $r = 3$ e $S_n = 57$. Calcular a_n e n.

Resolução

Com os dados, podemos montar o sistema

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 2 + (n-1) \,.\, 3 & \text{(I)} \\ 57 = \dfrac{(2 + a_n) \,.\, n}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$114 = (2 + 3n - 1) \,.\, n \Leftrightarrow 3n^2 + n - 114 = 0$

Resolvendo-se a equação do 2º grau, obtém-se

$n = 6$ ou $n = -\dfrac{19}{3}$. A solução possível é, somente, n = 6, pois $n \in \mathbb{N}^*$. Substituindo em (I), temos

$a_6 = 2 + (6-1) \,.\, 3 \Leftrightarrow a_6 = 17$

Resposta: n = 6 e $a_6 = 17$

5 **(UFPE – MODELO ENEM)** – Os 25 DVDs de uma coleção estão alinhados em ordem crescente de preço. Além disso, o preço de cada DVD, a partir do segundo, é superior em R$ 2,00 ao preço do DVD que o antecede. Se o DVD mais caro custou sete vezes o preço do mais barato, quanto custou a coleção inteira?

a) R$ 792,00 b) R$ 794,00 c) R$ 796,00
d) R$ 798,00 e) R$ 800,00

Resolução

1) Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25})$ forem os 25 primeiros termos de uma progressão aritmética, de razão 2, que representam os preços dos DVDs, então

$$\begin{cases} a_{25} = a_1 + (25-1) \,.\, 2 \\ a_{25} = 7a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{25} = 56 \end{cases}$$

2) A soma do 25 primeiros termos da progressão aritmética (8, 10, 12, …, 56, …) é

$$S_{25} = \frac{8 + 56}{2} \,.\, 25 = 800$$

Resposta: E

Exercícios Propostos – Módulo 45

1 Calcular a soma dos 20 primeiros termos da P.A.(– 2; – 4; – 6; ...).

RESOLUÇÃO:

I) $a_{20} = a_1 + 19r$

$a_{20} = (-2) + 19 \,.\, (-2)$

$a_{20} = -40$

II) $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \,.\, 20}{2}$

$$S_{20} = \frac{(-2 + (-40)) \,.\, 20}{2} = (-42) \,.\, 10$$

$S_{20} = -420$

2 Calcular a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. em que o quinto termo vale 7.

RESOLUÇÃO:

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \,.\, 9}{2} = \frac{(a_5 + a_5) \,.\, 9}{2}$$

$$S_9 = \frac{(7 + 7) \,.\, 9}{2} = 63$$

3 Considere a sequência dos números ímpares positivos (1, 3, 5, 7, ...). Calcule:
a) a soma dos 25 primeiros termos;
b) a soma dos **n** primeiros termos, em função de **n**.

RESOLUÇÃO:

$a_{25} = 1 + (25 - 1) \, . \, 2$

$a_{25} = 49$

a) $S_{25} = \dfrac{(a_1 + a_{25}) \, . \, 25}{2}$

$S_{25} = \dfrac{(1 + 49) \, . \, 25}{2} = \dfrac{50 \, . \, 25}{2} = 25^2 = 625$

b) $a_n = 1 + (n - 1) \, . \, 2 = 2n - 1$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}$

$S_n = \dfrac{(1 + 2n - 1) \, . \, n}{2} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$

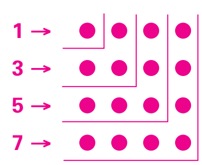
Observe:

$1 = 1^2 = 1$

$1 + 3 = 2^2 = 4$

$1 + 3 + 5 = 3^2 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$



4 Numa progressão aritmética de 100 termos $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$. A soma de todos os termos é:
a) 10 000 b) 9 000 c) 4 500
d) 5 000 e) 7 500

RESOLUÇÃO:
Na progressão aritmética (a_n), onde $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$, têm-se

$a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = 10 + 90 = 100$ **e**

$S_{100} = \dfrac{(a_1 + a_{100}) \, . \, 100}{2} = \dfrac{100 \, . \, 100}{2} = 5\,000$

Resposta: D

5 Calcular a soma dos múltiplos de 9 compreendidos entre 66 e 246.

RESOLUÇÃO:
Entre 66 e 246, os múltiplos de 9 são:
72, 81, 90, ..., 243

$\underset{a_1}{\downarrow} \qquad \underset{a_n}{\downarrow}$

$a_n = a_1 + (n - 1) \, . \, r$

$243 = 72 + (n - 1) \, . \, 9$

$243 - 72 + 9 = 9n$

$n = 20$

$S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \, . \, 20}{2} = \dfrac{(72 + 243) \, . \, 20}{2} = 3\,150$

Exercícios Propostos – Módulo 46

1 A soma dos **n** primeiros termos da progressão aritmética (6, 10, 14, ...) é 510. Calcular **n**.

RESOLUÇÃO:

I) $a_n = a_1 + (n - 1) \, . \, r$

$a_n = 6 + (n - 1) \, . \, 4$

$a_n = 4n + 2$

II) $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}$

$510 = \dfrac{(6 + 4n + 2) \, . \, n}{2}$

$510 = (2n + 4) \, . \, n$

$2n^2 + 4n - 510 = 0$

$n^2 + 2n - 255 = 0$

$n = 15$, pois $n > 0$

2 A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $n^2 + 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calcular o décimo termo dessa progressão.

RESOLUÇÃO:

$S_n = n^2 + 4n$

$S_{10} = 10^2 + 4 \, . \, 10 = 140$

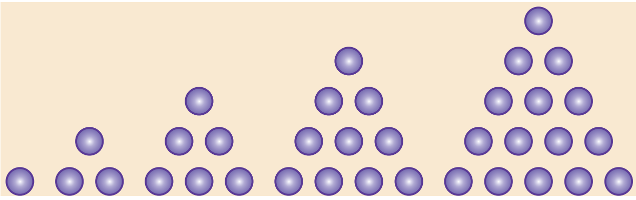
$S_9 = 9^2 + 4 \, . \, 9 = 117$

$S_{10} = S_9 + a_{10} \Rightarrow 140 = 117 + a_{10} \Rightarrow a_{10} = 23$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em “localizar”, digite **MAT1M402**

3 **(SEPEB)** – Considerando o conjunto de pontos a seguir:



pode-se dizer que é uma sequência numérica cuja lei de formação correspondente é:

a) $a_n = n^2$ b) $a_n = 3n$ c) $a_n = 2n - 1$

d) $a_n = \dfrac{n.(n + 1)}{2}$ e) $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{2}$

RESOLUÇÃO:

Observa-se que:

1) $a_1 = 1$

2) $a_2 = 1 + 2 = 3$

3) $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

4) $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

5) $a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

⋮

Portanto, $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \dfrac{(1 + n) . n}{2}$

Resposta: D

4 **(UNIFESP-MODELO ENEM)** – Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6 000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

a) 125 500 m b) 105 000 m c) 90 000 m

d) 87 500 m e) 80 000 m

RESOLUÇÃO:

I) $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21}, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão 100 e com $a_{21} = 6000$

Assim: $6000 = a_1 + 20 . 100 \Leftrightarrow a_1 = 4000$

II) As distâncias percorridas, em metros, nesses 21 dias são 4000, 4100, 4200, 4300, …, 6000

III) A distância total percorrida nesses dias, em metros, é

$\dfrac{4000 + 6000}{2} . 21 = 105\,000$

Resposta: B

Módulo 47 – Progressão geométrica

Palavras-chave:

• Multiplicação • Razão

1. Definição de progressão geométrica

Sejam **a** e **q** dois números reais. Chama-se **Progressão Geométrica (P.G.)** à sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ tal que:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n . q \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que na progressão geométrica, cada termo, a partir do segundo, é obtido **multiplicando-se** por **q** o termo anterior.

O número real **q** é chamado **razão** da P.G.

Segue da definição que, se $a_1 \neq 0$, e $q \neq 0$ então,

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Na P.G. (2; 6; 18; 54; 162; ...), por exemplo, temos:

$$q = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = \dots\dots = 3$$

2. Classificação

A P.G., $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é:

a) ESTRITAMENTE CRESCENTE $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \\ \quad\text{ou} \\ a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{cases}$$

Exemplos

1. A sequência (3, 6, 12, 24, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$. Observe que $a_1 > 0$, $q > 1$, e a P.G. é **estritamente crescente**.

2. A sequência (– 64, – 32, – 16, – 8, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = -64$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$

   Observe que $a_1 < 0$, $0 < q < 1$, e a P.G. é **estritamente crescente**.

b) ESTRITAMENTE DECRESCENTE $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \\ \quad\text{ou} \\ a_1 < 0 \text{ e } q > 1 \end{cases}$$

Exemplos

1. A sequência (– 1, – 3, – 9, – 27, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = -1$ e razão $q = 3$.

   Observe que $a_1 < 0$, $q > 1$, e a P.G. é **estritamente decrescente**.

2. A sequência $\left(3, 1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right)$ é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 3$ e razão $q = \dfrac{1}{3}$.

   Observe que $a_1 > 0$, $0 < q < 1$, e a P.G. é **estritamente decrescente**.

c) CONSTANTE $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$ e $q = 1$

Exemplo

A sequência (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 5$ e razão $q = 1$. Note que $a_1 \neq 0$, $q = 1$, e a P.G. é **constante**. Observe que a P.G. (5, 5, 5, 5, ...) também é uma P.A. constante de razão $r = 0$.

d) SINGULAR $\Leftrightarrow a_1 = 0$ ou $q = 0$

Exemplos

1. A sequência (0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 0$ e razão $q \in \mathbb{R}$. Como $a_1 = 0$ a P.G. é **singular**.
2. A sequência (3, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 3$ e razão $q = 0$. Como $q = 0$, a P.G. é **singular**.

e) ALTERNANTE $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$ e $q < 0$

Exemplos

A sequência (5, – 10, 20, – 40, 80, ...) é uma P.G. de 1º termo $a_1 = 5$ e razão $q = -2$. Observe que $a_1 \neq 0$, $q < 0$, e a P.G. é **alternante**.

3. Termo geral da P.G.

Seja (a_n) uma P.G. com primeiro termo $\mathbf{a_1}$ e razão $\mathbf{q}$. Da definição de P.G., temos:

$$\mathbf{a_2 = a_1 \cdot q}$$
$$\mathbf{a_3 = a_2 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q} \cdot q = a_1 \cdot q^2}$$
$$\mathbf{a_4 = a_3 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q^2} \cdot q = a_1 \cdot q^3}$$
$$\mathbf{a_5 = a_4 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q^3} \cdot q = a_1 \cdot q^4}$$
$$\mathbf{a_6 = a_5 \cdot q = a_1 \cdot q^4 \cdot q = a_1 \cdot q^5}$$
$$\vdots$$

e assim por diante.

Estas igualdades sugerem que, numa P.G., o **termo de ordem n** é igual ao produto do **primeiro termo** pela **razão** elevada a **(n – 1)**, ou seja:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Se $\mathbf{a_n}$ e $\mathbf{a_m}$ forem dois termos quaisquer de uma P.G. não singular, então:

$$\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_m = a_1 \cdot q^{m-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{a_1 \cdot q^{m-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \Rightarrow \boxed{a_n = a_m \cdot q^{n-m}}$$

Exemplos

1. O oitavo termo da progressão geométrica (3, 6, 12, ...) é 384, pois $a_8 = a_1 \cdot q^7$ e, portanto, $a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$.

2. O décimo termo de uma P.G. em que $a_7 = 8$ e $q = 2$ é 64, pois $a_{10} = a_7 \cdot q^{10-7}$ e, portanto, $a_{10} = 8 \cdot 2^3 = 64$.

3. Na P.G. (1, 2, 4, 8, ...) podemos calcular o a_{10}, por exemplo, de várias maneiras. Veja:

   a) $a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^9 = 512$
   b) $a_{10} = a_3 \cdot q^{10-3} \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot 2^7 = 512$
   c) $a_{10} = a_4 \cdot q^{10-4} \Rightarrow a_{10} = 8 \cdot 2^6 = 512$
   etc.

Exercícios Resolvidos

1 Determine a P.G. em que $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$.

Resolução

A partir da fórmula de recorrência, temos:

$a_1 = 3$ $\quad a_2 = 2 \cdot a_1 = 6$

$a_3 = 2 \cdot a_2 = 12$ $\quad a_4 = 2 \cdot a_3 = 24$

Resposta: (3, 6, 12, 24, 48, 96, ...)

2 Calcule o quinto e o oitavo termo da P.G. (2, 6, 18, ...).

Resolução

A razão da P.G. é

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{6}{2} = 3$ e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Logo:

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 3^4 \Leftrightarrow a_5 = 162$

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 3^7 \Leftrightarrow a_8 = 4\,374$

Resposta: $a_5 = 162$ e $a_8 = 4\,374$

3 Calcule o quarto e o sétimo termo da P.G. (3, – 6, 12, ...).

Resolução

A razão da P.G. é

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$ e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Logo:

$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot (-2)^3 \Leftrightarrow a_4 = -24$

$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow a_7 = 3 \cdot (-2)^6 \Leftrightarrow a_7 = 192$

Resposta: $a_4 = -24$ e $a_7 = 192$

Exercícios Propostos

Nas questões de 1 a 6, determine a razão e o sétimo termo de cada progressão geométrica; classifique-as também quanto à monotonicidade.

1 $\left(1, \sqrt{2}, 2, \ldots\right)$

RESOLUÇÃO:

$(1, \sqrt{2}, 2, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = \sqrt{2}$

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = 1 \cdot (\sqrt{2})^6$

$a_7 = 2^3$

$a_7 = 8$

É uma P.G. estritamente crescente.

2 (– 18, – 6, – 2, ...)

RESOLUÇÃO:

(– 18, – 6, – 2, ...) é uma P.G. de razão $q = \dfrac{1}{3}$

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = -18 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^6$

$a_7 = -\dfrac{2}{81}$

É uma P.G. estritamente crescente.

3 (– 4, 8, – 16, ...)

RESOLUÇÃO:

(– 4, 8, – 16, ...) é uma P.G. de razão q = – 2

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = -4 \cdot (-2)^6$

$a_7 = -256$

É uma P.G. alternante

4 $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$

RESOLUÇÃO:

$\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = \dfrac{1}{2}$

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

$a_7 = \dfrac{1}{64}$

É uma P.G. estritamente decrescente.

5 (– 2, – 4, – 8, ...)

RESOLUÇÃO:

(– 2, – 4, – 8, ...) é uma P.G. de razão q = 2

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = -2 \cdot 2^6$

$a_7 = -128$

É uma P.G. estritamente decrescente.

6 (2, 2, 2, ...)

RESOLUÇÃO:

(2, 2, 2, ...) é uma P.G. de razão q = 1

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = 2 \cdot 1^6$

$a_7 = 2$

É uma P.G. constante.

Módulos 48 e 49

Termo geral da P.G.

Palavras-chave:
- Diferença das posições

a) Se $\mathbf{a_n}$ e $\mathbf{a_m}$ forem dois termos quaisquer da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão **q** então:

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

b) Em particular, para **m = 1**, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplos

Na P.G. (1, 2, 4, 8, ...) podemos calcular a_{10} de várias maneiras. Veja:

a) $a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^9 = 512$

b) $a_{10} = a_3 \cdot q^{10-3} \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot 2^7 = 512$

c) $a_{10} = a_4 \cdot q^{10-4} \Rightarrow a_{10} = 8 \cdot 2^6 = 512$

etc.

Exercícios Resolvidos – Módulos 48 e 49

1 Determine o décimo quarto termo da P.G. de razão – 2 e décimo primeiro termo – 2 048.

Resolução

Sendo $a_{11} = -2\,048$, $q = -2$ e $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$, temos:

$a_{14} = a_{11} \cdot q^{14-11} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{14} = (-2\,048) \cdot (-2)^3 \Leftrightarrow a_{14} = 16\,384$

Resposta: $a_{14} = 16\,384$

2 Insira 4 meios geométricos entre 2 e 486, nesta ordem.

Resolução

Ao inserir quatro meios geométricos entre 2 e 486, nesta ordem, pode-se construir uma P.G. em que $a_1 = 2$ e $a_6 = 486$.

$$(\underset{\substack{\uparrow\\ a_1}}{2}, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5}_{4\text{ termos}}, \underset{\substack{\uparrow\\ a_6}}{486}, ...)$$

Assim sendo, já que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_6 = 486 \\ a_6 = a_1 \cdot q^5 \end{array}\right\} \Rightarrow 486 = 2 \cdot q^5 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q^5 = 3^5 \Leftrightarrow q = 3$

Se $a_1 = 2$ e $q = 3$, a P.G. é (2, 6, 18, 54, ...).

Resposta: (2, 6, 18, 54, 162, 486, ...)

3 Determine a P.G. em que $a_4 + a_6 = 120$ e $a_7 + a_9 = 960$.

Resolução

Sendo a_1 o primeiro, q a razão e lembrando que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_4 + a_6 = 120 \\ a_7 + a_9 = 960 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 = 120 \\ a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^8 = 960 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^3 \cdot (1 + q^2) = 120 & \text{(I)} \\ a_1 \cdot q^6 \cdot (1 + q^2) = 960 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (II) por (I), temos: $q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2$

Substituindo q = 2 em (I), vem:

$a_1 \cdot 8 \cdot (1 + 4) = 120 \Leftrightarrow a_1 = 3$

Se $a_1 = 3$ e $q = 2$, a P.G. é (3, 6, 12, ...)

Resposta: (3, 6, 12, 24, ...)

4 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se v for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0,7)^7v$ b) $(0,3)^7v$ c) $(0,7)^8v$
d) $(0,3)^8v$ e) $(0,3)^9v$

Resolução

1) Se **v** for o preço no primeiro ano, no segundo ano o preço será
$v - 30\% \cdot v = (1 - 30\%) \cdot v = 0,7\,v$

2) A sequência $(v; 0,7v; 0,7^2v; ...)$ é uma progressão geométrica de razão 0,7.

3) O oitavo termo dessa progressão é
$v \cdot (0,7)^{8-1} = v(0,7)^7 = (0,7)^7 \cdot v$

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 48

1 Calcular o nono termo da progressão geométrica (2; 6; 18; ...).

RESOLUÇÃO:

I) $q = \dfrac{6}{2} = 3$

II) $a_9 = a_1 \cdot q^8$

$a_9 = 2 \cdot 3^8$

$a_9 = 13122$

2 Calcular o quarto termo da progressão geométrica ($243; a_2; a_3; a_4; a_5; 32; ...$).

RESOLUÇÃO:

I) $a_6 = a_1 \cdot q^5$

$32 = 243 \cdot q^5$

$\dfrac{32}{243} = q^5 \Rightarrow q = \dfrac{2}{3}$

II) $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_4 = 243 \cdot \dfrac{8}{27} \Rightarrow a_4 = 72$

3 **(MODELO ENEM)** – Numa cultura de bactérias, o número de indivíduos triplica a cada hora. Se, inicialmente, o número de indivíduos é igual a 9, ao final de 12 horas será igual a:

a) 3^9 b) 3^{10} c) 3^{11} d) 3^{13} e) 3^{14}

RESOLUÇÃO:

após 1h → $9 \cdot 3$
após 2h → $9 \cdot 3^2$
após 3h → $9 \cdot 3^3$
⋮
após 12h → $9 \cdot 3^{12}$

Assim, o número de indivíduos, ao final de 12 horas, será de $9 \cdot 3^{12} = 3^{14}$.

Resposta: E

4 **(MODELO ENEM)** – Durante os dois primeiros minutos do lançamento de um foguete, ele consome 2% do combustível remanescente no tanque a cada 15 segundos. Se esse foguete foi lançado com **q** litros de combustível, após 2 minutos, a quantidade de combustível em seu tanque, em litros, será igual a

a) $q \cdot 0{,}02^{0{,}125}$ b) $q \cdot 0{,}02^8$ c) $q \cdot 0{,}98^8$
d) $q \cdot 0{,}98^{15}$ e) $q \cdot 0{,}84$

RESOLUÇÃO:

I) $100\% - 2\% = 98\% = \dfrac{98}{100} = 0{,}98$

II) A quantidade de combustível no tanque será:

após 15 s → $q \cdot 0{,}98$
após 30 s → $q \cdot 0{,}98^2$
⋮
após 2 min → $q \cdot 0{,}98^8$

Resposta: C

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M403**

Exercícios Propostos – Módulo 49

1 Inserindo cinco meios positivos entre 4 e 2 916, nesta ordem, obtém-se uma progressão geométrica de razão:

a) 3 b) $\dfrac{1}{3}$ c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{1}{4}$

RESOLUÇÃO:

$\underset{a_1}{4} \;\cdots\cdots\; \underset{a_7}{2916}$

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$2916 = 4 \cdot q^6$

$q^6 = 729$

$q = \pm 3 \Rightarrow q = 3$ (termos ⊕)

Resposta: A

2 Determine a razão da progressão geométrica em que $a_4 + a_6 = 160$ e $a_5 + a_7 = 320$.

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} a_4 + a_6 = 160 \\ a_5 + a_7 = 320 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 + a_6 = 160 \\ a_4 \cdot q + a_6 \cdot q = 320 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_4 + a_6 = 160 \\ q(a_4 + a_6) = 320 \end{cases} \Rightarrow q = 2$

3 **(FUVEST)** – Numa progressão geométrica de 4 termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão da progressão.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_3 + a_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 \cdot q^2 + a_2 \cdot q^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ q^2(a_1 + a_2) = 9 \end{cases} \Rightarrow q = 3 \text{ (termos } \oplus)$$

4 **(FGV – MODELO ENEM)** – Uma pintura de grande importância histórica foi comprada em 1902 por 100 dólares, e, a partir de então, seu valor tem dobrado a cada 10 anos. O valor dessa pintura, em 2002, era de

a) 100 000 dólares.
b) 200 000 dólares.
c) 51 200 dólares.
d) 102 400 dólares.
e) 150 000 dólares.

RESOLUÇÃO:

1902 .... $a_1 = 100$

1912 .... $a_2 = 100 \cdot 2 = 200$

1922 .... $a_3 = 200 \cdot 2 = 400$

⋮

2002 .... $a_{11} = 100 \cdot 2^{10} = 102\,400$

Resposta: D

Módulo 50 – Termos consecutivos de uma P.G.

Palavras-chave:
- Termo central
- Média geométrica

Numa progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ...)$, cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre o termo anterior e o termo posterior.

Simbolicamente

$$a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$$

Saiba mais

Demonstração

Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ...)$ for uma P.G., então

$$\frac{a_p}{a_{p-1}} = \frac{a_{p+1}}{a_p} \Leftrightarrow a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$$

Exercícios Resolvidos

1 Calcule x para que a sequência (3x – 1; 4x; 2x + 6; ...) seja uma P.G. e em seguida obter o quarto termo.

Resolução

$(3x - 1; 4x; 2x + 6; ...)$ é PG $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4x)^2 = (3x - 1)(2x + 6) \Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm 2}{10} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \dfrac{3}{5}$

Se $x = 1$ a P. G é $(2; 4; 8; ...)$ e $a_4 = 16$

Se $x = \dfrac{3}{5}$ a P.G. é $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{36}{5}; ...\right)$ e $a_4 = \dfrac{108}{5}$

Resposta: ($x = 1$ e $a_4 = 16$) ou

$$\left(x = \frac{3}{5} \text{ e } a_4 = \frac{108}{5}\right)$$

2 **(MODELO ENEM)** – A sequência (1; 1; 2; 3; 5; ...) em que, a partir do terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos que o precedem, é conhecida como sequência de Fibonacci. Se do seu quinto e sétimo termo subtrairmos uma mesma quantia inteira e acrescentarmos os valores subtraídos ao seu nono termo, obteremos, nesta ordem, três termos consecutivos de uma progressão geométrica. A razão dessa progressão geométrica é:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6 e) 7

Resolução

1) Os 9 primeiros termos da sequência de Fibonacci são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

$$\underset{a_5}{5}, \quad \underset{a_7}{13}, \quad \underset{a_9}{34}$$

2) Subtraindo x do 5º e 7º termos e somando 2x ao 9º termo obtemos, nessa ordem, então: 5 – x; 13 – x; 34 + 2x

3) Se esses três números formam uma progressão geométrica, nessa ordem, então:

$(13 - x)^2 = (5 - x) \cdot (34 + 2x) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 4}{6} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$ pois $x \in \mathbb{Z}$

4) A progressão é, pois, (4; 12; 36; ...) e a razão é 3.

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 A sequência $\left(2x + 5;\ x + 1;\ \frac{x}{2};\ ...\right)$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta sequência é:

a) 2 b) 3^{-10} c) 3 d) 3^{10} e) 3^{12}

RESOLUÇÃO:

I) $(x + 1)^2 = (2x + 5) \cdot \frac{x}{2}$

$\cancel{x^2} + 2x + 1 = \cancel{x^2} + \frac{5x}{2}$

$2x - \frac{5x}{2} = -1$

$-\frac{x}{2} = -1$

$x = 2 \Rightarrow$ P.G.(9, 3, 1, ...)

II) $a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$

$a_{13} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$

$a_{13} = 3^{-10}$

Resposta: B

2 **(MACKENZIE)** – Se **p** e **q** são positivos, e se **p**, **pq** e **3p** estão, nesta ordem, em progressão geométrica, então o valor de $\mathbf{q^3}$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

1) (p; pq; 3p) é P.G., então:

$(pq)^2 = p \cdot 3p$

$p^2q^2 = 3p^2$

$q^2 = 3$

$q = \pm\sqrt{3} \Rightarrow q = \sqrt{3}$ (termos $\oplus$)

2) $q^3 = 3\sqrt{3}$

Resposta: C

3 **(UN.FED.TERESINA)** – Sejam **x** e **y** números positivos. Se os números **3**, **x** e **y** formam, nesta ordem, uma P.G. e se os números **x**, **y** e **9** formam, nesta ordem, uma P.A., então **x + y** é igual a:

a) $\frac{43}{4}$ b) $\frac{47}{4}$ c) $\frac{45}{4}$ d) $\frac{49}{4}$

RESOLUÇÃO:

I) $\left.\begin{array}{l} (3, x, y \ldots) \text{ é P.G.} \Rightarrow x^2 = 3y \\ (x, y, 9 \ldots) \text{ é P.A.} \Rightarrow y = \frac{x+9}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2 = 3 \cdot \left(\frac{x+9}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 27 = 0$ $\begin{array}{l} \nearrow x = \frac{9}{2} \\ \searrow x = -3 \text{ (não serve)} \end{array}$

II) $3y = x^2 \Rightarrow 3y = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{81}{12} \Rightarrow y = \frac{27}{4}$

Assim, $x + y = \frac{9}{2} + \frac{27}{4} = \frac{45}{4}$

Resposta: C

4 Adicionando-se uma constante a 20, 50 e 100, obtém-se na ordem dada três termos consecutivos em progressão geométrica. Qual a razão desta progressão?

RESOLUÇÃO:

(20 + x; 50 + x; 100 + x) é P.G., então:

$(50 + x)^2 = (20 + x) \cdot (100 + x)$

$2500 + \cancel{100x} + \cancel{x^2} = 2000 + 20x + \cancel{100x} + \cancel{x^2}$

$-20x = -500$

$x = 25$

Assim a P.G. é (45; 75; 125...) e a razão é $q = \frac{5}{3}$

Módulo 51

Produto dos termos de uma P.G.

Palavras-chave:
• Primeiro termo • Último termo
• Equidistantes dos extremos

1. Termos equidistantes

Definição

Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles for igual ao número de termos que sucede o outro.

Na P.G. $(\underbrace{a_1, a_2, \ldots,}_{(p-1)\text{ termos}}\ a_p, \ldots, a_k, \underbrace{\ldots, a_{n-1},}_{(n-k)\text{ termos}}\ a_n)$ os termos

a_p e a_k equidistam de a_1 e a_n se, e somente se:

$$p - 1 = n - k \Leftrightarrow p + k = n + 1$$

Propriedade

Na progressão geométrica $(a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$, se a_p e a_k equidistam de a_1 e a_n então

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$$

ou seja: **o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos**.

Exemplos

Na progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ temos:

a) $a_1 \cdot a_9 = a_2 \cdot a_8$ pois $1 + 9 = 2 + 8$

b) $a_1 \cdot a_9 = a_3 \cdot a_7$ pois $1 + 9 = 3 + 7$

c) $a_4 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_8$ pois $4 + 6 = 2 + 8$

2. Produto dos n primeiros termos de uma P.G.

Se P_n for o produto dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ então:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Saiba mais

A fórmula permite achar o módulo do produto. O sinal de P_n será obtido analisando-se o 1º termo, o número de termos e a razão.

Demonstração

$$\begin{cases} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Da propriedade dos termos equidistante temos

$a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots = a_1 \cdot a_n$ e, portanto:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot a_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \Leftrightarrow |P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exercícios Resolvidos

1 Calcular o produto dos 9 primeiros termos da P.G.(– 1, 2, – 4, ...).

Resolução

O nono termo da P.G. é $a_9 = a_1 \cdot q^8$ e, portanto,

$a_9 = (-1) \cdot (-2)^8 = -2^8$

O módulo do produto é

$|P_9| = \sqrt{(a_1 \cdot a_9)^9}$ e, portanto:

$|P_9| = \sqrt{2^{72}} \Leftrightarrow |P_9| = 2^{36}$

O produto é negativo pois, dos nove termos, 5 serão negativos e 4 positivos.

Resposta: $P_9 = -2^{36}$

2 Na P.G. estritamente crescente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, tem-se $a_1 + a_6 = 1\,025$ e $a_3 \cdot a_4 = 1\,024$. Determine a razão da progressão geométrica.

Resolução

$$\begin{cases} a_1 + a_6 = 1\,025 \\ a_3 \cdot a_4 = 1\,024 \\ a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_6 = 1\,025 \\ a_1 \cdot a_6 = 1\,024 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_6 = 1\,024 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_1 = 1\,024 \\ a_6 = 1 \end{cases}$$

Como a P.G. é estritamente crescente, consideramos $a_1 = 1$ e $a_6 = 1\,024$.

Sendo $a_6 = a_1 \cdot q^5$, tem-se:

$1024 = 1 \cdot q^5, \Rightarrow q = \sqrt[5]{2^{10}} \Leftrightarrow q = 4$

Resposta: q = 4

3 **(FUVEST)** – Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Resolução

1) Na progressão geométrica $(1; 1 \cdot \sqrt{2}; \ldots)$ o enésimo termo é $a_n = 1 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

2) O produto dos n primeiros termos dessa progressão é 2^{39} e, portanto:

$2^{39} = \sqrt{[1 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}]^n} \Leftrightarrow 2^{78} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = -12$ ou $n = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 13$ pois $n \in \mathbb{N}^*$

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 A progressão geométrica $(a_1, 2, a_3, ...)$ é tal que $a_4 \cdot a_{12} = 46$. O décimo quarto termo desta progressão vale:
a) 46 b) $\sqrt{46}$ c) 23 d) $\sqrt{23}$ e) 40

RESOLUÇÃO:
Se $a_4 \cdot a_{12} = 46$, então $a_{14} \cdot a_2 = 46$, pois $4 + 12 = 14 + 2$, assim:
$a_{14} \cdot 2 = 46 \Leftrightarrow a_{14} = 23$
Resposta: C

2 Numa P.G. estritamente decrescente, sabe-se que $a_1 + a_{10} = -513$ e $a_4 \cdot a_7 = 512$. Determine a razão da P.G.

RESOLUÇÃO:

I) $\begin{cases} a_1 + a_{10} = -513 \\ a_4 \cdot a_7 = 512 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_{10} = -513 \\ a_1 \cdot a_{10} = 512 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{10} = -512 \end{cases}$, **pois a P.G. é decrescente**

II) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow -512 = (-1) \cdot q^9 \Rightarrow q = 2$

3 Calcular o produto dos 10 primeiros termos da progressão geométrica $(-1, 2, -4, ...)$.

RESOLUÇÃO:

I) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = -1 \cdot (-2)^9 = 2^9$

II) $|P_{10}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \sqrt{[(-1) \cdot (2^9)]^{10}} = \sqrt{2^{90}} = 2^{45}$, **porém, temos 5 termos negativos e 5 positivos, logo,** $P_{10} = -2^{45}$

4 Calcule o produto dos 25 elementos iniciais da P.G. $(-1, -2, -4, ...)$.

RESOLUÇÃO:

I) $a_{25} = a_1 \cdot q^{24} = (-1) \cdot 2^{24} = -2^{24}$

II) $|P_{25}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{25})^{25}} = \sqrt{[(-1) \cdot (-2^{24})]^{25}} = \sqrt{2^{600}} = 2^{300}$, **porém temos 25 termos negativos, logo,** $P_{25} = -2^{300}$

5 O produto dos 19 termos iniciais da P.G. alternante, em que o 10º termo é 2, vale:
a) 2^{19} b) -2^{19} c) -2^{18} d) 2^{18} e) 2

RESOLUÇÃO:

$|P_{19}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{19})^{19}}$ **e** $a_1 \cdot a_{19} = a_{10} \cdot a_{10}$, **assim:**

$|P_{19}| = \sqrt{(a_{10} \cdot a_{10})^{19}} = \sqrt{(2^2)^{19}} = 2^{19}$, **como são 10 termos negativos e 9 positivos, temos** $P_{19} = 2^{19}$

Resposta: A

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em “localizar”, digite **MAT1M404**

Módulo 52

Soma dos termos de uma P.G.

Palavra-chave:

- Soma de n termos

Sendo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma P.G. de razão **q** e $\mathbf{S_n}$ a soma dos n primeiros termos, temos:

a) Se q = 1 então $S_n = n \cdot a_1$

b) Se $q \neq 1$ então $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M405**

Saiba mais

Demonstração

a) Se q = 1 então $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ e, portanto, $S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 = n \cdot a_1$

b) Se $q \neq 1$ então

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_n \cdot q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ q \cdot S_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n \cdot q \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n) \Leftrightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Exercícios Resolvidos

1 Calcular a soma dos 8 primeiros termos da P.G. (1, 3, 9, ...).

Resolução

Sendo $a_1 = 1$ e q = 3, temos:

$$S_8 = \frac{1 \cdot (1 - 3^8)}{1 - 3} \Leftrightarrow S_8 = \frac{-6\,560}{-2} = 3\,280$$

Resposta: $\mathbf{S_8 = 3\,280}$

2 Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.G. (2, 4, 8, ...).

Resolução

Sendo $a_1 = 2$ e q = 2 temos:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (1 - 2^{20})}{1 - 2} \Leftrightarrow S_{20} = \frac{2 - 2^{21}}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{20} = 2^{21} - 2$$

Resposta: $\mathbf{S_{20} = 2^{21} - 2}$

3 Calcule o valor de k para que a soma dos k primeiros termos da progressão geométrica (1, 3, 9, ...) seja igual a 797 161.

Resolução

Sendo $a_1 = 1$, q = 3, $S_k = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^k)}{1 - q}$ e $S_k = 797\,161$, temos:

$$\frac{1 \cdot (1 - 3^k)}{1 - 3} = 797\,161 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^k - 1}{2} = 797\,161 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^k - 1 = 1\,594\,322 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^k = 1\,594\,323 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^k = 3^{13} \Leftrightarrow k = 13$$

Resposta: k = 13

Exercícios Propostos

1 **(SEPEB – MODELO ENEM)** – Uma empresa resolveu divulgar um evento pela internet. Para isso, enviou uma mensagem por *e-mail* para 2 pessoas, as quais deveriam retransmiti-la a outras 2 pessoas no dia seguinte, e assim por diante. Suponha que este processo tenha sido seguido à risca pelas pessoas, sempre enviando a mensagem para outras 2 pessoas no dia seguinte. Em uma semana, o número total de pessoas que terá recebido esta mensagem será de:

a) 14 b) 49 c) 126 d) 254 e) 508

Obs.: Supor que cada *e-mail* seja enviado e recebido no mesmo dia.

RESOLUÇÃO:

O número de pessoas que recebem a mensagem, em cada dia, são termos da P.G. (2, 4, 8, ...), assim, em 7 dias, o número total de pessoas que terá recebido a mensagem será:

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^7)}{1 - q} = \frac{2 \cdot (1 - 2^7)}{1 - 2} = \frac{2 \cdot (1 - 128)}{-1} = 254$$

Resposta: D

2 Quantos termos da progressão geométrica (1, 2, 4,...) devemos somar para que a soma seja 1 023?

RESOLUÇÃO:

$S_n = \dfrac{1(1-2^n)}{1-2} = 1\,023 \Rightarrow 2^n - 1 = 1\,023 \Rightarrow 2^n = 1\,024 \Rightarrow n = 10$

n = 10 termos

3 **(SANTA CASA – MODELO ENEM)** – Os frutos de uma árvore atacados por uma moléstia foram apodrecendo dia após dia, segundo os termos de uma progressão geométrica de 1º termo 1 e razão 3, isto é, no 1º dia apodreceu 1 fruto, no 2º dia 3 outros, no 3º dia 9 outros e assim sucessivamente. Se no 7º dia apodreceram os últimos frutos, o número máximo de frutos atacados pela moléstia foi:

a) 363 b) 364 c) 729 d) 1092 e) 1093

RESOLUÇÃO:

I) P.G.(1; 3; 9; ...) q = 3

II) $S_7 = \dfrac{1\,.\,(1-3^7)}{1-3} = \dfrac{2\,186}{2} = 1\,093$

Resposta: E

4 Numa progressão geométrica tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. Calcular a soma dos oito primeiros termos dessa P.G.

RESOLUÇÃO:

I) $a_6 = a_3\,.\,q^3$

$-320 = 40\,.\,q^3$

$q^3 = -8$

$q = -2$

II) $a_3 = a_1\,.\,q^2$

$40 = a_1\,.\,(-2)^2$

$a_1 = 10$

III) $S_8 = \dfrac{a_1\,.\,(1-q^8)}{1-q}$

$S_8 = \dfrac{10\,.\,(1-(-2)^8)}{1-(-2)}$

$S_8 = \dfrac{10\,.\,(1-256)}{3}$

$S_8 = \dfrac{-2\,550}{3}$

$S_8 = -850$

Módulos 53 e 54 – Soma dos infinitos termos de uma P.G. convergente

Palavra-chave:

- Infinitos termos

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma P.G. de razão **q** tal que $\mathbf{-1 < q < 1}$.

A soma S dos infinitos termos da P.G. existe, é finita e pode ser obtida calculando-se o limite de $\mathbf{S_n}$ quando **n** tende a $+\infty$. Observe que se $-1 < q < 1$ e **n** tende a $+\infty$, então $\mathbf{q^n}$ tende a **zero**.

Substituindo $\mathbf{q^n}$ por **zero** na fórmula da soma temos:

$$S = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

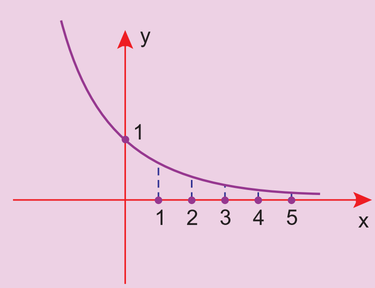
Assim sendo:

A soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q, com $-1 < q < 1$, é:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

Saiba mais

Analisando o gráfico de $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, por exemplo, percebe-se que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ tende a zero quando n tende a $+\infty$.



Exercícios Resolvidos – Módulos 53 e 54

1 Calcule a soma

$S = 3 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8} + ... + \dfrac{3}{2^{n-1}} + ...$

Resolução

S é a soma dos infinitos termos da progressão geométrica

$\left(3; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{8}; ...\right)$ em que $a_1 = 3$ e $q = \dfrac{1}{2}$.

Como $-1 < q < 1$, então $S = \dfrac{a_1}{1-q}$. Logo:

$S = \dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{2}} = 6$

Resposta: S = 6

2 Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Resolução

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$

Assim, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ é a soma S dos infinitos termos da progressão geométrica

$\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots\right)$ em que

$a_1 = 1$ e $q = -\frac{1}{2}$.

Como $-1 < q < 1$, então $S = \frac{a_1}{1-q}$. Logo:

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Resposta: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$

3 Resolva a equação

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots = 5$

Resolução

$S = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots$ é a soma dos infinitos termos da progressão geométrica $\left(x; \frac{x}{2}; \frac{x}{4}; \frac{x}{8}\right)$ em que $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{2}$.

Como $-1 < q < 1$, então $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Logo $S = \frac{x}{1-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$.

Assim, $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \ldots = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Resposta: $V = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

4 Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0, 444...

Resolução

a) 0,444 ... = 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...

b) A sequência (a_n) = (0,4; 0,04; 0,004; ...) é uma P.G. de primeiro termo a_1 = 0,4 e razão q = 0,1.

c) A soma da série gerada por (a_n) é

$S = \frac{a_1}{1-q}$. Logo:

$S = \frac{0,4}{1-0,1} = \frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9}$

Resposta: 0,444... = $\frac{4}{9}$

5 Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0,1323232...

Resolução

a) 0,1323232... = 0,1 + 0,032 + + 0,00032 + 0,0000032 + ...

b) A sequência (a_n) = (0,032; 0,00032; 0,0000032; ...) é uma P.G. de primeiro termo a_1 = 0,032 e razão q = 0,01.

c) De modo análogo ao anterior, temos:

0,032 + 0,00032 + 0,0000032 + ... =

$= \frac{0,032}{1-0,01} = \frac{0,032}{0,99} = \frac{16}{495}$

d) 0,1323232 ... = 0,1 + $\frac{16}{495}$ =

$= \frac{1}{10} + \frac{16}{495} = \frac{99+32}{990} = \frac{131}{990}$

Resposta: 0,1323232 ... = $\frac{131}{990}$

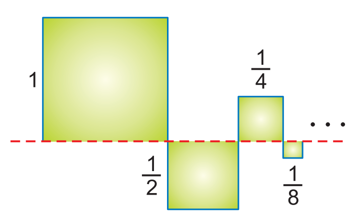
Exercícios Propostos – Módulo 53

1 Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right)$

RESOLUÇÃO:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2 **(MODELO ENEM)** – A linha a seguir é formada por três lados de quadrados que se alternam acima e abaixo da linha tracejada, formando uma serpente. Cada quadrado tem, de lado, a metade do lado do quadrado anterior.



O limite do comprimento de serpente quando o número de quadrados tende ao infinito é:

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

RESOLUÇÃO:
O limite do comprimento da serpente é:

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots =$$

$$= \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Resposta: E

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M406**

3 Obtenha a geratriz da dízima periódica 3,252525...

RESOLUÇÃO:

$$3{,}252525\ldots = 3 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10\,000} + \frac{25}{1\,000\,000} + \ldots = 3 + \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} =$$

$$= 3 + \frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}} = 3 + \frac{25}{99} = \frac{297 + 25}{99} = \frac{322}{99}$$

4 **(FUVEST)** – Seja $\mathbf{S_n}$ a soma dos **n** primeiros termos da sequência infinita: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-n}, \ldots$

a) Calcule S_5.

b) Qual o limite de S_n, quando **n** tende a ∞?

RESOLUÇÃO:

a) $S_5 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{100\,000}$

$S_5 = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001$

$S_5 = 0{,}11111$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S = \frac{a_1}{1 - q}$

$$S = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} \Rightarrow S = \frac{1}{9}$$

Exercícios Propostos – Módulo 54

1 **(MODELO ENEM)** – Uma partícula se move sobre o eixo dos x, partindo da origem. No primeiro minuto, ela avança 1 unidade para a direita; no segundo minuto, retrocede 0,5 unidade; no terceiro minuto, avança 0,25 unidade; e, assim, sucessivamente, alternando avanços com retrocessos, as distâncias percorridas formando uma progressão geométrica. O limite da abscissa da partícula, quando o tempo tender para infinito, é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{7}{10}$

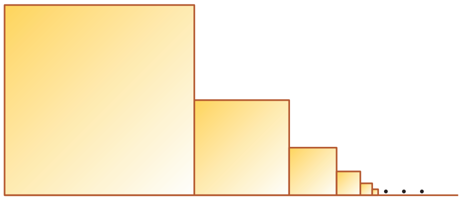
RESOLUÇÃO:

$$x = 1 - 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}125 + \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)** – Na figura abaixo, o lado do quadrado maior mede 1 e os outros quadrados foram construídos de modo que a medida do respectivo lado seja a metade do lado do quadrado anterior.



Imaginando que a construção continue indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados será:

a) 2 b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) $\frac{15}{8}$

RESOLUÇÃO:

As áreas dos quadrados são termos da P.G. $\left(1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \ldots\right)$**, cuja soma é**

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Resposta: B

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M407**

❸ O valor de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{10^n}$ é

a) 2 b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{2}{10}$ d) $\frac{30}{9}$ e) $\frac{20}{9}$

RESOLUÇÃO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{10^n} = \frac{2}{10^0} + \frac{2}{10^1} + \frac{2}{10^2} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{9}{10}} = 2 \cdot \frac{10}{9} = \frac{20}{9}$$

Resposta: E

❹ Resolva a equação $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = 5$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x}{1 - x} = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 5x \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$V = \left\{ \frac{5}{6} \right\}$$

Módulos 55 e 56 – Exercícios complementares (P.A. e P.G.)

Palavras-chave:
- Progressão aritmética
- Progressão geométrica

Exercícios Propostos – Módulo 55

❶ Sejam a e b número reais tais que:

i) a, b e a + b formam, nessa ordem, uma PA;

ii) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então o valor de a é

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

RESOLUÇÃO:

1) (a; b; a + b) é P.A. $\Rightarrow b = \frac{a + a + b}{2} \Leftrightarrow b = 2a$

2) $(2^a; 16; 2^b)$ é P.G. $\Rightarrow 16^2 = 2^a \cdot 2^b \Leftrightarrow (2^4)^2 = 2^{a+b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^8 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 8$

3) De (1) e (2), temos:

$$\begin{cases} b = 2a \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a + 2a = 8 \Leftrightarrow 3a = 8 \Leftrightarrow a = \frac{8}{3}$$

Resposta: E

❷ Na P.G. estritamente crescente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, tem-se $a_1 + a_6 = 1\,025$ e $a_3 \cdot a_4 = 1\,024$. Determine a razão da progressão geométrica.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} a_1 + a_6 = 1\,025 \\ a_3 \cdot a_4 = 1\,024 \\ a_3 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_6 = 1\,025 \\ a_1 \cdot a_6 = 1\,024 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_6 = 1\,024 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_1 = 1\,024 \\ a_6 = 1 \end{cases}$$

Como a P.G. é estritamente crescente, consideramos $a_1 = 1$ e $a_6 = 1\,024$.

Sendo $a_6 = a_1 \cdot q^5$, tem-se: $1\,024 = 1 \cdot q^5, \Rightarrow q = \sqrt[5]{2^{10}} \Leftrightarrow q = 4$

Resposta: q = 4

3 A soma de três números em progressão geométrica é 70. Multiplicando-se os termos extremos por 4 e o termo médio por 5, os produtos obtidos estarão em progressão aritmética. O produto dos três números iniciais, em progressão geométrica, é:

a) 11 880 b) 11 250 c) 8 640
d) 8 000 e) 1 200

RESOLUÇÃO:

(a; b; c) é uma P.G. $\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 70 \ (I) \\ b^2 = ac \ (II) \end{cases}$

(4a; 5b; 4c) é uma P.A. $\Rightarrow 5b = \dfrac{4a + 4c}{2} \Rightarrow 5b = 2a + 2c \ (III)$

Multiplicando a equação (I) por 2, temos:
$2a + 2b + 2c = 140 \ (IV)$
Substituindo (III) em (IV), obtemos:
$5b + 2b = 140 \Rightarrow 7b = 140 \Rightarrow b = 20$
Em (II) temos $a \cdot c = b^2$**, logo:**
$P_3 = a \cdot b \cdot c = b^3 = 20^3 = 8\,000$
Resposta: D

3 O vigésimo termo da sequência, na qual para todo n inteiro positivo a soma dos n primeiros termos vale $\dfrac{1}{n}$, é

a) $\dfrac{1}{20}$ b) $\dfrac{1}{342}$ c) $\dfrac{1}{380}$ d) $-\dfrac{1}{342}$ e) $-\dfrac{1}{380}$

RESOLUÇÃO:

I) $S_{19} = \dfrac{1}{19}$ e $S_{20} = \dfrac{1}{20}$

II) $S_{20} = S_{19} + a_{20} \Leftrightarrow \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{19} + a_{20} \Leftrightarrow a_{20} = \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow$

$a_{20} = -\dfrac{1}{380}$

Resposta: E

4 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

RESOLUÇÃO:

A P.A. é $(4; 4 + r; 4 + 2r; \ldots)$ **e a P.G. é** $(4; 4q; 4q^2; \ldots)$**, então**

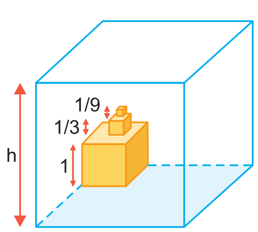
$\begin{cases} 4 + 2r = 4q^2 \\ (4 + r) - 4q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4q^2 = 2r + 4 \\ r = 4q - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ r = 6, \text{ pois } q \neq 0 \end{cases}$

Assim, temos P.A. (4; 10; 16; ...) e P.G. (4; 8; 16;...)

Resposta: D

Exercícios Propostos – Módulo 56

1 **(UNIFESP – MODELO ENEM)** – No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas 1, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{27}$, e assim por diante, conforme mostra a figura.



O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é:

a) 3 b) $\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{7}{3}$ d) 2 e) $\dfrac{3}{2}$

RESOLUÇÃO:

I) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

II) **Para poder fazer o empilhamento indefinidamente,** $h \geq \dfrac{3}{2}$.

O menor valor, pois, é $\dfrac{3}{2}$.

Resposta: E

2 **(U.E.PARAÍBA – MODELO ENEM)** – Durante os sete dias destinados às inscrições de um concurso, o número de candidatos cresceu em progressão geométrica do primeiro ao sétimo dia. Sabendo que no 1º dia se inscreveram 2 candidatos e no sétimo dia 1458, concluímos que o total de candidatos inscritos para o referido concurso foi de:

a) 2916 b) 1460 c) 2186 d) 1458 e) 1944

RESOLUÇÃO:

I) Na P.G., temos $a_1 = 2$ e $a_7 = 1458$, então:

$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 1458 = 2 \cdot q^6 \Leftrightarrow$

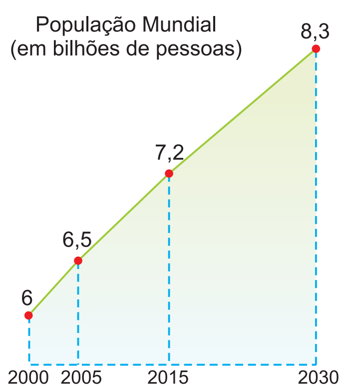
$\Leftrightarrow q^6 = 729 \Rightarrow q = 3$**, pois a P.G. é estritamente crescente.**

II) O total de candidatos inscritos equivale à soma dos 7 primeiros termos da P.G. (2, 6, ...), assim:

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = 3^7 - 1 = 2\,187 - 1 = 2\,186$$

Resposta: C

3 **(UFABC – MODELO ENEM)** – O gráfico mostra a população mundial em 2000 e em 2005, e as previsões para 2015 e 2030.



(FAO e Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento)

Suponha que de 2030 até 2050 (quando se prevê que sete entre dez pessoas no mundo estejam vivendo nas cidades) a população mundial cresça em progressão aritmética, na qual p_1 é a população mundial prevista para 2030, p_2 a população mundial prevista para 2031, p_3 a população mundial prevista para 2032, e assim sucessivamente. Se p_2 = 8,37 bilhões de pessoas, então, em 2050, de acordo com a previsão, a população urbana, em bilhões de pessoas, será, aproximadamente, de

a) 6,8 b) 7,7 c) 8,6 d) 9,6 e) 10,7

RESOLUÇÃO:

1) $2030 \to p_1 = 8,3$

$2031 \to p_2 = 8,37$

$2032 \to p_3 = 8,44$

$\vdots$

$2050 \to p_{21} = 8,3 + (21 - 1) \cdot 0,07 = 9,7$

2) A população mundial em 2050 será de 9,7 bilhões de pessoas.

3) Em 2050, a população urbana, em bilhões de pessoas, será

$$\frac{7}{10} \cdot 9,7 = 6,79 \cong 6,8$$

Resposta: A

4 **(MODELO ENEM)** – Um tipo especial de flor de ciclo mensal, antes de murchar e morrer, lança ao solo duas sementes para a perpetuação da espécie. Supondo que todas as sementes lançadas germinem e repitam o ciclo, quantos meses após o lançamento das duas primeiras sementes, 8192 sementes estarão sendo lançadas ao solo?

a) 10 b) 12 c) 13 d) 11 e) 14

RESOLUÇÃO:

Após 1 mês $\to 2^2 = 4$ **sementes serão lançadas**

Após 2 meses $\to 2^3 = 8$ **sementes serão lançadas**

Após 3 meses $\to 2^4 = 16$ **sementes serão lançadas**

$\vdots$

Após n meses $\to 2^{n+1} = 8192$ **sementes serão lançadas**

Assim: $2^{n+1} = 2^{13} \Leftrightarrow n + 1 = 13 \Leftrightarrow n = 12$

Resposta: B

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

OBJETIVO FRENTE 2

MATEMÁTICA

Função Modular, Proporções, Regra de Três, Porcentagem e Juros – Módulos

Ilustração destacando o símbolo de porcentagem

Módulos 45 e 46

Módulo: equações e inequações

Palavras-chave:
- Valor absoluto
- Distância

Definição de módulo

O **módulo** (ou o valor absoluto) de um número real **x**, representado por |**x**|, é um número real positivo assim definido:

$$\begin{cases} \text{se } x \geq 0 \text{ então } |x| = x \\ \text{se } x \leq 0 \text{ então } |x| = -x \end{cases}$$

Saiba mais

1. | **positivo** | **= positivo**

Exemplos:

a) $|4| = 4$

b) $|7| = 7$

c) $|x^2| = x^2$

d) Se $x \geq 2$ então $x - 2 \geq 0$ e, portanto, $|x - 2| = x - 2$

2. | **negativo** | **= – negativo**

Exemplos:

a) $|-7| = -(-7) = 7$

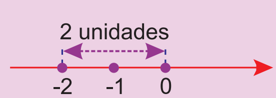
b) $|-4| = -(-4) = 4$

c) Se $x \leq 2$ então $x - 2 \leq 0$ e, portanto, $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$

d) Dizer que o módulo do número 3 é 3 ($|3| = 3$) significa que o número 3 dista 3 unidades da origem.

$\Leftrightarrow |3| = 3$

e) Dizer que o módulo do número – 2 é 2 ($|-2| = 2$) significa que o número – 2 dista 2 unidades da origem.



$\Leftrightarrow |-2| = 2$

1 Se $x \geq 3$, então $| x - 1 | + | x - 3 |$ é igual a:

a) $2x - 4$ b) 2 c) $-2x + 4$
d) 4 e) $2x - 2$

Resolução

Se $x \geq 3$, então $x - 1 > 0$ e $x - 3 \geq 0$ e, portanto:
$| x - 1 | + | x - 3 | = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$

Resposta: A

2 Se $1 \leq x \leq 3$, então $| x - 1 | + | x - 3 |$ é igual a:

a) $2x - 4$ b) 2 c) $-2x + 4$
d) 4 e) $2x - 2$

Resolução

Se $1 \leq x \leq 3$, então $x - 1 \geq 0$ e $x - 3 \leq 0$ e, portanto:
$| x - 1 | + | x - 3 | = x - 1 - x + 3 = 2$

Resposta: B

3 Se $x \leq 1$, então $| x - 1 | + | x - 3 |$ é igual a:

a) $2x - 4$ b) 2 c) $-2x + 4$
d) 4 e) $2x - 2$

Resolução

Se $x \leq 1$, então $x - 1 \leq 0$ e $x - 3 < 0$ e, portanto:
$| x - 1 | + | x - 3 | = -x + 1 - x + 3 = -2x + 4$

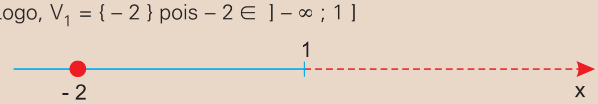
Resposta: C

4 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $2 | x - 1 | = -x + 4$

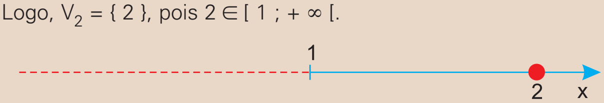
Resolução

Já que $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

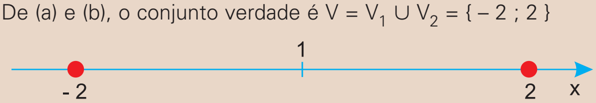
a) se $x \leq 1$, então $x - 1 \leq 0$ e, portanto:
$2 | x - 1 | = -x + 4 \Leftrightarrow 2(-x + 1) = -x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x + 2 = -x + 4 \Leftrightarrow x = -2.$
Logo, $V_1 = \{-2\}$ pois $-2 \in]-\infty ; 1]$



b) se $x \geq 1$, então $x - 1 \geq 0$ e, portanto:
$2 | x - 1 | = -x + 4 \Leftrightarrow 2(x - 1) = -x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 2 = -x + 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2.$
Logo, $V_2 = \{2\}$, pois $2 \in [1 ; +\infty[$.



c) De (a) e (b), o conjunto verdade é $V = V_1 \cup V_2 = \{-2 ; 2\}$

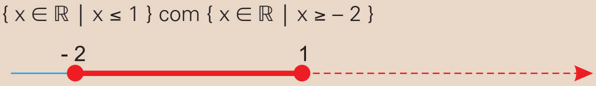


5 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2 | x - 1 | \leq -x + 4$

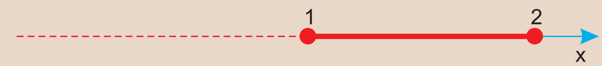
Resolução

Já que $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$,

a) se $x \leq 1$, então $x - 1 \leq 0$ e, portanto:
$2 | x - 1 | \leq -x + 4 \Leftrightarrow 2(-x + 1) \leq -x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x + 2 \leq -x + 4 \Leftrightarrow -x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2.$
Logo, $V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$, que é a intersecção de $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ com $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$



b) se $x \geq 1$, então $x - 1 \geq 0$ e, portanto:
$2|x - 1| \leq -x + 4 \Leftrightarrow 2(x - 1) \leq -x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq -x + 4 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2.$
Logo, $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$, que é a intersecção de $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ com $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$



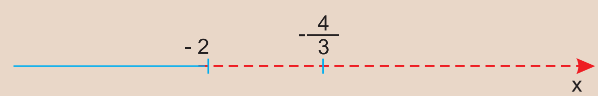
c) de (a) e (b), concluímos que o conjunto verdade é
$V = V_1 \cup V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

6 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $| 2x - 3 | + | x + 2 | < 5$

Resolução

Já que $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ e $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

a) se $x \leq -2$, então $2x - 3 < 0$ e $x + 2 \leq 0$ e, portanto:
$| 2x - 3 | + | x + 2 | < 5 \Leftrightarrow -2x + 3 - x - 2 < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3x < 4 \Leftrightarrow 3x > -4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{3}$
Logo, $V_1 = \varnothing$, que é a intersecção de
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$ com $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{4}{3}\right\}$



b) se $-2 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$, então $2x - 3 \leq 0$ e $x + 2 \geq 0$ e, portanto,
$| 2x - 3 | + | x + 2 | < 5 \Leftrightarrow -2x + 3 + x + 2 < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$
Logo, $V_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$, que é a intersecção de
$\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$ com $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

c) se $x \geq \dfrac{3}{2}$, então $2x - 3 \geq 0$ e $x + 2 > 0$ e, portanto,
$| 2x - 3 | + | x + 2 | < 5 \Leftrightarrow 2x - 3 + x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2.$
Logo, $V_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{3}{2} \leq x < 2\right\}$, que é a intersecção de
$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{3}{2}\right\}$ com $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

d) de (a), (b) e (c), concluímos que o conjunto verdade é
$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

1 Complete:

a) $|5| = \mathbf{5}$

b) $|-5| = \mathbf{5}$

c) $|0| = \mathbf{0}$

d) $|x| = x$, se $\mathbf{x \geqslant 0}$

e) $|x| = -x$, se $\mathbf{x \leqslant 0}$

f) $|6 - 4| = \mathbf{6 - 4 = 2}$

g) $|4 - 6| = \mathbf{-4 + 6 = 2}$

h) Se $x > 3$, então $|x - 3| = \mathbf{x - 3}$

i) Se $x \leqslant 3$, então $|x - 3| = \mathbf{-x + 3}$

2 Resolver, em $A = [4; +\infty[$, a equação $5.|x - 4| + 10 = 3x + 4$

RESOLUÇÃO:

I) $x \geqslant 4 \Leftrightarrow x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow |x - 4| = x - 4$

II) $5 . |x - 4| + 10 = 3x + 4 \Leftrightarrow 5 . (x - 4) + 10 = 3x + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - 20 + 10 = 3x + 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7 \in A$
$V = \{7\}$

3 Resolver, em $B =]-\infty; 1]$, a equação $2.|x - 1| + x - 8 = 2$

RESOLUÇÃO:

I) $x \leqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1$

II) $2 . |x - 1| + x - 8 = 2 \Leftrightarrow 2 . (-x + 1) + x - 8 = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x + 2 + x - 8 = 2 \Leftrightarrow -x = 8 \Leftrightarrow x = -8 \in B$
$V = \{-8\}$

4 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3 . |x - 2| = x + 4$

RESOLUÇÃO:

se $x \leqslant 2$	se $x \geqslant 2$
$3(-x + 2) = x + 4$	$3(x - 2) = x + 4$
$-3x + 6 = x + 4$	$3x - 6 = x + 4$
$-4x = -2$	$2x = 10$
$x = \dfrac{1}{2}$	$x = 5$

$V = \left\{ \dfrac{1}{2}; 5 \right\}$

5 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $2 . |x - 1| + |x - 6| = 13$

RESOLUÇÃO:

se $x \leqslant 1$	se $1 \leqslant x \leqslant 6$	se $x \geqslant 6$
$2(-x + 1) - x + 6 = 13$	$2(x - 1) - x + 6 = 13$	$2(x - 1) + x - 6 = 13$
$-2x + 2 - x + 6 = 13$	$2x - 2 - x + 6 = 13$	$2x - 2 + x - 6 = 13$
$-3x = 5$	$x = 9$	$3x = 21$
$x = -\dfrac{5}{3}$	(não serve)	$x = 7$

$V = \left\{ -\dfrac{5}{3}; 7 \right\}$

1 Resolver, em A = [2; + ∞[, a inequação $|3x - 6| + 2x < 9$

RESOLUÇÃO:

I) Em $A = [2; +\infty[\Rightarrow x \geqslant 2$

II) Se $x \geqslant 2 \Rightarrow 3x - 6 \geqslant 0$, então:

$|3x - 6| + 2x < 9 \Leftrightarrow 3x - 6 + 2x < 9 \Leftrightarrow x < 3$

III) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow V = [2; 3[$

2 Resolver, em B =]– ∞; 1], a inequação $2 \,.\, |x - 1| \leqslant -x + 4$

RESOLUÇÃO:

I) Em $B =]-\infty; 1] \Rightarrow x \leqslant 1$

II) Se $x \leqslant 1 \Rightarrow x - 1 \leqslant 0$, então:

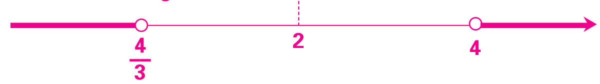
$2 \,.\, |x - 1| \leqslant -x + 4 \Leftrightarrow 2 \,.\, (-x + 1) \leqslant -x + 4 \Leftrightarrow x \geqslant -2$

III) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow V = [-2; 1]$

3 Resolver, em ℝ, a inequação $|2x - 4| > x$

RESOLUÇÃO:

se $x \leqslant 2$	se $x \geqslant 2$
$-2x + 4 > x$	$2x - 4 > x$
$-3x > -4$	$x > 4$
$3x < 4$	
$x < \frac{4}{3}$	

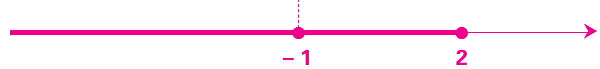


$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 4\right\}$

4 Resolver, em ℝ, a inequação $2x - 7 + |x + 1| \leqslant 0$

RESOLUÇÃO:

se $x \leqslant -1$	se $x \geqslant -1$
$2x - 7 - x - 1 \leqslant 0$	$2x - 7 + x + 1 \leqslant 0$
$x \leqslant 8$	$3x \leqslant 6$
	$x \leqslant 2$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

5 Resolver, em ℝ, a inequação $2 \,.\, |x - 4| + |x + 1| \leqslant 10$

RESOLUÇÃO:

se $x \leqslant -1$	se $-1 \leqslant x \leqslant 4$	se $x \geqslant 4$
$2(-x + 4) - x - 1 \leqslant 10$	$2(-x + 4) + x + 1 \leqslant 10$	$2(x - 4) + x + 1 \leqslant 10$
$-2x + 8 - x - 1 \leqslant 10$	$-2x + 8 + x + 1 \leqslant 10$	$2x - 8 + x + 1 \leqslant 10$
$-3x \leqslant 3$	$-x \leqslant 1$	$3x \leqslant 17$
$x \geqslant -1$	$x \geqslant -1$	$x \leqslant \frac{17}{3}$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant \frac{17}{3}\right\}$

Módulos 47 e 48 — Função modular

Palavras-chave:
• Simetria
• Sinal da função

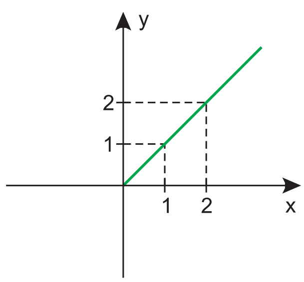
1. Definição

A função modular f : ℝ → ℝ é definida por

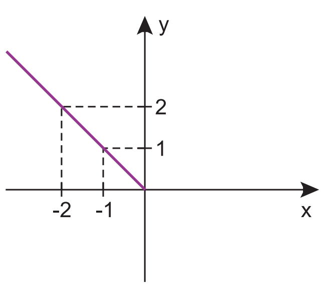
$$f(x) = |x|$$

2. Como obter o gráfico

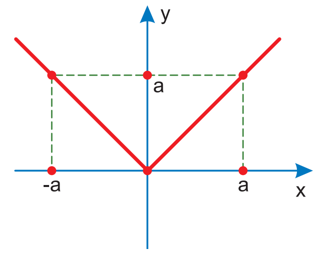
a) $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x| = x$



b) $x \leq 0 \Rightarrow f(x) = |x| = -x$



3. Gráfico da função modular



4. Propriedades

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x| = |-x|$

c) $x^2 = |x|^2 = |x^2|$

d) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x$

e) Sendo **a** um número positivo e **x** um número real demonstra-se que:

$|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ **ou** $x = a$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ **ou** $x > a$

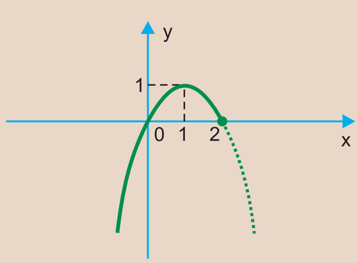
Exercícios Resolvidos – Módulos 47 e 48

1 Esboçar o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por $f(x) = |x - 2| \,.\, x$

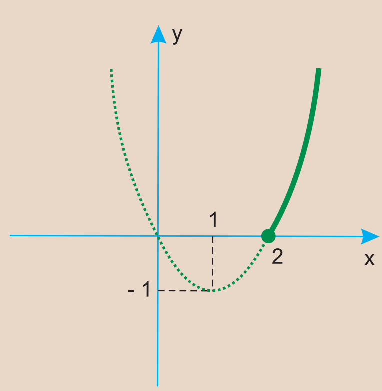
Resolução

Já que $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$,

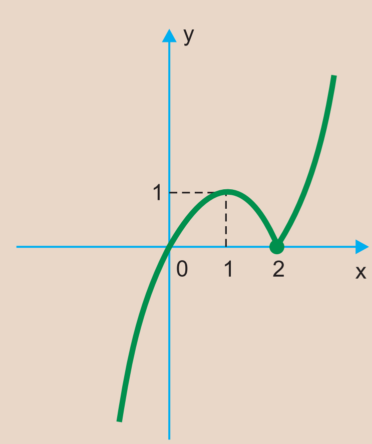
a) se $x \leq 2$, então $x - 2 \leq 0$ e, portanto:
$f(x) = |x - 2| \,.\, x \Leftrightarrow f(x) = (-x + 2) \,.\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 2x$
O gráfico é do tipo:



b) se $x \geq 2$, então $x - 2 \geq 0$ e, portanto:
$f(x) = |x - 2| \,.\, x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = (x - 2) \,.\, x \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x$
O gráfico é do tipo:



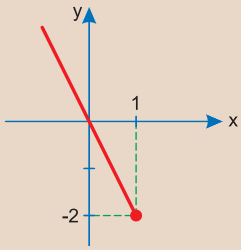
De (a) e (b), concluímos que o gráfico de f é:



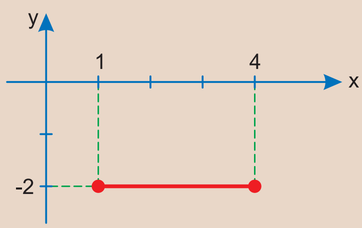
2 Esboçar o gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = |x - 1| + |x - 4| - 5$

Resolução

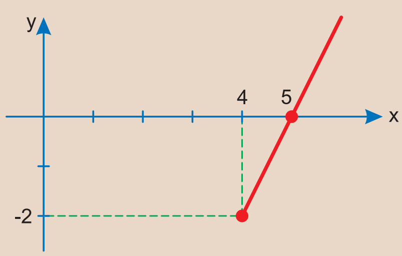
a) Se $x \leq 1$ então $x - 1 \leq 0$, $x - 4 < 0$ e, portanto:
$|x - 1| = -x + 1$ e $|x - 4| = -x + 4$
Logo: $f(x) = -x + 1 - x + 4 - 5 \Leftrightarrow f(x) = -2x$
O gráfico de $f(x) = -2x$, para $x \leq 1$ é:



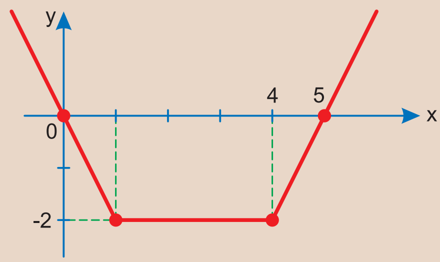
b) Se $1 \leq x \leq 4$ então $x - 1 \geq 0$, $x - 4 \leq 0$ e, portanto: $|x - 1| = x - 1$ e $|x - 4| = -x + 4$
Logo: $f(x) = x - 1 - x + 4 - 5 \Leftrightarrow f(x) = -2$
O gráfico de $f(x) = -2$, para $1 \leq x \leq 4$ é:



c) Se $x \geq 4$ então $x - 1 > 0$, $x - 4 \geq 0$ e, portanto:
$|x - 1| = x - 1$ e $|x - 4| = x - 4$
Logo: $f(x) = x - 1 + x - 4 - 5 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 10$
O gráfico de $f(x) = 2x - 10$, para $x \geq 4$ é:



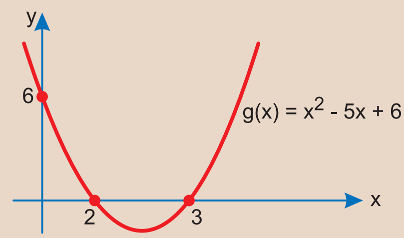
d) De (a), (b) e (c) concluímos que o gráfico de $f(x) = |x - 1| + |x - 4| - 5$ é



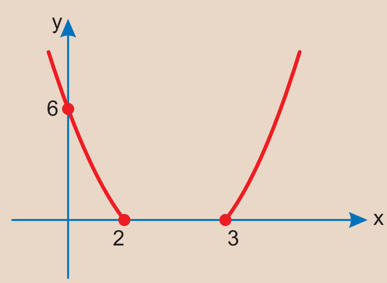
3 Esboçar o gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

Resolução

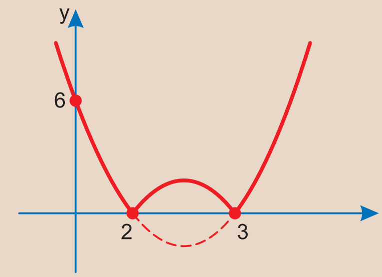
a) Fazer o gráfico "sem o módulo"



b) A parte do gráfico "acima do eixo x" permanece como está, pois
$|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6$



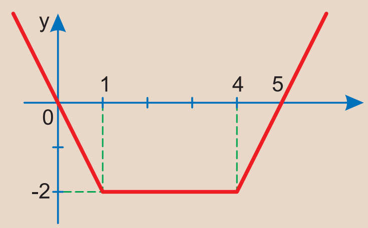
c) A parte do gráfico que está "abaixo do eixo x" deve ser "rebatida para cima", pois $|x^2 - 5x + 6| \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$. O gráfico de f é, pois:



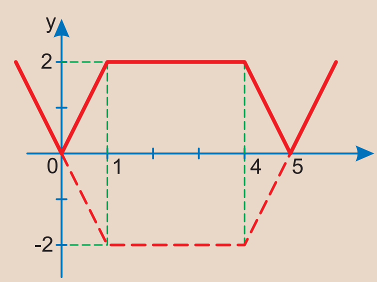
4 Esboçar o gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = \big||x - 1| + |x - 4| - 5\big|$

Resolução

a) O gráfico de $y = |x - 1| + |x - 4| - 5$, conforme o exercício 2, é:



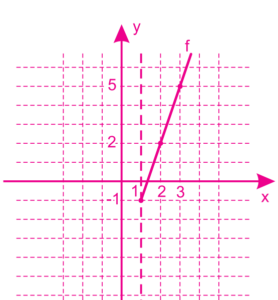
b) O gráfico de $f(x) = \big||x - 1| + |x - 4| - 5\big|$, conforme o exercício 3, é:

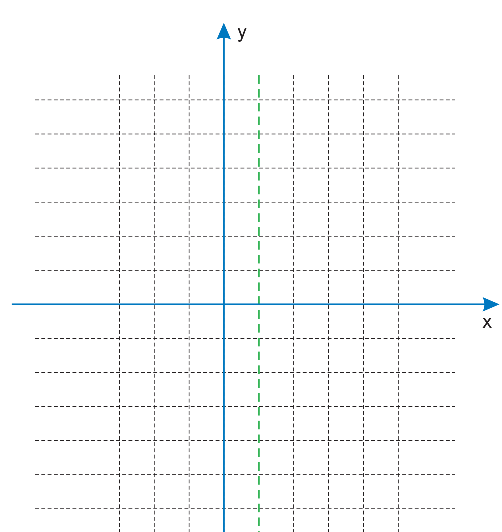


Exercícios Propostos – Módulo 47

1 Esboçar o gráfico da função $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2|x - 1| + x - 2$

RESOLUÇÃO:
Se $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = 2(x - 1) + x - 2 \Rightarrow f(x) = 3x - 4$

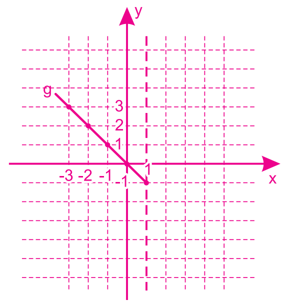


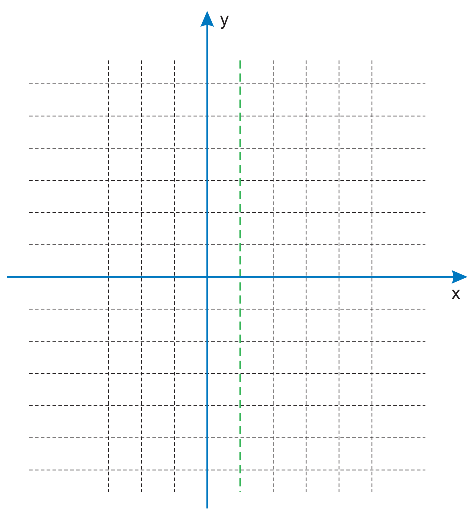


2 Esboçar o gráfico da função g :]– ∞; 1] → ℝ definida por g(x) = 2 |x – 1| + x – 2

RESOLUÇÃO:

Se x ≤ 1 ⇒ x – 1 ≤ 0 ⇒
⇒ |x – 1| = – x + 1 ⇒
⇒ g(x) = 2(– x + 1) + x – 2 ⇒
⇒ g(x) = – x



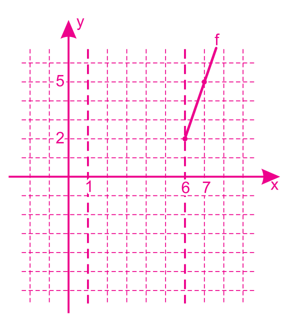


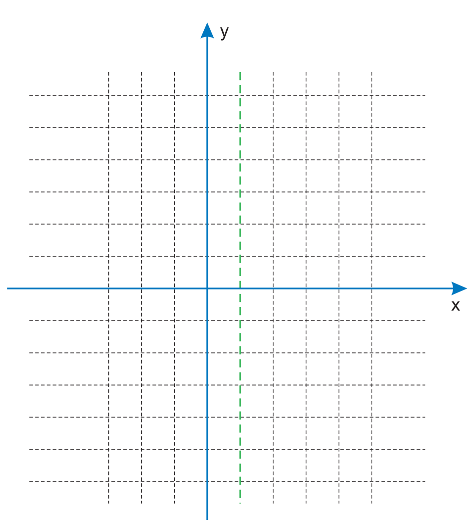
3 Esboçar o gráfico da função h : ℝ → ℝ definida por h(x) = 2 |x – 1| + x – 2

RESOLUÇÃO:

h(x) = 2|x – 1| + x – 2 =

$$= \begin{cases} -x & , \text{se } x \le 1 \\ 3x - 4 & , \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

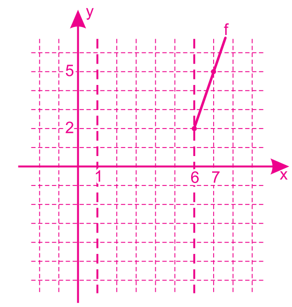


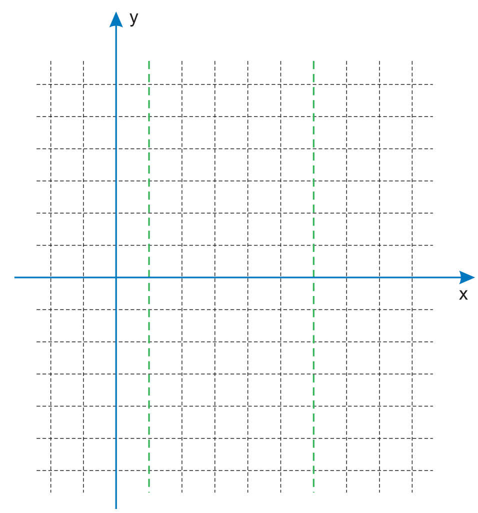


4 Esboçar o gráfico da função f: [6; + ∞[→ ℝ definida por f(x) = 2 | x – 1| + |x – 6| – 8

RESOLUÇÃO:

Se x ≥ 6 ⇒ x – 1 > 0 e x – 6 ≥ 0 ⇒
⇒ | x – 1 | = x – 1 e |x – 6 | = x – 6 ⇒
⇒ f(x) = 2(x – 1) + (x – 6) – 8 ⇒
⇒ f(x) = 3x – 16

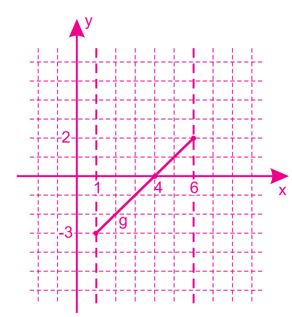


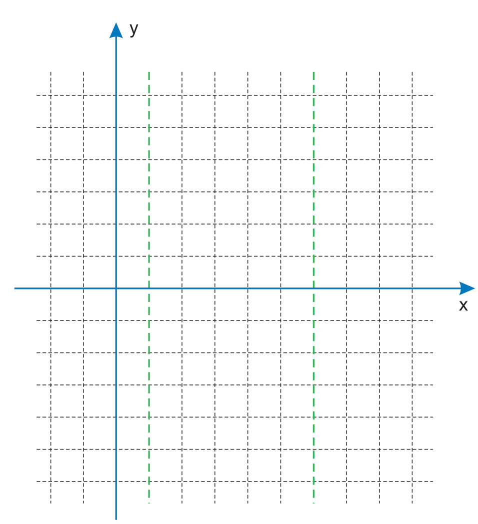


5 Esboçar o gráfico da função g: [1; 6] → ℝ definida por g(x) = 2|x – 1| + |x – 6| – 8

RESOLUÇÃO:

Se 1 ≤ x ≤ 6 ⇒
⇒ x – 1 ≥ 0 e x – 6 ≤ 0 ⇒
⇒ |x – 1| = x – 1 e |x – 6| = – x + 6 ⇒
⇒ g(x) = 2(x – 1) + (– x + 6) – 8 ⇒
g(x) = x – 4





6 Esboçar o gráfico da função h :]– ∞; 1] → ℝ definida por $h(x) = 2\,|x-1| + |x-6| - 8$

RESOLUÇÃO:

Se $x \le 1 \Rightarrow$

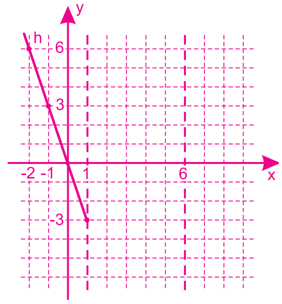
$\Rightarrow x - 1 \le 0$ e $x - 6 < 0 \Rightarrow$

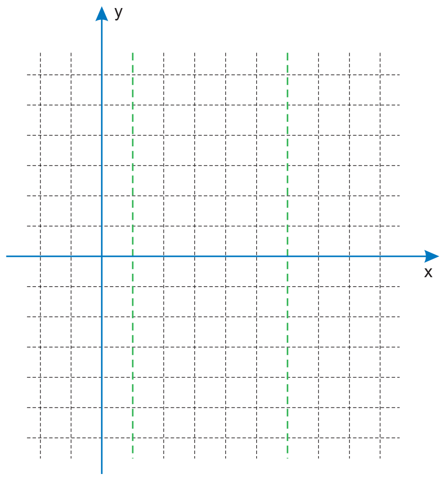
$\Rightarrow |x - 1| = -x + 1$ e

$|x - 6| = -x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x) = 2(-x + 1) + (-x + 6) - 8 \Rightarrow$

$h(x) = -3x$



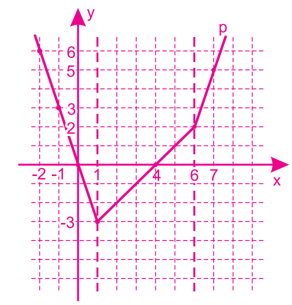


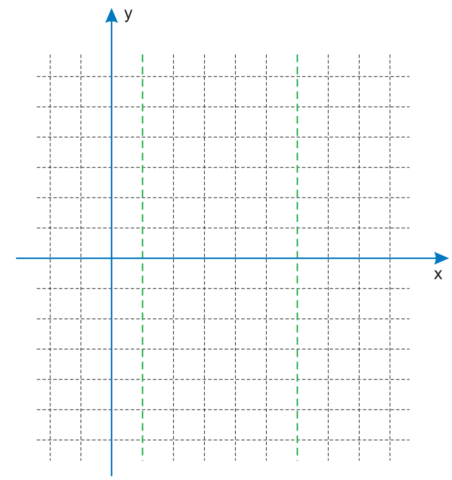
7 Esboçar o gráfico da função p : ℝ → ℝ definida por $p(x) = 2\,|x-1| + |x-6| - 8$

RESOLUÇÃO:

$p(x) = 2\,|x - 1| + |x - 6| - 8 =$

$$= \begin{cases} -3x, \text{ se } x \le 1 \\ x - 4, \text{ se } 1 \le x \le 6 \\ 3x - 16, \text{ se } x \ge 6 \end{cases}$$

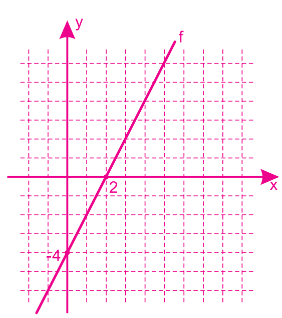


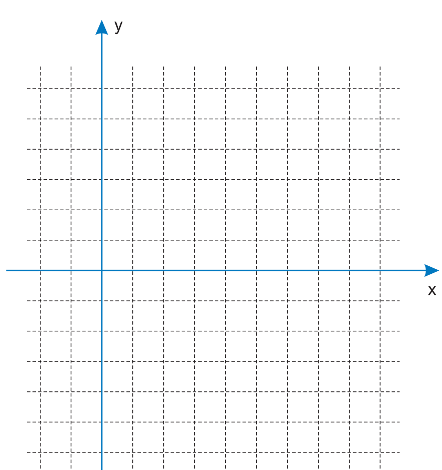


Exercícios Propostos – Módulo 48

1 Construir o gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = 2x - 4$

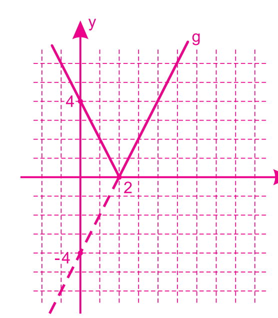
x	f(x)
0	– 4
2	0

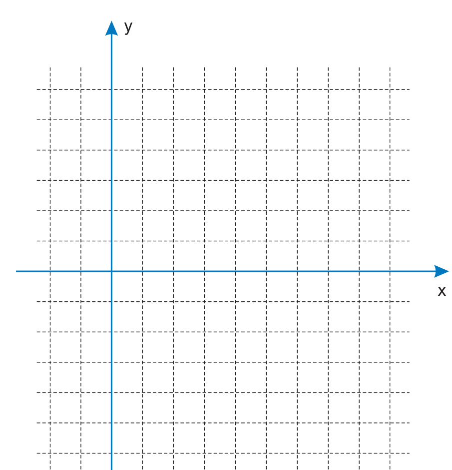




2 Construir o gráfico da função g de ℝ em ℝ, definida por $g(x) = |2x - 4|$

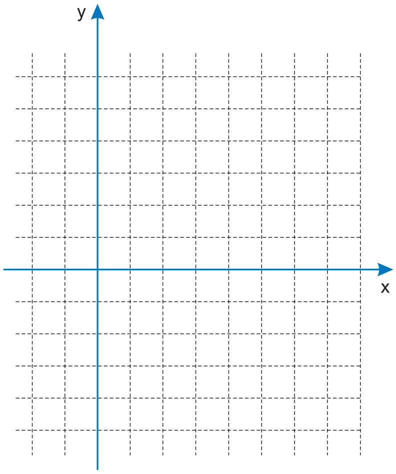
x	g(x)
0	4
2	0

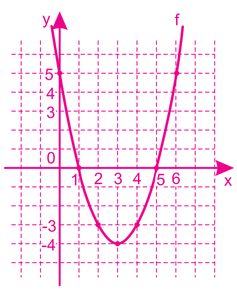




3 Construir o gráfico da função f, de ℝ em ℝ, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$

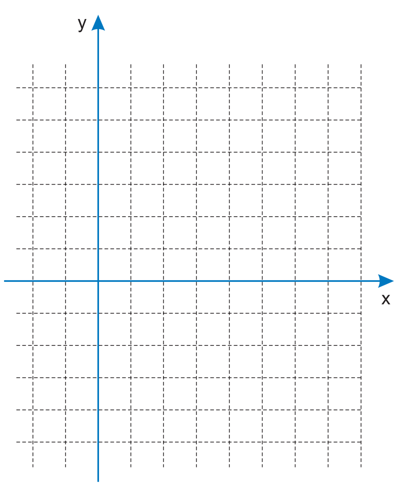
x	f(x)
0	5
1	0
2	– 3
3	– 4
4	– 3
5	0
6	5

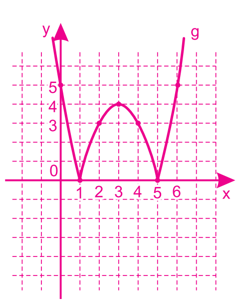




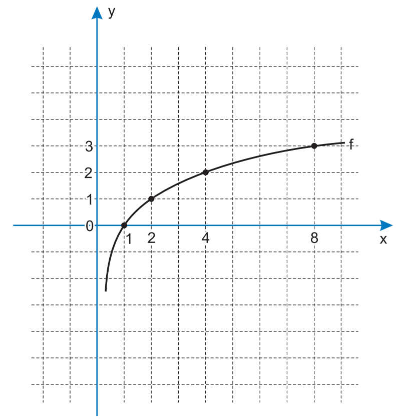
4 Construir o gráfico da função g, de ℝ em ℝ, definida por $g(x) = |x^2 - 6x + 5|$

x	g(x)
0	5
1	0
2	3
3	4
4	3
5	0
6	5



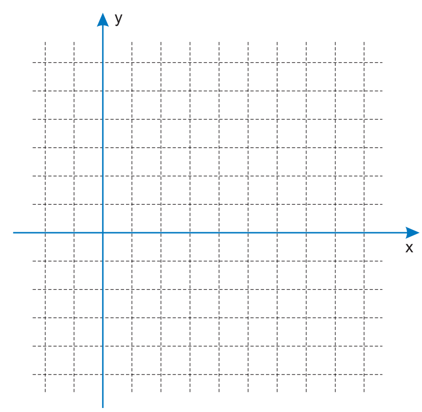


5 A partir do gráfico da função f, de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$,

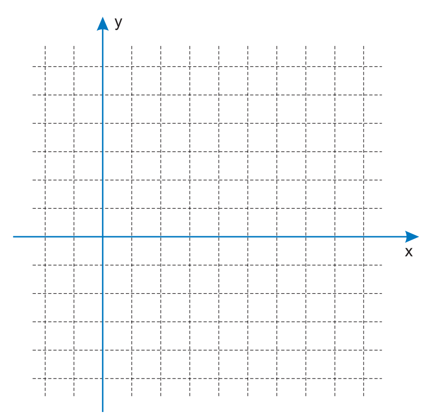


construir

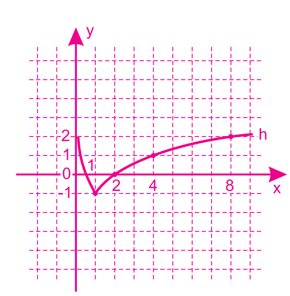
a) O gráfico da função g, de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = |\log_2 x|$



b) O gráfico da função h, de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |\log_2 x| - 1$



RESOLUÇÃO:



Módulo 49

Razões e proporções

Palavras-chave:
- Quociente
- Produto

1. Razão

A razão entre dois números **a** e **b** ≠ **0**, nesta ordem, é o **quociente** $\frac{a}{b}$.

O número **a** é chamado **antecedente** ou **primeiro termo** e o número **b** é chamado **consequente** ou **segundo termo**.

2. Proporção

Os números **a**, **b**, **c** e **d**, com **b ≠ 0** e **d ≠ 0**, formam, nesta ordem, uma **proporção** se, e somente se, a razão entre **a** e **b** é igual à razão entre **c** e **d**. Representa-se por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e lê-se: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**.

Os números **a** e **d** são chamados extremos e os números **b** e **c** são chamados **meios**.

Exemplos

a) A razão entre 3 e 2 é 1,5.

b) A razão entre 6 e 2 é 3.

c) Os números 4, 2, 6 e 3 formam, nesta ordem, uma proporção, pois $\frac{4}{2} = 2$ e $\frac{6}{3} = 2$.

Escreve-se $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ e lê-se: 4 está para 2 assim como 6 está para 3.

3. Propriedades das proporções

Se os números **a**, **b**, **c** e **d** formam, nesta ordem, uma proporção, então:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ao ler a propriedade (a) costuma-se dizer: **o produto dos extremos é igual ao produto dos meios**.

Na propriedade (b) dizemos: **a soma dos dois primeiros está para o segundo** assim como a **soma dos dois últimos está para o último**.

Na propriedade (c) é comum dizer: **a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes** assim como **cada antecedente está para o correspondente consequente**.

4. Grandezas

A notação **A = (a_1, a_2, a_3, ...)** é utilizada para indicar que a_1, a_2, a_3, ... são os valores assumidos pela grandeza **A**.

Ao escrever, num dado problema, que **A = (a_1, a_2, a_3, ...)** e **B = (b_1, b_2, b_3, ...)**, queremos dizer que, quando a grandeza A assumir o valor a_1, a grandeza **B** assumirá o valor b_1. Queremos dizer, portanto, que a_1 e b_1 são valores correspondentes das grandezas **A** e **B**. Analogamente, a_2 e b_2 são valores correspondentes, o mesmo acontecendo com a_3 e b_3 etc.

5. Grandezas diretamente proporcionais (GDP)

Uma grandeza **A** é **diretamente proporcional** a uma grandeza **B** se, e somente se, **as razões** entre os valores de **A** e os correspondentes valores de **B** forem **constantes**. Se A = (a_1, a_2, a_3, ...) e B = (b_1, b_2, b_3, ...) forem grandezas diretamente proporcionais, então:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = k$$

A tabela de valores das grandezas **tempo** (em horas) e **distância** (em quilômetros), da viagem de um trem com velocidade constante de 80 km/h, nos mostra que:

DISTÂNCIA (km)	80	160	240	...
TEMPO (horas)	1	2	3	...

$\frac{80}{1} = \frac{160}{2} = \frac{240}{3} = 80$ e que, portanto, o **tempo** e a **distância**, neste exemplo, são **grandezas diretamente proporcionais** (GDP).

Exemplo

Sabendo-se que **(2, 3, x)** e **(6, y, 15)** são sucessões diretamente proporcionais, determinar **x** e **y**.

Resolução:

Se **(2, 3, x)** e **(6, y, 15)** são G.D.P., então:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{y} = \frac{x}{15}$$

De $\frac{2}{6} = \frac{3}{y}$, temos: $2y = 3 \cdot 6 \Rightarrow y = 9$

De $\frac{2}{6} = \frac{x}{15}$, temos: $6x = 2 \cdot 15 \Rightarrow x = 5$

Respostas: x = 5 e y = 9

6. Grandezas inversamente proporcionais (GIP)

Uma grandeza **A** é **inversamente proporcional** a uma grandeza **B** se, e somente se, **os produtos** entre valores de **A** e os correspondentes valores de **B** forem **constantes**. Se $A = (a_1, a_2, a_3, ...)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, ...)$ forem grandezas inversamente proporcionais, então:

$$a_1.b_1 = a_2.b_2 = a_3.b_3 = ... = k$$

A tabela de valores das grandezas **velocidade** (em quilômetros por hora) e **tempo** (em horas) da viagem de um trem, numa distância de 240 km, nos mostra que:

VELOCIDADE (km/h)	**40**	**80**	**120**	**...**
TEMPO (horas)	**6**	**3**	**2**	**...**

$40 \cdot 6 = 80 \cdot 3 = 120 \cdot 2 = 240$ e que, portanto, nesse exemplo, a **velocidade** e o **tempo** são **grandezas inversamente proporcionais** (GIP).

Exemplo

Sabendo que **(x, 3, 4)** e **(2, y, 6)** são sucessões inversamente proporcionais, determine **x** e **y**.

Resolução:

Se (**x, 3, 4**) e (**2, y, 6**) são GIP, então:

$2x = 3y = 24$

De $2x = 24$ temos $x = 12$

De $3y = 24$ temos $y = 8$

Respostas: x = 12 e y = 8

Observação

Se a grandeza $A = (a_1, a_2, a_3, ...)$ for inversamente proporcional à grandeza $B = (b_1, b_2, b_3, ...)$ então A será diretamente proporcional à grandeza $\left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, ...\right)$, ou seja:

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 \Leftrightarrow \frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}}$$

Saiba mais

Existem grandezas que não são nem diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais.

Por exemplo, a tabela de valores das grandezas lado de um quadrado (em cm) e área do quadrado (em cm^2) nos mostra que:

lado (cm)	**2**	**4**	**6**	**...**
área (cm^2)	**4**	**16**	**36**	**...**

$\frac{2}{4} \neq \frac{4}{16} \neq \frac{6}{36}$ e $2 \cdot 4 \neq 4 \cdot 16 \neq 6 \cdot 36$ e, portanto, as grandezas (medida do lado e área de um quadrado) não são nem diretamente nem inversamente proporcionais.

Exercícios Resolvidos

1 Um produto que custa R$ 18,00 para ser fabricado é vendido por R$ 27,00. Determinar a razão entre

a) o preço de venda e o de custo;

b) o lucro e o preço de venda.

Resolução

Sendo C o preço de custo, V o preço de venda e L o lucro, temos:

a) $\frac{V}{C} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

b) $\frac{L}{V} = \frac{V - C}{V} = \frac{27 - 18}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

Resposta: a) 1,5 b) $\frac{1}{3}$

2 Determinar **x** na proporção: $\frac{x-3}{6-x} = \frac{1}{2}$

Resolução

Supondo $x \neq 6$, temos:

$\frac{x-3}{6-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-3) = 1 \cdot (6-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 6 = 6 - x \Leftrightarrow 2x + x = 6 + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Resposta: x = 4

3 Se (3, x, 14,...) e (6, 8, y,...) forem grandezas diretamente proporcionais, então o valor de x + y é:

a) 20 b) 22 c) 24 d) 28 e) 32

Resolução

Se (3, x, 14,...) e (6, 8, y,...) forem grandezas diretamente proporcionais, então:

$\frac{3}{6} = \frac{x}{8} = \frac{14}{y}$

De $\frac{3}{6} = \frac{x}{8}$, temos: $x = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$

De $\frac{3}{6} = \frac{14}{y}$, temos: $y = \frac{6 \cdot 14}{3} = 28$

Assim sendo, x + y = 32

Resposta: E

4 Calcular **x** e **y** sabendo-se que (1, 2, x,...) e (12, y, 4,...) são grandezas inversamente proporcionais.

Resolução

Se (1, 2, x,...) e (12, y, 4,...) forem grandezas inversamente proporcionais, então:

$1 \cdot 12 = 2 \cdot y = x \cdot 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 12$ e $4x = 12 \Leftrightarrow y = 6$ e $x = 3$

Resposta: x = 3 e y = 6

Exercícios Propostos

1 Para que as sucessões (12, x, 5) e (y, 6, 15) sejam diretamente proporcionais, isto é, para que se verifiquem as igualdades $\frac{12}{y} = \frac{x}{6} = \frac{5}{15}$, os valores de **x** e **y** devem ser, respectivamente,

a) 2 e 36. b) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$. c) 2 e 5.

d) 5 e 35. e) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{12}{y} = \frac{x}{6} = \frac{5}{15} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = 36 \\ \frac{x}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

Resposta: A

2 Se (2, 3, x) e (8, y, 4) são duas sucessões de números diretamente proporcionais, então:

a) x = 1 e y = 6 b) x = 2 e y = 12
c) x = 1 e y = 12 d) x = 4 e y = 2
e) x = 2 e y = 9

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{y} = \frac{x}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 3 \,.\, 8 \Rightarrow y = 12 \\ 8x = 2 \,.\, 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Resposta: C

3 Se as sequências (a, 2, 5) e (3, 6, b) são de números inversamente proporcionais e **a + mb = 10**, então **m** é igual a:

a) 0,4 b) 1,0 c) 2,0 d) 2,5 e) 5,0

RESOLUÇÃO:

$a \,.\, 3 = 2 \,.\, 6 = 5 \,.\, b \Leftrightarrow a = 4$ e $b = \frac{12}{5}$

Logo: $4 + m \,.\, \frac{12}{5} = 10 \Leftrightarrow m = 2{,}5$

Resposta: D

4 Se **L** varia diretamente com **A** e L = 6 quando A = 21, determine **L** quando A = 28.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{6}{21} = \frac{L}{28} \Leftrightarrow L = 8$$

5 A variável **p** é inversamente proporcional a **q + 2**. Sabendo que p = 1 quando q = 4, quanto vale **p** quando q = 1?

a) – 2 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 3

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} p(1;\ p) \\ q + 2(4 + 2;\ 1 + 2) \end{array}\right\} \text{GIP}$$

$1 \,.\, (4 + 2) = p \,.\, (1 + 2) \Leftrightarrow p = 2$

Resposta: D

Módulo 50 — Divisão proporcional

Palavras-chave:
- Diretamente proporcionais
- Inversamente proporcionais

1. Divisão em partes diretamente proporcionais

Dividir um número **N** em partes (suponhamos: x, y e z) **diretamente proporcionais** aos números a, b e c significa determinar os números x, y e z, de tal modo que:

(I) As sequências (x, y, z) e (a, b, c) sejam diretamente proporcionais.

(II) x + y + z = N

Para isso, usando a definição de GDP e as propriedades das proporções, podemos usar a seguinte técnica operatória:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ x + y + z = N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \\ x + y + z = N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{N}{a+b+c} = \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{N}{a+b+c} = \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{N}{a+b+c} = \dfrac{z}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a \,.\, N}{a+b+c} \\ y = \dfrac{b \,.\, N}{a+b+c} \\ z = \dfrac{c \,.\, N}{a+b+c} \end{cases}$$

2. Divisão em partes inversamente proporcionais

Dividir um número **M** em partes **inversamente proporcionais** aos números m, n e p é o mesmo que dividir M em partes diretamente proporcionais aos inversos $\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{p}$ com $m \neq 0$, $n \neq 0$ e $p \neq 0$.

Nota

Quando dizemos: "A e B são grandezas proporcionais", subentende-se que são grandezas diretamente proporcionais.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M408**

Exercícios Resolvidos

1 Dividir o número 160 em três partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.

Resolução

Sendo x, y e z as partes, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + y + z = 160 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{10} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + y + z = 160 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{160}{10} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 32 \\ 16 = \dfrac{y}{3} \Rightarrow y = 48 \\ 16 = \dfrac{z}{5} \Rightarrow z = 80 \end{cases}$$

Resposta: As partes são: 32, 48, 80.

2 Dividir o número 81 em três partes inversamente proporcionais aos números $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ e 1.

Resolução

O problema equivale a dividir 81 em partes diretamente proporcionais aos inversos 2, $\dfrac{3}{2}$ e 1.

Assim, sendo x, y e z as partes, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = \dfrac{z}{1} \\ x + y + z = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{2 + \frac{3}{2} + 1} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = \dfrac{z}{1} \\ x + y + z = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{81}{\frac{9}{2}} = \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18 = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 36 \\ 18 = \dfrac{y}{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 27 \\ 18 = \dfrac{z}{1} \Rightarrow z = 18 \end{cases}$$

Resposta: As partes são: 36, 27 e 18.

3 Repartir uma herança de R$ 495 000,00 entre três pessoas na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada uma delas. Sabe-se que a 1ª pessoa tem 30 anos e 2 filhos, a 2ª pessoa tem 36 anos e 3 filhos e a 3ª pessoa, 48 anos e 6 filhos.

Resolução

Se x, y e z forem as quantias que cada uma das 3 pessoas deve receber, então:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2 \,.\, \frac{1}{30}} = \dfrac{y}{3 \,.\, \frac{1}{36}} = \dfrac{z}{6 \,.\, \frac{1}{48}} \\ x + y + z = 495\,000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{1}{15}} = \dfrac{y}{\frac{1}{12}} = \dfrac{z}{\frac{1}{8}} \\ x + y + z = 495\,000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y+z}{\frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}} = \dfrac{x}{\frac{1}{15}} = \dfrac{y}{\frac{1}{12}} = \dfrac{z}{\frac{1}{8}} \\ x + y + z = 495\,000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{495\,000}{\frac{33}{120}} = \frac{x}{\frac{1}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\,800\,000 = 15x = 12y = 8z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 120\,000,\ y = 150\,000,\ z = 225\,000$$

Resposta: A primeira pessoa deve receber R$ 120 000,00, a segunda, R$ 150 000,00 e a terceira, R$ 225 000,00.

Exercícios Propostos

1 Sabendo-se que x + y + z = 18 e que $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$, o valor de x é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

RESOLUÇÃO:

I) $x + y + z = 18$

II) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 4} = \frac{18}{9} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{18}{9} \Leftrightarrow x = 4$

Resposta: B

2 Dividindo-se 660 em partes inversamente proporcionais aos números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, obtém-se, respectivamente:

a) 330, 220 e 110
b) 120, 180 e 360
c) 360, 180 e 120
d) 110, 220 e 330
e) 200, 300 e 160

RESOLUÇÃO:

Dividir em partes inversamente proporcionais é o mesmo que dividir em partes diretamente proporcionais aos inversos.

I) $x + y + z = 660$

II) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 6} = \frac{660}{11} = 60 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 60 \\ \frac{y}{3} = 60 \\ \frac{z}{6} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 \\ y = 180 \\ z = 360 \end{cases}$$

Resposta: B

3 **(MODELO ENEM)** – Três engenheiros se associaram para construir um edifício. Investiram respectivamente 2, 3 e 5 milhões de reais. Se o lucro foi de 4 milhões, qual o ganho de cada um, em milhões, supondo que a divisão seja em partes proporcionais aos capitais investidos?

a) 1; 1; 2
b) 0,8; 1,4; 1,8
c) 0,8; 1,2; 2
d) 0,6; 1,2; 2,2
e) 0,6; 1,4; 2

RESOLUÇÃO:

I) x + y + z = 4 milhões

II) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 5} = \frac{4 \text{ milhões}}{10} = 400\,000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 400\,000 \Leftrightarrow x = 800\,000 = 0{,}8 \text{ milhão} \\ \frac{y}{3} = 400\,000 \Leftrightarrow y = 1\,200\,000 = 1{,}2 \text{ milhão} \\ \frac{z}{5} = 400\,000 \Leftrightarrow z = 2\,000\,000 = 2 \text{ milhões} \end{cases}$$

Resposta: C

4 **(MODELO ENEM)** – A importância de R$ 780 000,00 deve ser dividida entre os três primeiros colocados de um concurso, em partes diretamente proporcionais aos pontos conseguidos por eles, que são 50, 43 e 37, respectivamente. Determinar a importância que caberá ao primeiro colocado.

a) 222 000
b) 258 000
c) 260 000
d) 300 000
e) 320 000

RESOLUÇÃO:

I) x + y + z = 780 mil

II) $\frac{x}{50} = \frac{y}{43} = \frac{z}{37} = \frac{x + y + z}{50 + 43 + 37} = \frac{780 \text{ mil}}{130} = 6 \text{ mil}$

III) $\frac{x}{50} = 6 \text{ mil} \Leftrightarrow x = 300 \text{ mil}$

Resposta: D

Módulo 51

Regra de três simples

Palavras-chave:
• Grandezas • Diretamente proporcionais • Inversamente proporcionais

1. Definição

Sendo **a** e **b** dois valores da grandeza **A** e, **c** e **d** os valores correspondentes da grandeza **B**, chama-se de regra de três simples ao processo prático para determinar um desses quatro valores, sendo conhecidos os outros três.

2. Técnica operatória

GRANDEZA A	GRANDEZA B
a	c
b	d

Se **A** e **B** forem grandezas diretamente proporcionais, então:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se **A** e **B** forem grandezas inversamente proporcionais, então:

$$ac = bd \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

Exercícios Resolvidos

1 A ração existente em um quartel de cavalaria é suficiente para alimentar **30** cavalos durante **30** dias. Quantos dias duraria a ração se existissem apenas **20** cavalos?

Resolução

Aplicando a técnica operatória da Regra de Três Simples, temos:

Número de cavalos	Número de dias
30	30
20	x

Como as duas grandezas são inversamente proporcionais, temos:

$$\frac{30}{20} = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = \frac{30\ .\ 30}{20} \Leftrightarrow x = 45$$

Resposta: A ração duraria 45 dias.

2 Calcular a altura de uma torre que projeta uma sombra de **28,80 m** no mesmo instante em que uma árvore de **4,2 m** de altura, plantada verticalmente, projeta uma sombra de **3,6 m**.

Resolução

Aplicando a técnica operatória da Regra de Três Simples, temos:

ALTURA	SOMBRA
x	28,80
4,2	3,6

Como a ALTURA e a SOMBRA são G.D.P., temos:

$$\frac{x}{4,2} = \frac{28,8}{3,6}$$, de onde vem:

$$x = \frac{4,2\ .\ 28,8}{3,6} \Rightarrow x = 33,6$$

Resposta: A altura da torre é 33,6 m.

3 **(MODELO ENEM)** – Uma máquina varredeira limpa uma área de 5 100 m^2 em 3 horas de trabalho. Nas mesmas condições, limpará uma área de 11 900 m^2 em

a) 9h. b) 7h. c) 6h. d) 5h. e) 4h.

Resolução

Área (m^2)	Tempo (h)
5 100	3
11 900	x

Como são grandezas diretamente proporcionais, temos:

$$\frac{5100}{11\,900} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{11\,900\ .\ 3}{5\,100} \Leftrightarrow x = 7$$

Resposta: B

4 **(MODELO ENEM)** – Duas rodas dentadas que estão engrenadas uma na outra tem, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quando a maior der 8 voltas, a menor dará

a) 12 voltas. b) 15 voltas. c) 22 voltas.
d) 36 voltas. e) 42 voltas.

Resolução

Voltas	Dentes
8	54
x	12

Como são grandezas inversamente proporcionais, temos:

$$\frac{8}{x} = \frac{12}{54} \Leftrightarrow x = \frac{54\ .\ 8}{12} \Leftrightarrow x = 36$$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 **(MODELO ENEM)** – Um avião bimotor com a velocidade de 450 km/h efetua a viagem entre São Paulo e Brasília em 2 horas. Em quanto tempo um avião a jato de velocidade igual a 1 200 km/h faria a mesma viagem?

a) 20 min b) 30 min c) 40 min
d) 45 min e) 1 h

RESOLUÇÃO:

Velocidade	Tempo
450 km/h	2 h
1200 km/h	x

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ G.I.P. $\Rightarrow \dfrac{450}{1200} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{450 \,.\, 2}{1200} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}75$ h $= 45$ min

Resposta: D

2 **(MODELO ENEM)** – Uma costureira pagou **R$ 960,00** por uma peça de tecido e **R$ 768,00** por outra de mesma qualidade. Qual é o comprimento da mais cara, sabendo-se que ela tem **12 m** a mais do que a segunda?

a) 70 m b) 60 m c) 50 m
d) 48 m e) 40 m

RESOLUÇÃO:

Tecido (m)	Preço (R$)
x	960
x – 12	768

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ G.D.P. $\Rightarrow \dfrac{x}{x-12} = \dfrac{960}{768} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 960x - 11\,520 = 768x \Leftrightarrow 192x = 11\,520 \Leftrightarrow x = 60$

Resposta: B

3 **(UNAERP – MODELO ENEM)** – Um carro faz o percurso entre duas cidades em 5 h. Se aumentar a velocidade em 20 km/h, ele reduz o tempo em 1 h. Então a distância entre as duas cidades é

a) 400 km. b) 80 km. c) 100 km. d) 500 km.
e) impossível determinar-se por falta de dados.

RESOLUÇÃO:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
V	5
V + 20	4

$\Rightarrow$ G.I.P. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{V+20}{V} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow V = 80$

A distância é: 80 km/h . 5 h = 400 km

Resposta: A

4 Se 14 pedreiros levam 180 dias para construir uma casa, quanto tempo levarão para construí-la 10 pedreiros?

RESOLUÇÃO:

Pedreiros	Dias
14	180
10	x

$\Rightarrow$ G.I.P. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{14}{10} = \dfrac{x}{180} \Rightarrow x = \dfrac{180 \,.\, 14}{10} \Rightarrow x = 252$ dias

5 **(UFRN – MODELO ENEM)** – Uma gravura de forma retangular, medindo 20 cm de largura por 35 cm de comprimento, deve ser ampliada para 1,2 m de largura. O comprimento correspondente será:

a) 0,685 m b) 1,35 m c) 2,1 m
d) 3,85 m e) 18 m

RESOLUÇÃO:

Largura	Comprimento
20 cm	35 cm
120 cm	x

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ G.D.P. $\Rightarrow \dfrac{20}{120} = \dfrac{35}{x} \Rightarrow x = \dfrac{120 \,.\, 35}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 210$ cm $= 2{,}1$ m

Resposta: C

Módulo 52

Regra de três composta

Palavras-chave:
• Grandezas • Diretamente proporcionais • Inversamente proporcionais

1. Definição

Chama-se **regra de três composta** ao método prático empregado para resolver problema análogo ao da regra de três simples, só que envolvendo **mais de duas grandezas proporcionais**.

2. Propriedade

Considere uma grandeza $A(a_1, a_2, \ldots)$ diretamente proporcional a uma grandeza $B(b_1, b_2, \ldots)$ e a uma grandeza $C(c_1, c_2, \ldots)$, então:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}$$

3. Técnica operatória

Tomemos o seguinte exemplo: Com 16 máquinas de costura aprontaram-se 720 uniformes em 3 dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar 2 160 uniformes em 24 dias.

Grandezas	Nº de máquinas	Nº de uniformes	Nº de dias
Valores	16	720	3
	x	2160	24

A grandeza **nº de máquinas**, onde está a incógnita, deve ser comparada com as grandezas **nº de uniformes** e **nº de dias**. Assim:

a) **nº de máquinas** e **nº de uniformes** são grandezas **diretamente** proporcionais, pois, para o **mesmo número de dias**, quanto **maior** o número de máquinas **maior** será o número de uniformes;

b) **nº de máquinas** e **nº de dias** são grandezas **inversamente** proporcionais pois, para o **mesmo número de uniformes**, quanto **maior** o número de máquinas **menor** será o número de dias gastos.

Assim:

$$\frac{16}{x} = \frac{720}{2160} \cdot \frac{24}{3} \Leftrightarrow x = 6 \text{ máquinas}$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (www.portal.objetivo.br) e, em "localizar", digite **MAT1M409**

Exercícios Resolvidos

1 Se 25 operários trabalhando 10 horas por dia abriram um canal de 238 metros de comprimento em 17 dias, quantos operários serão necessários para abrir 686 metros do mesmo canal em 25 dias de 7 horas de trabalho?

Resolução

Pela técnica operatória da regra de três composta, temos:

Número de operários	Número de horas por dia	Comprimento	Número de dias
25	10	238	17
x	7	686	25

Comparando a grandeza número de operários com as demais, temos:

Número de operários e número de horas são **GIP**.

Número de operários e comprimento são **GDP**.

Número de operários e número de dias são **GIP**.

Assim sendo:

$$\frac{25}{x} = \frac{7}{10} \cdot \frac{238}{686} \cdot \frac{25}{17} \Leftrightarrow \frac{25}{x} = \frac{7 \,.\, 238 \,.\, 25}{10 \,.\, 686 \,.\, 17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \,.\, 686 \,.\, 17 \,.\, 25}{7 \,.\, 238 \,.\, 25} \Leftrightarrow x = 70$$

Resposta: Serão necessários 70 operários.

2 **(MODELO ENEM)** – Com 36 kg de fio foram tecidos 126 m de pano com 0,6 m de largura. Quantos metros de pano com 0,72 m de largura se podem tecer com 48 kg do mesmo fio?

a) 120 b) 130 c) 135 d) 140 e) 150

Resolução

Comprimento (m)	Largura (m)	Massa (kg)
126	0,6	36
x	0,72	48

As grandezas comprimento e largura são GIP.

As grandezas comprimento e massa são GDP.

$$\text{Logo: } \frac{126}{x} = \frac{0{,}72}{0{,}6} \cdot \frac{36}{48} \Leftrightarrow x = \frac{126 \,.\, 0{,}6 \,.\, 48}{0{,}72 \,.\, 36} = 140$$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 **(SENAI – MODELO ENEM)** – Numa malharia, 3 máquinas, trabalhando 8 horas por dia, produzem 510 camisetas. Nas mesmas condições, quantas camisetas são produzidas por 4 máquinas trabalhando 10 horas por dia?

a) 360 b) 420 c) 640 d) 850 e) 935

RESOLUÇÃO:

Produção	Máquinas	Horas
510	3	8
x	4	10
	(D)	(D)

$$\frac{510}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{10} \Leftrightarrow x = \frac{510 \cdot 4 \cdot 10}{3 \cdot 8} = 850$$

Resposta: D

2 **(UNIFOA – MODELO ENEM)** – Para combater um incêndio em uma mata, 40 homens trabalhando 6 horas por dia, durante 10 dias, conseguem abrir um aceiro com 1,5 km de comprimento, 3,0 m de largura e 0,20 m de profundidade. Se o aceiro necessário para que se tenha êxito em tal empreitada for de 2,0 km de comprimento, 2,5 m de largura, 0,15 m de profundidade, e se tal serviço tivesse que ser feito em apenas 4 dias, quantos homens seriam necessários para trabalhar 10 horas por dia?

Obs.: Aceiro: Desbaste de terreno para evitar propagação de incêndios ou queimadas.

a) 30 b) 40 c) 50 d) 60 e) 70

RESOLUCÃO:

Homens	Horas	Dias	Comprim.	Larg.	Prof.
40	6	10	1,5	3,0	0,20
x	10	4	2,0	2,5	0,15
	(I)	(I)	(D)	(D)	(D)

$$\frac{40}{x} = \frac{10}{6} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1,5}{2,0} \cdot \frac{3,0}{2,5} \cdot \frac{0,20}{0,15} \Leftrightarrow x = 50$$

Resposta: C

3 **(MODELO ENEM)** – Um certo trabalho pode ser realizado por um grupo de 12 operários em 20 dias de trabalho de 8 horas diárias. Se esse mesmo trabalho tivesse que ser feito em apenas 16 dias, com 16 operários igualmente eficientes, quantas horas por dia eles deveriam trabalhar?

a) 5 h b) 6 h c) 7,5 h d) 8 h e) 8,5 h

RESOLUÇÃO:

Horas/Dia	Operários	Dias
8	12	20
x	16	16
	(I)	(I)

$$\frac{8}{x} = \frac{16}{12} \cdot \frac{16}{20} \Rightarrow x = 7,5 \text{ h/dia}$$

Resposta: C

4 **(MODELO ENEM)** – Se 54 jardineiros, trabalhando 5 horas por dia, levaram 45 dias para arborizar um parque de forma retangular de 2,25 km de comprimento por 1,50 km de largura, quantos jardineiros serão necessários para arborizar em 18 dias, trabalhando 12 horas por dia, outro parque retangular de 1,95 km de comprimento por 1,20 km de largura?

a) 25 b) 29 c) 35 d) 38 e) 39

RESOLUCÃO:

Jardineiros	Horas	Dias	Comprim.	Larg.
54	5	45	2,25	1,50
x	12	18	1,95	1,20
	(I)	(I)	(D)	(D)

$$\frac{54}{x} = \frac{12}{5} \cdot \frac{18}{45} \cdot \frac{225}{195} \cdot \frac{15}{12} \Leftrightarrow x = 39$$

Resposta: E

Módulo 53

Porcentagem

Palavra-chave:

• Divisão por 100

1. Noção intuitiva

Porcentagem é uma fração de denominador 100. Assim, ao escrevermos p%, estamos representando o número $\frac{p}{100}$.

$$p\% = \frac{p}{100}$$

2. Exemplos

a) $(30\%)^2 = 9\%$, pois

$$(30\%)^2 = \left(\frac{30}{100}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} = 9\%$$

b) $\sqrt{25\%} = 50\%$, pois

$$\sqrt{25\%} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

c) 25% de 400 é igual a 100, pois

$$25\% \,.\, 400 = \frac{25}{100} \,.\, 400 = 100$$

d) 32 é 80% de 40, pois

$$80\% \text{ de } 40 = \frac{80}{100} \,.\, 40 = 32$$

e) 40 é 125% de 32, pois

$$125\% \text{ de } 32 = \frac{125}{100} \,.\, 32 = 40$$

Exercícios Resolvidos

1 Os números 8%, $(7\%)^2$, $\sqrt{4\%}$ e 30% de 4,2 são, respectivamente, iguais a:

a) 0,08; 49%; 2%; 126

b) 0,08; 49; 20%; 126

c) 0,08; 0,49%; 20%; 1,26

d) 0,8; 0,49%; 20%; 12,6

e) 0,8; 0,49%; 20%; 1,26

Resolução

$$8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$(7\%)^2 = \left(\frac{7}{100}\right)^2 = \frac{49}{10000} = \frac{0{,}49}{100} = 0{,}49\%$$

$$\sqrt{4\%} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$30\% \text{ de } 4{,}2 = \frac{30}{100} \,.\, 4{,}2 = 1{,}26$$

Resposta: C

2 Numa cidade de 50 000 habitantes, 42 000 têm menos de 40 anos de idade. Qual a porcentagem dos que têm 40 anos ou mais?

Resolução

De acordo com o enunciado o número de habitantes que têm 40 anos ou mais é 50 000 – 42 000 = 8 000.

Se p% for a porcentagem dos habitantes que têm 40 anos ou mais, então:

$p\%$ de $50\,000 = 8\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\% \,.\, 50\,000 = 8\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\% = \frac{8\,000}{50\,000} \Leftrightarrow p\% = \frac{16}{100} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\% = 16\%$

Resposta: 16%

Exercícios Propostos

1 $(20\%)^2$ é igual a:

a) 100% b) 4% c) 15% d) 10%

RESOLUÇÃO:

$$(20\%)^2 = \left(\frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}}\right)^2 = \frac{4}{100} = 4\%$$

Resposta: B

2 $\sqrt{49\%}$ é igual a:

a) 7% b) 13% c) 70% d) 50%

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{49\%} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 70\%$$

Resposta: C

3 30% de 90 é igual a:
a) 30 b) 27 c) 9 d) 0,30 e) 15

RESOLUÇÃO:

$30\% \,.\, 90 = \frac{30}{100} \,.\, 90 = 27$

Resposta: B

4 Qual o porcentual que 20 representa num total de 25?
a) 50% b) 60% c) 70% d) 80 % e) 90%

RESOLUÇÃO:

$x\% \text{ de } 25 \text{ é } 20 \Rightarrow \frac{x}{100} \,.\, 25 = 20 \Rightarrow x = \frac{100 \,.\, 20}{25} \Rightarrow x = 80$

Resposta: D

5 40% de 20% de 800 é igual a:
a) 0,064 b) 0,64 c) 6,4 d) 64 e) 640

RESOLUÇÃO:

$40\% \,.\, 20\% \,.\, 800 = \frac{40}{100} \,.\, \frac{20}{100} \,.\, 800 = 64$

Resposta: D

6 **(MODELO ENEM)** – Se o passe de um jogador for vendido por R$ 10 000 000,00, com quanto ficaria o clube, sabendo-se que o jogador deve receber 15% do valor do seu passe?
a) R$ 8 500 000,00 b) R$ 1 500 000,00
c) R$ 850 000,00 d) R$ 150 000,00
e) R$ 1 850 000,00

RESOLUÇÃO:
O clube deve receber 85% . 10 000 000 = 8 500 000
Resposta: A

7 Numa empresa, o gerente de vendas ganha uma comissão de 5% sobre as vendas e o vendedor recebe 30% da comissão do gerente. Numa venda de R$ 10 000,00, o vendedor receberá:
a) R$ 150,00 b) R$ 300,00 c) R$ 450,00
d) R$ 1 500,00 e) R$ 3 000,00

RESOLUÇÃO:

$30\% \,.\, 5\% \,.\, 10\,000 = \frac{30}{100} \,.\, \frac{5}{100} \,.\, 10\,000 = 150$

Resposta: A

Módulo 54 – Aumento e desconto

Palavras-chave:
- Acréscimo
- Redução

1. Aumento

a) **Aumentar** um valor **x** de **p%** equivale a **multiplicá-lo** por **(100 + p)%**, pois:

$$x + p\%\, x = x + \frac{p}{100}\, x = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x = \left(\frac{100 + p}{100}\right) x = (100 + p)\%\, x$$

b) **Aumentar** um valor **x** de **20%**, por exemplo, equivale a multiplicá-lo por **1,2**, pois

$$(100 + 20)\%x = 120\%x = \frac{120}{100}\, x = 1{,}2x$$

c) **Aumentar** um valor **x** de **70%** equivale a multiplicá-lo por **1,7**.

d) **Aumentar** um valor **x** de **200%** equivale a multiplicá-lo por **3**, pois

$$(100 + 200)\%x = 300\%x = 3x$$

2. Desconto

a) **Diminuir** um valor **x** de **p%** equivale a **multiplicá-lo** por **(100 – p)%**, pois:

$$x - p\%\, x = x - \frac{p}{100}\, x = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x = \left(\frac{100 - p}{100}\right) x = (100 - p)\%\, x$$

b) **Diminuir** um valor **x** de **20%**, por exemplo, equivale a multiplicá-lo por **0,8**, pois

$$(100 - 20)\%x = 80\%x = \frac{80}{100}\, x = 0{,}8x$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M410**

c) **Diminuir** um valor **x** de **40%** equivale a multiplicá-lo por **0,6**.

3. Aumentos e descontos sucessivos

a) Dois aumentos sucessivos de 10% equivalem a um único aumento de 21% (e não de 20%), pois:

$$110\% \,.\, (110\%x) = \frac{110}{100} \,.\, \frac{110}{100}\, x = $$
$$= \frac{121}{100}x = 121\%x = (100 + 21)\%x$$

b) Dois descontos sucessivos de 10% equivalem a um único desconto de 19% (e não de 20%), pois:

$$90\% \,.\, (90\%x) = \frac{90}{100} \,.\, \frac{90}{100}\, x = $$
$$= \frac{81}{100}x = 81\%x = (100 - 19)\%x$$

c) Um aumento de 10% seguido de um desconto de 10% equivalem a um único desconto de 1%, pois:

$$90\% \,.\, (110\%x) = \frac{90}{100} \,.\, \frac{110}{100}\, x = $$
$$= \frac{99}{100}x = (100 - 1)\%x$$

Exercícios Resolvidos

1 **(MODELO ENEM)** – Uma empregada doméstica tem salário mensal de R$ 700,00. Todo mês, sua patroa recolhe ao Instituto Nacional de Seguro Social (INSS) o percentual de 19,65% sobre o valor do seu salário. Esse percentual é dividido em duas parcelas. Uma delas é de 12%, que compete à patroa recolher, e a outra é descontada do salário da empregada. O salário líquido dessa empregada é

a) R$ 646,45, porque são descontados 7,65% do seu salário mensal.
b) R$ 616,00, porque a patroa paga 12% de INSS do seu salário mensal.
c) R$ 562,45, porque a patroa recolhe 19,65% do seu salário mensal.
d) R$ 560,00, porque são descontados cerca de 20% do seu salário mensal.
e) R$ 576,45, porque são descontados 17,65% do seu salário.

Resolução

O desconto que a empregada doméstica terá será de:

7,65% de R$ 700,00 =

= 0,0765 . R$ 700,00 = R$ 53,55

O salário líquido da empregada doméstica será R$ 700,00 – R$ 53,55 = R$ 646,45

Resposta: A

2 Uma certa mercadoria, que custava R$ 14,00, teve um aumento de 20% passando a custar

a) R$ 15,20 b) R$ 16,20 c) R$ 16,80
d) R$ 17,00 e) R$ 17,20

Resolução

R$ 14,00 . 1,2 = R$ 16,80

Resposta: C

3 **(MODELO ENEM)** – Em uma promoção numa revenda de carros, está sendo dado um desconto de 18% para pagamento à vista. Se um carro for anunciado por R$ 16 000,00, então, o preço para pagamento à vista desse carro será:

a) R$ 13 120,00 b) R$ 13 220,00
c) R$ 13 320,00 d) R$ 13 420,00
e) R$ 13 520,00

Resolução

O preço à vista será 82% de R$ 16 000,00

Assim: 0,82 . R$ 16 000,00 = R$ 13 120,00

Resposta: A

Exercícios Propostos

1 Um valor de 50, após um aumento de 15%, passa a ser:

a) 52,5 b) 55 c) 57,5 d) 60

RESOLUÇÃO:
1,15 . 50 = 57,5
Resposta: C

2 Um valor de 50, após um decréscimo de 15%, passa a ser:

a) 42,5 b) 45 c) 50 d) 43,5

RESOLUÇÃO:
0,85 . 50 = 42,5
Resposta: A

3 **(VUNESP – MODELO ENEM)** – O preço de uma mercadoria teve um aumento de 25% e, logo depois, um aumento de 20% sobre isso. Para encontrar o preço da mercadoria após os aumentos, basta multiplicar o preço inicial por:

a) 1,45 b) 0,45 c) 1,50 d) 0,50 e) 3,75

RESOLUÇÃO:
Preço inicial: x
Preço após o aumento de 25%: x . 1,25
Preço após o aumento de 20%: x . 1,25 . 1,20
Preço final: x . 1,25 . 1,20 = x . 1,50
Resposta: C

4 **(MODELO ENEM)** – Um operário gasta 30% do seu salário em aluguel. Se o aluguel aumentar 40% e o salário aumentar 20%, a quanto do novo salário corresponderá o novo aluguel?
a) 20% b) 28% c) 35% d) 38% e) 40%

RESOLUÇÃO:

	Salário	Aluguel
Valores iniciais	S	0,30S
Valores com aumentos	1,2S	1,4 . 0,3 . S

$$\begin{array}{l} 1{,}2S \text{ ——— } 100\% \\ 1{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot S \text{ ——— } P \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} P = \dfrac{0{,}42S}{1{,}2S} \cdot 100 \\ P = 35\% \end{array}$$

Resposta: C

5 **(MODELO ENEM)** – O valor de um objeto sofreu um desconto de 20%. Para voltar ao valor original, este objeto deverá sofrer um aumento de:
a) 15% b) 18% c) 20% d) 25% e) 28%

RESOLUÇÃO:
Sendo *x* o valor inicial do objeto e p o aumento que esse valor deverá sofrer, temos:

$$(1 + p) \cdot 0{,}8x = x \Leftrightarrow (1 + p) = \frac{1}{0{,}8} \Leftrightarrow 1 + p = 1{,}25$$

$p = 0{,}25 = 25\%$

Resposta: D

Módulo 55

Juros

Palavras-chave:
• Capital • Taxa • Montante

1. Juros simples

Denominamos **juros simples** aqueles que são calculados sempre a partir do **capital inicial**. Os juros simples são, portanto, diretamente proporcionais ao capital e ao tempo de aplicação.

Assim sendo, um capital **C** aplicado a uma taxa de **i%** ao mês durante **t** meses rende juros **j**, tais que:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

2. Juros compostos

Denominamos **juros compostos** aqueles que são calculados a partir do **montante**, que é a soma do capital inicial com os juros.

Um capital **C** aplicado a uma taxa de **i%** ao mês durante **t** meses rende juros compostos **j**, tais que:

$$j = \left[\left(\frac{100 + i}{100}\right)^t - 1\right] \cdot C$$

O montante, após os **t** meses de aplicação, a juros compostos, será:

$$M = \left(\frac{100 + i}{100}\right)^t \cdot C$$

3. Observações

a) Os juros usados na prática, principalmente no mercado financeiro, são os **juros compostos**.

b) A taxa **i** e o tempo **t** referem-se sempre à mesma unidade de tempo, qualquer que seja ela (dias, semanas, meses, anos, ...).

c) Para efeito de cálculo, o ano é considerado de 12 meses de 30 dias cada.

Exercícios Resolvidos

1 Um capital de R$ 1 000,00 é aplicado no mercado financeiro a uma taxa mensal fixa de 10% ao mês. Calcular os juros (simples e compostos) e o montante, mês a mês, durante os quatro primeiros meses.

Resolução

De acordo com as fórmulas apresentadas, os juros simples (j_s) e os juros compostos (j_c) valem:

$$j_s = \frac{1\,000 \cdot 10 \cdot t}{100} \Rightarrow j_s = 100t$$

$$j_c = \left[\left(\frac{100 + 10}{100}\right)^t - 1\right] \cdot 1\,000 \Rightarrow j_c = [(1,1)^t - 1] \cdot 1\,000$$

Fazendo-se t igual a 1, 2, 3 e 4, temos:

	Juros simples		Juros compostos	
	Juros	**Montante**	**Juros**	**Montante**
Inicialmente	0	1 000,00	0	1 000,00
Após 1 mês	100,00	1 100,00	100,00	1 100,00
Após 2 meses	200,00	1 200,00	210,00	1 210,00
Após 3 meses	300,00	1 300,00	331,00	1 331,00
Após 4 meses	400,00	1 400,00	464,10	1 464,10

2 Quais são os juros simples produzidos por um capital de R$ 7 200,00 empregado a 10% ao ano, durante 5 anos?

Resolução

Sabe-se que $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$. Logo: $j = \frac{7\,200 \cdot 10 \cdot 5}{100} \Rightarrow j = 3\,600$

Resposta: Os juros produzidos são de R$ 3 600,00.

3 A que taxa anual foi empregado o capital de R$ 108 000,00 que, em 130 dias, rendeu juros simples de R$ 3 900,00?

Resolução

Sabe-se que $j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$.

Logo, lembrando-se de que 130 dias $= \frac{130}{360}$ anos, temos:

$$3900 = \frac{108\,000 \cdot i \cdot \frac{130}{360}}{100} \Rightarrow i = \frac{3\,900 \cdot 100 \cdot 360}{108\,000 \cdot 130} \Rightarrow i = 10$$

Resposta: A taxa é de 10% ao ano.

4 **(MODELO ENEM)** – Uma pessoa toma emprestado de um banco a quantia de R$ 15 625,00 e o banco cobrará dela, a título de juros, 9,8% da dívida a cada mês. Sabendo que $15\,625 = 5^6$ e que $1,098^{32} \cong 20$, se essa pessoa pagar toda essa dívida após 16 anos, numa única parcela, o valor a ser pago será de

a) 1,2 milhão. b) 2,6 milhões. c) 1 bilhão.
d) 2 bilhões. e) 1 trilhão.

Resolução

1) O valor da dívida
após 1 mês será $5^6 \cdot 1,098$
após 2 meses será $5^6 \cdot (1,098)^2$
após 3 meses será $5^6 \cdot (1,098)^3$
⋮
após 16 . 12 = 192 meses será $5^6 \cdot (1,098)^{192}$

2) $5^6 \cdot (1,098)^{192} = 5^6 \cdot (1,098^{32})^6 = 5^6 \cdot 20^6 =$
$= 100^6 = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000 = 1$ trilhão

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Determine os juros simples produzidos por um capital de R$ 20 000,00 empregado à taxa de 10% ao ano em 4 anos.

RESOLUÇÃO:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} = \frac{20\,000 \cdot 10 \cdot 4}{100}$$

j = R$ 8 000,00

2 Determine o capital que, empregado à taxa fixa de 8,4% ao ano, rendeu em 7 meses R$ 490,00 de juros simples.

RESOLUÇÃO:

$$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100} \Leftrightarrow 490 = \frac{C \cdot 8,4 \cdot 7}{100 \cdot 12}$$

j = R$ 10 000,00

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em “localizar”, digite **MAT1M411**

3 **(MODELO ENEM)** – Um capital qualquer aplicado a juros simples, a uma taxa fixa de 4% ao mês, dobra de valor ao fim de

a) 17 meses. b) 24 meses. c) 25 meses.
d) 48 meses. e) 50 meses.

RESOLUÇÃO:

$j = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{100} \Leftrightarrow C = \dfrac{C \cdot 4 \cdot t}{100}$

t = 25 meses

Resposta: C

4 Um capital qualquer aplicado a juros compostos, a uma taxa fixa de 4% ao mês, dobra de valor ao fim de

a) 17 meses. b) 20 meses. c) 24 meses.
d) 25 meses. e) 40 meses.

Observação: supor $(1{,}04)^{17} = 2$

RESOLUÇÃO:

	montante
inicialmente	C
após 1 mês	1,04 . C
após 2 meses	$(1{,}04)^2 \cdot C$
após 3 meses	$(1{,}04)^3 \cdot C$
⋮	⋮
após n meses	$(1{,}04)^n \cdot C$

$(1{,}04)^n \cdot C = 2 \cdot C \Leftrightarrow n = 17$ **meses**

Resposta: A

5 **(MAUÁ – MODELO ENEM)** – Um investimento de R$ 200 000,00 foi aplicado da seguinte forma: parte a juros simples de 45% ao ano e parte a juros simples de 55% ao ano. Determinar o valor da parcela aplicada a 45%, sabendo-se que o capital todo rende anualmente R$ 98 000,00 de juros.

a) R$ 30 000,00 b) R$ 70 000,00
c) R$ 80 000,00 d) R$ 110 000,00
e) R$ 120 000,00

RESOLUÇÃO:

$j_1 + j_2 = 98\,000$

$\dfrac{C_1 \cdot 45 \cdot 1}{100} + \dfrac{(200\,000 - C_1) \cdot 55 \cdot 1}{100} = 98\,000$

$45 \cdot C_1 + 11\,000\,000 - 55 \cdot C_1 = 9\,800\,000$

$10 \cdot C_1 = 1\,200\,000$

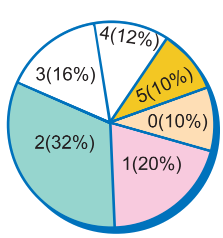
$C_1 = \text{R\$ } 120\,000{,}00 \Rightarrow C_2 = \text{R\$ } 80\,000{,}00$

Resposta: E

Módulo 56

Exercícios complementares

1 **(UNICAMP)** – O gráfico ao lado, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos **32 000** candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que **32%** desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.



Pergunta-se:

a) Quantos candidatos tiveram nota 3?
b) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi ≤ 2? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO:

a) O número de candidatos que tiveram nota 3 é

$16\% \cdot 32\,000 = \dfrac{16}{100} \cdot 32\,000 = 5\,120$

b) A nota média nessa questão é

$N = \dfrac{10 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 32 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 10 \cdot 5}{100} = 2{,}3$

Respostas: a) 5 120 b) Não, porque foi 2,3.

2 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Segundo um artigo da revista *Veja*, durante o ano de 1998, os brasileiros consumiram 261 milhões de litros de vinhos nacionais e 22 milhões de litros de vinhos importados. O artigo informou ainda que a procedência dos vinhos importados consumidos é dada pela seguinte tabela:

Itália → 23%	Alemanha → 13%	França → 16%
Portugal → 20%	Argentina → 6%	Chile → 16%
Outros → 6%		

O valor aproximado do total de vinhos importados da Itália e de Portugal, em relação ao total de vinhos consumido pelos brasileiros, em 1998, foi de:
a) 2,3% b) 3,3% c) 4,3% d) 5,3% e) 6,3%

RESOLUÇÃO:
1) O total de vinhos importados da Itália e de Portugal é de (23 + 20)% = 43% de 22 milhões de litros, ou seja, 43%. 22 milhões = 9,46 milhões de litros.
2) 9,46 milhões de litros representam, aproximadamente, 3,3% do total de (261 + 22) milhões de litros, pois

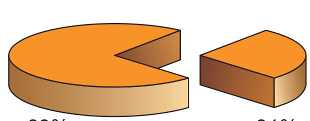
$$x\% \text{ de } 283 = 9{,}46 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 9{,}46}{283} = 3{,}34$$

Resposta: B

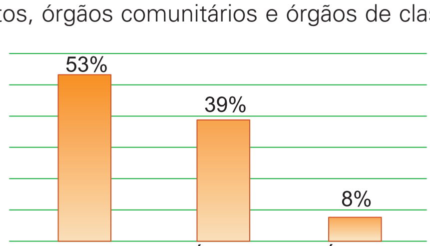
3 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Considere os seguintes dados, obtidos em 1996 pelo censo do IBGE:
i) A distribuição da população, por grupos de idade, é:

idade	número de pessoas
de 4 a 14 anos	37 049 723
de 15 a 17 anos	10 368 618
de 18 a 49 anos	73 644 508
50 anos ou mais	23 110 079

ii) As porcentagens de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas, ou não, a sindicatos, órgãos comunitários, órgãos de classe, são:



iii) As porcentagens de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a sindicatos, órgãos comunitários e órgãos de classe são:



A partir dos dados anteriores, pode-se afirmar que o número de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a órgãos comunitários é, aproximadamente, em milhões:
a) 2 b) 6 c) 12 d) 21 e) 31

RESOLUÇÃO:
1) O número de pessoas, maiores de 18 anos, é aproximadamente 97 milhões, pois totalizam 96 754 587 pessoas.
2) O número de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a órgãos comunitários é, aproximadamente, 12 milhões, pois são 39% dos 31% de filiados: 39% . 31% . 97 = 11,7
Resposta: C

4 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou por ela. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:
a) 40% b) 45% c) 50% d) 55% e) 60%

RESOLUÇÃO:
Seja *v*, o preço de venda e *c*, o preço de compra. Para desconto de 20% e lucro de 20%, tem-se: 80%v = 120%c ⇔ v = 150%c
Logo, se não fosse dado o desconto, o lucro seria de 50% sobre o preço de compra.
Resposta: C

5 **(VUNESP – MODELO ENEM-adaptado)** – Suponhamos que, para uma dada eleição, uma cidade tivesse 18 500 eleitores inscritos. Suponhamos ainda que, para essa eleição, no caso de se verificar um índice de abstenções de 6% entre os homens e de 9% entre as mulheres, o número de votantes do sexo masculino será exatamente igual ao de votantes do sexo feminino. O número de eleitores inscritos, do sexo masculino, é:
a) 9 100 b) 9 200 c) 9 400
d) 9 500 e) 10 200

RESOLUÇÃO:
Sendo *h* o número de homens e *m* o número de mulheres, temos, de acordo com o enunciado:

$$\begin{cases} h + m = 18\,500 \\ 94\%\,h = 91\%\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m = 18\,500 \\ 94\,h = 91\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 9\,100 \\ m = 9\,400 \end{cases}$$

Resposta: A