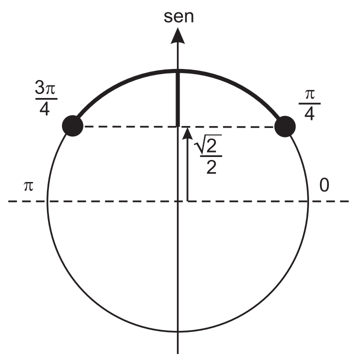
MATEMÁTICA

FRENTE 1
MÓDULO 33
INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

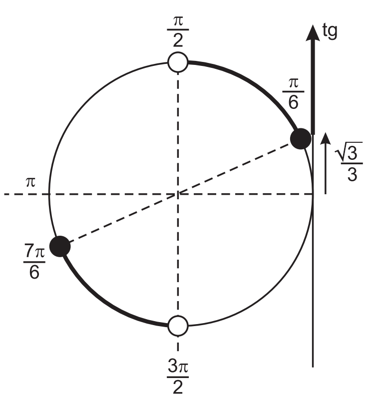
1) $\text{sen } x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

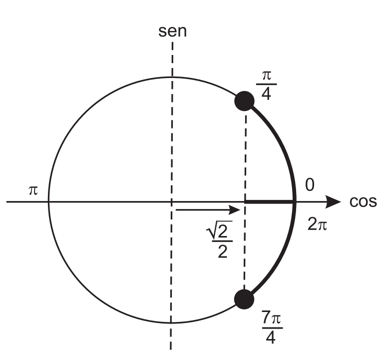
2) $\text{tg } x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

3) $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \right\}$$

4) I) $\begin{cases} \text{sen } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$$

II) $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow$

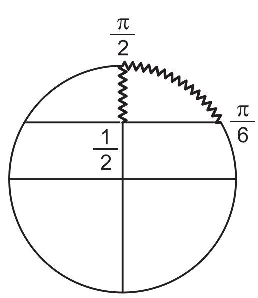
$$\Rightarrow V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi \right\}$$

III) $\begin{cases} \text{sen } x \geq \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow V = V_1 \cap V_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

5) sen α < 0 e cos α < 0 ⇒ α ∈ 3º quadrante
cos β < 0 e tg β < 0 ⇒ β ∈ 2º quadrante
sen γ > 0 e cotg γ > ⇒ γ ∈ 1º quadrante
Resposta: A

6)

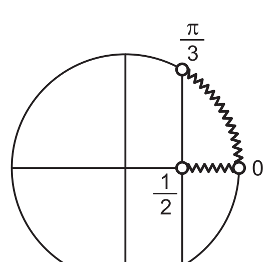


$\begin{cases} \text{sen } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Portanto, a solução é $\left[\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{2} \right]$

Resposta: D

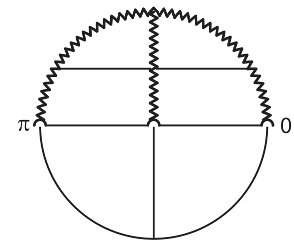
7)



$\begin{cases} \cos x > \dfrac{1}{2} \\ 0 < x < \pi \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: A

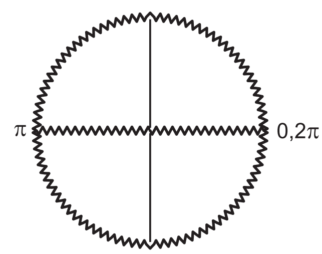
8) Como $tg^2x + 1 = sec^2x$, temos que
$tg^2x + 1 - sec^2x + \text{sen } x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow sec^2x - sec^2x + \text{sen } x > 0 \Leftrightarrow \text{sen } x > 0.$



$\begin{cases} \text{sen } x > 0 \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \pi$

Resposta: D

9) $(\text{sen } x + \cos x)^2 - 2 \text{ sen } x \cos x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \text{sen}^2x + \cos^2x + 2 \text{ sen } x \cos x -$
$- 2 \text{ sen } x \cos x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$



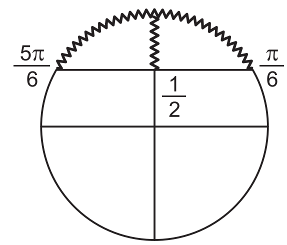
$\begin{cases} \cos x \geq -1 \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2\pi$

Respostas: E

10) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \text{ sen } x - 1 \geq 0\}$

$2 \text{ sen } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \text{ sen } x \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \geq \dfrac{1}{2}$



Logo, o domínio da função é

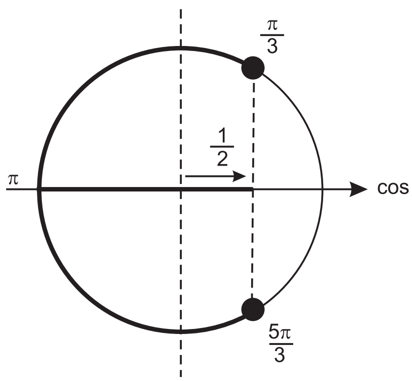
$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} + n\,2\pi \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6} +$

$+ n\,2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

Resposta: C

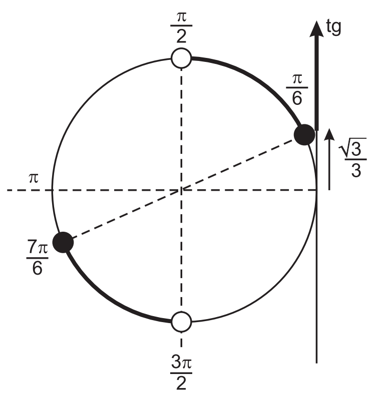
MÓDULO 34
INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1) $2\cos x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 2\cos x \le 1 \Leftrightarrow \cos x \le \dfrac{1}{2}$



$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + n \,.\, 2\pi \le x \le \frac{5\pi}{3} + n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

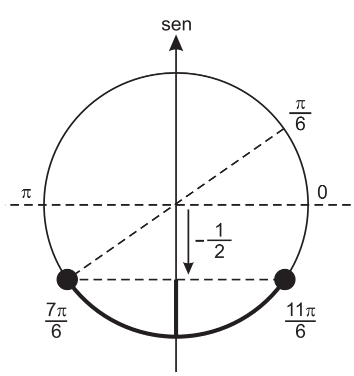
2) $\operatorname{tg} x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + n\pi \le x < \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) $2 \,.\, \text{sen}\,(2x) + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2 \,.\, \text{sen}\,(2x) \le -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,(2x) \le -\dfrac{1}{2}$



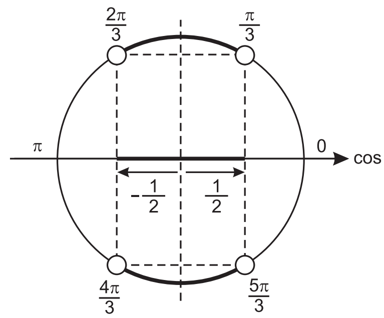
O arco destacado no ciclo trigonométrico corresponde aos possíveis valores de 2x, assim:

$$\frac{7\pi}{6} + n \,.\, 2\pi \le 2x \le \frac{11\pi}{6} + n \,.\, 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} + n \,.\, \pi \le x \le + \frac{11\pi}{12} + n \,.\, \pi$$

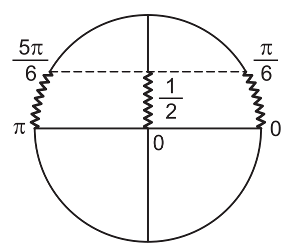
$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{12} + n\pi \le x \le \frac{11\pi}{12} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

4) $-\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{1}{2}$



$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

5)

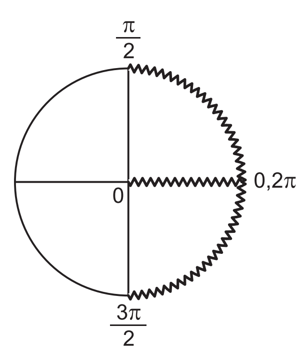


$$\begin{cases} 0 \le \text{sen}\, x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \le x \le \pi$$

Resposta: B

6)

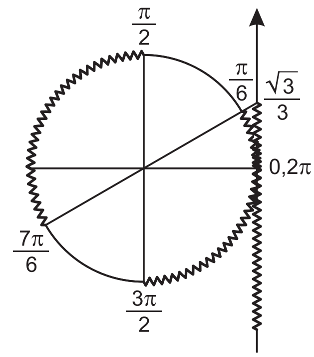


$$\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$$

Resposta: D

7) $3\operatorname{tg} x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \le \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \le \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ou } \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$$

Resposta: A

8) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - \sec x \,.\, \operatorname{cossec} x + \operatorname{tg} x \le 0 \Leftrightarrow$

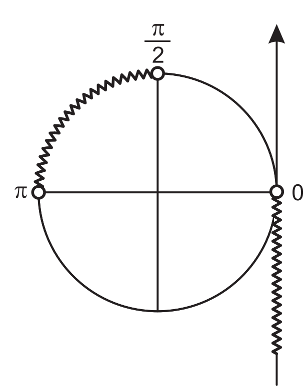
$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} - \frac{1}{\cos x} \,.\, \frac{1}{\text{sen}\, x} + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 + \text{sen}^2 x \le 0}{\text{sen}\, x \,.\, \cos x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 1 + \text{sen}^2 x \le 0}{\text{sen}\, x \,.\, \cos x} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x \,.\, \cos x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \le 0 \text{ e } \text{sen}\, x \ne 0 \text{ e } \cos x \ne 0 \Leftrightarrow$$

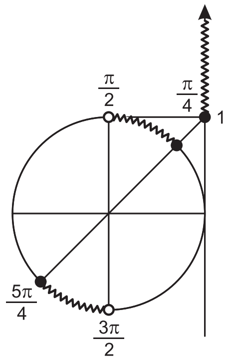
$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \le 0 \text{ e } \text{sen}\, x \ne 0 \text{ e } \cos x \ne 0$$



$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \le 0 \\ \text{sen}\, x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Resposta: B

9)



$\text{tg } x \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + n\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,$

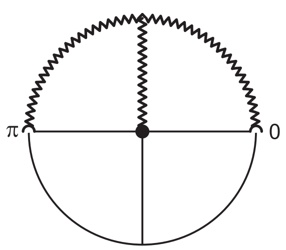
$n \in \mathbb{Z}$

Resposta:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} + n\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + n\pi,$

$n \in \mathbb{Z}\}$

10)

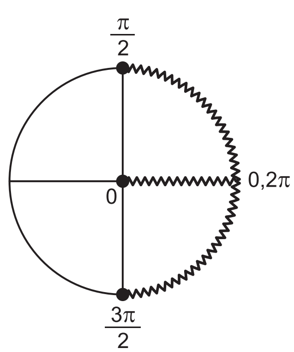


$\begin{cases} \text{sen } x \geq 0 \\ 0 < x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \pi$

Como $\pi \simeq 3{,}14$, concluimos que a maior solução inteira da inequação é o 3.

Resposta: C

11)



$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

Como $\pi \simeq 6{,}28$, concluimos que a maior solução inteira da inequação é o 6.

Resposta: A

MÓDULO 35
ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

1) $\text{sen } 105° = \text{sen } (60° + 45°)$

$\text{sen } 105° = \text{sen } 60° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 60°$

$\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

2) $\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$\cos 105° = \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45°$

$\cos 105° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

3) $\text{tg } 105° = \text{tg}(45° + 60°) =$

$= \dfrac{\text{tg } 45° + \text{tg } 60°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 60°} =$

$= \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} \cdot \dfrac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$

4) $(\text{sen } 10° + \cos 20°)^2 + (\text{sen } 20° + \cos 10°)^2 =$

$= \text{sen}^2\, 10° + 2 \cdot \text{sen } 10° \cdot \cos 20° +$

$+ \cos^2 20° + \text{sen}^2\, 20° + 2 \cdot \text{sen } 20° \cdot \cos 10° +$

$+ \cos^2 10° = 1 + 2 \cdot \text{sen } 10° \cdot \cos 20° + 1 +$

$+ 2 \cdot \text{sen } 20° \cdot \cos 10° =$

$= 2 + 2 \cdot (\text{sen } 10° \cdot \cos 20° + \text{sen } 20° \cdot \cos 10°) =$

$= 2 + 2 \cdot \text{sen } 30° = 2 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

Resposta: E

5) I) $\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x +$

$+ \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos y = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos y = 1$

II) $\begin{cases} \text{sen } x \cdot \cos y = 1 \\ \text{sen } x + \cos y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$

Para $\{x;y\} \subset [0;2\pi[$, temos $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $y = 0$.

6) $\text{sen } 75° = \text{sen}(45° + 30°) =$

$= \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Resposta: E

7) $\begin{cases} \text{tg } (x + y) = 33 \\ \text{tg } x = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } y} = 33 \\ \text{tg } x = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3 + \text{tg } y}{1 - 3 \text{ tg } y} = 33 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 + \text{tg } y = 33 - 99 \text{ tg } y \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg } y + 99 \text{ tg } y = 33 - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 \text{ tg } y = 30 \Rightarrow \text{tg } y = 0{,}3$

Resposta: B

8) I) $\text{sen } 105° = \text{sen}(60° + 45°) =$

$= \text{sen } 60° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 60° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

II) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

De I e II concluimos que

$y = \text{sen } 105° - \cos 75° =$

$= \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9) Como $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b} = \text{tg } (a - b),$

para $a = x + y$ e $b = y$ obtém-se

$\dfrac{\text{tg}(x + y) - \text{tg } y}{1 + \text{tg}(x + y) \cdot \text{tg } y} = \text{tg}(x + y - y) = \text{tg } x$

Resposta: tg x

10) I) $\begin{cases} \text{sen } y = \dfrac{3}{5} \\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } y = \dfrac{3}{5} \\ \cos y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

II) $x + y = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} - y \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \dfrac{\pi}{4} \,.\, \cos y - \text{sen } y \,.\, \cos \dfrac{\pi}{4}$

De (I) e (II) é possível concluir que

$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

11) Na equação $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen } x + \dfrac{1}{2} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

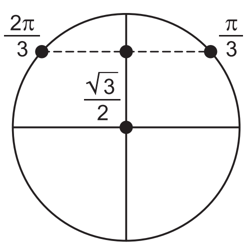
substituindo $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ por $\cos \dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{1}{2}$ por

$\text{sen } \dfrac{\pi}{6}$

resulta:

$\cos \dfrac{\pi}{6} \,.\, \text{sen } x + \text{sen } \dfrac{\pi}{6} \,.\, \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Temos, então, que

$x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + n2\pi$ ou $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3} + n2\pi$,

$n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi$

ou $x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi$ ou

$x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

12) $1455^\circ \;\big\lfloor\, 360^\circ$; resto 15°, quociente 4 $\Rightarrow 1455^\circ \equiv 15^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 1455^\circ = \text{sen } 15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) =$

$= \text{sen } 45^\circ \,.\, \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ . \cos 45^\circ =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Resposta: C

MÓDULO 36
ARCO DUPLO

1) $\cos(2x) = \cos^2x - \text{sen}^2x =$

$= 1 - \text{sen}^2x - \text{sen}^2x = 1 - 2 \,.\, \text{sen}^2x =$

$= 1 - 2 \,.\, \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{1}{9}$

2) I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2x = 1 - \text{sen}^2x =$

$= 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{15}{16}} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

pois x é um arco do primeiro quadrante.

II) $\text{sen}(2x) = 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x =$

$= 2 \,.\, \dfrac{1}{4} \,.\, \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

3) I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow \cos^2x = 1 - \text{sen}^2x =$

$= 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{3}{5}$, pois x é um arco de segundo quadrante.

II) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{4}{5}}{-\dfrac{3}{5}} =$

$= -\dfrac{4}{5} \,.\, \dfrac{5}{3} = -\dfrac{4}{3}$

III) $\text{tg}(2x) = \dfrac{2 \,.\, \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2x} =$

$= \dfrac{2 \,.\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{-\dfrac{8}{3}}{-\dfrac{7}{9}} =$

$= \dfrac{8}{3} \,.\, \dfrac{9}{7} = \dfrac{24}{7}$

4) $\text{sen } x + \cos x = \dfrac{1}{3}$

$(\text{sen } x + \cos x)^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2x + 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x + \cos^2x = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \text{sen}(2x) = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \dfrac{1}{9} - 1 = -\dfrac{8}{9}$

5) $\dfrac{1}{\text{tg } x} - \dfrac{2}{\text{tg }(2x)} =$

$= \dfrac{1}{\text{tg } x} - \dfrac{2}{\dfrac{2 \,.\, \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2x}} =$

$= \dfrac{1}{\text{tg } x} - 2 \,.\, \dfrac{1 - \text{tg}^2x}{2 \,.\, \text{tg } x} =$

$= \dfrac{1}{\text{tg } x} - \dfrac{1 - \text{tg}^2x}{\text{tg } x} = \dfrac{1 - 1 + \text{tg}^2x}{\text{tg } x} =$

$= \dfrac{\text{tg}^2x}{\text{tg } x} = \text{tg } x$

Resposta: B

6) $\text{sen } a - \cos a = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\text{sen } a - \cos a)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2a - 2\text{sen } a \cos a + \cos^2a = \dfrac{1}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \text{sen }(2a) = \dfrac{1}{25} \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{25} = \text{sen }(2a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen }(2a) = \dfrac{24}{25}$

Resposta: B

7) $y = (\text{sen } 22°30' + \cos 22°30')^2 =$

$= (\text{sen } 22°30')^2 + (\cos 22°30')^2 +$

$+ 2(\text{sen } 22^\circ30') . (\cos 22^\circ30') =$

$= 1 + \text{sen}[2. (22^\circ30')] = 1 + \text{sen } 45^\circ =$

$= 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

Resposta: $y = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

8) $2 \text{ sen } x \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + n \,.\, 2\pi$ ou $2x = \dfrac{2\pi}{3} + n \,.\, 2\pi$,

$n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$

Como $x \in [\,0, \pi\,]$, concluimos que

$x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$

Portanto,

$\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi + 2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: D

9) $\text{sen } x = \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen } x \,.\, \cos x = 1$ e $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = 2$ e $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen }(2x) = 2$

A solução da equação proposta é $V = \varnothing$, pois $-1 \leq \text{sen }(2x) \leq 1$

Resposta: E

10) $y = 3 + \text{sen } x \cdot \cos x = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ sen } x \cos x =$

$= 3 + \frac{1}{2} \text{ sen } (2x)$

Para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ou $0 \le 2x \le \pi$ temos

$0 \le \text{sen } (2x) \le 1 \Rightarrow \frac{0}{2} \le \frac{1}{2} \text{ sen } (2x) \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + 3 \le 3 + \frac{1}{2} \text{ sen } (2x) \le \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \le y \le \frac{7}{2}$

O maior valor que y pode assumir é, portanto, igual a $\frac{7}{2}$.

Resposta: D

11) $\cos (2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x =$

$= 1 - 2 \text{ sen}^2 x = 1 - 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

$= 1 - 2.\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Resposta: C

12) $\cos (2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 \text{ sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = 2 \text{ sen}^2 x \Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{1}{2}$

Para $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Resposta: D

13) $y = \text{sen } a \cos^3 a + \text{sen}^3 a \cos a =$

$= \text{sen } a \cos a \, (\cos^2 a + \text{sen}^2 a) =$

$= \text{sen } a. \cos a \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ sen } a \cos a =$

$= \frac{1}{2} \text{sen}(2a).$

Resposta: C

MÓDULO 37
LEI DOS SENOS

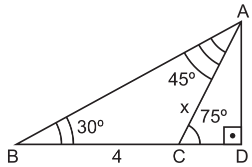
1) Pela lei dos senos, no ΔABC:

$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{5}{\text{sen } 45°} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

2)



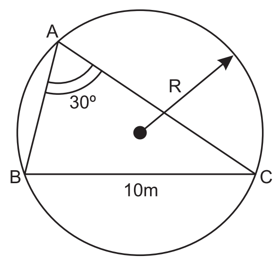
Pela lei dos senos no ΔABC:

$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{4}{\text{sen } 45°} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

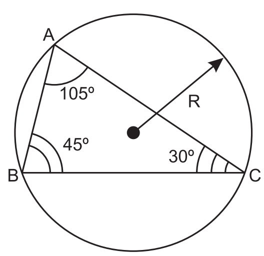
3)



Pela lei dos senos:

$\frac{10}{\text{sen } 30°} = 2R \Leftrightarrow \frac{10}{\frac{1}{2}} = 2R \Leftrightarrow R = 10$ m

4)



Pela lei dos senos no ΔABC:

$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = \frac{AC}{\text{sen } 45°} = \frac{BC}{\text{sen } 105°} = 2 \cdot R$

$\frac{AB}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 50 \Leftrightarrow AB = 50$ m

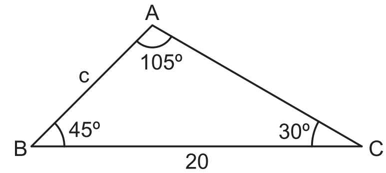
$\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \cdot 50 \Leftrightarrow AC = 50\sqrt{2}$ m

$\frac{BC}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 2 \cdot 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC = 25(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m

Assim, as distâncias que separam essas pessoas são 50 m, $50\sqrt{2}$ m e $25(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ m.

5)



Observe que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

Se $\hat{B} = 45º$ e $\hat{C} = 30º$, então $\hat{A} = 105º$

Pela lei dos senos obtém-se

$\frac{20}{\text{sen } 105º} = \frac{C}{\text{sen } 30º} \Rightarrow$

$\frac{20}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{C}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2c = \frac{80}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \Rightarrow c = \frac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

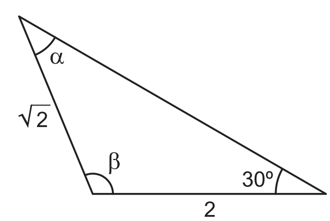
Resposta: C

Note que $\text{sen } 105º = \text{sen } (60º + 45º) =$

$= \text{sen } 60º \cdot \cos 45º + \text{sen } 45º \cdot \cos 60º =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

6)



Pela lei dos senos resulta:

$\frac{2}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$

$\frac{2}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} \text{ sen } \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

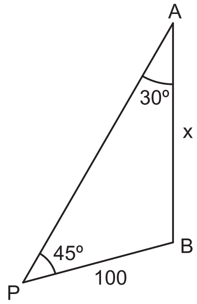
$\alpha = 45º$

$\begin{cases} \alpha + \beta + 30° = 180° \\ \alpha = 45° \end{cases}$

$\Rightarrow 45º + \betaº + 30º = 180º \Rightarrow \beta = 105º$

Resposta: D

7)



O comprimento x da ponte AB é tal que

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{100}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 100\sqrt{2}$$

Resposta: $100\sqrt{2}\,\text{m} \simeq 100 \,.\, 1{,}41\,\text{m} = 141\,\text{m}$

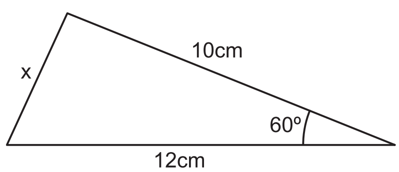
MÓDULO 38
LEI DOS COSSENOS

1) $x^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 6 \cos 60°$

$x^2 = 25 + 36 - 2 \,.\, 30 \,.\, \frac{1}{2}$

$x^2 = 31 \Rightarrow x = \sqrt{31}$

2)



$x^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, \cos 60°$

$x^2 = 100 + 144 - 2 \,.\, 120 \,.\, \frac{1}{2}$

$x^2 = 124 \Rightarrow x = 2\sqrt{31}$ cm

3) $(\sqrt{4})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 -$

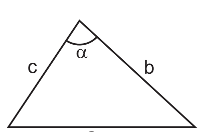
$- 2 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = 2 + 3 - 2 \,.\, \sqrt{6} \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} \,.\, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

4)



I) $3a = 7c \Leftrightarrow c = \frac{3a}{7}$

II) $3b = 8c \Leftrightarrow 3b = 8 \,.\, \frac{3a}{7} \Leftrightarrow b = \frac{8a}{7}$

III) Pela lei dos cossenos, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{8a}{7}\right)^2 + \left(\frac{3a}{7}\right)^2 -$

$- 2 \,.\, \frac{8a}{7} \,.\, \frac{3a}{7} \,.\, \cos \alpha \Leftrightarrow$

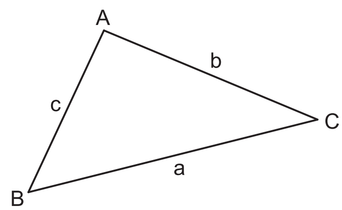
$\Leftrightarrow 49.a^2 = 64.a^2 + 9.a^2 - 48.a^2.\cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 48.a^2.\cos \alpha = 24.a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

Resposta: B

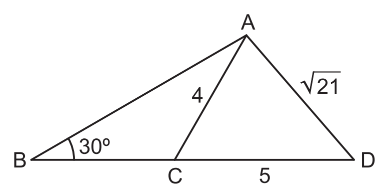
5)



Para calcular a medida **c** podemos nos valer de $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c$ (lei dos cossenos)

Resposta: C

6)

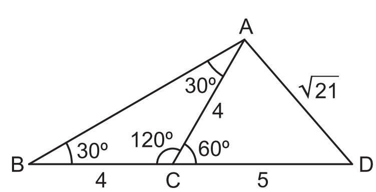


Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ACD obtém-se:

$(\sqrt{21})^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, \cos c \Rightarrow$

$\Rightarrow 21 = 25 + 16 - 40 \cos c \Rightarrow$

$\Rightarrow 40 \cos c = 20 \Rightarrow \cos c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 60º$



O triângulo ABC é isósceles, pois tem dois ângulos com medidas iguais a 30°. Os dois lados opostos a esses ângulos também têm medidas iguais e cada um mede 4.

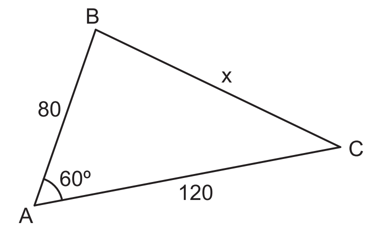
A área do triângulo ABC pode ser obtida fazendo-se $\frac{1}{2} \,.\, AC \,.\, BC \,.\, \text{sen } C$, isto é,

$\frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \text{ sen } 120° =$

$= \frac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Resposta: B

7)



A distância x, em km, entre B e C é tal que

$x^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \,.\, 120 \,.\, 80 \,.\, \cos 60º \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 14400 + 6400 - 2 \,.\, 9600 \,.\, \frac{1}{2} \Rightarrow$

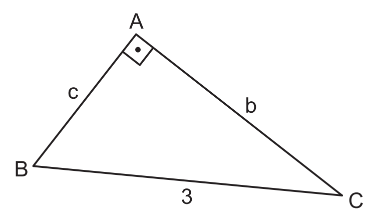
$\Rightarrow x^2 = 20800 - 9600 \Rightarrow x^2 = 11200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{11200} = 10\sqrt{112}$

$10 < \sqrt{112} < 11 \Rightarrow 100 < 10\sqrt{112} < 110$

Resposta: C

8)



$$\begin{cases} \dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \\ \text{sen } C = \dfrac{1}{2} \text{ sen } B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\frac{1}{2} \text{ sen } B} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = 2c$$

Como $b^2 + c^2 = 3^2$ (Pitágoras) temos

$(2c)^2 + c^2 = 9 \Rightarrow 4c^2 + c^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow$

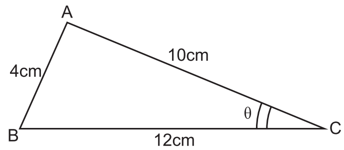
$\Rightarrow c = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Logo, $b = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Resposta: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ e $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

MÓDULO 39
RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

1)



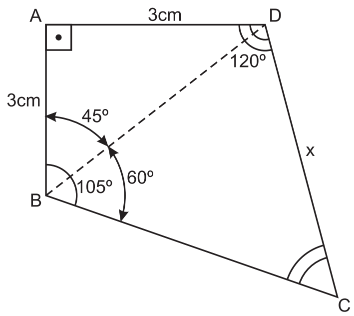
$4^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 = 100 + 144 - 240 \cdot \cos\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 240 \cdot \cos\theta = 228 \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{19}{20}$

Resposta: A

2)



I) O ΔABD é retângulo isósceles e, portanto:
$BD = 3\sqrt{2}$ cm e $A\hat{B}D = A\hat{D}B = 45°$

II) Pela lei dos senos, no ΔBCD:

$$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Resposta: D

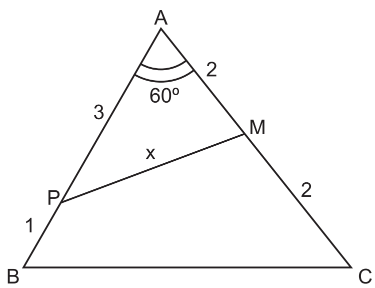
3) $\dfrac{BC}{\text{sen } 75°} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\text{sen } 45°} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$BC = \dfrac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm

Resposta: A

4)



Pela lei dos cossenos, no APM:

$x^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60°$

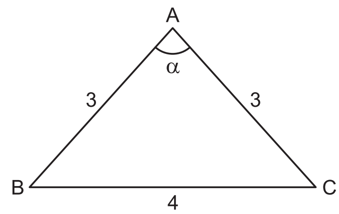
$x^2 = 9 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$

Logo, o perímetro do ΔAPM é:

$3 + 2 + \sqrt{7} = 5 + \sqrt{7}$

Resposta: D

5)

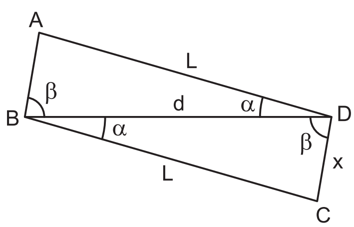


$4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 \cos\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{9}$

Resposta: $\cos\alpha = \dfrac{1}{9}$

6)



No triângulo BDC temos:

$$\frac{d}{\text{sen } C} = \frac{x}{\text{sen } \alpha}$$

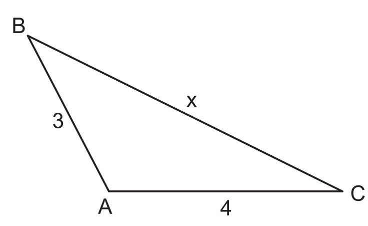
Mas, sen C = sen $(\alpha + \beta)$ ângulos suplementares. Então

$$\frac{d}{\text{sen }(\alpha+\beta)} = \frac{x}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{d \text{ sen } \alpha}{\text{sen }(\alpha+\beta)}$$

Resposta: B

7)



Seja BC = x

$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 16 - 24 \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 25 - 24 \cos\alpha$

Se α é obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então $-1 < \cos\alpha < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24 > -24 \cos\alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < -24 \cos\alpha < 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 < x^2 < 25 + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 < x < 7$

Resposta: D

MÓDULO 40
SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1) Se a sequência $a_n = 3n + 2$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então:
Para n = 1, temos $a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$
Para n = 2, temos $a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$
Para n = 3, temos $a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$
Para n = 4, temos $a_4 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$
Resposta: (5, 8, 11, 14, ...)

2) Se a sequência (a_n) for definida por $a_n = n^2 - n$, então:
Para n = 1, temos $a_1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$
Para n = 8, temos $a_8 = 8^2 - 8 = 64 - 8 = 56$
Para n = 10, temos $a_{10} = 10^2 - 10 = 100 - 10 = 90$
Para n = 20, temos $a_{20} = 20^2 - 20 = 400 - 20 = 380$
$a_1 = 0$; $a_8 = 56$; $a_{10} = 90$; $a_{20} = 380$

3) a) A sequência (2,5,8,12, ...) não é P.A., pois $5 - 2 = 8 - 5 = 3$ e $12 - 8 \neq 3$.
b) A sequência (16, 11, 6, 1, ...) é uma P.A. de razão – 5 e, portanto, estritamente decrescente, pois $11 - 16 = 6 - 11 = 1 - 6 = ... = -5$
c) A sequência (– 7, – 3, 1, 5, ...) é uma P.A. de razão 4 e, portanto, estritamente crescente, pois $(-3) - (-7) = 1 - (-3) = 5 - 1 = ... = 4$.
d) A sequência (6, 6, 6, 6, ...) é uma P.A. de razão 0 e, portanto, constante, pois $6 - 6 = 6 - 6 = 6 - 6 = 0$.

4) Se (a_n) é uma sequência definida por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então:
$a_1 = 2$
$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$
$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 = 2 \cdot 17 + 3 = 37$
$a_5 = 2 \cdot a_4 + 3 = 2 \cdot 37 + 3 = 77$

5) Se a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ for tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então:
$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$
$a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 4 = 7$
$a_5 = a_3 + a_4 = 4 + 7 = 11$
Assim sendo: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 3 + 4 + 7 + 11 = 26$
Resposta: D

6) I) 3, 7, 11, ...

$3,\ 3 + 4,\ 3 + 4 + 4,\ 3 + 4 + 4 + 4 = 15$

II) 2, 6, 18, ...

$2,\ 2 \,.\, 3,\ 2 \,.\, 3 \,.\, 3,\ 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 54$

III) 2, 5, 10, 17, ...

$2, 2 + 3, 2 + 3 + 5, 2 + 3 + 5 + 7, 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 26$

Resposta: 15, 54 e 26 (C)

7) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad a_6 + a_7 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} =$

$a_2 = \dfrac{1}{3}$ $\qquad = \dfrac{8 + 7}{56} = \dfrac{15}{56}$

$a_3 = \dfrac{1}{4}$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{1}{n + 1}$

Resposta: D

8) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2 \,.\, a_n \end{cases}$

$a_2 = 2 \,.\, a_1 = 2 \,.\, 3 = 6$

$a_3 = 2 \,.\, a_2 = 2 \,.\, 6 = 12$

$a_4 = 2 \,.\, a_3 = 2 \,.\, 12 = 24$

Portanto, $a_4 - a_3 = 24 - 12 = 12$

Resposta: B

9) $a_n = 4n + 5\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{10} = 4 \,.\, 10 + 5 = 45$

Resposta: D

10) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2 \,.\, a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$a_2 = 2 \,.\, a_1 + 1 = 2 \,.\, 2 + 1 = 5$

$a_3 = 2 \,.\, a_2 + 1 = 2 \,.\, 5 + 1 = 11$

$a_4 = 2 \,.\, a_3 + 1 = 2 \,.\, 11 + 1 = 23$

Então, $a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 11 + 23 = 39$

Resposta: C

11) $a_n = n^2 - 7n\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow a_8 = 8^2 - 7 \,.\, 8 = 64 - 56 = 8$

Resposta: C

MÓDULO 41
TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1) I) Na P.A.(1, 4, 7, 10, ...), temos $a_1 = 1$ e $r = 3$.

II) $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 1 + (20 - 1) \,.\, 3 =$

$= 1 + 57 = 58$

2) I) Na P.A.(3,9,15,...), temos $a_1 = 3$ e $r = 6$.

II) $a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{15} = 3 + (15 - 1) \,.\, 6 = 3 + 84 = 87$

Resposta: D

3) I) Na P.A., temos $a_1 = -6$ e $a_{36} = 4$

II) $a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{36} = a_1 + (36 - 1) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = -6 + 35 \,.\, r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35r = 10 \Leftrightarrow r = \dfrac{10}{35} = \dfrac{2}{7}$

4) I) Na P.A., temos $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$

II) $a_n = a_p + (n - p) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{17} = a_5 + (17 - 5) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 = 6 + 12 \,.\, r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24 = 12r \Leftrightarrow r = \dfrac{24}{12} = 2$

III) $a_n = a_p + (n - p) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_8 = a_5 + (8 - 5) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_8 = 6 + 3 \,.\, 2 = 6 + 6 = 12$

5) I) Na P.A., temos $a_4 = 12$ e $a_9 = 27$

II) $a_n = a_p + (n - p) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_9 = a_4 + (9 - 4) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 27 = 12 + 5 \,.\, r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \,.\, r = 15 \Leftrightarrow r = \dfrac{15}{5} = 3$

III) $a_5 = a_4 + r = 12 + 3 = 15$

6) I) Na P.A.(4,10,16,...,76,...), temos $a_1 = 4$, $r = 6$ e $a_n = 76$.

II) $a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 76 = 4 + (n - 1) \,.\, 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n - 1) \,.\, 6 = 72 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n - 1 = 12 \Leftrightarrow n = 13$

Resposta: C

7) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$a_{31} = a_1 + 30 \,.\, r = 2 + 30 \,.\, 3 = 92$

Resposta: C

8) $\begin{cases} a_7 = 7\sqrt{3} \\ r = 2\sqrt{3} \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$a_7 = a_1 + 6 \,.\, r$

$7\sqrt{3} = a_1 + 6 \,.\, 2\sqrt{3} \Rightarrow 7\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = a_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = -5\sqrt{3}$

Resposta: A

9) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 3 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$a_{45} = a_1 + 44 \,.\, r \Rightarrow a_{45} = 3 + 44 \,.\, 2 = 91$

Resposta: A

10) $\begin{cases} a_3 + a_7 = 28 \\ a_{10} = 29 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2r + a_1 + 6r = 28 \\ a_1 + 9r = 29 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 8r = 28 \\ a_1 + 9r = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4r = 14 \\ a_1 + 9r = 29 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 4r = -14 \\ a_1 + 9r = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5r = 15 \\ a_1 + 9r = 29 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3 \,.\, 3 = 11$

Resposta: B

11) $\begin{cases} a_7 + a_{12} = 52 \\ a_5 + a_{23} = 70 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6r + a_1 + 11r = 52 \\ a_1 + 4r + a_1 + 22r = 70 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 17r = 52 \\ 2a_1 + 26r = 70 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 17r = -52 \\ 2a_1 + 26r = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9 \\ r = 2 \end{cases}$

Resposta: D

12) $\begin{cases} a_1 = 0{,}5 \\ a_n = 45{,}5 \\ r = 1{,}5 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$45{,}5 = 0{,}5 + (n - 1) \,.\, 1{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45{,}5 = 0{,}5 + 1{,}5n - 1{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45{,}5 - 0{,}5 + 1{,}5 = 1{,}5n \Rightarrow 46{,}5 = 1{,}5n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{46{,}5}{1{,}5} \Rightarrow n = 31$

Resposta: B

13) $\begin{cases} a_7 = a_1 + 6r \\ a_7 = 12 \text{ e } r = 5 \end{cases} \Rightarrow 12 = a_1 + 6 \,.\, 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 12 - 30 \Rightarrow a_1 = -18$

Resposta: A

14) $\begin{cases} a_3 = 7 \\ a_{20} = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 7 \\ a_1 + 19r = -27 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 17r = -34 \Rightarrow r = -2$

Pode-se fazer $a_{20} = a_3 + 17r$, resultando $-27 = 7 + 17r \Rightarrow r = -2$

Resposta: D

15) $\begin{cases} a_{17} = 47 \\ r = 2,75 \\ a_{17} = a_1 + 16r \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 47 = a_1 + 16 \,.\, 2,75 \Rightarrow$
$\Rightarrow 47 = a_1 + 44 \Rightarrow a_1 = 3$

Resposta: E

MÓDULO 42
TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1) I) Na P .A., temos $a_7 = 10$ e $a_{15} = 26$

II) $a_{15} = a_7 + (15 - 7) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 26 = 10 + 8 \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \,.\, r = 16 \Rightarrow r = 2$

III) $a_{10} = a_7 + (10 - 7) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{10} = 10 + 3 \,.\, 2 \Rightarrow a_{10} = 16$

2) I) $\begin{cases} a_{10} + a_{25} = 470 \\ a_5 + a_{16} = 330 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 9r + a_1 + 24r = 470 \\ a_1 + 4r + a_1 + 15r = 330 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 33r = 470 \\ 2a_1 + 19r = 330 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 33r = 470 \\ 14r = 140 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 33r = 470 \\ r = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 33.10 = 470 \\ r = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 70 \\ r = 10 \end{cases}$

II) $a_{100} = a_1 + (100 - 1) \,.\, r =$

$= 70 + 99 \,.\, 10 = 70 + 990 = 1060$

3) I) Na P.A. $(\underset{a_1}{3}, \underbrace{\ldots}_{5 \text{ termos}}, \underset{a_7}{27})$,

temos $a_1 = 3$ e $a_7 = 27$.

II) $a_7 = a_1 + (7 - 1) \,.\, r \Rightarrow$
$\Rightarrow 27 = 3 + 6 \,.\, r \Leftrightarrow 24 = 6 \,.\, r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = 4$

4) I) Entre 100 e 2000, o primeiro múltiplo de 7 é 105 e o último é 1995.

II) Na P.A. (105, 112, 119, ..., 1995), temos $a_1 = 105$, $a_n = 1995$ e $r = 7$.

III) $a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow 1995 = 105 + (n - 1) \,.\, 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1890 = (n - 1) \,.\, 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 270 = n - 1 \Leftrightarrow n = 271$

5) I) $(x - r; x; x + r)$ são ângulos internos de um triângulo, então

$x - r + x + x + r = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 180° \Leftrightarrow x = 60°$

II) $x - r = \dfrac{x + r}{2} \Rightarrow 60° - r = \dfrac{60° + r}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60° + r = 120° - 2r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3r = 60° \Leftrightarrow r = 20°$

O maior ângulo mede $x + r = 60° + 20° = 80°$

Resposta: B

6) $\begin{cases} a_1 = 1,87 \\ r = 3,14 - 1,87 = 1,27 \\ a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \end{cases}$

$a_n = 1,87 + (n - 1) \,.\, 1,27 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 1,87 + 1,27n - 1,27 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 1,27 + 0,6$

Resposta: B

7) $\begin{array}{r|l} 1492 & 15 \\ \hline 7 & 99 \end{array} \Rightarrow 1492 + (15 - 7) = 1500$ é múltiplo de 15

$\begin{array}{r|l} 3427 & 15 \\ \hline 7 & 228 \end{array} \Rightarrow 3427 - 7 = 3420$ é múltiplo de 15

Os múltiplos de 15 entre 1492 e 3427 são 1500, 1515, 1530, ..., 3420. Eles estão em P.A. com $a_1 = 1500$, $r = 15$ e $a_n = 3420$.

Como $a_n = a_1 + (n - 1).\, r$ temos

$3420 = 1500 + (n - 1) \,.\, 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3420 = 1500 + 15n - 15 \Rightarrow 1935 = 15n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 129$

Resposta: 129

8) A partir de janeiro, para a montadora A teremos $a_1 = 5000$ e $r_A = 100$ e para a montadora B, $b_1 = 600$ e $r_B = 200$.

Assim, $\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r_A \\ b_n = b_1 + (n - 1) \,.\, r_B \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 5000 + (n - 1) \,.\, 100 \\ b_n = 600 + (n - 1) \,.\, 200 \end{cases}$

$a_n = b_n \Leftrightarrow 5000 + (n - 1).\, 100 =$

$= 600 + (n - 1).\, 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5000 + 100n - 100 = 600 + 200n - 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4900 + 100n = 400 + 200n \Rightarrow$

$\Rightarrow 4900 - 400 = 200n - 100n \Rightarrow$

$\Rightarrow 100n = 4500 \Rightarrow n = 45$

Resposta: B

9) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = f(n) + 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f é uma P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 3$.

$f(200) = a_{201} = a_1 + 200 \,.\, r =$

$= 1 + 200 \,.\, 3 = 601$

Resposta: C

10) De acordo com o enunciado, os comprimentos das cordas são, em metros, $a_1 = 0,6$ e $a_{13} = 1,8$.

$\begin{cases} a_{13} = a_1 + 12r \\ a_1 = 0,6 \\ a_{13} = 1,8 \end{cases} \Rightarrow 1,8 = 0,6 + 12\,r \Rightarrow$

$\Rightarrow 1,2 = 12r \Rightarrow r = 0,1$

Logo, os comprimentos, em metros, são 0,6; 0,7; 0,8; ...; 1,8.

11) a) O peso mínimo, em kg, que essa pessoa poderá atingir após n semanas é $P_n = 156 - 2,5n$

b) $156 - 2,5\,n < 120 \Rightarrow 156 - 120 < 2,5n \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 < 2,5n \Rightarrow n > \dfrac{36}{2,5} \Rightarrow n > 14,4$

Portanto, n = 15 no mínimo.

Respostas: a) $P_n = 156 - 2,5n$

b) 15

12) Os números divisíveis por 3 e por 7 são os divisíveis por 21.

$\begin{array}{r|l} 5000 & 21 \\ \hline 2 & 238 \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5000 - 2 = 4998$ é divisível por 21.

Devemos achar o número de termos da P. A. 21, 42, 63, ..., 4998.

$a_1 = 21$, $r = 21$ e $a_n = 4998$

$a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r$

$4998 = 21 + (n - 1) \,.\, 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4998 = 21 + 21n - 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{4998}{21} = 238$

Resposta: D

13) $\begin{cases} a_1 = 10 \text{ e } a_9 = 98 \\ a_9 = a_1 + 8r \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 98 = 10 + 8r \Rightarrow 88 = 8r \Rightarrow r = 11$

$a_5 = a_1 + 4 \,.\, r = 10 + 4 \,.\, 11 = 54$

Resposta: C

MÓDULO 43
PROPRIEDADE DE TRÊS TERMOS CONSECUTIVOS DE UMA P. A.

1) I) (– 2; 3x; 14; ...) é uma P.A., então:

$3x = \dfrac{-2 + 14}{2} \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P.A. (– 2; 6; 14; ...) com r = 8

II) $a_{10} = a_1 + 9r = -2 + 9 \,.\, 8 = 70$

2) I) (...; 3x – 1; x + 3; x + 5; ...) é uma P.A., então:

$x + 3 = \dfrac{3x - 1 + x + 5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 6 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P.A. (...; 2; 4; 6; ...) com r = 2

II) $a_5 = 3x - 1 = 2$ e $r = 2$, assim:

$a_5 = a_1 + 4 \,.\, r \Rightarrow 2 = a_1 + 4 \,.\, 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = -6$

3) $\left(\dfrac{1}{a+b}; \dfrac{1}{b+c}; \dfrac{1}{a+c}; \dots\right)$ é uma P.A., então:

$$\frac{1}{b+c} = \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{b+c} = \frac{a+c+a+b}{(a+b).(a+c)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2(a+b).(a+c) = (b+c).(2a+b+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2ac + 2ab + 2bc =$

$= 2ab + b^2 + bc + 2ac + bc + c^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2$

Resposta: D

4) I) Sendo (x – r; x; x + r) três números em P.A. e, também, as medidas dos ângulos internos de um triângulo, então:

$x - r + x + x + r = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 180° \Leftrightarrow x = 60°$

II) x – r é o menor ângulo do triângulo, para r > 0, assim: $x - r = 10° \Rightarrow$

$\Rightarrow 60° - r = 10° \Rightarrow r = 50°$

III) Os ângulos do triângulo são, portanto, 10°, 60° e 110°

5) $3r - 1 = \dfrac{r - 1 + r - 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6r - 2 = 2r - 4 \Rightarrow 4r = -2 \Rightarrow r = -\dfrac{1}{2}$

Resposta: B

6) $y + 1 = \dfrac{3y + 5}{2} \Rightarrow 3y + 5 = 2y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -3$

Para y = – 3 resulta a sequência

(– 9, – 2, 5, ...) que é uma P. A. de razão

r = – 2 – (– 9) = 7.

Resposta: E

7) Se **a**, **b** e **c** estão em P. A., então

$\dfrac{a+c}{2} = b \Rightarrow a + c = 2b$

Portanto, a expressão a – 2b + c = a + c – 2b resulta 2b – 2b = 0

Resposta: D

8) Os três números podem ser indicados por x – r, x e x + r.

Se a soma deles é 12, então

$x - r + x + x + r = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Portanto, o termo do meio é 4.

Resposta: D

9) Se (1 – 3x; x – 2; 2x + 1; ...) é uma P. A., então $x - 2 = \dfrac{1 - 3x + 2x + 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 4 = -x + 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Para x = 2, a P. A. (5 – 3x; x + 7, ...)

resulta (– 1, 9,...)

$a_1 = -1$ e $r = 9 - (-1) = 10$

Seu décimo termo é

$a_{10} = a_1 + 9r = -1 + 9.\,10 = 89$

Resposta: D

10) Sendo ℓ o lado do quadrado temos que sua diagonal é $\ell\sqrt{2}$ e sua área ℓ^2

Se ℓ, $\ell\sqrt{2}$, ℓ^2 estão em P. A., então

$\ell\sqrt{2} = \dfrac{\ell + \ell^2}{2} \Rightarrow \ell + \ell^2 = 2\ell\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^2 + \ell - 2\ell\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(\ell + 1 - 2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \ell = 0$ (não serve)

ou $\ell + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2} - 1$

Resposta: B

11) Não existe x que torne M = (3x; 2x + 1; x + 3;...) uma progressão aritmética, pois

$2x + 1 = \dfrac{3x + x + 3}{2} \Leftrightarrow 4x + 1 = 4x + 3,$

que é falsa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resposta: B

MÓDULO 44
TERMOS EQUIDISTANTES DOS EXTREMOS

1) Três termos consecutivos de uma P .A. são do tipo (...; x – r; x; x + r; ...), então:

$x - r + x + x + r = 45 \Leftrightarrow 3x = 45 \Leftrightarrow x = 15$

2) $a_{13} + a_{13} = a_{11} + a_{15}$, pois

13 + 13 = 11 + 15, então:

$2 \,.\, a_{13} = a_{11} + a_{15} \Leftrightarrow 2.\, a_{13} = 10 \Leftrightarrow a_{13} = 5$

3) I) $a_1 + a_{19} = 40 \Leftrightarrow a_{10} + a_{10} = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, a_{10} = 40 \Leftrightarrow a_{10} = 20$

II) $a_{11} = a_{10} + r = 20 + 2 = 22$

4) I) $\begin{cases} a_1 - a_6 = 8 \\ a_3 + a_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_6 = 8 \\ a_1 + a_6 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_6 = 1 \end{cases}$

II) $a_6 = a_1 + 5 \,.\, r \Rightarrow 1 = 9 + 5 \,.\, r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{-8}{5}$

III) $a_{11} = a_1 + 10 \,.\, r =$

$= 9 + 10 \,.\, \left(\dfrac{-8}{5}\right) = 9 - 16 = -7$

5) A soma do sexto termo com o de ordem n – 5, isto é, $a_6 + a_{n-5}$ é igual à soma do primeiro com o de ordem n.

Em símbolos, $a_6 + a_{n-5} = a_1 + a_n$ pois

6 + n – 5 = 1 + n.

Portanto, $a_6 + a_{n-5} = a_1 + a_n = 120$

Resposta: A

6) $a_3 + a_{25} = a_8 + a_{20} = 52$

(Observe que 3 + 25 = 8 + 20)

Resposta: D

7) $a_4 + a_4 = a_1 + a_7$ (4 + 4 = 1 + 7)

Então, $2a_4 = 84 \Rightarrow a_4 + 42$

Resposta: B

8) 5 = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 =

101

101

101

= 101 . 50 = 5050

Resposta: E

9) $3x - 5 = \dfrac{x - 1 + 2x + 3}{2} \Rightarrow 6x - 10 =$

$= 3x + 2 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, $(a_n) = (3, 7, 11, ...)$.

$a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \,.\, 4 = 39$

A soma dos seus dez primeiros termos é

$(3 + 39).\, \dfrac{10}{2} = 42 \,.\, 5 = 210$

Resposta: B

10) Se $a_n = 3n + 5$, então $a_1 = 3 \,.\, 1 + 5 = 8$ e $a_{20} = 3 \,.\, 20 + 5 = 65$.

A soma dos vinte primeiros termos dessa sequência é

$(8 + 65) \,.\, \dfrac{20}{2} = 73 \,.\, 10 = 730$

Resposta: D

11) $(a_1 + a_{50}) \,.\, \dfrac{50}{2} = 4000 \Rightarrow a_1 + a_{50} = 160$

$a_3 + a_{48} = a_1 + a_{50}$ (3 + 48 = 1 + 50)

Logo, $a_3 + a_{48} = 160$.

Resposta: A

12) $\begin{cases} S_1 = (1 + 10) \,.\, 5 = 55 \\ S_2 = (11 + 20) \,.\, 5 = 155 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_2 - S_1 = 155 - 55 = 100$

Resposta: E

13) $S = (1 + 39) \cdot \left(\dfrac{20}{2}\right) = 400$

Resposta: B

14) $S = (2 + 20) \cdot \dfrac{10}{2} = 110$

Resposta: D

15) $a_{10} + a_{30} = a_{20} + a_{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_{20} = a_{10} + a_{30} \Rightarrow 2a_{20} = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 50$

Resposta: E

16) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 +$

$+ 25 + 28 + 31 = (4 + 31) \cdot \dfrac{10}{2} = 175$

Resposta: B

17) $S_n = n^2 + 2n \Rightarrow$

$\Rightarrow S_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 25 + 10 = 35$

Resposta: C

18) $a_4 = S_4 - S_3 =$

$= (4^2 + 2 - 4) - (3^2 + 2 \cdot 3) =$

$= (16 + 8) - (9 + 6) = 24 - 14 = 9$

Resposta: A

FRENTE 2
MÓDULO 33
FUNÇÃO EXPONENCIAL

1) $\left.\begin{array}{l} f(x) = a^x \\ (4; 9) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow a^4 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{3}$, pois $a > 0$

2) Se $f(x) = (\sqrt{3})^x$, então:

$f(-2) = (\sqrt{3})^{-2} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$

$f(-1) = (\sqrt{3})^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

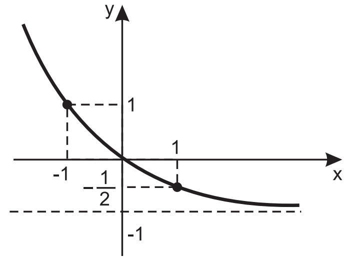
$f(0) = (\sqrt{3})^0 = 1$

$f(1) = (\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$

$f(2) = (\sqrt{3})^2 = 3$

3)

x	$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1$	(x;y)
– 1	$f(-1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - 1 = 1$	(– 1; 1)
0	$f(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 - 1 = 0$	(0; 0)
1	$f(1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 - 1 = -\dfrac{1}{2}$	$\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$



4) I) A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(t) = a \cdot b^t$, contém os pontos $(0; 10^4)$ e $(3; 8 \cdot 10^4)$.

II) $\begin{cases} f(0) = a \cdot b^0 = 10^4 \\ f(3) = a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 10^4 \\ a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10^4 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(t) = 10^4 \cdot 2^t$

III) Para $t = \dfrac{1}{2}$, temos:

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 10^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 10^4 \cdot \sqrt{2} \simeq 14000$

Resposta: D

5) O conjunto imagem da função definida por $g(x) = 3^x$ e $Im(g) =]\,0; +\infty\,[$.

Portanto, o conjunto imagem de

$f(x) = 3^x - 1$ é $]\,0 - 1; +\infty\,[=$

$]\,-1; +100\,[=]\,-1; \infty\,)$

Resposta: E

6) Observando o gráfico, deduzimos que $b = -2$ (valor para o qual tende o gráfico, à medida que x tende a $-\infty$).

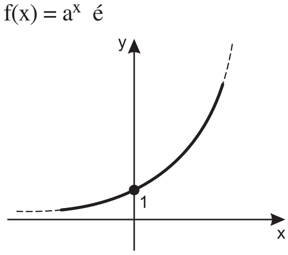
Então $y = f(x) = a^x - 2$ e $f(3) = 6$.

Assim, $a^3 - 2 = 6 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

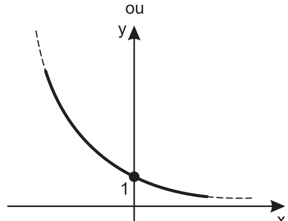
$\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$

Resposta: E

7) O gráfico da função definida por $y = f(x) = a^x$ é



ou



No primeiro, $a > 1$ e no segundo $0 < a < 1$.

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R}$.

Logo, 01 e 02 e 08 são verdadeiras

04. Se $a = 2$, então $f(x) = 2^x$ e

$f(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ (verdadeira)

16. Se $a = \dfrac{1}{3}$, então $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 243 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-x} = 3^5 \Rightarrow x = -5$ (falsa)

A soma dos números associados às proposições verdadeiras é

01 + 02 + 04 + 08 = 15

Resposta: 15

8) O número de unidades produzidas no segundo ano desse período foi

$f(2) = 1000 \cdot (0{,}9)^2 = 1000 \cdot 0{,}81 = 810$

Resposta: D

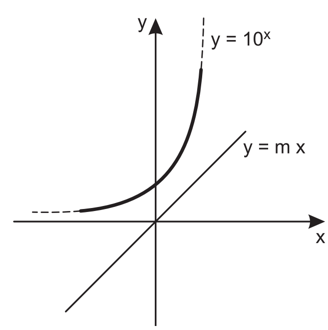
9) A intersecção do gráfico com o eixo x é tal que $f(x) = 0$, portanto, $2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Então, o gráfico de f intercepta o eixo x no ponto (1; 0).

Resposta: A

10) Os esboços dos gráficos das funções em que $y = 10^x$ e $y = mx$, $m \neq 0$ podem ser dos tipos abaixo.



Resposta: B

MÓDULO 34
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

1) $3^{x+3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{x+3} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

$V = \left\{ -\dfrac{5}{2} \right\}$

2) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 + 4 = 5 \cdot 2^x$

Substituindo 2^x por y, temos:

$y^2 + 4 = 5y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 4$

Se $y = 1$, então $2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$

Se $y = 4$, então $2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

$V = \{0; 2\}$

3) $25^x - 5 = 4 \,.\, 5^x \Leftrightarrow (5^2)^x - 5 = 4 \,.\, 5^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 4 \,.\, 5^x - 5 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = 5$

Se $y = -1 \Rightarrow 5^x = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Se $y = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Portanto, $V = \{1\}$

4) $25^{\sqrt{x}} - 124 \,.\, 5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5^2)^{\sqrt{x}} - 124 \,.\, 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 - 124 \,.\, 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$

Fazendo $5^{\sqrt{x}} = y$, temos:

$y^2 - 124 \,.\, y - 125 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = 125$

Se $y = -1 \Rightarrow 5^{\sqrt{x}} = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Se $y = 125 \Rightarrow 5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

Resposta: C

5) $-5^x + \sqrt{5} > 0 \Leftrightarrow -5^x > -\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x < \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^x < 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2} \right\}$

6) $(0,2)^x \,.\, (0,04) < (0,008)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0,2)^x \,.\, (0,2)^2 < [(0,2)^3]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,2^{x+2} < 0,2^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 > 6 \Leftrightarrow x > 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

7) $(0,3)^x > (0,3)^4 \Leftrightarrow x < 4$ e $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$

Resposta: D

8) $625^{x+2} = 25 \Leftrightarrow (25^2)^{x+2} = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25^{2x+4} = 25 \Leftrightarrow 2x + 4 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$(x+1)^6 = \left(-\dfrac{3}{2} + 1\right)^6 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$

Resposta: D

9) $(4^{3-x})^{2-x} = 1 \Leftrightarrow 4^{(3-x)\,(2-x)} = 4^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-x)\,(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 2 \Leftrightarrow$

$V = \{ 2; 3 \}$

O produto das soluções da equação é $2 \,.\, 3 = 6$

Resposta: E

10) $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 5 \\ 3^{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x+3y} = 5^1 \\ 3^{x+y} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Resposta: $V = \{ (-1; 1) \}$

11) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ \dfrac{4^x}{16^y} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y} = 2^5 \\ 4^x = 16^y \,.\, 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 4^x = 4^{2y} \,.\, 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 4^x = 4^{2y+2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2 + y = 5 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

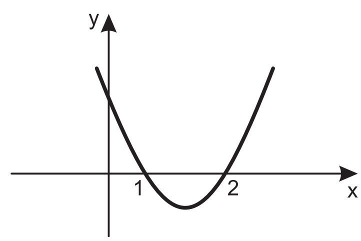
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 = a \\ y = 1 = b \end{cases}$

$S = a \,.\, b = 4 \,.\, 1 = 4 \in [0; 5]$

Resposta: D

12) $5^{x^2 - 3x + 2} > 1 \Leftrightarrow 5^{x^2 - 3x + 2} > 5^0 \Leftrightarrow$

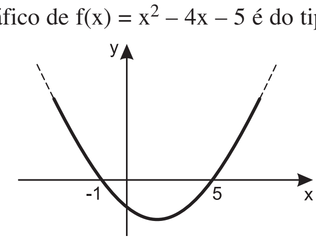
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 2$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é do tipo



Resposta: A

13) $0,5^{x^2 - 4x} > 0,5^5 \Leftrightarrow x^2 - 4x < 5\ (0 < 0,5 < 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x - 5$ é do tipo



Resposta: A

14) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{(2x-3)} \leq \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$

Resposta: C

MÓDULO 35
LOGARITMOS

1) a) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

b) $\log_{10} 1 = 0$ e $\log_5 5 = 1$

c) $y = \log_2 16 + \log_{10} 1 - \log_5 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4 + 0 - 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow y^2 = 9$

Resposta: B

2) $\log_{32} 64 = \alpha \Leftrightarrow 32^\alpha = 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^5)^\alpha = 2^6 \Leftrightarrow 2^{5\alpha} = 2^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{6}{5}$

Assim, $\log_{32} 64 = \dfrac{6}{5}$

3) $\log_9 243 = x \Leftrightarrow 9^x = 243 \Leftrightarrow (3^2)^x = 3^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2x} = 3^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

4) $\log_2(16\sqrt{2}) = \alpha \Leftrightarrow 2^\alpha = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^\alpha = 2^{4 + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^\alpha = 2^{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{9}{2}$

Logo: $\log_{16} \sqrt{2} = \dfrac{9}{2}$

5) a) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \alpha \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^\alpha = 32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow -\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -5$

Logo: $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

b) $\log_{10}(0,001) = \alpha \Leftrightarrow 10^\alpha = 0,001 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^\alpha = 10^{-3} \Leftrightarrow \alpha = -3$

Logo: $\log_{10}(0,001) = -3$

c) $\log_{0,1}(10\sqrt{10}) = \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0,1)^\alpha = 10\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (10^{-1})^\alpha = 10^1 . 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{-\alpha} = 10^{1 + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{-\alpha} = 10^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -\alpha = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{3}{2}$

Logo: $\log_{0,1}(10\sqrt{10}) = -\dfrac{3}{2}$

d) $S = \log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10}(0,001) -$

$- \log_{0,1}(10\sqrt{10}) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = (-5) + (-3) - \left(-\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = -5 - 3 + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{13}{2}$

$S = -\dfrac{13}{2}$

6) $\log_{32\sqrt[5]{4}} 16 \,.\, \sqrt[3]{2} = \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (32 \,.\, \sqrt[5]{4})^\alpha = 16 \,.\, \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^5 \,.\, 2^{\frac{2}{5}}\right)^{\alpha} = 2^4 \,.\, 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^{5+\frac{2}{5}}\right)^{\alpha} = 2^{4+\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{27}{5}\,.\,\alpha} = 2^{\frac{13}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{27\alpha}{5} = \dfrac{13}{3} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{65}{81}$

Resposta: D

7) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^x = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

Resposta: E

8) Decompondo 7776 em fatores primos obtém-se $7776 = 2^5 \,.\, 3^5 = (2 \,.\, 3)^5 = 6^5$

Logo, $\log_6 7776 = x \Leftrightarrow 6^x = 7776 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^x = 6^5 \Leftrightarrow x = 5$

Resposta: B

9) $\log_x \dfrac{81}{16} = -4 \Leftrightarrow x^{-4} = \dfrac{81}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Resposta: D

10) $[\log_5 (25 \log_2 32)]^3$

Substituindo $\log_2 32$ por 5, pois $2^5 = 32$ resulta

$[\log_5 (25 \,.\, 5)]^3 = [\log_5 5^3]^3 = 3^3 = 27$

Resposta: C

11) $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

$\log_4 32 = y \Rightarrow 4^y = 32 \Rightarrow 2^{2y} = 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

Então,

$\log_2 16 - \log_4 32 = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

12) Lembrando que $a^{\log_a N} = N$ temos que

$10^{\log\left(\frac{10}{\sqrt{6}}\right)} = \dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{6} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

Resposta: B

13) $\log_\pi \pi^{100} = 100$

Resposta: E

MÓDULO 36
PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1) $\log_{10} 20 + \log_{10} 50 = \log_{10}(20 \,.\, 50) =$

$= \log_{10} 1000 = 3$

Resposta: C

2) $\log 25 + \log 5 + \log 4 + \log 2 =$

$= \log(25 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 2) = \log 1000 = 3$

Resposta: B

3) $\log_3 b - \log_3 a = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{b}{a}\right) = 4 \Leftrightarrow 3^4 = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = 81$

Resposta: C

4) Sendo $\log_{10} 123 = 2{,}09$, temos:

$\log_{10} 1{,}23 = \log_{10}\left(\dfrac{123}{100}\right) =$

$= \log_{10} 123 - \log_{10} 100 = 2{,}09 - 2 = 0{,}09$

Resposta: B

5) Se $\log_c a = \dfrac{1}{3}$ e $\log_c b = 20$, então:

$\log_c\left[\dfrac{a^3 \,.\, \sqrt[4]{b}}{c^2}\right] =$

$= \log_c(a^3 \,.\, \sqrt[4]{b}) - \log_c c^2 =$

$= \log_c a^3 + \log_c \sqrt[4]{b} - \log_c c^2 =$

$= 3\log_c a + \dfrac{1}{4} \log_c b - 2\log_c c =$

$= 3 \,.\, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \,.\, 20 - 2 \,.\, 1 =$

$= 1 + 5 - 2 = 4$

6) $\log_{10}(1{,}2) = \log_{10}\left(\dfrac{12}{10}\right) =$

$= \log_{10}\left(\dfrac{2^2 \,.\, 3}{10}\right) =$

$= \log_{10}(2^2 . 3) - \log_{10} 10 =$

$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 =$

$= 2 \,.\, \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10 =$

$= 2 \,.\, 0{,}301 + 0{,}477 - 1 =$

$= 0{,}602 + 0{,}477 - 1 = 0{,}079$

7) $\log_4 (24, 96) - \log_4 (3, 12) =$

$= \log_4 \dfrac{24{,}96}{3{,}12} = \log_4 8 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

8) $\log m = 2 - \log 4 \Rightarrow \log m + \log 4 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 4m = 2 \Rightarrow 4m = 10^2 \Rightarrow m = 25$

Resposta: D

9) $\log x = \log b + 2 \log c - \dfrac{1}{3} \log a \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \log b + \log c^2 - \log a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \log bc^2 - \log \sqrt[3]{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \log \dfrac{bc^2}{\sqrt[3]{a}} \Rightarrow x = \dfrac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$

Resposta: D

10) $\log 72 = \log 2^3 \,.\, 3^2 = \log 2^3 + \log 3^2 =$

$= 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3x + 2y$

Resposta: B

11) $\log \sqrt{x} = \log y^2 + \dfrac{1}{2} \log y + \log y^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \sqrt{x} = \log y^2 + \log y^{\frac{1}{2}} + \log y^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \sqrt{x} = \log y^2 \,.\, y^{\frac{1}{2}} \,.\, y^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \sqrt{x} = \log y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x} = y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y^{-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$

Resposta: B

12) $y = \dfrac{a^3 \sqrt{bc^2}}{bc^4} \Rightarrow \log_c y = \log c \dfrac{a^3 \sqrt{bc^2}}{bc^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = \log_c a^3 \sqrt{bc^2} - \log_c bc^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = \log_c a^3 . \, b^{\frac{1}{2}} \,.\, c - \log_c bc^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = \log_c a^3 + \log_c b^{\frac{1}{2}} + \log_c c -$

$- (\log_c b + \log_c c^4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = 3 \log_c a + \dfrac{1}{2} \log_c b + 1 - \log_c b - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = 3 \,.\, 3 + \dfrac{1}{2} \,.\, 4 - 4 - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_c y = 9 + 2 - 4 - 3 \Rightarrow \log_c y = 4$

Resposta: C

MÓDULO 37
MUDANÇA DE BASE

1) Se $\log_a b = \dfrac{1}{3}$, então:

$$\log_{b^3} a^2 = \frac{\log_a a^2}{\log_a b^3} = \frac{2.\log_a a}{3\log_a b} =$$

$$= \frac{2.1}{3\,.\,\frac{1}{3}} = \frac{2}{1} = 2$$

Resposta: B

2) a) $\log_a(a^3\,.\,b^2) = m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a a^3 + \log_a b^2 = m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\log_a a + 2\log_a b = m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3.1 + 2\log_a b = m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\log_a b = m - 3 \Leftrightarrow \log_a b = \dfrac{m-3}{2}$

b) $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b} =$

$$= \frac{1}{\frac{m-3}{2}} = \frac{2}{m-3}$$

3) $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12) =$

$$= \log_4\left(\frac{24{,}96}{3{,}12}\right) =$$

$$= \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

Resposta: B

4) I) $\log_2 3 = a \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 3}{\log_3 2} = a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 2} = a \Leftrightarrow \log_3 2 = \frac{1}{a}$$

II) $\log_3 2 + \log_3 25\,.\,\log_5 2 =$

$$= \log_3 2 + \log_3 5^2\,.\,\frac{\log_3 2}{\log_3 5} =$$

$$= \log_3 2 + 2\,.\,\log_3 5\,.\,\frac{\log_3 2}{\log_3 5} =$$

$$= \log_3 2 + 2\,.\,\log_3 2 = 3\,.\,\log_3 2 =$$

$$= 3\,.\,\frac{1}{a} = \frac{3}{a}$$

Resposta: D

5) Se $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$, então:

$$\log_2 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10}(3^2)}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{2.\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{2\,.\,0{,}477}{0{,}301} = 3{,}169$$

6) $x = \log_3 5\,.\,\log_4 27\,.\,\log_{25}\sqrt[3]{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}\,.\,\frac{\log 3^3}{\log 2^2}\,.\,\frac{\log 2^{\frac{1}{3}}}{\log 5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}\,.\,\frac{3.\log 3}{2.\log 2}\,.\,\frac{\frac{1}{3}\,.\log 2}{2\log 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\,.\,\frac{1}{3}}{2\,.\,2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: C

7) $\log_{\frac{1}{a}} b^2 = \dfrac{\log_b b^2}{\log_b a^{-1}} = \dfrac{2}{-\log_b a} = -\dfrac{2}{m}$

Resposta: D

8) $\log_5 6 = \dfrac{\log_{10} 2\,.\,3}{\log_{10}\frac{10}{2}} =$

$$= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \frac{m+n}{1-m}$$

Resposta: D

9) I) $\log_3\sqrt{15} = \dfrac{\log_5 15^{\frac{1}{2}}}{\log_5 3} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\log_5(3.\,5)}{\log_5 3} = \frac{\frac{1}{2}(\log_5 3 + \log_5 5)}{\log_5 3}$$

II) $\log_5 81 = k \Rightarrow \log_5 3^4 = k \Rightarrow 4\log_5 3 =$

$$\Rightarrow 4\log_5 3 = k \Rightarrow \log_5 3 = \frac{k}{4}$$

De (I) e (II) decorre que

$$\log_3\sqrt{15} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k}{4}+1\right)}{\frac{k}{4}} = \frac{2\,.\left(\frac{k+4}{4}\right)}{K} =$$

$$= \frac{\left(\frac{k+4}{2}\right)}{k} = \frac{k+4}{2k}$$

Resposta: D

10) I) $5^P = 2 \Rightarrow p = \log_5 2$

II) $\log_2 100 = \dfrac{\log_5 2^2.\,5^2}{\log_5 2} =$

$$= \frac{\log_5 2^2 + \log_5 5^2}{\log_5 2} = \frac{2\log_5 2 + 2}{\log_5 2}$$

De (I) e (II) resulta:

$$\log_2 100 = \frac{2P+2}{P} = \frac{2+2P}{P}$$

Resposta: E

MÓDULO 38
FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1) Se $f(x) = \log_2(x-3)$, então:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 > 0\} =$

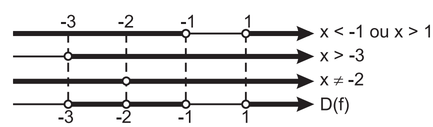
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

2) Se $f(x) = \log_{(x+3)}(x^2-1)$, então D(f) é o conjunto de todos os números reais tais que:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Assim sendo:



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2$ ou $-2 < x < -1$ ou $x > 1\}$

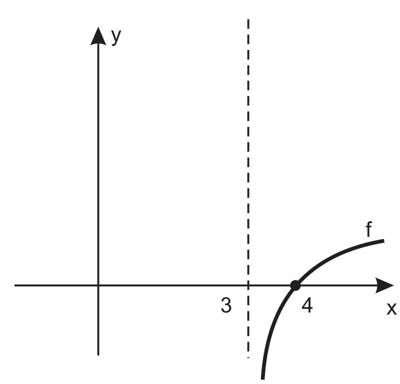
3) $f(x) = \log(x-3) \Rightarrow y = \log(x-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 3 = 10^y \Rightarrow x = 10^y + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 10^x + 3 \Rightarrow g(x) = 10^x + 3$

$g(x) = 10^x + 3$

4) O gráfico da função $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(x-3)$ é



5) O domínio de $y = \sqrt{\log_{10}x}$ é

$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \log_{10}x \ge 0\} =$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 10^0\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1\} =$

$= [\ 1; \infty\ [$

Resposta: A

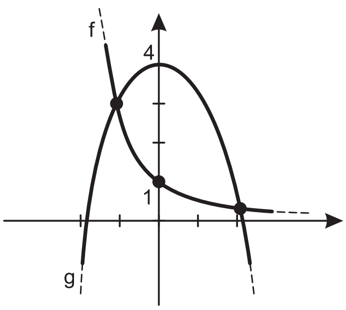
6) É o gráfico de uma função logarítmica de base $a > 1$, pois é estritamente crescente.

Portanto, $f(x) = \log_a x$ e $a > 1$

Resposta: A

7) O número de raízes reais da equação $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = -x^2 + 4$ é igual ao número de intersecções dos gráficos das funções definidas por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = -x^2 + 4$.

Esboçando os dois gráficos em um mesmo sistema de coordenadas resulta.



A equação tem duas soluções reais

Resposta: C

8) A função exponencial de base $\dfrac{1}{2}$ é estritamente decrescente e quanto maior for seu expoente menos será o seu valor.

Portanto, o menor valor da expressão resulta quando $4x - x^2$ for máximo, o que ocorre para $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Então, o menor valor da expressão é

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4\,.\,2 - 2^2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

Resposta: C

MÓDULO 39
EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

1) $\log_7 x = \log_7(a + c) - 2\,.\,\log_7 b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_7 x = \log_7(a + c) - \log_7 b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_7 x = \log_7\left(\dfrac{a + c}{b^2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a + c}{b^2}$

2) $\log_3 x = 2\,.\,\log_3 7 + 2\,.\,\log_3 8 - \log_3 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 7^2 + \log_3 8^2 - \log_3 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_3\left(\dfrac{7^2\,.\,8^2}{16}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7^2\,.\,8^2}{16} = \dfrac{49.64}{16} = 196$

$V = \{196\}$

3) $\log_3 2 - \log_3(x + 1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{2}{x+1}\right) = 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} = 3 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3 = 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$V = \left\{ -\dfrac{1}{3} \right\}$

4) I) $\log_2[\log_3(x - 1)] = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x - 1) = 2 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 9 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow a = 10$

II) $\log_2(a + 6) = \log_2(10 + 6) = \log_2 16 = 4$

Resposta: C

5) $2\,.\,(1 + \log_{x^2}10) = \left(\dfrac{1}{\log x^{-1}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,.\left(1 + \dfrac{\log 10}{\log x^2}\right) = \left(\dfrac{1}{-1\,.\,\log x}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,.\left(1 + \dfrac{1}{2\,.\,\log x}\right) = \left(\dfrac{1}{-\log x}\right)^2$

Fazendo $\log x = y \neq 0$, temos:

$2\,.\left(1 + \dfrac{1}{2y}\right) = \left(\dfrac{1}{-y}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,.\left(\dfrac{2y + 1}{2y}\right) = \dfrac{1}{y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2y + 1}{y} = \dfrac{1}{y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y + 1 = \dfrac{y}{y^2} \Leftrightarrow 2y + 1 = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

Se $y = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{10}$

Se $y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \log x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$

Resposta: B

6) $\log_3(2x - 7) = 4 \Rightarrow 2x - 7 = 3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 81 + 7 \Rightarrow 2x = 88 \Rightarrow x = 44$

Portanto, $V = \{ 44 \}$

Resposta: E

7) $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 8 + 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Então, $m = 3$ ou $m = -3$ e

$m + 1 = 3 + 1 = 4$ ou $m + 1 = -3 + 1 = -2$

Resposta: B

8) $x^{\log_x(x+3)} = 7 \Rightarrow x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4$

Resposta: C

9) $\log x + \log(x - 5) = \log 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x\,(x - 5) = \log 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5x = 36 \Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9$ ou $x = -4$ (não serve, pois devemos ter $x > 5$).

Resposta: D

10) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 2) = x^{\log_x 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(x + 2)\,(x - 2) = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 2)\,(x - 2) = 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 32 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -6$ (não serve, pois devemos ter $x > 2$).

Resposta: E

11) $\log(-x + 1) + 1 = \log(2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(-x + 1) + \log 10 = \log(2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 10\,.\,(-x + 1) = \log(2x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -10x + 10 = 2x + 1 \Rightarrow 9 = 12x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$

Resposta: C

12) $2\log_5 x = \log_5 x + \log_5 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\log_5 x - \log_5 x = \log_5 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 x = \log_5 8 \Rightarrow x = 8$

Resposta: B

13) $\log 2^x - \log 3^x = 9 \Rightarrow \log \dfrac{2^x}{3^x} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 9 \Rightarrow \log \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-x} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x \,.\, \log 1{,}5 = 9 \Rightarrow -x \,.\, 0{,}18 = 9 \Rightarrow$

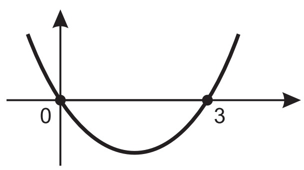
$\Rightarrow x = -50$

Resposta: C

MÓDULO 40
INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

1) I) Condição de existência:

$x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 3$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ é do tipo:

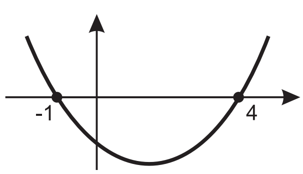


II) $\log_2(x^2 - 3x) < \log_2 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 < x < 4$, pois o gráfico de

$g(x) = x^2 - 3x - 4$ é do tipo:



III) De (I) e (II), temos:

$-1 < x < 0$ ou $3 < x < 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$ ou $3 < x < 4\}$

2) I) Condição de existência:

$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

II) $\log_2(x - 3) > \log_2 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 > 7 \Leftrightarrow x > 10$

III) De (I) e (II), temos: $x > 10$

Resposta: B

3) I) Condição de existência:

$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

II) $\log_{0,7}(x - 3) < \log_{0,7} 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 > 7 \Leftrightarrow x > 10$

III) De (I) e (II), temos: $x > 10$

Resposta: C

4) I) Condição de existência:

$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

II) $\log_{0,1}(x + 1) < \log_{0,1} 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 > 4 \Leftrightarrow x > 3$

III) De (I) e (II), temos: $x > 3$

Resposta: A

5) I) Condição de existência:

$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

II) $\log_3(x - 1) > 2 \Leftrightarrow x - 1 > 9 \Leftrightarrow x > 10$

III) De (I) e (II), temos: $x > 10$

Resposta: D

6) $\log_2 (5x - 3) < \log_2 7$

a) $5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{5}$

b) $\log_2 (5x - 3) < \log_2 7 \Rightarrow 5x - 3 < 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x < 10 \Rightarrow x < 2$

De (a) e (b) obtém-se a solução.

Portanto, $\dfrac{3}{5} < x < 2$.

Resposta: C

7) $\log_{\frac{1}{2}} x < 1$

a) $x > 0$

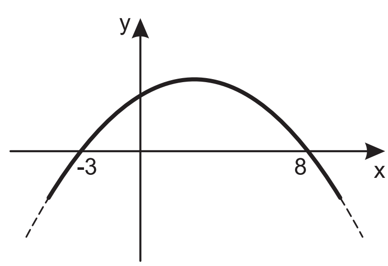
b) $\log_{\frac{1}{2}} x < 1 \Rightarrow x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$

De (a) e (b) concluimos que $x > \dfrac{1}{2}$.

Resposta: A

8) $\log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x + 24) > \log_{\frac{1}{2}} 18$

a) $-x^2 + 5x + 24 > 0 \Rightarrow -3 < x < 8$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 + 5x + 24$ é do tipo



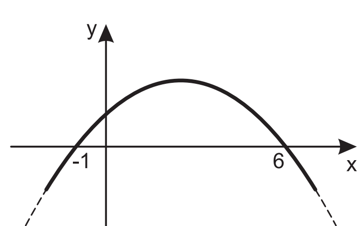
b) $\log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x + 24) > \log_{\frac{1}{2}} 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + 5x + 24 < 18 \Rightarrow$

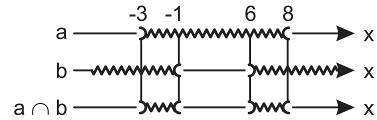
$\Rightarrow -x^2 + 5x + 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < -1$ ou $x > 6$, pois o gráfico de

$g(x) = -x^2 + 5x + 6$ é do tipo



De (a) e (b) temos



O conjunto-verdade da inequação é

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1$ ou $6 < x < 8\}$

Resposta: C

9) $\log_{10} x + \log_{10}(x + 3) < 1$

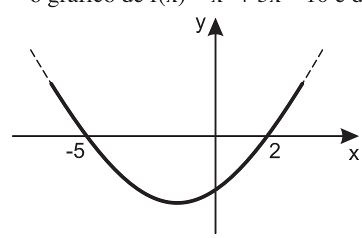
a) $\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

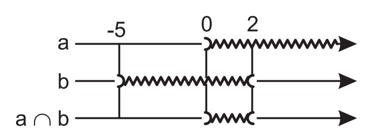
b) $\log_{10} x + \log_{10}(x + 3) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} x\,(x + 3) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x < 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 + 3x - 10$ é do tipo





Devemos ter, portanto, $0 < x < 2$

Resposta: C

10) $\log_{0,4}\log_2(0{,}5)^{x-5} \le \log_{0,4}(x+2)$

a) $\log_2(0{,}5)^{x-5} > 0$ e $x + 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} > 1$ e $x > -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ e $x > -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 5 < 0$ e $x > -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 5$ e $x > -2 \Rightarrow -2 < x < 5$

b) $\log_{0,4}\log_2(0{,}5)^{x-5} \le \log_{0,4}(x + 2) \Rightarrow$

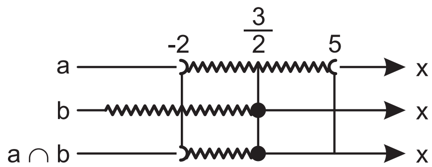
$\Rightarrow \log_2(0{,}5)^{x+5} \ge x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (0{,}5)^{x-5} \ge 2^{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} \ge 2^{x+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-x+5} \ge 2^{x+2} \Rightarrow -x + 5 \ge x + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x \ge -3 \Rightarrow x \le \dfrac{3}{2}$



O conjunto-verdade da inequação é

$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le \dfrac{3}{2} \right\}$

Resposta: C

11)a) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$

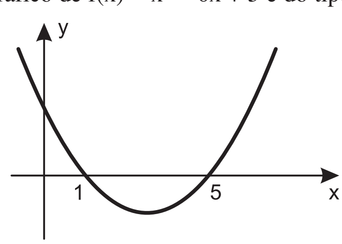
b) $\log_3(x-2) + \log_3(x-4) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3(x-2)(x-4) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(x-4) < 3' \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < 5$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ é do tipo



De a e b concluimos que $4 < x < 5$.
Resposta: A

MÓDULO 41
LOGARITMOS DECIMAIS

1) Para N = 14,9, temos:
   I) Característica: c = 1
   II) Mantissa: m = 0,1732
   III) log N = c + m
   log 14,9 = 1 + 0,1732 = 1,1732

2) Para N = 1490, temos:
   I) Característica: c = 3
   II) Mantissa: m = 0,1732
   III) log N = c + m
   log 1490 = 3 + 0,1732 = 3,1732

3) Para N = 0,023, temos:
   I) Característica: c = – 2
   II) Mantissa: m = 0,3617
   III) log N = c + m
   log(0,023) = – 2 + 0,3617 =
   $= \bar{2},3617 = -1,6383$

4) I) log N = 2,5752 = 2 + 0,5752
   II) Na tabela, m = 0,5752 é mantissa do número 376.
   III) A característica é c = 2, assim, N tem 3 algarismos na sua parte inteira.
   IV) N = 376

5) I) $\log N = \bar{3},5011 = -3 + 0,5011$
   II) Na tabela, m = 0,5011 é mantissa do número 317.
   III) A característica é c = – 3, assim, N tem 3 zeros antes do número 317.
   IV) N = 0,00317

6) I) log N = – 1,4989 = – 1 – 0,4989 =
   = – 2 + (1 – 0,4989) =
   $= -2 + 0,5011 = \bar{2},5011$
   II) Na tabela, m = 0,5011 é mantissa do número 317.
   III) A característica é c = – 2, assim, N tem 2 zeros antes do número 317.
   IV) N = 0,0317

7) $\log_{1,49}20,7 =$

$= \dfrac{\log_{10}20,7}{\log_{10}1,49} + \dfrac{1,3160}{0,1732} \cong 7,60$

8) Para N = 3470, temos:
   I) Característica: c = 3
   II) Mantissa: m = 0,5403
   III) log N = c + m
   log 3470 = 3 + 0,5403 = 3,5403
   Resposta: C

9) $\log_{10}12 = \log_{10}2.3 = \log_{10}2 + \log_{10}3 =$

$= 2\log_{10}2 + \log_{10}3 = 2 \,.\, 0,30103 + 0,47712 =$

$= 0,60206 + 0,47712 = 1,07918$

Resposta: B

10) $5 \,.\, 2^n \ge 100000000 \Rightarrow 2^n \ge 20 - 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n \ge 2 \,.\, 10^7 \Rightarrow \log 2^n \ge \log 2 \,.\, 10^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \,.\, \log 2 \ge \log 2 + \log 10^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \,.\, 0,301 \ge 0,301 + 7 \Rightarrow n \ge \dfrac{7,301}{0,301}$

$\Rightarrow n \ge 24,25 \Rightarrow n = 25$, pois $n \in \mathbb{N}^*$.

Resposta: 25 vezes

11) $10^n \le 12^{418} \Leftrightarrow n \le \log_{10}12^{418} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \le 418 \,.\, \log_{10}(2^2.3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \le 418 \,.\, (2\log_{10}2 + \log_{10}3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \le 418 \,.\, (2 \,.\, 0,30 + 0,48) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \le 451,44$

O maior valor inteiro possível para n é 451.
Resposta: D

12) 1) log 42 . 10^9 = 10, ______
   Note 42 . 10^9 tem 11 algarismos
   2) log 10, ______ = 1, ____
   3) log 1, ____ = 0, ...
   4) log 0, ... = –
   5) log – ERRO
   Resposta: D

13) $x = 2^{100} \Rightarrow \log x = \log 2^{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 100 \,.\, \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 100 \,.\, 0,30103 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 30,103 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x tem 30 + 1 = 31 algarismos.

Resposta:B

14) $y = 5^{100} \Rightarrow \log y = \log 5^{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 100 \,.\, \log 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 100 \,.\, \log \dfrac{10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 100 \,.\, (\log 10 - \log 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 100\,(1 - 0,30103) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 100 \,.\, 0,69897 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log y = 69,897 \Rightarrow$ y tem 69 + 1 = 70 algarismos

Resposta: D

MÓDULO 42
LOGARITMOS E EXPONENCIAIS (COMPLEMENTO)

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} y = -1 \\ 4^{\frac{x}{2} + y} = 32 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \dfrac{\log_2 y}{\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)} = -1 \\ 2^{x + 2y} = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = -1 \\ 2^{x + 2y} = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \\ 2^{x + 2y} = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Resposta: C

2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x \,.\, y) = 5 \\ \log_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \,.\, y = 32 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \,.\, y = 32 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

V = {(4; 8)}

3) $\log 1000^x - \log 0{,}001^x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot \log 1000 - x \cdot \log 0{,}001 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot 3 - x \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 3x = -1 \Leftrightarrow 6x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{6}$

$V = \left\{ \dfrac{-1}{6} \right\}$

4) $\log_4(2^{x+1} - 1) = x \Leftrightarrow 4^x = 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^x \cdot 2^1 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos: $y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$

$V = \{0\}$

5) $4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} = \dfrac{x^3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x\left(\dfrac{x^3}{4}\right) = \log_2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_x x^3 - \log_x 4 = \log_2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \log_x x - \dfrac{\log_2 4}{\log_2 x} = \log_2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - \dfrac{2}{\log_2 x} = \log_2 x$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos:

$3 - \dfrac{2}{y} = y \Leftrightarrow 3y - 2 = y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 2$

Para $y = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Para $y = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$

As raízes da equação são 2 e 4, cuja soma é 6.

Resposta: B

6) $2^x + 2 - 2^{-x} = 0 \Rightarrow 2^x + 2 - \dfrac{1}{2^x} = 0$

Fazendo $2^x = y$ resulta

$y + 2 - \dfrac{1}{y} = 0 \Rightarrow y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{2}$

Como $y > 0$, temos que $y = \sqrt{2} - 1$ e

$2^x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \log_2(\sqrt{2} - 1)$

7) $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125 \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^2)^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125 \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 - 124 \cdot (5^{\sqrt{x}}) - 125 = 0 \Rightarrow$

Fazendo $5^{\sqrt{x}} = y$ obtém-se

$y^2 - 124y - 125 = 0 \Rightarrow y = 125$ ou $y = -1$

Como $y > 0$, temos $5^{\sqrt{x}} = 125 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

Resposta: C

8) $\begin{cases} \log x - \log y = \log y \\ 3x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \log y + \log y \\ 3x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \log y^2 \\ 3x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ 3x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ 3y^2 + 2y - 33 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = \dfrac{-2 + 20}{6}, \text{ pois } y > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$

Resposta: V: {(9,3)}

9) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$

Fazendo $\log_2 x = a$ e $\log_2 y = b$ resulta

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

Então, $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$ e
$\log_2 y = 3 \Rightarrow y = 8$

Resposta: V = {(4, 8)}

10) $a^{b^x} = c \Rightarrow b^x = \log_a c \Rightarrow x = \log_b(\log_a c)$

Resposta: C

11) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4^x}{9^x} + \dfrac{6^x}{9^x} = \dfrac{2 \cdot 9^x}{9^x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^x + \left(\dfrac{6}{9}\right)^x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$

Para $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = y$ resulta

$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -2$ (não serve)

Logo, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$V = \{0\}$

Resposta: A

12) $7^{2x} + 25^x = 2 \cdot 35^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49^x + 25^x = 2 \cdot 35^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{49^x}{35^x} + \dfrac{25^x}{35^x} = \dfrac{2 \cdot 35^x}{35^x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{5}\right)^x + \left(\dfrac{5}{7}\right)^x = 2$

Para $\left(\dfrac{7}{5}\right)^x = y$ resulta

$y + \dfrac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 + 1 = 2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Logo, $\left(\dfrac{7}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Resposta: C

MÓDULO 43
LOGARITMOS E EXPONENCIAIS (COMPLEMENTO)

1) $\dfrac{1}{32} < 4^{n-1} < 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-5} < 2^{2n-2} < 2^4 \Leftrightarrow -5 < 2n - 2 < 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 < 2n < 6 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} - < n < 3$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $-\dfrac{3}{2} < n < 3$, então $n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 2$ e, portanto, a soma é igual a 3.

Resposta: C

2) a) $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$\log_2(0{,}5)^{x-5} > 0 \Leftrightarrow (0{,}5)^{x-5} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0{,}5)^{x-5} > (0{,}5)^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$

A condição de existência é, pois:

$-2 < x < 5$

b) $\log_{0,4}[\log_2(0{,}5)^{x-5}] \le \log_{0,4}(x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(0{,}5)^{x-5} \ge x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0{,}5)^{x-5} \ge 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^{-x+5} \ge 2^{x+2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 5 \ge x + 2 \Leftrightarrow 2x \le 3 \Leftrightarrow x \le \dfrac{3}{2}$

De (a) e (b), temos: $-2 < x \le \dfrac{3}{2}$

Resposta: C

3) $1 \le \log_{10}(x - 1) \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}10 \le \log_{10}(x-1) \le \log_{10}100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \le x - 1 \le 100 \Leftrightarrow 11 \le x \le 101$

Resposta: C

4) $\log_{10}x \le \log_2 4 \,.\, \log_4 6 \,.\, \log_6 8 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}x \le \log_2 4 \,.\, \dfrac{\log_2 6}{\log_2 4} \,.\, \dfrac{\log_2 8}{\log_2 6} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}x \le \log_2 8 - 1 \Leftrightarrow \log_{10}x \le 3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}x \le 2 \Leftrightarrow 0 < x \le 100$

Resposta: A

5) $\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Rightarrow \log_3 x = 1 + \dfrac{\log_3 9}{\log_3 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 3x = 1 + \dfrac{2}{\log_3 x}$

Fazendo $\log_3 x = y$ obtém-se:

$y = 1 + \dfrac{2}{y} \Rightarrow y^2 = y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$

Portanto, $\log_3 x = 2$ ou $\log_3 x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9$ ou $x = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

O produto desses valores é $9 \,.\, \dfrac{1}{3} = 3$

Resposta: E

6) I) Se r e s são raízes de equação

$x_2 - bx + + 100 = 0$, então

$r + s = b$ e $r.\,s. = 100$.

II) $\log_{10} (r.\,s.)^r + \log_{10} (rs)^s =$

$= r \,.\, \log_{10}(rs) + s \,.\, \log_{10}(rs) =$

$= (r + s).\, \log_{10}(rs)$.

De (I) e (II) concluimos que

$\log_{10}(r \,.\, s)^r + \log_{10}(r \,.\, s)^s =$

$= (r + s) \,.\, \log_{10}(r.\, s) =$

$= b \,.\, \log_{10}100 = b \,.\, 2 = 2b$

7) $(\log_{10}x)^2 - 3\log_{10}x + 2 = 0$

Fazendo $\log_{10}x = y$ resulta

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$.

Logo, $\log_{10}x = 1$ ou $\log_{10}x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$ ou $x = 100$

Resposta: A

8) $4x - x^{\log_2 x} = 0 \Rightarrow 4x = x^{\log_2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 4x = \log_2 x^{\log_2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 4 + \log_2 x = (\log_2 x)(\log_2 x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + \log_2 x = (\log_2 x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = -1$ ou $\log_2 x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 4$.

O produto dessas raízes é $\dfrac{1}{2} \,.\, 4 = 2$

Resposta: B

9) $16 \,.\, x^{\log_2 x} = x^5 \Rightarrow x^{\log_2 x} = \dfrac{x^5}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 \dfrac{x^5}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x) \,.\, (\log_2 x) = \log_2 x^5 - \log_2 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 = 5\log_2 x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0 \Rightarrow$

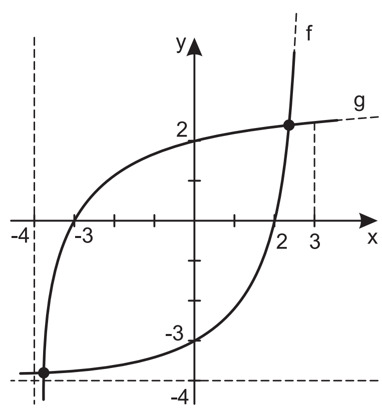
$\Rightarrow \log_2 x = 1$ ou $\log_2 x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$ ou $x = 16$.

A soma dessas raízes é 2 + 16 = 18.

Resposta: E

10) Esboçando, em um mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x - 4$ e $g(x) = \log_2 (x + 4)$ temos:



As duas soluções (abscissas das intersecções dos gráficos) estão em $]-4, -3[$ e $]2, 3[$

Resposta: D

11) $\dfrac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, \ldots \,.\, 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, n} > \sqrt{\log 10^{100}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2 \,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, n} >$

$< \sqrt{100 \,.\, \log 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\overbrace{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, 2}^{\text{n vezes}} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, n} >$

$> \sqrt{100} \Rightarrow 2^n > 10 \Rightarrow n > 3$

Resposta: C

MÓDULO 44
LOGARITMOS E EXPONENCIAIS (COMPLEMENTO)

1) Sendo $f(x) = \log_a x$, temos:

I) $f(a) = b \Rightarrow \log_a a = b \Leftrightarrow b = 1$

II) $f(a + 2) = b + 1 \Rightarrow \log_a(a + 2) = 1 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a(a + 2) = 2 \Leftrightarrow a^2 = a + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$, pois $a > 0$

Resposta: A

2) Se $T = 15000 \,.\, (4/5)^t$ e $T = 10000$, então:

$10000 = 15000 \,.\, (4/5)^t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 3 \,.\, (4/5)^t \Leftrightarrow 2/3 = (4/5)^t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \log_{4/5} (2/3) \Leftrightarrow t = \dfrac{\log (2/3)}{\log (4/5)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \log (2/3) / \log (4/5)$

Resposta: C

3) Se o preço P do automóvel sofre desvalorização de $\dfrac{1}{5}$ ao ano, a cada ano que passa o preço corresponde a $\dfrac{4}{5}$ do preço do ano anterior, assim, temos:

Após 1 ano, $P_1 = \dfrac{4}{5} \,.\, P$

Após 2 anos, $P_2 = \dfrac{4}{5} \,.\, P_1 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 .\, P$

Após 3 anos, $P_3 = \dfrac{4}{5} \,.\, P_2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 .\, P$

$\vdots$

Após t anos, $P_t = \left(\dfrac{4}{5}\right)^t .\, P$

Fazendo-se $\log_{10}2 = 0{,}30$, então:

$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2 \,.\, \log_{10}2 =$

$= 2 \,.\, 0{,}30 = 0{,}60$

$\log_{10}5 = \log_{10}\left(\dfrac{10}{2}\right) =$

$= \log_{10}10 - \log_{10}2 = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$

Se $P_t = \dfrac{P}{2} \Rightarrow \dfrac{P}{2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^t .\, P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^t \Leftrightarrow$

$t = \log_{\frac{4}{5}} \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{4}{5}\right)} =$

$$= \frac{\log_{10}1 - \log_{10}2}{\log_{10}4 - \log_{10}5} = \frac{0 - 0{,}30}{0{,}60 - 0{,}70} =$$

$$= \frac{-0{,}30}{-0{,}10} = 3$$

Resposta: B

4) Seja $N = 2^{255} = p \,.\, 10^q$, com $1 \leq p < 10$ e $q \in \mathbb{Z}$.

Como $\log N = \log 2^{255} =$

$= 255 \,.\, \log 2 \simeq 255 \,.\, 0{,}3 = 76{,}5$, tem-se:

$N = 10^{76,5} = 10^{0,5} \,.\, 10^{76} =$

$= \sqrt{10} \,.\, 10^{76} = p \,.\, 10^q$

Desta forma, $p = \sqrt{10}$ e $q = 76$

Resposta: A

5) $\log (2^{2\text{sen } x} - 3 \,.\, 2^{\text{sen } x} + 3) = 0 \Rightarrow$

$2^{2\text{sen } x} - 3 \,.\, 2^{\text{sen } x} + 3 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2^{\text{sen } x})^2 - 3.(2^{\text{sen } x}) + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{\text{sen } x} = 1$ ou $2^{\text{sen } x} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = n \,.\, \pi$ ou $x = + n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $x = n\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

6) Para que a equação $x^2 - 4x + \ell n(a + 1) = 0$ admita raízes reais distintas devemos ter

$\triangle = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, \ell n\,(a+1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 - 4\,\ell n\,(a + 1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4\,\ell n\,(a + 1) > -16 \Rightarrow \ell n\,(a + 1) < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 1 > 0$ e $a + 1 < e^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a > -1$ e $a < e^4 - 1 \Rightarrow -1 < a < e^4 - 1$

Resposta: B

7) $\log \sqrt{216} = \log \sqrt{2^3 . 3^3} = \log 2^{\frac{3}{2}} \,.\, 3^{\frac{3}{2}} =$

$= \log 2^{\frac{3}{2}} + \log 3^{\frac{3}{2}} =$

$= \dfrac{3}{2} \,.\, \log 2 + \dfrac{3}{2} \,.\, \log 3 =$

$= \dfrac{3}{2} \,.\, 0{,}3010 + \dfrac{3}{2} \,.\, 0{,}4771 =$

$= \dfrac{3}{2} \,.\, (0{,}3010 + 0{,}4771) =$

$= \dfrac{3}{2} \,.\, 0{,}7781 \cong 1{,}1671$

Resposta: D

8) $\log x = 1{,}565257 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10^{1,565257} \Rightarrow 10^1 < x < 10^2$

Resposta: D

9) $10^{\log a(x2 - 3x + 5)} = 3^{\log a10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a 10^{\log a(x2 - 3x + 5)} = \log_a 3^{\log a10} \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\log_a (x^2 - 3x + 5)] \,.\, (\log_a 10) =$

$= (\log_a 10) \,.\, (\log_a 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a (x^2 - 3x + 5) = \log_a 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

Resposta: V = {1; 2}

10) $\log_2(12 - 2^x) = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x} = 12 - 2^x \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$

Fazendo $2^x = y$ obtém-se

$y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -4$ (não serve)

Logo, $2^x = 3$ e, portanto, $x = \log_2 3$.

Resposta: E

11) $\log_{50}175 = \dfrac{\log 175}{\log 50} =$

$$= \frac{\log 5^2 \,.\, 7}{\log 5 \,.\, 10} = \frac{\log 5^2 + \log 7}{\log 5 + \log 10} =$$

$$= \frac{2\log 5 + \log 7}{\log 5 + 1} = \frac{2a + b}{a + 1}$$

Resposta: B

12) $\log_a x = 3 \log_{10} x \Rightarrow \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = 3 \,.\, \log_{10} x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\log_{10} a} = 3 \Rightarrow \log_{10} a = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 10^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{10}$

Resposta: D