MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

OBJETIVO

FRENTE 1

MATEMÁTICA

René Descartes (1596-1650)
Fusão da álgebra com a geometria, fato que gerou a Geometria Analítica

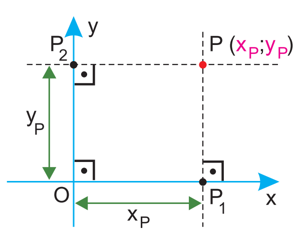
Geometria Analítica – Módulos

Módulo 33 – Sistema cartesiano ortogonal

Palavras-chave:
- Plano cartesiano
- Abscissa
- Ordenada

1. Coordenadas cartesianas ortogonais

Seja α o plano determinado por dois eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ perpendiculares em **O**.



Considere um ponto **P** qualquer do plano e conduza por ele as paralelas aos eixos, que cortarão $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$, respectivamente, em P_1 e P_2.

Escolhida uma unidade (em geral a mesma sobre os dois eixos), adota-se a seguinte nomenclatura:

a) **Abscissa** de **P** é o número real $\mathbf{x_p = OP_1}$

b) **Ordenada** de **P** é o número real $\mathbf{y_p = OP_2}$

c) Coordenadas de **P** são os números reais $\mathbf{x_p}$ e $\mathbf{y_p}$ indicados na forma $(x_p; y_p)$ de um par ordenado.

d) O eixo dos **x** ou $\overrightarrow{\mathbf{Ox}}$ será chamado **eixo das abscissas**.

e) O eixo dos **y** ou $\overrightarrow{\mathbf{Oy}}$ será chamado **eixo das ordenadas**.

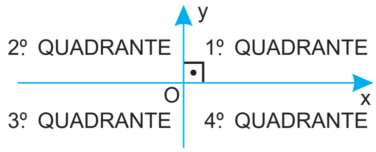
f) O plano formado pelo par de eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ será chamado **plano cartesiano**.

g) O sistema de eixos formados por $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ é chamado **sistema cartesiano ortogonal**.

h) O ponto **O** é a **origem** do sistema cartesiano ortogonal.

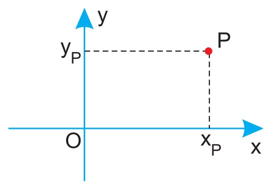
2. Posição de um ponto no sistema cartesiano ortogonal

Os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$ determinam, no plano cartesiano, quatro regiões angulares que serão denominadas **quadrantes**.



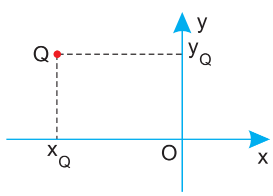
Observe que:

a) Um ponto pertence ao 1º quadrante se, e somente se, tiver a **abscissa** e a **ordenada positivas**. Simbolicamente:



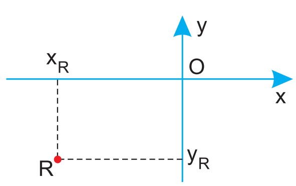
$$P \in 1^{\circ} \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_P > 0 \text{ e } y_P > 0$$

b) Um ponto pertence ao 2º quadrante se, e somente se, tem a **abscissa negativa** e a **ordenada positiva**. Simbolicamente:



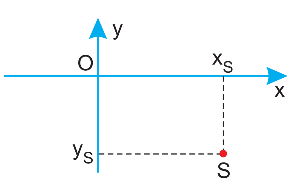
$$Q \in 2^{\circ} \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_Q < 0 \text{ e } y_Q > 0$$

c) Um ponto pertence ao 3º quadrante se, e somente se, tem a **abscissa** e a **ordenada negativas**. Simbolicamente:



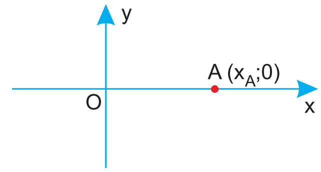
$$R \in 3^{\circ} \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_R < 0 \text{ e } y_R < 0$$

d) Um ponto pertence ao 4º quadrante se, e somente se, tem **abscissa positiva** e **ordenada negativa**. Simbolicamente:



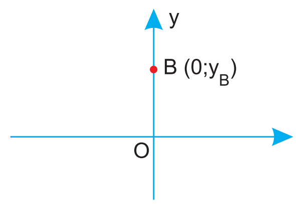
$$S \in 4^{\circ} \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_S > 0 \text{ e } y_S < 0$$

e) Um ponto pertence ao eixo das abscissas se, e somente se, tem **ordenada nula**. Simbolicamente:



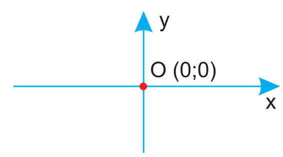
$$A \in \overrightarrow{Ox} \Leftrightarrow y_A = 0$$

f) Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se, e somente se, tem **abscissa nula**. Simbolicamente:



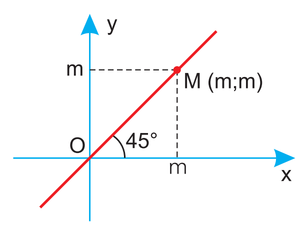
$$B \in \overrightarrow{Oy} \Leftrightarrow x_B = 0$$

g) A origem O do sistema cartesiano ortogonal tem **abscissa** e **ordenada nulas**. Simbolicamente:



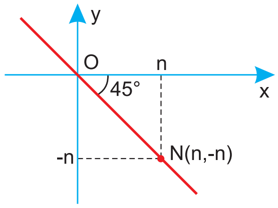
$$O \text{ é a origem} \Leftrightarrow x_O = y_O = 0$$

h) Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se, a **abscissa** e a **ordenada** são **iguais**. Simbolicamente:



$$M \in \text{bissetriz do } 1^{\circ} \text{ e } 3^{\circ} \text{ quadrantes}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_M = y_M$$

i) Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares se, e somente se, a **abscissa** e a **ordenada** são **simétricas**. Simbolicamente:



$N \in$ bissetriz do 2º e 4º quadrantes

$$\Updownarrow$$

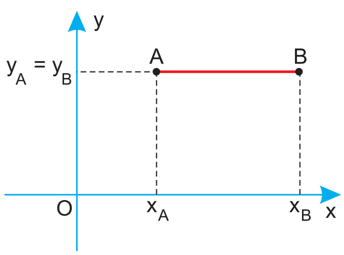
$$x_N = -\,y_N$$

3. Segmento paralelo ao eixo das abscissas

Dados dois pontos A $(x_A;\ y_A)$ e B $(x_B;\ y_B)$ distintos, o segmento de reta $\overline{AB}$ é **paralelo ao eixo das abscissas** se, e somente se, **A** e **B** têm a **mesma ordenada**. Simbolicamente:

$$\overline{AB}\ //\ \overrightarrow{Ox} \Leftrightarrow y_A = y_B$$

A medida do segmento $\overline{AB}$ é dada pelo módulo da diferença das abscissas dos pontos **A** e **B**.



$$AB = |x_B - x_A|$$

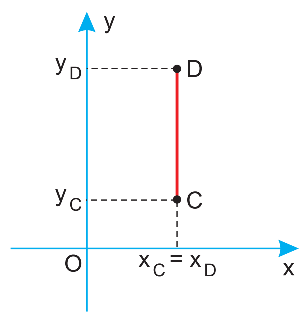
4. Segmento paralelo ao eixo das ordenadas

Dados dois pontos C $(x_C;\ y_C)$ e D $(x_D;\ y_D)$ distintos, o segmento de reta $\overline{CD}$ é **paralelo ao eixo das ordenadas** se, e somente se, **C** e **D** têm a **mesma abscissa**.

Simbolicamente:

$$\overline{CD}\ //\ \overrightarrow{Oy} \Leftrightarrow x_C = x_D$$

A medida do segmento $\overline{CD}$ é dada pelo módulo da diferença das ordenadas dos pontos **C** e **D**.



$$CD = |y_D - y_C|$$

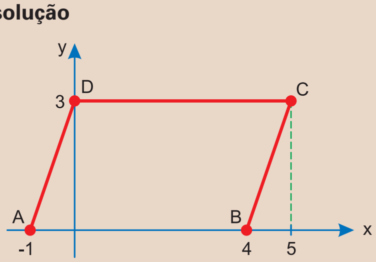
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M301**

Exercícios Resolvidos

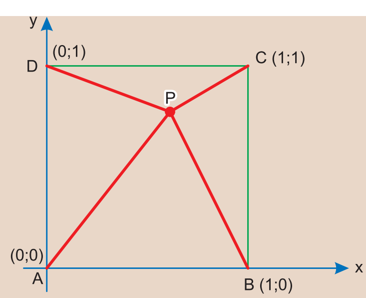
1 **(MODELO ENEM)** – Os pontos A (– 1; 0); B (4; 0) e C (5; 3) são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD. Determinar as coordenadas do vértice D.

Resolução

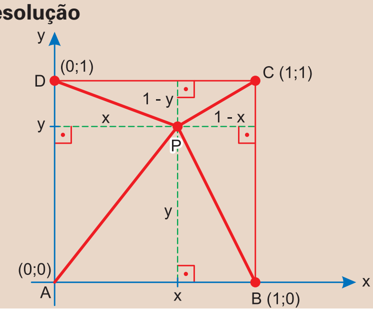


Resposta: D(0, 3)

2 **(UFLA – MODELO ENEM)** – Calcule as coordenadas do ponto P = (x,y), sabendo-se que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo PBC e que esse tem área igual ao dobro da área do triângulo PDC.



Resolução



$$\begin{cases} S_{APD} = 2 \cdot S_{PBC} \\ S_{PBC} = 2 \cdot S_{PDC} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 \cdot x}{2} = 2 \cdot \dfrac{1(1-x)}{2} \\[2mm] \dfrac{1(1-x)}{2} = 2 \cdot \dfrac{1(1-y)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

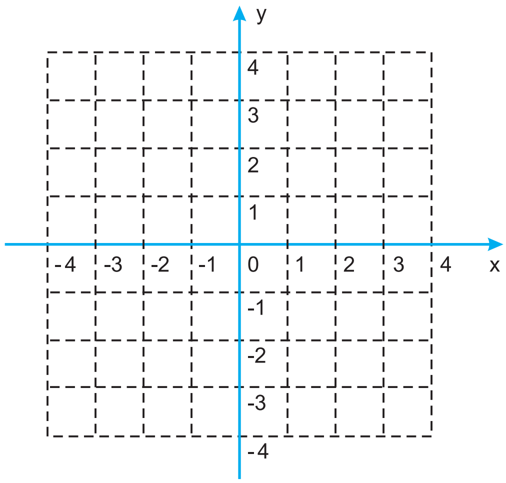
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\[2mm] y = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Resposta: As coordenadas do ponto P são $\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{5}{6}\right)$

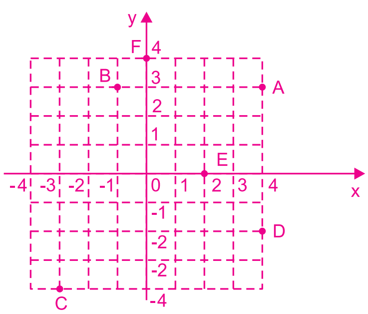
Exercícios Propostos

1 Representar no sistema de eixos cartesianos ortogonais os pontos:

A (4; 3); B (– 1; 3); C (– 3; – 4);
D (4; – 2); E (2, 0); F (0; 4);

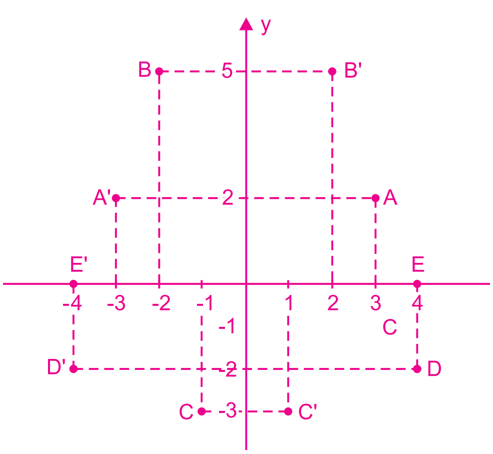


RESOLUÇÃO:



2 Dar as coordenadas dos pontos simétricos de A (3; 2), B (–2; 5), C (–1; –3), D (4; –2) e E (4; 0) em relação ao eixo das ordenadas.

RESOLUÇÃO:



A' (– 3; 2)
B' (2; 5)
C' (1; – 3)
D' (– 4; – 2)
E' (– 4; 0)

3 Dado o ponto P (x; y), determine a condição para que:

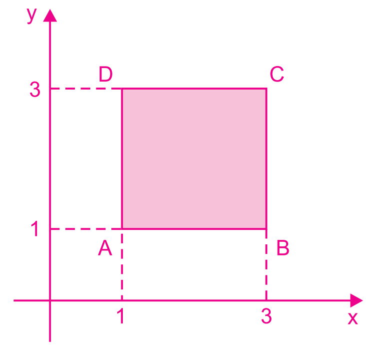
a) P pertença ao eixo x.
b) P pertença ao eixo y.
c) P pertença ao 2º quadrante (excluídos os eixos).
d) P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

RESOLUÇÃO:

a) y = 0 **b) x = 0**
c) x < 0 e y > 0 **d) y = x**

4 Num quadrado ABCD contido no 1º quadrante, temos: A(1; 1) e B(3; 1). Determinar as coordenadas dos vértices C e D.

RESOLUÇÃO:

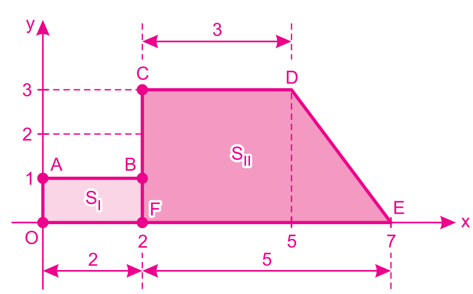


$\overline{AB} = 2 \Rightarrow$ **C(3; 3) e D(1; 3)**

5 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Considere os pontos do plano (0,0), (0,1), (2,1), (2,3), (5,3) e (7,0). Representando geometricamente esses pontos no plano cartesiano e ligando-os por meio de segmentos de retas obedecendo à sequência dada, após ligar o último ponto ao primeiro obtém-se uma região limitada do plano. Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região, em cm², é:

a) 9 b) 10 c) 13 d) 14 e) 15

RESOLUÇÃO:



Os pontos O (0; 0), A(0; 1), B(2; 1), C(2; 3), D(5; 3) e E(7; 0), são os vértices da região cuja área S é igual à área S_I do retângulo OABF, mais a área S_{II} do trapézio CDEF, onde F(2; 0).
Dessa forma, temos:

$$S = S_I + S_{II} = 2 \cdot 1 + \frac{(5+3) \cdot 3}{2} = 2 + 12 = 14.$$

Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região é igual a 14 cm².
Resposta: D

Módulo 34

Distância entre dois pontos

Palavra-chave:

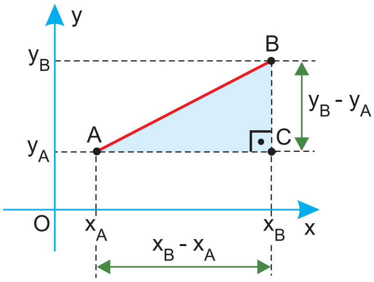
- Teorema de Pitágoras

Dados dois pontos A $(x_A; y_A)$ e B $(x_B; y_B)$ distintos, para calcularmos a distância entre os pontos **A** e **B**, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC da figura.

A distância entre os pontos **A** e **B** será indicada por $\mathbf{d_{AB}}$.

Assim, temos: $(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ e, portanto,

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Exercícios Resolvidos

1 Dados A (x; 6), B (– 1; 4) e C (5; 2), determinar o valor de **x** de modo que o triângulo ABC seja isósceles de base $\overline{BC}$

Resolução

Devemos ter $d_{BA} = d_{CA}$, então:

$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$

$= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (6 - 2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + 4 = (x - 5)^2 + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 4 = x^2 - 10x + 25 + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x = 36 \Leftrightarrow x = 3$

Resposta: x = 3

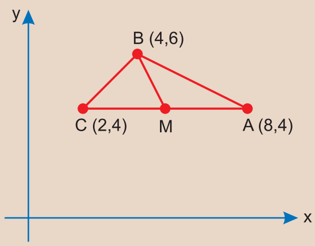
2 **(UNI.FED.PELOTAS)** – Na arquitetura, a Matemática é usada a todo momento. A Geometria é especialmente necessária no desenho de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir as medidas desses espaços. Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A (8, 4), B (4, 6) e C (2, 4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C, é colocado um suporte para luminárias. Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento,

a) $\sqrt{37}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\sqrt{5}$.
d) $\sqrt{13}$. e) $\sqrt{17}$.

Resolução

Se M é o ponto médio de $\overline{AC}$, então: M(5,4)

Assim: $MB = \sqrt{(5 - 4)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{5}$



Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Determinar o perímetro do triângulo ABC, dados: A (2; 2), B (– 2; 1) e C (– 1; 6)

RESOLUÇÃO:

I) $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{17}$

II) $d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$d_{BC} = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{1 + 25} \Rightarrow d_{BC} = \sqrt{26}$

III) $d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$d_{AC} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow d_{AC} = 5$

IV) O perímetro do triângulo ABC é $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 5$

2 Determinar no eixo das ordenadas o ponto **P**, cuja distância até o ponto A (4; 1) seja igual a 5 unidades.

RESOLUÇÃO:

Sendo P(0, y), A(4; 1) e $d_{AP} = 5$, temos

$\sqrt{(0-4)^2 + (y-1)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{16 + (y-1)^2} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow (y-1)^2 = 9 \Rightarrow y - 1 = \pm 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4$ **ou** $y = -2$

Logo, P(0; 4) ou P(0; – 2)

3 Determinar o ponto **P** do eixo das abscissas, equidistante dos pontos A (6; 5) e B (–2; 3).

RESOLUÇÃO:

Sendo $d_{AP} = d_{BP}$ e P(x, 0), temos:

$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$

$\sqrt{(x-6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (0-3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-6)^2 + 25 = (x+2)^2 + 9 \Rightarrow$

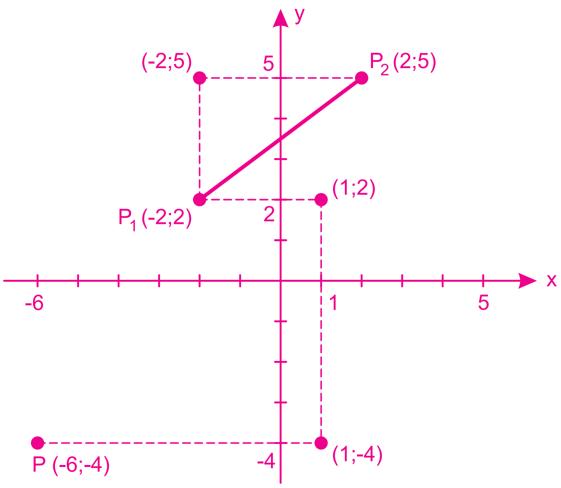
$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 9 \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3$

Logo, P(3; 0)

4 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, com os eixos graduados em quilômetros, uma lancha sai do ponto (– 6,– 4), navega 7 km para leste, 6 km para o norte e 3 km para oeste, encontrando um porto. Depois continua a navegação, indo 3 km para norte e 4 km para leste, encontrando um outro porto. A distância, em quilômetros, entre os portos é

a) 7 b) $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{7}$ e) 5

RESOLUÇÃO:



A lancha sai do ponto P(– 6; – 4), encontra o primeiro porto em P_1 (– 2; 2) e o segundo porto em P_2 (2; 5).

Assim, a distância, em quilômetros, entre os dois portos é a distância de P_1 a P_2.

$P_1P_2 = \sqrt{(2+2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

Resposta: E

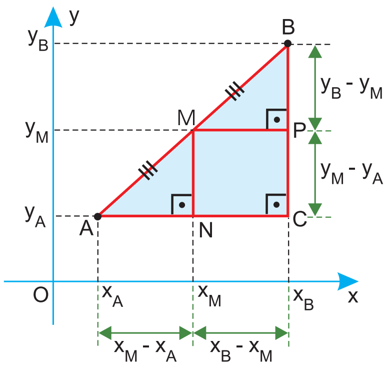
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M302**

Módulo 35 — Ponto médio de um segmento

Palavra-chave:
- Média aritmética

Dados os pontos A (x_A; y_A) e B (x_B; y_B) com A ≢ B, as coordenadas do ponto M, **médio de $\overline{AB}$**, são obtidas aplicando-se o Teorema de Tales, na figura abaixo.



I) Como $\overleftrightarrow{MN}$ // $\overleftrightarrow{BC}$, temos:

AM = MB ⇔ AN = NC ⇔ $x_M - x_A = x_B - x_M$ ⇔

⇔ $2x_M = x_A + x_B$ ⇔ $\boxed{x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$

II) Como $\overleftrightarrow{MP}$ // $\overleftrightarrow{AC}$, temos:

AM = MB ⇔ CP = PB ⇔ $y_M - y_A = y_B - y_M$ ⇔

⇔ $2y_M = y_A + y_B$ ⇔ $\boxed{y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$

Assim, temos:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

É importante notar que:

a) A abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$ é a média aritmética das abscissas dos pontos A e B.

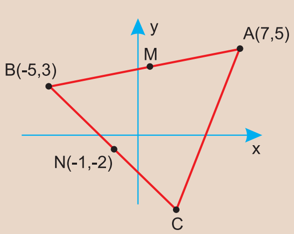
b) A ordenada do ponto médio de $\overline{AB}$ é a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B.

Exercícios Resolvidos

1 Na figura abaixo, determinar:

a) o ponto **M** (médio do lado $\overline{AB}$).

b) o ponto **C**, sabendo que **N** é ponto médio de $\overline{BC}$.



Resolução

a) $\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{7-5}{2} \Rightarrow x_M = 1 \\ y_M = \dfrac{5+3}{2} \Rightarrow y_M = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow M(1; 4)$

b) $\left.\begin{array}{l} -1 = \dfrac{-5 + x_C}{2} \Rightarrow -2 = -5 + x_C \Rightarrow x_C = 3 \\ -2 = \dfrac{3 + y_C}{2} \Rightarrow -4 = 3 + y_C \Rightarrow y_C = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

⇒ C(3; – 7)

2 Dados os pontos A(– 3; 6) e B(7; – 1), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

Se M(x_M; y_M) é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{(-3) + 7}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \dfrac{6 + (-1)}{2} = \dfrac{5}{2}$

Portanto, $M\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

3 Sabendo que as coordenadas do baricentro G de um triângulo ABC são dadas por $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$, obter o baricentro do triângulo de vértices A(– 2; 3), B(5; 2) e C(6; – 8).

Resolução

Sendo:

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{(-2) + 5 + 6}{3} = 3$ e

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{3 + 2 + (-8)}{3} = -1$,

temos G(3; – 1).

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em “localizar”, digite **MAT2M303**

Exercícios Propostos

1 Dados os pontos A (8; 7) e B (–2; – 3), determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

RESOLUÇÃO:

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \Rightarrow X_M = \frac{8 - 2}{2} \Rightarrow X_M = 3$$

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} \Rightarrow Y_M = \frac{7 - 3}{2} \Rightarrow Y_M = 2$$

Logo, M(3; 2)

2 Sendo M (– 2; 5) o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, determinar o ponto B (x_B; y_B) dado o ponto A (7; –1).

RESOLUÇÃO:

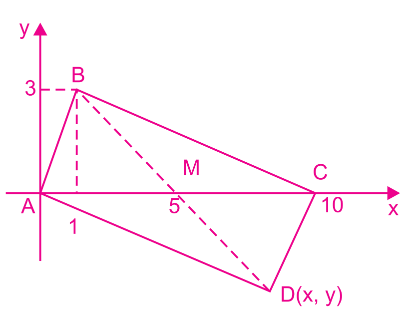
$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{7 + X_B}{2} \Rightarrow -4 = 7 + X_B \Rightarrow X_B = -11$$

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{-1 + Y_B}{2} \Rightarrow 10 = -1 + Y_B \Rightarrow Y_B = 11$$

Logo, B(– 11; 11)

3 Os pontos A(0; 0), B(1; 3) e C(10; 0) são vértices consecutivos de um retângulo ABCD. Determinar as coordenadas do vértice D do retângulo.

RESOLUÇÃO:



$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 5 = \frac{1 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 9$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = -3$$

Logo, D(9; – 3)

4 Determinar a medida da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC, sendo A(4;6), B(5;1) e C(1;3).

RESOLUÇÃO:

I)

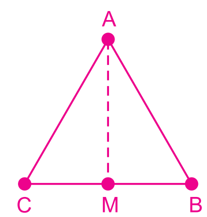
$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\[2ex] y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow M(3;2)$$

II) $d_{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$

$d_{AM} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (2 - 6)^2}$

$d_{AM} = \sqrt{1 + 16}$

$d_{AM} = \sqrt{17}$



5 **(UN.EST.MATO GROSSO – MODELO ENEM)** – Um topógrafo, que se encontrava no portão de saída da escola, foi chamado para medir a distância entre o local em que se encontrava até o latão de lixo reciclável (M), equidistante de 2 latões, A e B, de lixo não reciclável da escola. As coordenadas são A(2; 2), B(4; 8) e o local do topógrafo P(3; 9). Considerando todas as coordenadas em metros, calcule a distância do portão de saída (P) ao ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, o local do latão de lixo reciclável.

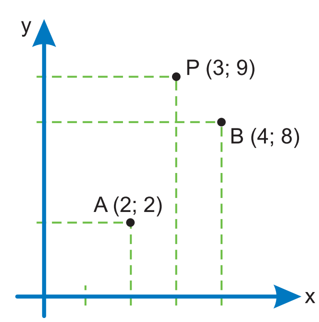
a) 2 m

b) 3 m

c) 5 m

d) 4 m

e) 1 m



RESOLUÇÃO:

Sendo M o ponto médio de AB e, sendo d, a distância entre o portão e o ponto médio de AB, temos:

$$M = \left(\frac{2+4}{2}; \frac{2+8}{2}\right) = (3;5) \text{ e } d = \sqrt{(3-3)^2 + (9-5)^2} = 4$$

Resposta: D

Módulo 36

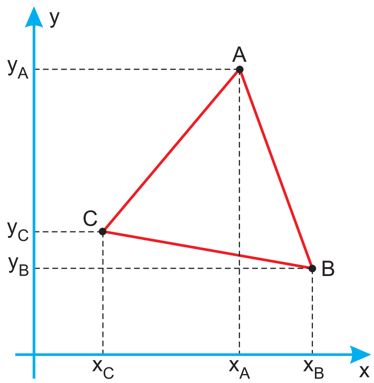
Área do triângulo e condição de alinhamento

Palavras-chave:
- Pontos colineares
- Determinante

1. Área do triângulo

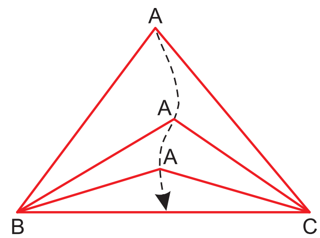
Dados três pontos A $(x_A; y_A)$, B $(x_B; y_B)$ e C $(x_C; y_C)$ não colineares, verifica-se que a área do triângulo ABC vale:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| \quad \text{onde } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$



A **ordem das linhas** da matriz que origina o determinante D é **qualquer**, tanto no cálculo da área do triângulo como na condição de alinhamento.

A condição de alinhamento de 3 pontos pode ser interpretada geometricamente a partir da área do triângulo, que é $\frac{1}{2} \cdot |D|$.



Se o ponto **A** tender ao lado $\overline{BC}$, a área do triângulo ABC será cada vez menor e podemos dizer que: **quando o ponto A estiver alinhado com o ponto B e o ponto C, o valor da área será nulo; daí:**

$$A_{\Delta ABC} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} |D| = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

2. Condição de alinhamento

Os pontos A $(x_A; y_A)$, B $(x_B; y_B)$ e C $(x_C; y_C)$ estão alinhados se, e somente se, o determinante **D** é **nulo**. Simbolicamente

$$A, B \text{ e } C \text{ estão alinhados} \Leftrightarrow D = 0$$

No Portal Objetivo

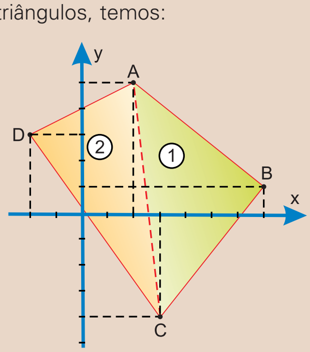
Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em “localizar”, digite **MAT2M304**

Exercícios Resolvidos

1 Achar a área do quadrilátero **ABCD**, dados A(2; 5), B(7; 1), C(3; – 4) e D(–2; 3).

Resolução

A partir da representação do quadrilátero no sistema cartesiano e em seguida dividindo-o em 2 triângulos, temos:



a) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = \dfrac{41}{2}$

b) $S_{\Delta ACD} = \dfrac{\left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = \dfrac{38}{2}$

A área do quadrilátero representa a soma das áreas dos triângulos, portanto:

$S_{ABCD} = \dfrac{41}{2} + \dfrac{38}{2} = \dfrac{79}{2} = 39{,}5$

Resposta: $S_{ABCD} = 39{,}5$u.a.

2 **(UNESP)** – Sejam P = (a,b), Q = (1,3) e R = (–1,–1) pontos do plano. Se a + b = 7, determine P de modo que P, Q e R sejam colineares.

Resolução

1) Se P = (a;b), Q(1;3) e R = (– 1; – 1) são colineares, então:

$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a - b + 1 = 0$

2) Como a + b = 7, então:

$a + b + 2a - b + 1 = 7 + 0 \Leftrightarrow a = 2$

Assim: $2 \cdot 2 - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 5$

Resposta: P = (2; 5)

Exercícios Propostos

1 Determinar a área dos triângulos, em cada caso:

a) A(– 2; 3), B(4; – 1) e C(5; 7)

b) P(1; 2), Q(– 3; 1) e R(4; – 5)

RESOLUÇÃO:

a) $$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$S = \frac{1}{2}\left|2 + 28 + 15 + 5 + 14 - 12\right|$$

$$S = \frac{1}{2}\left|52\right| \Rightarrow S = 26$$

b) $$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$S = \frac{1}{2}\left|1 + 15 + 8 - 4 + 5 + 6\right|$$

$$S = \frac{1}{2}\left|31\right| \Rightarrow S = \frac{31}{2}$$

2 Dados A (x; 2), B (3; 1) e C (–1; –2), determinar o valor de **x**, sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 4.

RESOLUÇÃO:

$$S = 4 \text{ e } S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$4 = \frac{1}{2}\left|x - 6 - 2 + 1 + 2x - 6\right| \Rightarrow \left|3x - 13\right| = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 13 = 8 \\ \text{ou} \\ 3x - 13 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

3 Verificar se os pontos A(–2; –3), B(1; 2) e C(5; 4) estão alinhados.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 - 15 - 10 + 8 + 3 = -14 \neq 0$$

Logo, os pontos não estão alinhados.

4 Para que valor de **m**, os pontos A(0; m), B(– 2; 4) e C(1; – 3) estão alinhados?

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$6 + m - 4 + 2m = 0$

$3m + 2 = 0$

$m = -\frac{2}{3}$

5 **(VUNESP)** – Num surto de dengue, o departamento de saúde de uma cidade quer que seus técnicos visitem todas as casas existentes na região limitada por um triângulo de vértices nos três focos em que a doença foi encontrada. Para facilitar essa ação, colocou o mapa da cidade sobre um plano cartesiano, com escala 1:1km, e verificou que os focos se localizavam sobre os pontos (2; 5), (– 3; 4) e (2; – 3). Como cada especialista será responsável por 2 km² de área nessa região triangular, o número de técnicos necessários e suficientes será igual a

a) 20. b) 18. c) 16. d) 12. e) 10.

RESOLUÇÃO:

Os 3 focos constituem um triângulo cuja área é igual a:

$$A_\Delta = \left|\frac{\left\|\begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{matrix}\right\|}{2}\right| = \left|\frac{40}{2}\right| = 20 \text{ km}^2$$

Como cada especialista será responsável por 2 km² de área, o número de técnicos necessários e suficientes será 10.

Resposta: E

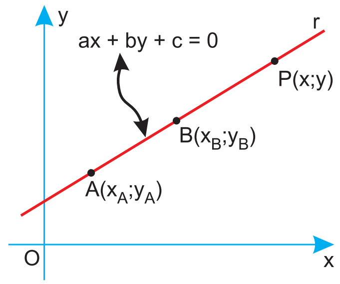
Módulo 37

Equação da reta

Palavra-chave:

• Pontos alinhados

1. Equação geral da reta



A toda reta **r** do plano cartesiano associa-se uma equação do tipo **ax + by + c = 0**, com **a** e **b** não simultaneamente nulos, que é denominada **equação geral da reta**.

2. Determinação da equação geral

Seja **r** a reta do plano cartesiano determinada pelos pontos distintos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$. Sendo P (x; y) um ponto qualquer de **r**, temos:

$$\text{P, A e B alinhados} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, resulta:

$$y_A\,x + x_B\,y + x_Ay_B - x_By_A - x_Ay - y_Bx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_A - y_B)\,x + (x_B - x_A)\,y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0$$

Substituindo os números $y_A - y_B$, $x_B - x_A$ e $x_Ay_B - x_By_A$, respectivamente, por **a**, **b** e **c**, obtemos

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

que é a **equação geral da reta**.

Observações:

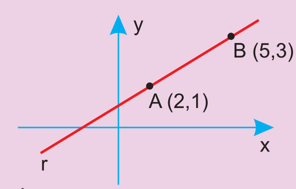
a) Na equação ax + by + c = 0, **a** e **b** não são simultaneamente nulos, pois se a = b = 0 os pontos **A** e **B** coincidem.

b) Dizer que ax + by + c = 0 é equação da reta **r** significa que

$$P(x_P; y_P) \in r \Leftrightarrow a \,.\, x_P + b \,.\, y_P + c = 0$$

Saiba mais

A equação da reta r



representada na figura é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$$

Exercícios Resolvidos

1 Dados os pontos A(2; 1) e B(3; 2), determine a equação geral da reta AB. Em seguida, esboce o seu gráfico no sistema cartesiano.

Resolução

I) Seja P(x; y) um ponto genérico da reta determinada por A e B.

A equação geral é obtida fazendo-se

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

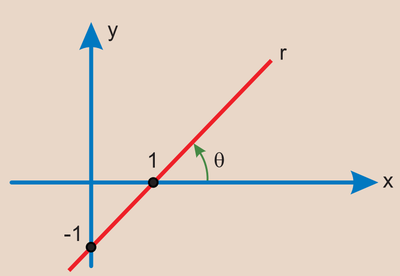
$\Leftrightarrow x + 3y + 4 - 3 - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$ (equação geral)

II) Para $x = 0 \Rightarrow 0 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

III) Para $y = 0 \Rightarrow x - 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

IV) O gráfico é



2 Dados os pontos A(– 1; 3) e B(4; – 2), determinar a equação geral da reta AB. Esboçar o seu gráfico no sistema cartesiano.

Resolução

I) A equação geral é obtida fazendo-se

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

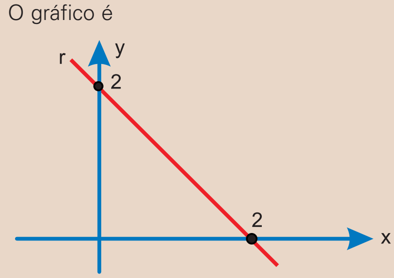
$\Leftrightarrow 3x + 4y + 2 - 12 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ (equação geral)

II) Para $x = 0 \Rightarrow 0 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

III) Para $y = 0 \Rightarrow x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

IV) O gráfico é



Exercícios Propostos

1 Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A (–1; 3) e B (2; 1).

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0$$

2 A equação geral da reta que passa pela origem e pelo ponto (–2; – 3) é

a) – 2x + 3y = 0 b) 2x + 3y = 0 c) x – 3y = 0
d) 3x – 2y = 0 e) – 3x + y = 0

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$$

Resposta: D

3 Determinar a equação geral da reta suporte da mediana do vértice A do triângulo ABC onde A(2; 1); B(– 3; 5) e C(– 1; – 1).

RESOLUÇÃO:

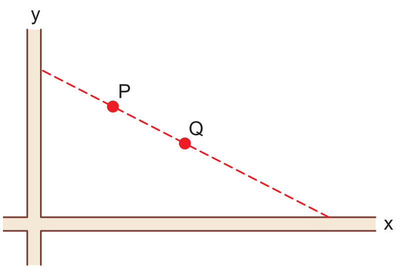
$$\text{I. } M_{BC}\left(\frac{-3-1}{2}; \frac{5-1}{2}\right) \Leftrightarrow M_{BC}(-2; 2)$$

$$\text{II. } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 6 = 0$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M305**

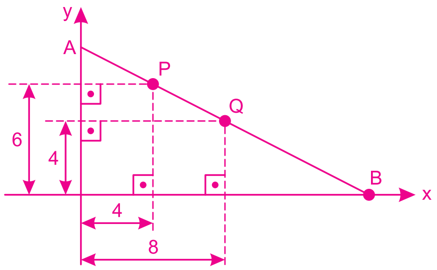
4 **(UNIV.FED.RIO GRANDE DO NORTE)** – A figura abaixo mostra um terreno às margens de duas estradas, X e Y, que são perpendiculares. O proprietário deseja construir uma tubulação reta passando pelos pontos P e Q (veja a figura ao lado).



O ponto P dista 6 km da estrada X e 4 km da estrada Y, e o ponto Q está a 4 km da estrada X e a 8 km da estrada Y.

a) Determine as coordenadas dos pontos P e Q em relação ao sistema de eixos formado pelas margens das estradas.
b) Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q.
c) Determine a quantos quilômetros da margem da estrada Y a tubulação cortará a estrada X.

RESOLUÇÃO:
A partir do enunciado temos:



a) P(4; 6)
Q(8; 4)

b) Equação da reta PQ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x + 8y + 16 - 48 - 4y - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 32 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 16 = 0$$

c) O ponto B é o ponto em que a tubulação corta a margem x, assim: y = 0 ⇒ x – 16 = 0 ⇔ x = 16
Portanto, B(16; 0), e a distância à margem y é igual a 16 km.

Módulo 38

Posições particulares da reta

Palavras-chave:

• Origem • Vertical • Horizontal

A equação geral de uma reta é do tipo **ax + by + c = 0** com **a** e **b** não simultaneamente nulos. Se um dos três coeficientes for nulo, então a reta será paralela a um dos eixos ou passará pela origem do sistema cartesiano, como veremos a seguir.

1. Reta paralela ao eixo y

Se **a ≠ 0** e **b = 0**, então a equação ax + by + c = 0 se transforma em

$$ax + 0y + c = 0 \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}.$$

Representando por k a constante $-\frac{c}{a}$, podemos escrever $\boxed{x = k}$.

A reta de equação x = k é paralela ao eixo y, pois é o lugar geométrico dos pontos de abscissa **k**.

2. Reta paralela ao eixo x

Se **a = 0** e **b ≠ 0**, então a equação ax + by + c = 0 se transforma em $0x + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -c \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$.

Representando por **k** a constante $-\frac{c}{b}$, podemos escrever $\boxed{y = k}$.

A reta de equação y = k é paralela ao eixo x, pois é o lugar geométrico dos pontos da ordenada **k**.

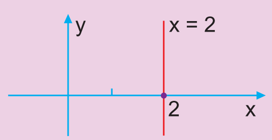
3. Reta que contém a origem

Se **c = 0**, então a equação ax + by + c = 0 se transforma em $\boxed{ax + by = 0}$.

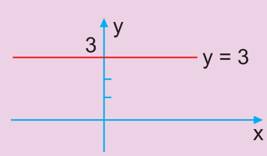
A reta de equação ax + by = 0 contém a origem do sistema, pois a . 0 + b . 0 = 0, ∀a, b ∈ ℝ.

Saiba mais

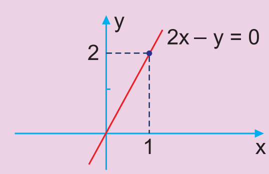
A reta de equação x = 2 é o lugar geométrico dos pontos de abscissa 2 e, portanto, dos pontos de coordenadas (2; y). Logo:



A reta de equação y = 3 é o lugar geométrico dos pontos de ordenada 3 e, portanto, dos pontos de coordenadas (x; 3). Logo:



A reta de equação 2x – y = 0 contém a origem do sistema e sua representação é



Exercícios Resolvidos

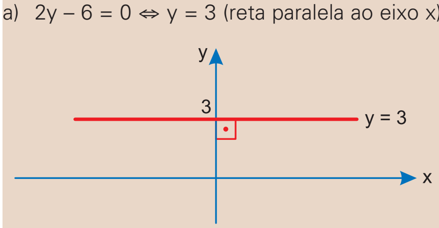
1 **(FGV)** – Represente graficamente os pontos do plano cartesiano que satisfazem cada uma das relações abaixo.

a) 2 . y – 6 = 0

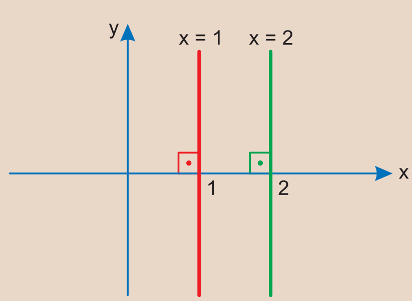
b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Resolução

a) 2y – 6 = 0 ⇔ y = 3 (reta paralela ao eixo x)



b) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ (retas paralelas ao eixo y)

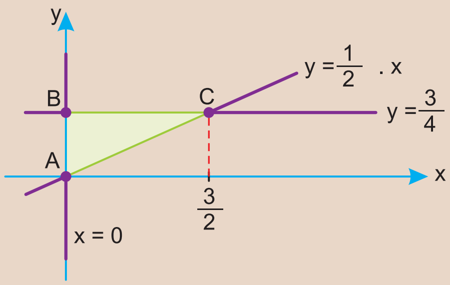


2 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – As retas $y = \frac{1}{2} . x$, $y = \frac{3}{4}$ e $x = 0$ definem um triângulo, cuja raiz quadrada positiva da área é

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{5}$

Resolução



Os vértices A, B e C do triângulo são

A(0;0), B $\left(0; \frac{3}{4}\right)$ e C $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ e a área vale

$$A = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{16}$$

A raiz quadrada positiva da área é $\frac{3}{4}$.

Resposta: A

Exercícios Propostos

1 Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A (3; 1) e B (5; 1).

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 3 + 5y - 5 - x - 3y = 0$

$2y - 2 = 0$

$y - 1 = 0$ **(reta horizontal)**

2 Represente graficamente as equações:

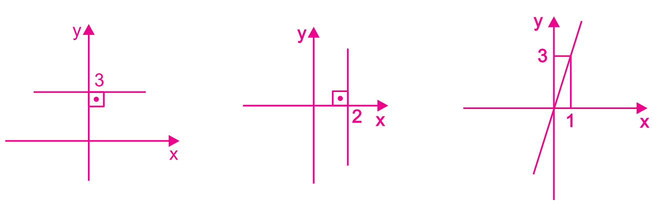
a) $3y - 9 = 0$ b) $2x - 4 = 0$ c) $3x - y = 0$

RESOLUÇÃO:

a) $3y - 9 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 3$ **(horizontal)**

b) $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 2$ **(vertical)**

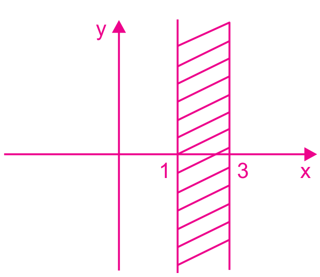
c) $3x - y = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 3x$ **(passa pela origem)**



3 Represente graficamente os pontos (x, y) do plano, tais que $1 \leqslant x \leqslant 3$.

RESOLUÇÃO:

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \text{e} \\ x \leqslant 3 \end{cases}$$



4 Determine o ponto de intersecção das retas de equações $x + 2y + 1 = 0$ e $2x + y - 4 = 0$

RESOLUÇÃO:

Para que o par ordenado P(x;y) represente o ponto de intersecção, ele deve satisfazer as equações das retas simultaneamente, portanto, será a solução do sistema abaixo:

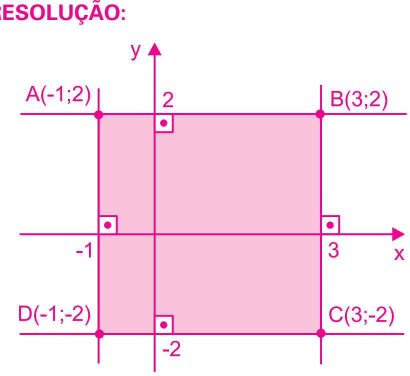
$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -4x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Portanto, o ponto de intersecção das retas é P(3; – 2).

5 **(MODELO ENEM)** – As retas de equações x = –1, x = 3 e y = 2, são retas suportes dos lados de um quadrado. Determinar os vértices do quadrado, sabendo-se que um dos vértices pertence ao 4º quadrante.

RESOLUÇÃO:



Resposta: Os vértices do quadrado são A(– 1; 2), B(3; 2), C(3; – 2) e D(– 1; – 2)

Módulo 39

Semiplanos

Palavra-chave:

• Inequação

Dizer que $ax + by + c = 0$ é a equação da reta **r** significa que todos os pontos de **r**, **e somente eles**, verificam a equação. Assim sendo:

$P(x_0, y_0) \in r \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$

$P(x_0, y_0) \notin r \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c > 0$ ou $ax_0 + by_0 + c < 0$

Demonstra-se que $ax_0 + by_0 + c > 0$ para todos os pontos de um dos semiplanos determinados por **r** e que $ax_0 + by_0 + c < 0$ para todos os pontos do outro semiplano, excluindo os pontos de **r**.

Conclusão

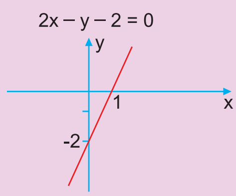
A reta **r**, de equação $ax + by + c = 0$, divide o plano cartesiano em dois semiplanos aos quais pertence.

A sentença $\mathbf{ax + by + c \geqslant 0}$ determina um destes semiplanos e a sentença $\mathbf{ax + by + c \leqslant 0}$ determina o outro semiplano.

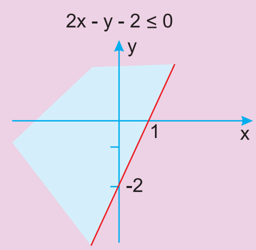
O semiplano pode ser identificado analisando-se a posição de um dos pontos não pertencentes à reta. Utiliza-se normalmente o ponto (0; 0). Se a reta passar pela origem, pode-se utilizar o ponto (1; 0) ou o ponto (0; 1).

Saiba mais

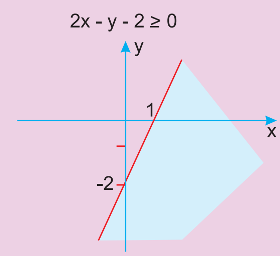
A reta de equação $2x - y - 2 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



A sentença $2x - y - 2 \leqslant 0$, representa o semiplano que contém a origem, pois o ponto (0; 0) é solução da inequação, ou seja, $2 \cdot 0 - 0 - 2 \leqslant 0$.



A sentença $2x - y - 2 \geqslant 0$ representa, por exclusão, o semiplano que não contém a origem.

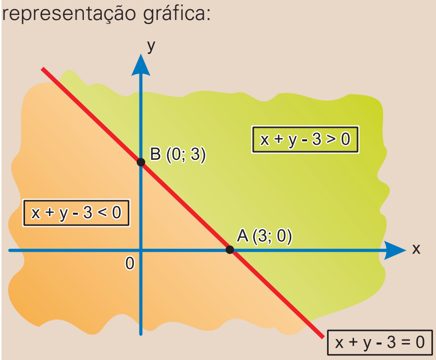


Exercícios Resolvidos

1 Estudar o sinal dos semiplanos determinados pela reta $x + y - 3 = 0$.

Resolução

Os interceptos A(3; 0) e B(0; 3) determinam a posição da reta no sistema de coordenadas. A determinação do sinal dos semiplanos é feita a partir da regra prática: $x + y - 3 = 0$ e $O(0; 0) \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 + 0 - 3 < 0$, que permite concluir que o semiplano que contém a origem corresponde à sentença $x + y - 3 < 0$, e o semiplano que não contém a origem corresponde à sentença $x + y - 3 > 0$. Dessa forma, temos a seguinte representação gráfica:



2 Determinar a região do plano cartesiano cujos pontos têm coordenadas (x; y) satisfazendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 \leq 0 & \text{①} \\ 2x - y + 4 \geq 0 & \text{②} \end{cases}$$

Resolução

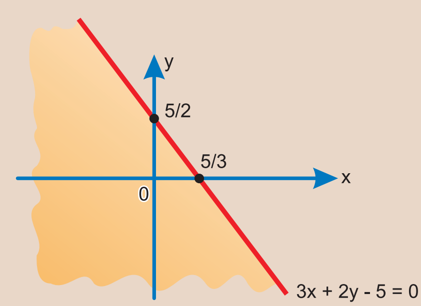
a) A reta $3x + 2y - 5 = 0$ tem interceptos $\left(\dfrac{5}{3}; 0\right)$ com o eixo das abscissas e $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$ com o eixo das ordenadas.

b) Posição da origem em relação à reta $3x + 2y - 5 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y - 5 \\ O\ (0;\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 5 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ em relação à reta $3x + 2y - 5 = 0$, o semiplano que contém a origem é $3x + 2y - 5 < 0$.

A representação gráfica da inequação $3x + 2y - 5 \leq 0$ é:



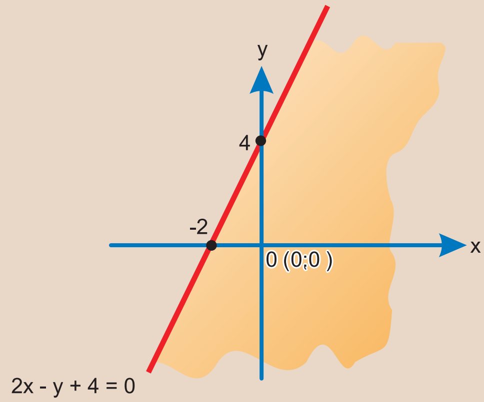
c) A reta $2x - y + 4 = 0$ tem interceptos $(-2; 0)$ com o eixo das abscissas e $(0; 4)$ com o eixo das ordenadas.

d) Posição da origem em relação à reta $2x - y + 4 = 0$:

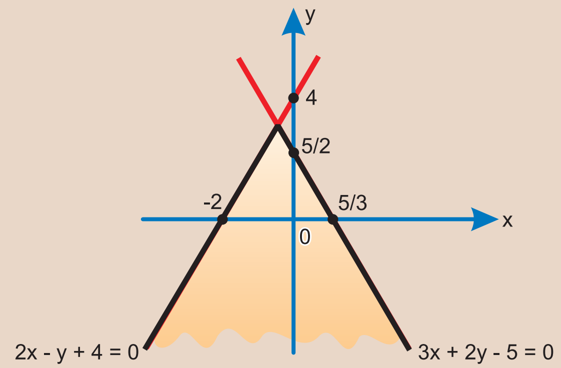
$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 4 \\ O\ (0;\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + 4 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ em relação à reta $2x - y + 4 = 0$, o semiplano que contém a origem é $2x - y + 4 > 0$.

A representação gráfica da inequação $2x - y + 4 \geq 0$ é:



e) A solução do problema será a **intersecção** das soluções das inequações ① e ②. Portanto:



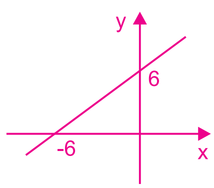
Exercícios Propostos

1 Representar a reta $x - y + 6 = 0$, no sistema de eixos cartesianos.

RESOLUÇÃO:

$x - y + 6 = 0$

x	y
0	6
– 6	0

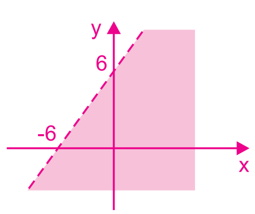


2 Representar graficamente os pontos do plano tais que $x - y + 6 > 0$.

RESOLUÇÃO:

Para o ponto (0; 0), temos:

$0 - 0 + 6 > 0$



3 Representar graficamente a inequação $3x - y - 6 \leq 0$.

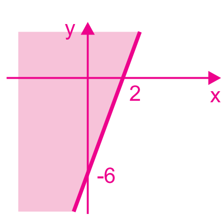
RESOLUÇÃO:

I) Na reta $3x - y - 6 = 0$ temos:

x	y
0	– 6
2	0

II) Para o ponto, (0; 0), temos:

$3 \cdot 0 - 0 - 6 < 0$



4 Determinar graficamente a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \leq 0 \\ 3x + 2y - 6 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

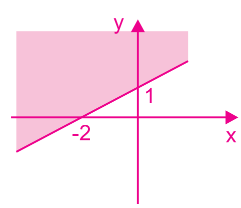
I. $x - 2y + 2 \leq 0$

Na reta $x - 2y + 2 = 0$ temos:

x	y
0	1
– 2	0

Para o ponto (0; 0), temos:

$0 - 2 \cdot 0 + 2 > 0$



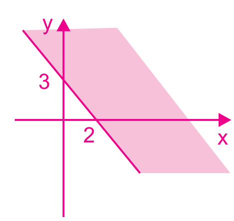
II) $3x + 2y - 6 \geq 0$

Na reta $3x + 2y - 6 = 0$, temos:

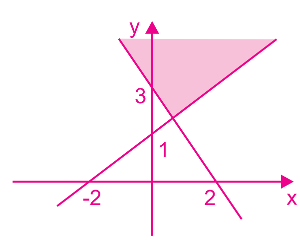
x	y
0	3
2	0

Para o ponto (0; 0), temos:

$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 < 0$



De I e II, temos:



5 **(FGV)** – A reta $\mathbf{x + 3y - 3 = 0}$ divide o plano determinado pelo sistema cartesiano de eixos em dois semiplanos opostos. Cada um dos pontos **(– 2, 2)** e **(5, b)** está situado em um desses dois semiplanos. Um possível valor de **b** é

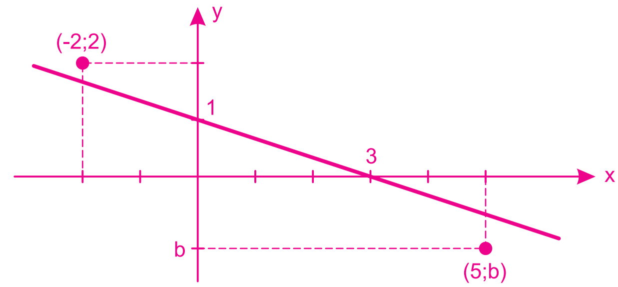
a) $\dfrac{1}{4}$ b) $-\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $-\dfrac{3}{4}$ e) $-\dfrac{1}{2}$

RESOLUÇÃO:

Como (– 2, 2) e (5, b) estão em semiplanos opostos em relação à reta de equação $x + 3y - 3 = 0$ e $(-2) + 3 \cdot 2 - 3 > 0$, devemos ter

$5 + 3 \cdot b - 3 < 0 \Leftrightarrow b < -\dfrac{2}{3}$

Das alternativas apresentadas, somente $-\dfrac{3}{4}$ é menor que $-\dfrac{2}{3}$.



Resposta: D

Módulo 40

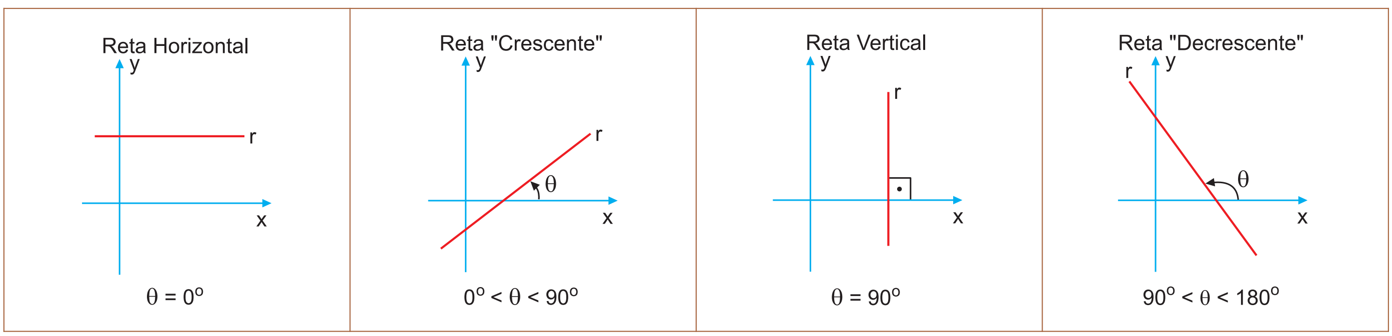
Coeficiente angular e equação reduzida

Palavras-chave:

• Inclinação da reta • Tangente

1. Inclinação

A **inclinação** da reta **r** é o ângulo "convexo" θ entre o eixo **x** e a reta **r**, sempre medido de **x** para **r** no sentido anti-horário. As únicas situações possíveis são:



2. Coeficiente angular

O **coeficiente angular** ou **declividade** da reta **r**, não vertical, é a tangente trigonométrica do ângulo θ. É, geralmente, representado por **m**.

Assim:

$$\boxed{m = \text{tg}\,\theta}$$

Observe que

a) Se **r** for **horizontal**, então θ = 0° e, portanto, **m = 0**.

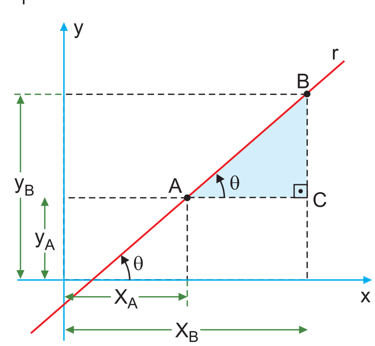
b) Se **r** for **"crescente"**, então 0° < θ < 90° e, portanto, **m > 0**.

c) Se **r** for **vertical**, então θ = 90° e, portanto, **não existe m**.

d) Se **r** for **"decrescente"**, então 90° < θ < 180° e, portanto, **m < 0**.

3. Como obter m, dados dois pontos

Seja **r** uma reta, não vertical, e sejam A $(x_A; y_A)$ e B $(x_B; y_B)$ dois pontos distintos de **r**.



No triângulo retângulo ABC, temos:

$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo: $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

4. Como obter m tendo a equação geral da reta

Seja **r** a reta, não vertical, de equação $ax + by + c = 0$ e **A** e **B** seus interceptos.

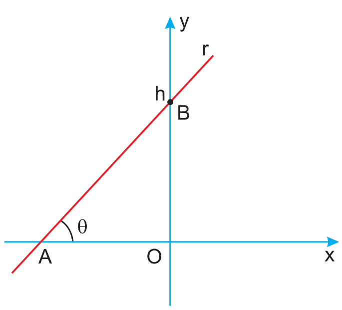
Fazendo $y = 0$ obtemos o ponto $A\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$, pois $ax + b.0 + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a}$.

Fazendo $x = 0$ obtemos o ponto $B\left(0; -\dfrac{c}{b}\right)$, pois $a.0 + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{c}{b}$.

No triângulo retângulo AOB, temos:

$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\left(-\dfrac{c}{b} - 0\right)}{0 - \left(-\dfrac{c}{a}\right)} = \frac{-\dfrac{c}{b}}{\dfrac{c}{a}} = -\frac{a}{b}$$

Logo: $\boxed{m = -\dfrac{a}{b}}$



Saiba mais

1. O coeficiente angular (declividade) da reta que passa pelos pontos $A(-1; 3)$ e $B(2; 5)$ é

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

2. O coeficiente angular (declividade) da reta com equação geral $\underset{a}{3}x \underset{b}{-7}y + 1 = 0$ é

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$$

5. Equação reduzida

Se a reta **r** de equação $ax + by + c = 0$ **não for vertical**, então $\mathbf{b \neq 0}$ e, portanto,

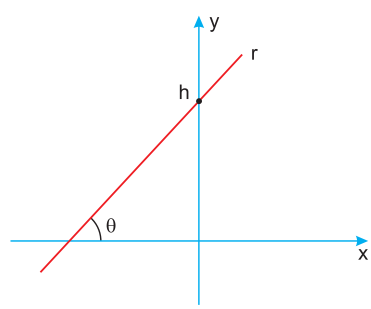
$$by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b} . x - \frac{c}{b} .$$

A constante $-\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, como já foi visto, é o **coeficiente angular da reta** e é representada por **m**.

A constante $-\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$ é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo **y**.

Esta constante é chamada **coeficiente linear da reta** e é representada por **h**.

Podemos, então, escrever $\boxed{y = m\,x + h}$, chamada da **equação reduzida da reta**.



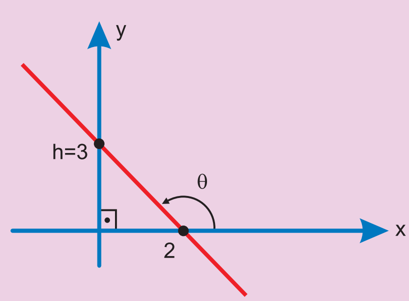
m = tgθ é o coeficiente angular
h é o coeficiente linear

Saiba mais

A equação reduzida da reta, a partir da equação geral $3x + 2y - 6 = 0$, é obtida isolando-se "y".
Portanto: $3x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x + 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{2} . x + 3.$

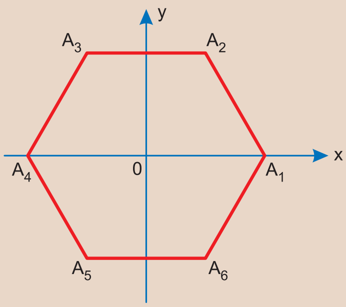
Note que:
– coeficiente angular: $m = -\dfrac{3}{2}$
– coeficiente linear (intersecção com eixo y): $h = 3$
– intersecção com eixo x: $y = 0 \Rightarrow x = 2$

– gráfico:



Exercícios Resolvidos

1 Na figura a seguir, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 são vértices de um hexágono regular de lado 3 com centro na origem O de um sistema de coordenadas no plano. Os vértices A_1 e A_4 pertencem ao eixo x.



Determinar a inclinação e o coeficiente angular

a) da reta $\overleftrightarrow{A_3A_4}$

b) da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$

Resolução

Se o polígono é um hexágono regular, temos:

a) inclinação: $O\hat{A}_4A_3 = 60°$

coeficiente angular: $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

b) inclinação: $\theta = 120°$

coeficiente angular: $m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

2 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q, sendo P = (2, 1) e Q o simétrico, em relação ao eixo y, do ponto Q' = (1, 2) são, respectivamente:

a) $\frac{1}{3}$; $x - 3y - 5 = 0$.

b) $\frac{2}{3}$; $2x - 3y - 1 = 0$.

c) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$.

d) $\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$.

e) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y + 5 = 0$.

Resolução

1) O ponto Q, simétrico de Q'(1;2) em relação ao eixo y, é o ponto Q(– 1;2).

2) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos P(2;1) e Q(– 1;2) é:

$$m_{PQ} = \frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

3) A reta r que passa pelos pontos Q(–1;2) e P(2;1) é

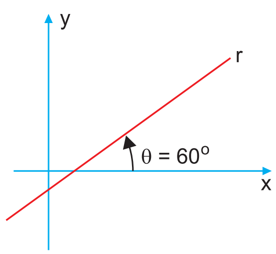
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$$

Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Determinar o coeficiente angular das retas abaixo:

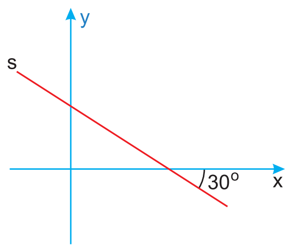
a)



RESOLUÇÃO:

$m_r = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

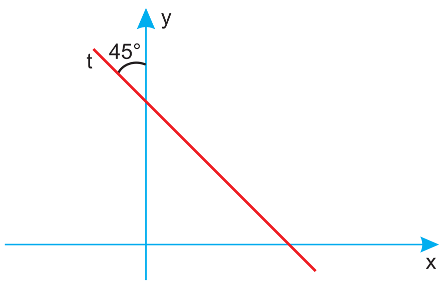
b)



RESOLUÇÃO:

$m_s = \text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

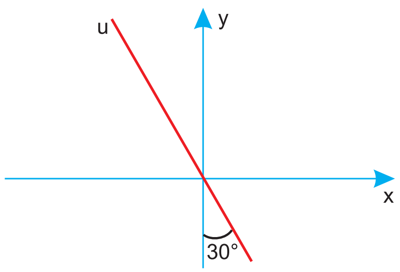
c)



RESOLUÇÃO:

$m_t = \text{tg } 135° = -\text{tg } 45° = -1$

d)

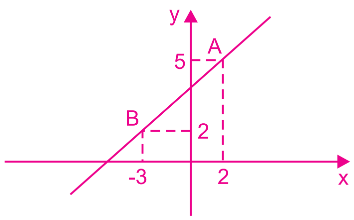


RESOLUÇÃO:

$m_u = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

2 Obter a declividade da reta que passa pelos pontos A (2; 5) e B (–3; 2).

RESOLUÇÃO:



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{2 - 5}{-3 - 2} = \frac{3}{5}$$

(declividade ou coeficiente angular)

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M306**

3 Dada a equação geral $2x - 3y + 5 = 0$, obter a equação reduzida e os coeficientes angular e linear.

RESOLUÇÃO:

I) $2x - 3y + 5 = 0$

$3y = 2x + 5$

$y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3}$ **(equação reduzida)**

II) **coeficiente angular:** $m = \dfrac{2}{3}$

coeficiente linear: $h = \dfrac{5}{3}$

4 Obter a equação reduzida, o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(2; 3) e B(–1; – 2).

RESOLUÇÃO:

I) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 - y + 3 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y = 5x - 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$ **(eq. reduzida)**

II) **coeficiente angular:** $m = \dfrac{5}{3}$

III) **coeficiente linear:** $h = -\dfrac{1}{3}$

Módulo 41 — Posições relativas entre duas retas

Palavras-chave:

• Concorrentes • Paralelas

Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ duas retas do plano cartesiano, não paralelas aos eixos, assim caracterizadas:

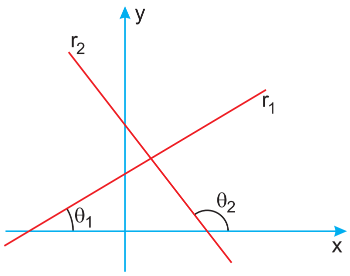
	Equação geral	Equação reduzida	Coeficiente angular	Coeficiente linear
Reta r_1	$a_1x + b_1y + c_1 = 0$	$y = m_1x + h_1$	$m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$	$h_1 = -\dfrac{c_1}{b_1}$
Reta r_2	$a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$y = m_2x + h_2$	$m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$	$h_2 = -\dfrac{c_2}{b_2}$

Analisando os coeficientes das equações é possível concluir se as retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ são **concorrentes** ou **paralelas distintas** ou **coincidentes**, como veremos a seguir.

1. Retas concorrentes

Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ forem **concorrentes**, então $\theta_1 \neq \theta_2$ e, portanto,

$$\text{tg}\,\theta_1 \neq \text{tg}\,\theta_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_1}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



Conclusão

As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ serão **concorrentes** se, e somente se,

$$m_1 \neq m_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

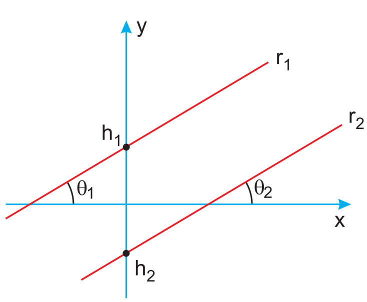
2. Retas paralelas distintas

Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ forem **paralelas distintas**, então $\theta_1 = \theta_2$ e $h_1 \neq h_2$ e, portanto,

$$\text{tg}\,\theta_1 = \text{tg}\,\theta_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e}$$

$$h_1 \neq h_2 \Leftrightarrow -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Conclusão

As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ serão **paralelas distintas** se, e somente se,

$$m_1 = m_2 \text{ e } h_1 \neq h_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

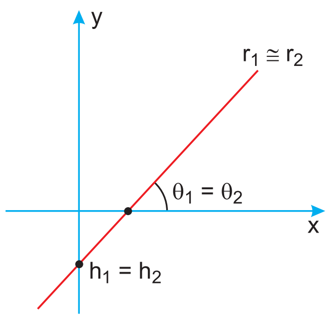
3. Retas coincidentes

Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ forem coincidentes, então $\theta_1 = \theta_2$ e $h_1 = h_2$ e, portanto,

$$\text{tg}\,\theta_1 = \text{tg}\,\theta_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e}$$

$$h_1 = h_2 \Leftrightarrow -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Conclusão

As retas $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ serão **coincidentes** se, e somente se,

$$m_1 = m_2 \text{ e } h_1 = h_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

4. Resumo

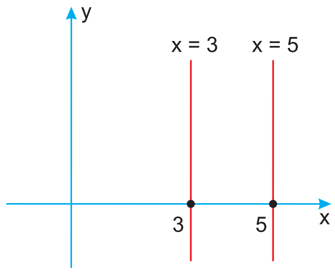
	Na equação reduzida	Na equação geral
Reta concorrentes	$m_1 \neq m_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
Retas paralelas distintas	$m_1 = m_2$ e $h_1 \neq h_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
Retas coincidentes	$m_1 = m_2$ e $h_1 = h_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

5. Casos particulares

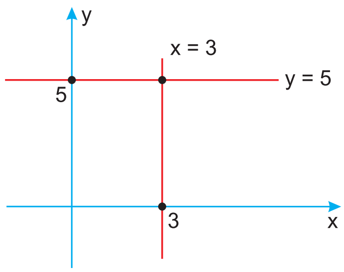
Se pelo menos uma das retas for paralela a um dos eixos, a conclusão é imediata.

De fato:

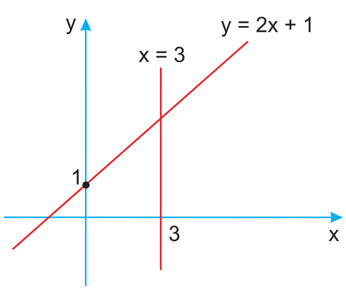
a) A reta de equação x = 3 é paralela à reta de equação x = 5.



b) A reta de equação x = 3 é concorrente com a reta de equação y = 5.



c) A reta de equação x = 3 é concorrente com a reta de equação y = 2x + 1.



Saiba mais

1. A reta **r** de equação 3x + y – 5 = 0 tem coeficiente angular $m_r = -3$ e coeficiente linear $h_r = 5$.

   A reta **s** de equação 3x + y – 7 = 0 tem coeficiente angular $m_s = -3$ e coeficiente linear $h_s = 7$.

   As retas **r** e **s** são paralelas distintas, pois $m_r = m_s$ e $h_r \neq h_s$.

2. A reta **t** de equação 4x – 2y + 1 = 0 tem coeficiente angular $m_t = 2$.

   A reta **u** de equação 5x – y + 3 = 0 tem coeficiente angular $m_u = 5$.

   As retas **t** e **u** são concorrentes pois $m_t \neq m_u$.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em “localizar”, digite **MAT2M307**

Exercícios Resolvidos

1 Determine a posição relativa das seguintes retas tomadas duas a duas:

(r) 2x – y + 3 = 0 (s) 3x – 6y + 3 = 0

(t) x – 2y + 3 = 0 (u) 2x + 4y + 3 = 0

(v) 4x – 2y + 6 = 0

Resolução

a) retas **r** e **s**: $\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-6} \Rightarrow$ **r** e **s** são concorrentes

b) retas **r** e **t**: $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2} \Rightarrow$ **r** e **t** são concorrentes

c) retas **r** e **v**: $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \Rightarrow$ **r** e **v** são coincidentes

d) retas **s** e **t**: $\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} \neq \frac{3}{3} \Rightarrow$ **s** e **t** são paralelas (distintas)

e) retas **s** e **u**: $\frac{3}{2} \neq \frac{-6}{4} \Rightarrow$ **s** e **u** são concorrentes

f) retas **s** e **v**: $\frac{3}{4} \neq \frac{-6}{-2} \Rightarrow$ **s** e **v** são concorrentes

g) retas **t** e **u**: $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{4} \Rightarrow$ **t** e **u** são concorrentes

h) retas **t** e **v**: $\frac{1}{4} \neq \frac{-2}{-2} \Rightarrow$ **t** e **v** são concorrentes

2 **(VUNESP)** – Sabe-se que as equações x + ky – 2 = 0 e kx + 4y – 4 = 0 são equações de uma mesma reta, num sistema de coordenadas cartesianas do plano.

Nesse caso:

a) k = 4 b) k = 2

c) k = 1 d) k = 0

e) k = –1

Resolução

As retas são coincidentes, então:

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{4} = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Determinar a posição relativa das retas de equações:

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow$ **as retas são paralelas distintas**

b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow$ **as retas são concorrentes**

c) $\begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0 \\ 8x - 6y + 4 = 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{aligned} r&: 4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \\ s&: 8x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r \text{ e } s \text{ são coincidentes}$$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 6x - 9y + 1 = 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{aligned} r&: 2x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ s&: 6x - 9y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **r e s são paralelas distintas**

e) $\begin{cases} 4x + 5y - 1 = 0 \\ 5x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{aligned} r&: 4x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{5}x + \frac{1}{5} \\ s&: 5x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes}$$

2 Se as retas (r) $2x - 3y + 9 = 0$ e (s) $6x + ky + 8 = 0$ são concorrentes então

a) $k \neq -6$ b) $k \neq -9$ c) $k \neq -11$
d) $k \neq -15$ e) $k \neq -18$

RESOLUÇÃO:

$r: y = \dfrac{2}{3}x + 3$

$s: y = -\dfrac{6}{k}x - \dfrac{8}{k}$

Como *r* e *s* são concorrentes, temos: $\dfrac{2}{3} \neq -\dfrac{6}{k} \Leftrightarrow k \neq -9$

Resposta: B

3 **(BELAS ARTES – MODELO ENEM)** – Sabe-se que a reta (s), de equação $ax + by = 0$, é paralela à reta (r), de equação $4x - 8y + 6 = 0$. Então, $\dfrac{a}{b}$ vale

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) – 2 d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 2

RESOLUÇÃO:

$r \,//\, s \Leftrightarrow \dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{-8} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

Resposta: D

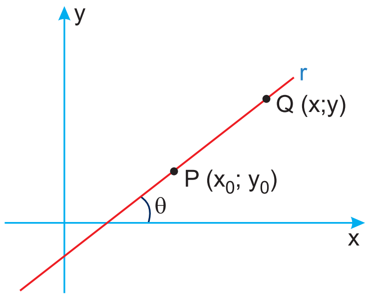
Módulo 42 — Equação de uma reta que passa por $P(x_0;\ y_0)$

Palavras-chave:
- Ponto pertencente a uma reta
- Coeficiente angular

Seja **r** a reta não vertical determinada pelo ponto P $(x_0;\ y_0)$ e pela inclinação θ.

Sendo Q (x; y) um ponto genérico de **r** e **m** o seu coeficiente angular, temos:

$$m = \operatorname{tg}\theta \Leftrightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$



Observação

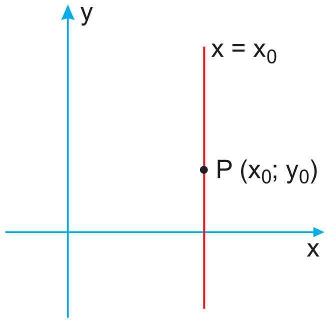
Se **r** for vertical, a equação será $\mathbf{x = x_0}$.

Conclusão

A equação de **qualquer reta** que passa pelo ponto P $(x_0;\ y_0)$ é:

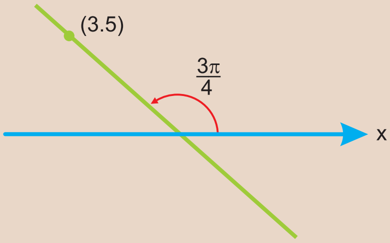
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \quad \text{ou} \quad x = x_0$$

também chamada de equação do feixe de retas concorrentes em **P**.



Exercícios Resolvidos

1 **(MODELO ENEM)** – Determinar a equação da reta que passa pelo ponto P(3; 5) e com inclinação igual a $\frac{3\pi}{4}$.



a) $x - y + 8 = 0$ b) $2x + y - 8 = 0$
c) $2x - y - 1 = 0$ d) $x + y - 8 = 0$
e) $2x + y - 11 = 0$

Resolução

O coeficiente da reta será:

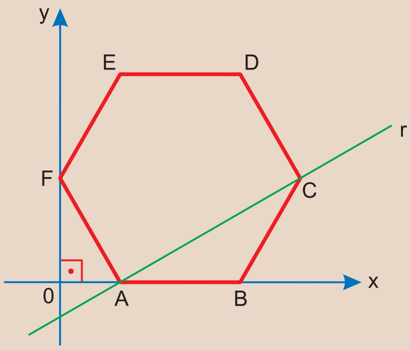
$m = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$

A equação da reta que passa pelo ponto P(3; 5) e tem coeficiente angular m = – 1 é:

$y - 5 = -1\ (x - 3) \Leftrightarrow x + y - 8 = 0$

Resposta: D

2 **(METODISTA – MODELO ENEM)** – O hexágono regular ABCDEF tem lados medindo 2 unidades. A equação da reta r é:



a) $x - y - \sqrt{3} = 0$

b) $3x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

d) $3x + \sqrt{3}y + 3 = 0$

e) $\sqrt{3}x - 3y - \sqrt{3} = 0$

Resolução

Cada ângulo interno do hexágono regular é igual a 120°, então:

$O\hat{A}F = 60°$ e $B\hat{A}C = 30°$
(pois o triângulo ABC é isósceles)

O ponto A (do eixo x) é tal que

$OA = AF \cdot \cos 60° \Leftrightarrow OA = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$

resultando suas coordenadas iguais a (1;0).

Se o coeficiente angular de *r* é

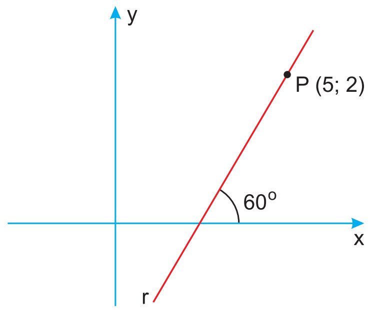
$m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, e a reta passa pelo ponto A(1; 0), a equação da reta r é

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x - 3 \cdot y - \sqrt{3} = 0$$

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Determinar a equação da reta **r** da figura abaixo:



RESOLUÇÃO:

I) $m = tg\ 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

II) $y - 2 = \sqrt{3}\ (x - 5) \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y + 2 - 5\sqrt{3} = 0$

2 Obter a equação geral da reta que passa pelo ponto A (–1; 3) e é paralela à reta de equação $2x - 3y + 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:

I) $m = \dfrac{2}{3}$

II) $y - 3 = \dfrac{2}{3}\ (x + 1) \Leftrightarrow 2x - 3y + 11 = 0$

3 A equação da reta **r** que passa pelo ponto P(3; 2) e é paralela ao segmento de reta $\overline{AB}$ onde A(6; 0) e B(0; – 9) é

a) $3x + 2y + 5 = 0$ b) $-3x + 2y - 5 = 0$
c) $3x - 2y - 5 = 0$ d) $3x + 2y - 5 = 0$
e) $3x + 5y + 2 = 0$

RESOLUÇÃO:

I) $m_{AB} = \dfrac{-9 - 0}{0 - 6} \Leftrightarrow m_{AB} = \dfrac{-9}{-6} = \dfrac{3}{2} = m_r$

II) A equação da reta r que passa pelo ponto P(3; 2) e tem $m_r = \dfrac{3}{2}$ é:

$y - y_P = m_r \cdot (x - x_P)$

$y - 2 = \dfrac{3}{2} \cdot (x - 3)$

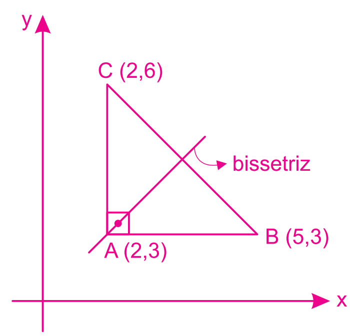
$3x - 2y - 5 = 0$

Resposta: C

4 **(UFRN – MODELO ENEM)** – Um triângulo ABC possui vértices A = (2, 3), B = (5, 3) e C = (2, 6). A equação da reta bissetriz do ângulo $\hat{A}$ é

a) $y = 3x + 1$ b) $y = 2x$ c) $y = x - 3$
d) $y = x + 1$ e) $y = x$

RESOLUÇÃO:



O triângulo ABC é isósceles, retângulo em A, e catetos paralelos aos eixos coordenados. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$, tem inclinação de 45°, portanto sua declividade é m = tg 45° = 1.

A equação da bissetriz é:

$y - 3 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x + 1$

Resposta: D

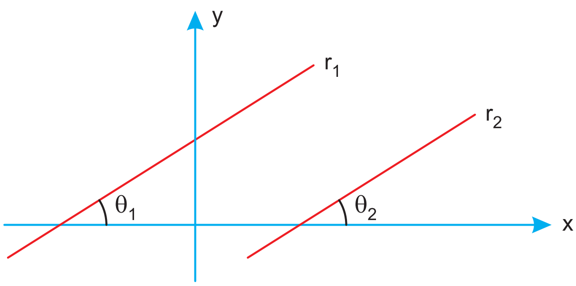
Módulo 43

Paralelismo e perpendicularismo

Palavras-chave:
- Retas paralelas
- Retas perpendiculares

Sejam $\mathbf{r_1}$, de equação $y = m_1 x + h_1$, e $\mathbf{r_2}$, de equação $y = m_2 x + h_2$, duas retas não paralelas aos eixos.

1. Paralelismo

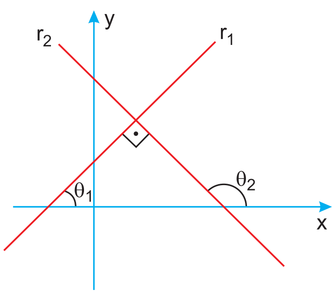


A condição necessária e suficiente para que $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ sejam **paralelas** é, como já foi visto, que tenham o **mesmo coeficiente angular**.

Simbolicamente:

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

2. Perpendicularismo



Se $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ forem perpendiculares, então $\theta_2 = 90° + \theta_1$ e, portanto,

$$m_2 = \text{tg}\theta_2 = \text{tg}\,(90° + \theta_1) = \frac{\text{sen}\,(90° + \theta_1)}{\cos\,(90° + \theta_1)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,90° \,.\, \cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1 \cos 90°}{\cos 90° \,.\, \cos\theta_1 - \text{sen}\,90° \,.\, \text{sen}\,\theta_1} =$$

$$= \frac{1 \,.\, \cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1 \,.\, 0}{0 \,.\, \cos\theta_1 - 1 \,.\, \text{sen}\,\theta_1} = \frac{\cos\theta_1}{-\,\text{sen}\,\theta_1} =$$

$$= -\frac{1}{\text{tg}\,\theta_1} = -\frac{1}{m_1}$$

Conclusão

A condição necessária e suficiente para que $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ sejam **perpendiculares** é que um dos coeficientes angulares seja o **inverso do outro com o sinal trocado**. Simbolicamente:

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

3. Casos particulares

Se as retas forem paralelas aos eixos, a conclusão é imediata.

De fato:

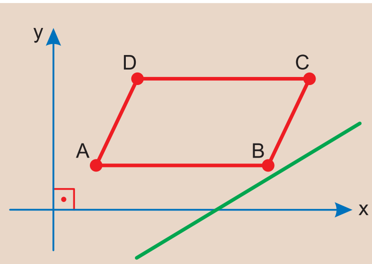
a) Duas retas horizontais são paralelas.

b) Duas retas verticais são paralelas.

c) Uma reta horizontal é perpendicular a uma reta vertical.

Exercícios Resolvidos

1 **(UNIFESP)** – Num sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos A(1;1), B(5;1), C(6;3) e D(2;3), vértices de um paralelogramo, e a reta r, de equação r: $3x - 5y - 11 = 0$.



A reta s, paralela à reta r, que divide o paralelogramo ABCD em dois polígonos de mesma área terá por equação

a) $3x - 5y - 5 = 0$.

b) $3x - 5y = 0$.

c) $6x - 10y - 1 = 0$.

d) $9x - 15y - 2 = 0$.

e) $12x - 20y - 1 = 0$.

Resolução

A reta *s* que divide o paralelogramo em duas regiões de mesma área deve necessariamente passar pelo ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ (ponto médio das diagonais).

Assim:

$$M\left(\frac{1+6}{2}; \frac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$$

Como a reta *s* é paralela à reta *r*, de equação $3x - 5y - 11 = 0$, sua equação é do tipo $3x - 5y + k = 0$

Como o ponto $M\left(\frac{7}{2}; 2\right)$ pertence à reta (s) $3x - 5y + k = 0$, temos:

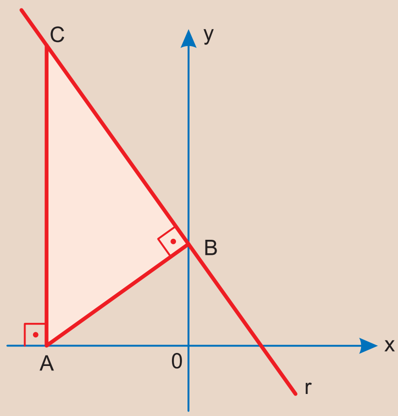
$$3 \cdot \frac{7}{2} - 5 \cdot 2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a equação da reta s é

$$3x - 5y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x - 10y - 1 = 0.$$

Resposta: C

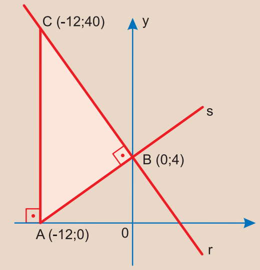
2 **(MACKENZIE)** – Na figura, se a equação da reta r é $3x + y - 4 = 0$, a área do triângulo ABC é:



a) 240 b) 220 c) 200

d) 260 e) 280

Resolução



O coeficiente angular da reta r:

$3x + y - 4 = 0$ é $m_r = -3$ e, portanto, o coeficiente angular de s = $\overleftrightarrow{AB}$ é $m_s = \frac{1}{3}$, pois r ⊥ s.

Como B ∈ r é tal que B(0; 4) e B ∈ S, a equação de *s* é $y - 4 = \frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow x - 3y + 12 = 0.$

Assim, A ∈ s é A(– 12; 0), e C ∈ r é C(– 12; 40).
Logo, a área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{AC \cdot 12}{2} = \frac{40 \cdot 12}{2} = 240$$

Resposta: A

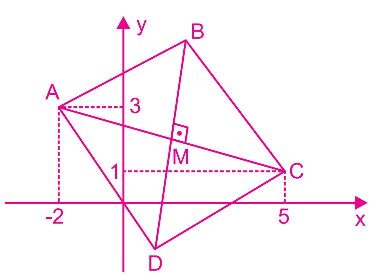
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M308**

Exercícios Propostos

1 Os pontos A(–2; 3) e C(5; 1) são vértices opostos de um quadrado ABCD. Determinar a equação da reta que contém a diagonal $\overline{BD}$.

RESOLUÇÃO:



$$\begin{cases} m_{AC} = \dfrac{1-3}{5-(-2)} = \dfrac{-2}{7} = -\dfrac{2}{7} \\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m_{BD} = \dfrac{7}{2} \\ M\left(\dfrac{3}{2}; 2\right) \end{cases}$$

$$y - 2 = \frac{7}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

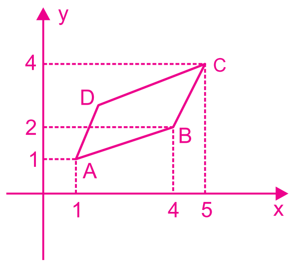
$$y - 2 = \frac{7x}{2} - \frac{21}{4}$$

$$4y - 8 = 14x - 21$$

$$14x - 4y - 13 = 0$$

2 Os pontos A(1; 1), B(4; 2) e C(5; 4) são vértices de um paralelogramo ABCD. Determinar a equação da reta que contém o lado $\overline{CD}$.

RESOLUÇÃO:

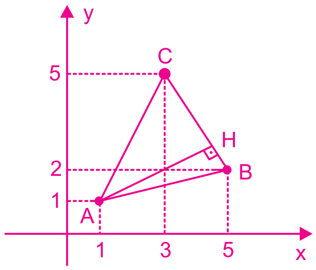


I) $m_{CD} = m_{AB} \Rightarrow m_{CD} = \dfrac{2-1}{4-1} \Rightarrow m_{CD} = \dfrac{1}{3}$

II) $y - 4 = \dfrac{1}{3}(x-5) \Leftrightarrow x - 3y + 7 = 0$

3 Dados os pontos A(1; 1), B(5; 2) e C(3; 5), determinar a equação da reta que contém a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC.

RESOLUÇÃO:



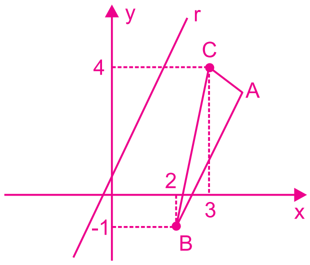
I) $m_{AH} = \dfrac{-1}{m_{BC}} \Rightarrow m_{AH} = \dfrac{-1}{\dfrac{5-2}{3-5}} = \dfrac{-1}{\dfrac{3}{-2}} = \dfrac{2}{3}$

II) $y - 1 = \dfrac{2}{3}(x-1)$

$2x - 3y + 1 = 0$

4 Um triângulo retângulo ABC tem hipotenusa determinada pelos pontos B (2; –1) e C (3; 4). Sabendo que a reta $3x - 2y + 1 = 0$ é paralela ao cateto $\overline{AB}$, determinar as equações das retas suportes dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

RESOLUÇÃO:



I) $3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

II) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa por B(2; – 1) e tem coeficiente angular $m = \dfrac{3}{2}$, logo, sua equação é:

$y + 1 = \dfrac{3}{2}(x-2) \Leftrightarrow 3x - 2y - 8 = 0$

II) A reta $\overleftrightarrow{AC}$ passa por C(3; 4) e tem coeficiente angular $m = -\dfrac{2}{3}$, logo, sua equação é:

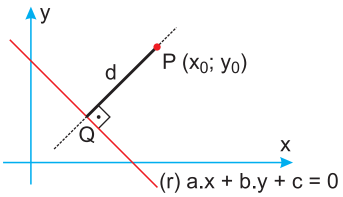
$y - 4 = -\dfrac{2}{3}(x-3) \Rightarrow 3y - 12 = -2x + 6 \Rightarrow 2x + 3y - 18 = 0$

Módulo 44 — Distância de ponto a reta

Palavras-chave:
- Ponto fora da reta
- Projeção ortogonal

Seja **r** uma reta de equação ax + by + c = 0 e P (x_0, y_0) um ponto qualquer do plano cartesiano.

A distância **d** do ponto **P** à reta **r** é igual à distância entre os pontos P e Q, Q ∈ r com $\overleftrightarrow{PQ}$ perpendicular a **r**.



Demonstra-se que:

$$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M309**

Exercícios Resolvidos

1 **(MODELO ENEM)** – Determine a distância entre o ponto P(2; 3) e a reta 3x + 4y + 1 = 0.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{19}{5}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) 5

Resolução

Temos: 3x + 4y + 1 = 0 $\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$

P(2; 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{19}{5}$$

Resposta: B

Observação: Observe que $ax_0 + by_0 + c$ significa substituir as coordenadas do ponto na equação da reta.

2 Determine a distância entre as retas:
r : 2x + y – 5 = 0 e s: 2x + y + 2 = 0.

Resolução

Sendo **r** e **s** retas paralelas, a distância entre **r** e **s** é obtida pela fórmula $d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

A partir das equações, os coeficientes são:

a = 2, b = 1, $c_2 = 2$ e $c_1 = -5$

Portanto:

$$d = \frac{|2 - (-5)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: $d = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

Exercícios Propostos

1 Calcular a distância da origem à reta 3x + 4y – 20 = 0.

RESOLUÇÃO:

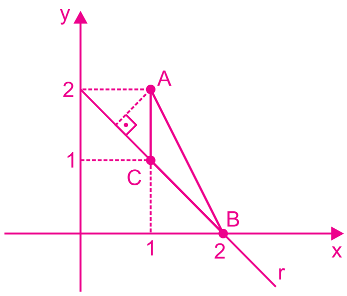
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Logo, d = 4

2 Determinar a altura AH do triângulo de vértices A(1; 2), B(2; 0) e C(1; 1).

RESOLUÇÃO:



I) $m_r = \dfrac{1-0}{1-2} = -1$

r: $y - 1 = -1\,(x - 1) \Rightarrow x + y - 2 = 0$

II) $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|1 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3 A distância da reta $8x - 6y + c = 0$ ao ponto P (1; 2) é igual a 3. Determinar os possíveis valores de **c**.

RESOLUÇÃO:

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$3 = \dfrac{|8 \,.\, 1 - 6 \,.\, 2 + c|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} \Rightarrow 3 = \dfrac{|8 - 12 + c|}{\sqrt{64 + 36}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = \dfrac{|-4 + c|}{\sqrt{100}} \Rightarrow |-4 + c| = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -4 + c = 30 \Rightarrow c = 34 \\ -4 + c = -30 \Rightarrow c = -26 \end{cases}$

Logo, c = 34 ou c = – 26

4 Determinar a distância entre as retas paralelas

(r) $2x + y - 3 = 0$ e (s) $2x + y + 5 = 0$.

RESOLUÇÃO:

Basta tomar um ponto $P(x_0;\, y_0)$ pertencente a uma das retas, e calcular a sua distância em relação a outra reta. Seja P(0;3) pertencente à reta *r*; temos:

$d_{r,s} = d_{P,s} = \dfrac{|2 \,.\, 0 + 3 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|3 + 5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|8|}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

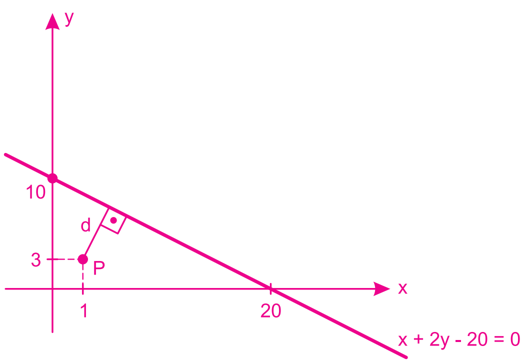
Outra maneira:

$d = \dfrac{|5 - (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

5 **(FGV-adaptado)** – Um mapa é posicionado sobre um sistema de eixos cartesiano ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto P(1; 3).

Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação $x + 2y - 20 = 0$. Qual a menor distância entre o avião e a cidade?

RESOLUÇÃO:



A menor distância entre a cidade e o avião é dada por

$\dfrac{|1 + 2 \,.\, 3 - 20|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{13\sqrt{5}}{5}$

Resposta: A menor distância entre a cidade e o avião é $\dfrac{13\sqrt{5}}{5}$

Euclides de Alexandria (360a.C-295a.C)
Sua obra *Os Elementos* é uma das mais influentes na história da Matemática.

MATEMÁTICA

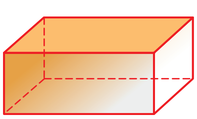
Geometria Métrica – Módulos

Módulos 33 e 34 – Paralelepípedo e cubo

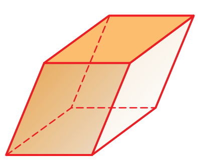
Palavras-chave:
- Prisma de base quadrangular
- Retângulo
- Quadrado

1. Paralelepípedo

Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos.



paralelepípedo reto

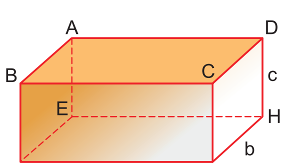


paralelepípedo oblíquo

2. Paralelepípedo reto-retângulo

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo é todo paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.

3. Área total



No paralelepípedo reto-retângulo da figura, de dimensões **a**, **b** e **c**, temos:

$A_{ABCD} = A_{EFGH} = a \,.\, b$

$A_{BFGC} = A_{AEHD} = a \,.\, c$

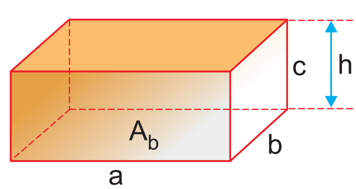
$A_{ABFE} = A_{DCGH} = b \,.\, c$

Assim, sendo $\mathbf{A_t}$ a área total do paralelepípedo, temos:

$$\boxed{A_t = 2\,.\,(ab + ac + bc)}$$

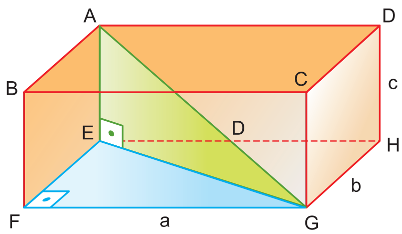
4. Volume

Sendo **V** o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a**, **b** e **c**, e considerando-se um dos retângulos cujos lados medem **a** e **b**, por exemplo, como base, temos:



$$V = A_b \,.\, h = (a\,.\,b)\,.\,c \Leftrightarrow \boxed{V = a\,.\,b\,.\,c}$$

5. Diagonal



Sejam **D** a medida da diagonal $\overline{AG}$ do paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura e **d** a medida da diagonal $\overline{EG}$ da face EFGH.

No triângulo retângulo EFG, temos:

$$(EG)^2 = (FG)^2 + (EF)^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2$$

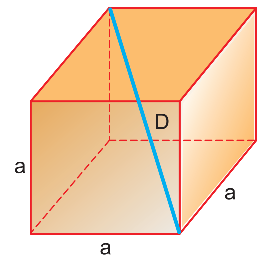
No triângulo retângulo AEG, temos:

$$(AG)^2 = (EG)^2 + (AE)^2 \Rightarrow D^2 = d^2 + c^2$$

Assim, $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e, portanto:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. Cubo



Cubo é todo paralelepípedo reto-retângulo cujas seis faces são quadradas.

Num cubo de aresta **a**, sendo A_t a área total, **D** a medida da diagonal e **V** o volume do cubo, temos:

$$A_t = 6 \cdot a^2 \qquad D = a \cdot \sqrt{3} \qquad V = a^3$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 33 e 34

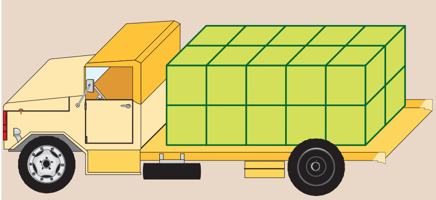
1 **(MODELO ENEM)** – Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte.

Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

a) 10 viagens. b) 11 viagens.
c) 12 viagens. d) 24 viagens.
e) 27 viagens.

Resolução

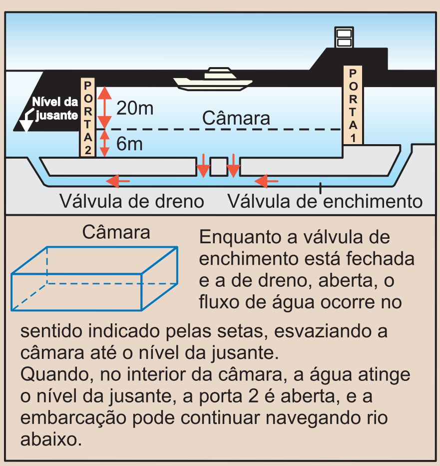
Admitindo-se que as caixas serão empilhadas de forma organizada e cada pilha não pode ultrapassar a altura da carroceria, no comprimento caberão apenas cinco caixas, na largura duas caixas e na altura duas caixas, como sugere a figura seguinte.



Em cada viagem serão transportadas $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ caixas. Para transportar as 240 caixas serão necessárias, e suficientes, $\dfrac{240}{20} = 12$ viagens.

Resposta: C

2 **(ENEM)** – Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações.



No esquema anterior, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de

a) 2 minutos. b) 5 minutos.
c) 11 minutos. d) 16 minutos.
e) 21 minutos.

Resolução

A câmara da eclusa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo de 200 m de comprimento, 17 m de largura, 20 m de altura e volume $V = (200 \cdot 17 \cdot 20)\,m^3 = 68\,000\,m^3$

Se a vazão aproximada é de 4 200 m^3 por minuto, o tempo necessário e suficiente para descer do nível mais alto até o nível da jusante é

$$t = \frac{68\,000\,m^3}{4\,200\,m^3}\ \text{minuto} \cong 16{,}1\ \text{min}$$

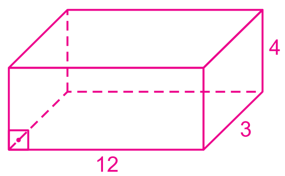
Resposta: D

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em “localizar”, digite **MAT2M310**

1 As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são 3 m, 4 m e 12 m. Calcular a área total e o volume desse sólido.

RESOLUÇÃO:



I) $A_t = 2 \,.\, 12 \,.\, 4 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 + 2 \,.\, 12 \,.\, 3$

$A_t = 96 + 24 + 72$

$A_t = 192\ m^2$

II) $V = A_B \,.\, h$

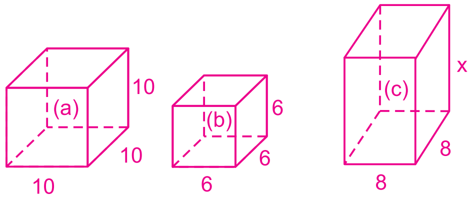
$V = 12 \,.\, 3 \,.\, 4$

$V = 144\ m^3$

2 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e, em seguida, o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto-retângulo de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é

a) 16. b) 17. c) 18. d) 19. e) 20.

RESOLUÇÃO:



Sendo V_a, V_b e V_c os volumes dos blocos (a), (b) e (c), temos:

$V_c = V_a + V_b \Leftrightarrow 8 \,.\, 8 \,.\, x = 10^3 + 6^3 \Leftrightarrow 64x = 1216 \Rightarrow x = 19\ cm$

Resposta: D

3 Calcular a aresta, a área total e o volume de um cubo cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m.

RESOLUÇÃO:

I) $D = a\sqrt{3}$

$2\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$a = 2\ m$

II) $A_t = 6 \,.\, a^2$

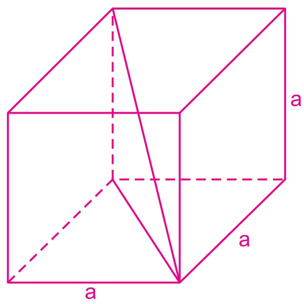
$A_t = 6 \,.\, 2^2$

$A_t = 24\ m^2$

III) $V = A_B \,.\, h$

$V = 2^2 \,.\, 2$

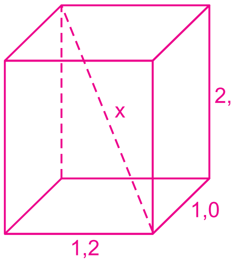
$V = 8\ m^3$



4 **(UNISINOS – MODELO ENEM)** – Para reformar a cobertura de um edifício, são usados barrotes de madeira. Estes barrotes são transportados através de um elevador cujas dimensões internas são 1,2 m, 1,0 m e 2,1 m. Nessas condições, o comprimento aproximado do maior barrote possível de ser transportado neste elevador, em metros, é

a) 1,5. b) 2,0. c) 2,6. d) 3,5. e) 4,2.

RESOLUÇÃO:



$x^2 = (1,2)^2 + (1,0)^2 + (2,1)^2 \Leftrightarrow x^2 = 1,44 + 1,00 + 4,41 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 6,85 \Leftrightarrow x = \sqrt{6,85} \Leftrightarrow x \cong 2,6$

Resposta: C

1 Calcule a área total de um cubo, sabendo-se que, aumentando de 2 m a sua aresta, o seu volume aumenta de 56 m^3.

RESOLUÇÃO:

I) $V = a^3$

II) $V + 56 = (a + 2)^3$

$V + 56 = a^3 + 3a^2 \,.\, 2 + 3 \,.\, a \,.\, 4 + 8$

$a^3 + 56 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

$6a^2 + 12a - 48 = 0$

$a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 2$ m, pois $a > 0$

III) $A_t = 6 \,.\, a^2$

$A_t = 6 \,.\, 2^2$

$A_t = 24 \text{ m}^2$

2 Um prisma reto de base quadrada tem 72 cm^2 de área lateral e $3\sqrt{2}$ cm de diagonal da base. O volume deste prisma é

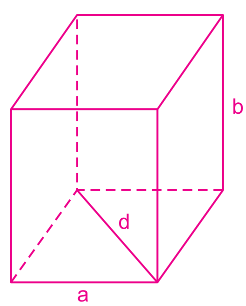
a) 108 cm^3 b) 48 cm^3 c) $53\sqrt{2}$ cm^3 d) 54 cm^3

RESOLUÇÃO:

I) $d = a\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

$a = 3$ cm



II) $A_\ell = 4 \,.\, ab$

$72 = 4 \,.\, 3 \,.\, b$

$b = 6$ cm

III) $V = a^2 \,.\, b$

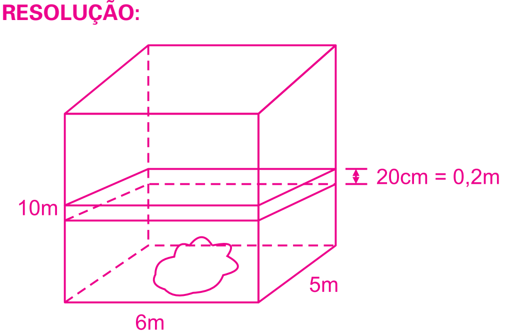
$V = 3^2 \,.\, 6$

$V = 54 \text{ cm}^3$

Resposta: D

3 **(MODELO ENEM)** – Numa caixa de água em forma de paralelepípedo reto-retângulo cujo comprimento é 6 m, a largura 5 m e altura 10 m, coloca-se um sólido de forma irregular que afunda ficando totalmente coberto pela água. Sabendo-se que o nível da água eleva-se de 20 cm sem derramar, calcular o volume do sólido.

RESOLUÇÃO:



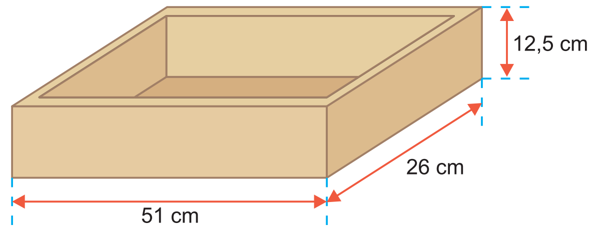
$V_S = A_b \,.\, h$

$V_S = 6 \,.\, 5 \,.\, 0{,}2$

$V_S = 6 \text{ m}^3$

Resposta: D

4 **(PUC – MODELO ENEM)** – Uma caixa sem tampa é feita com placas de madeira de 0,5 cm de espessura. Depois de pronta, observa-se que as medidas da caixa, pela parte externa, são 51 cm x 26 cm x 12,5 cm, conforme mostra a figura abaixo.



O volume interno dessa caixa, em metros cúbicos, é

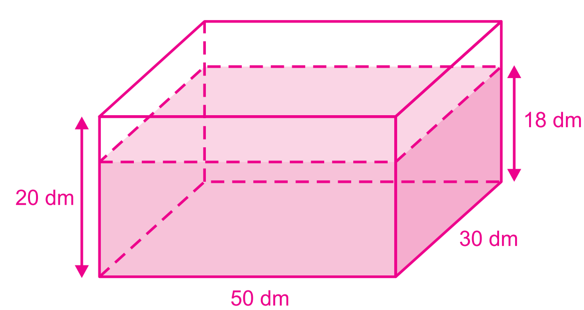
a) 0,015 b) 0,0156 c) 0,15
d) 0,156 e) 1,5

RESOLUÇÃO:
As medidas da parte interna da caixa são 50 cm, 25 cm, 12 cm e, portanto, o volume interno da caixa, em metros cúbicos, é:
0,50 . 0,25 . 0,12 = 0,015
Resposta: A

5 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Uma piscina com 5 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de profundidade tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Se o nível da água está 20 cm abaixo da borda, o volume de água existente na piscina é igual a

a) 27000 cm^3 b) 27000 m^3 c) 27000 litros
d) 3000 litros e) 30 m^3

RESOLUÇÃO:



O volume de água existente na piscina é igual a

(50 . 30 . 18) dm^3 = 27000 dm^3 = 27000 ℓ

ou (5 . 3 . 1,8)m^3 = 27 m^3 = 27000 ℓ

Resposta: C

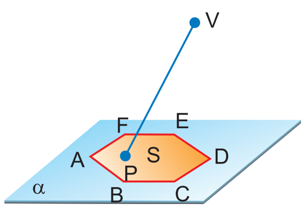
Módulos 35 e 36

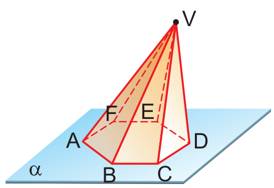
Pirâmide

Palavras-chave:
- Faces laterais triangulares
- Apótema

1. Definição

Sejam um plano α, um ponto **V** tal que $\mathbf{V} \notin \alpha$ e uma região poligonal **S** do plano α.





Pirâmide é a união de todos os segmentos $\overline{VP}$, tais que $P \in S$.

O ponto **V** é denominado **vértice da pirâmide** e a região poligonal **S** é denominada **base da pirâmide**.

2. Elementos da pirâmide

Na pirâmide VABCDEF da figura:

a) O ponto **V** é o **vértice** da pirâmide.

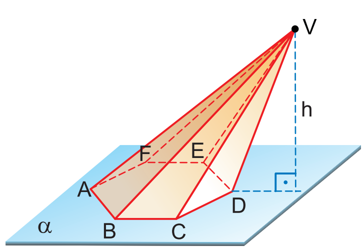
b) Os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ etc., são as **arestas laterais**.

c) Os triângulos VAB, VBC, VCD etc., são as **faces laterais**.

d) Os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ etc., são as **arestas da base**.

e) O polígono ABCDEF é a **base** da pirâmide.

f) A distância **(h)** do vértice **V** ao plano α que contém a base é a **altura** da pirâmide.

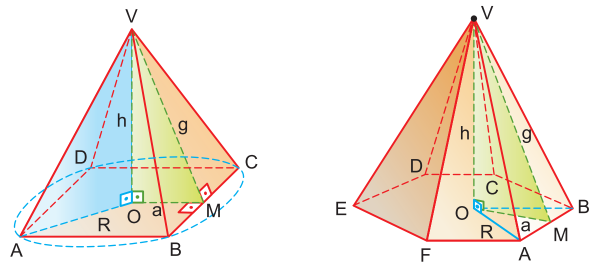


3. Pirâmide reta

Uma pirâmide é denominada **reta** quando todas as faces laterais são triângulos isósceles.

4. Pirâmide regular

Uma pirâmide é denominada **regular** quando ela é reta e o polígono da base é regular.



Nas pirâmides regulares da figura:

a) OA = R é o raio da circunferência circunscrita à base ou simplesmente o **raio da base**.

b) OM = a é o **apótema da base**.

c) VM = g é o **apótema da pirâmide** (altura de uma face lateral).

d) O triângulo VOM é retângulo em O e, portanto,

$$g^2 = a^2 + h^2.$$

e) O triângulo VOA é retângulo em O e, portanto,

$$(VA)^2 = R^2 + h^2.$$

5. Área lateral

A área lateral da pirâmide é a soma das áreas de todas as faces laterais.

6. Área total

A área total da pirâmide é a soma da área da base com a área lateral.

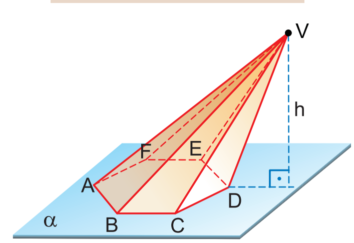
Assim, sendo $\mathbf{A_t}$ a área total, $\mathbf{A_b}$ a área da base e $\mathbf{A_\ell}$ a área lateral, temos: $A_t = A_b + A_\ell$

7. Volume

Demonstra-se que toda pirâmide tem por volume a terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

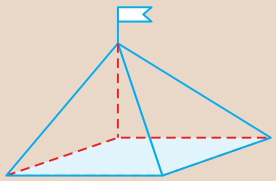
Assim, sendo **V** o volume da pirâmide, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$



Exercícios Resolvidos – Módulos 35 e 36

1 **(UNESP)** – O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3m e que a altura da pirâmide será de 4m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será

a) 36 b) 27 c) 18 d) 12 e) 4

Resolução

Sendo V o volume de concreto (em m^3), temos

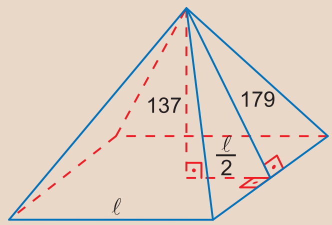
$V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 4 \Leftrightarrow V = 12$

Resposta: D

2 **(MODELO ENEM)** – A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em m^2, é

a) 13 272 b) 26 544 c) 39 816
d) 53 088 e) 79 432

Resolução



Sendo ℓ a medida, em metros, de cada lado da base quadrada dessa pirâmide, tem-se:

$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 179^2 - 137^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 4(179 + 137)(179 - 137) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ell^2 = 4 \cdot 316 \cdot 42 \Leftrightarrow \ell^2 = 53088$

Resposta: D

Exercícios Propostos – Módulo 35

1 Calcular a área total e o volume de uma pirâmide regular de base quadrada, cuja aresta da base mede 6 m e cuja altura mede 4 m.

RESOLUÇÃO:

I) $g^2 = 4^2 + 3^2 \to g^2 = 25 \to g = 5$

II) $A_t = A_b + A_\ell$

$A_t = 6^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$

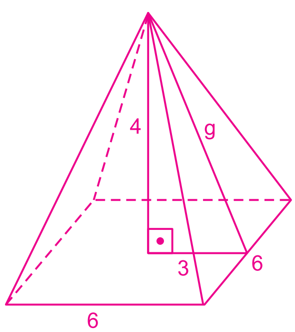
$A_t = 36 + 60$

$A_t = 96\ m^2$

III) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4$

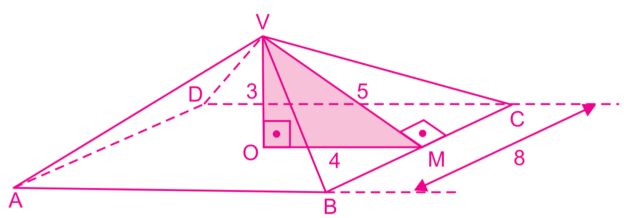
$V = 48\ m^3$



2 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é

a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 130

RESOLUÇÃO:



I) No triângulo VOM, retângulo em O, tem-se VO = 3, OM = 4 e $VO^2 + OM^2 = VM^2$, portanto, VM = 5.

II) A área S_{BCV} da face BCV é

$S_{BCV} = \frac{1}{2}\ BC \cdot VM = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$

III) A área S_ℓ da superfície lateral da pirâmide é
$S_\ell = 4 \cdot S_{BCV} = 4 \cdot 20 = 80\ m^2$.

IV) Como cada lote cobre $1m^2$ e são desperdiçados 10 lotes, o número de lotes necessários é $\frac{80m^2}{1m^2} + 10 = 90$

Resposta: A

3 Numa pirâmide regular hexagonal, cada aresta da base mede 4 cm e as arestas laterais medem 5 cm cada uma. Calcular a área da base e o volume dessa pirâmide.

RESOLUÇÃO:

I) $h^2 + 4^2 = 5^2$

$h^2 = 25 - 16$

$h^2 = 9$

$h = 3$ cm

II) $A_b = 6 \cdot A_\Delta$

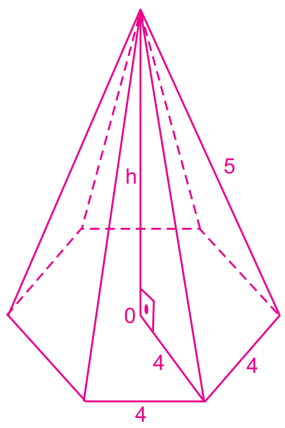
$A_b = 6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}$

$A_b = 24\sqrt{3}$ cm²

III) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 3$

$V = 24\sqrt{3}$ cm³



Exercícios Propostos – Módulo 36

1 O volume da pirâmide quadrangular regular cujo apótema lateral mede 13 cm e a aresta da base mede 10 cm é de

a) 400 cm³ b) 600 cm³ c) 800 cm³
d) 1000 cm³ e) 1200 cm³

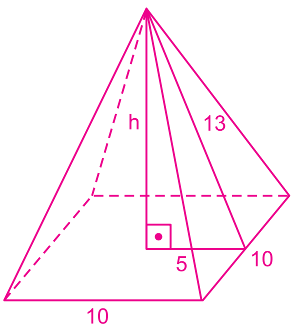
RESOLUÇÃO:

I) $h^2 + 5^2 = 13^2$

$h^2 = 169 - 25$

$h^2 = 144$

$h = 12$ cm



II) $V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$

$V = 400$ cm³

Resposta: A

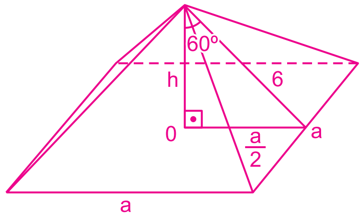
2 O apótema de uma pirâmide quadrangular regular mede 6 cm e forma com a altura dessa pirâmide um ângulo de 60°. O volume dessa pirâmide é igual a

a) $9\sqrt{3}$ cm³ b) 72 cm³ c) 108 cm³
d) 144 cm³ e) 324 cm³

RESOLUÇÃO:

I) $\dfrac{h}{6} = \cos 60°$

$h = 6 \cdot \dfrac{1}{2} \to h = 3$ cm



II) $\dfrac{\frac{a}{2}}{6} = \operatorname{sen} 60°$

$\dfrac{a}{2} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a = 6\sqrt{3}$ cm

III) $V = \dfrac{1}{3} A_b \cdot h$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 3$

$V = 108$ cm³

Resposta: C

3 A base de uma pirâmide é um quadrado de 8 m de lado. Sabendo que as faces laterais são triângulos equiláteros, determinar o volume da pirâmide.

RESOLUÇÃO:

I) O Δ VAB é equilátero:

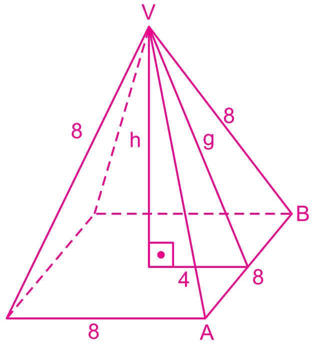
$$g = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{ m}$$

II) $h^2 + 4^2 = g^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 + 16 = 48 \Leftrightarrow$

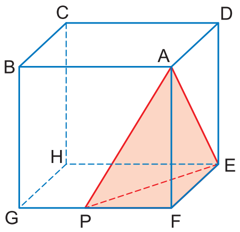
$\Leftrightarrow h^2 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{2}\text{ m}$



III) $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{256\sqrt{2}}{3}\text{ m}^3$

4 **(UNIP)** – A aresta do cubo ABCDEFGH mede 6 cm e P é o ponto médio do segmento $\overline{FG}$. O volume do sólido AEFP, em centímetros cúbicos, é



a) 9
b) $9\sqrt{2}$
c) 18
d) 36
e) 54

RESOLUÇÃO:
O sólido AEFP é uma pirâmide cuja base é o triângulo retângulo FPE e cuja altura é AF.
Assim, o seu volume V, em centímetros cúbicos, é dado por:

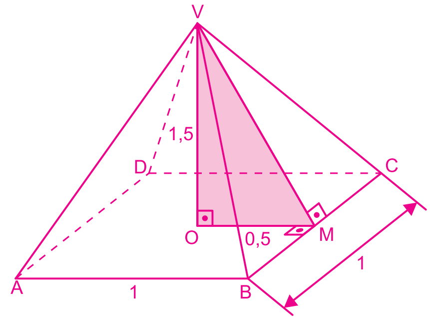
$$V = \frac{PF \cdot FE}{2} \cdot \frac{AF}{3} = \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot \frac{6}{3} = 18$$

Resposta: C

5 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Uma barraca de lona tem forma de uma pirâmide regular de base quadrada com 1 metro de lado e altura igual a 1,5 metro. Das alternativas abaixo, a que indica a menor quantidade suficiente de lona, em m^2, para forrar os quatro lados da barraca é

a) 2 b) 2,5 c) 4,5 d) 3,5 e) 4

RESOLUÇÃO:



No triângulo VOM, temos:

$$(VM)^2 = (0{,}5\text{m})^2 + (1{,}5\text{m})^2 \Leftrightarrow VM = \frac{\sqrt{10}}{2}\text{ m}$$

Sendo A_L a área lateral da pirâmide, temos:

$$A_L = 4 \cdot \frac{(BC) \cdot (VM)}{2} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} \simeq 3{,}1$$

Assim, a alternativa D é a que indica a menor quantidade suficiente de lona.
Resposta: D

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M311**

Módulo 37

Tetraedro regular

Palavras-chave:

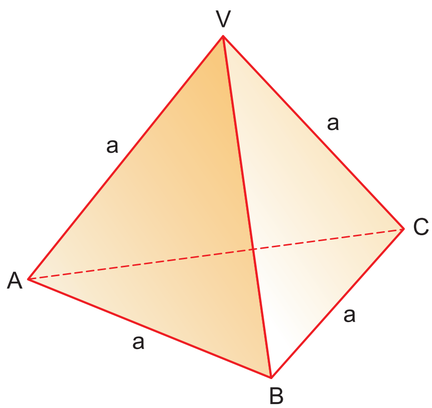
• Pirâmide • Triângulo equilátero

1. Definição

O tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as faces são triângulos equiláteros.

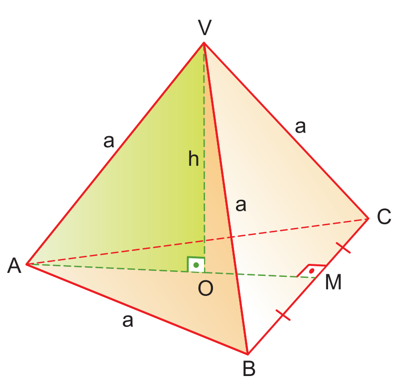
2. Área total

Se **a** for a medida da aresta do tetraedro regular VABC e $\mathbf{A_t}$ sua área total, então:



$$A_t = 4 \,.\, A_{\Delta ABC} = 4 \,.\, \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$$

3. Altura



Se **a** for a medida da aresta do tetraedro regular VABC, então:

a) $\overline{AM}$ é a altura do triângulo equilátero ABC e, portanto, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) O é o baricentro do triângulo equilátero ABC e, portanto, $AO = \dfrac{2}{3} \,.\, AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) O triângulo VOA é retângulo em O e, portanto,

$$(VA)^2 = (VO)^2 + (AO)^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Leftrightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

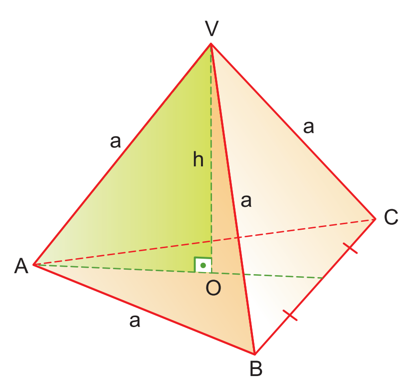
4. Volume

Se **a** for a medida da aresta do tetraedro regular VABC e V o volume, então:

$$V = \frac{1}{3} \,.\, A_b \,.\, h = \frac{1}{3} \,.\, \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \,.\, \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

5. Resumo

Se VABC for um tetraedro regular de aresta **a**, então a **área de uma face**, a **área total**, a **altura** e o **volume** valem, respectivamente:



$$\mathbf{A_f = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$\mathbf{A_t = a^2\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

$$\mathbf{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

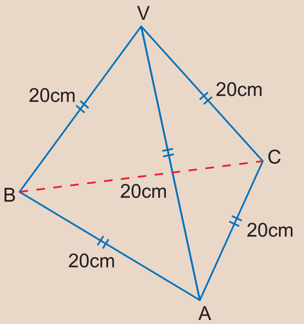
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M312**

1 **(MACKENZIE)** – Um objeto, que tem a forma de um tetraedro regular reto de aresta 20 cm, será recoberto com placas de ouro nas faces laterais e com placa de prata na base. Se o preço do ouro é R\$ 30,00 por cm^2 e o da prata, R\$ 5,00 por cm^2, das alternativas dadas, assinale o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

a) 24 000 b) 12 000 c) 16 000
d) 18 000 e) 14 000

Resolução



Seja o tetraedro regular VABC, de base ABC.

I) As faces laterais VAB, VAC, VBC e a base ABC possuem áreas iguais a

$A_{VAB} = A_{VAC} = A_{VBC} = A_{ABC} =$

$= \dfrac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}\ cm^2$

II) Se as faces laterais serão recobertas de ouro a R\$ 30,00 por cm^2 e a base de prata, a R\$ 5,00 por cm^2, o valor P desse recobrimento será

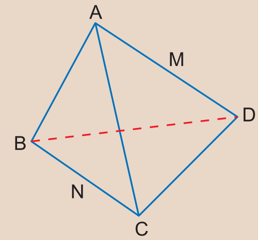
$P = 3 \cdot (100\sqrt{3}) \cdot R\$\ 30{,}00 + (100\sqrt{3}) \cdot R\$\ 5{,}00$

$P \cong 300 \cdot 1{,}7 \cdot R\$\ 30{,}00 + 100 \cdot 1{,}7 \cdot R\$\ 5{,}00$

$P = R\$\ 16\,150{,}00$

Resposta: C

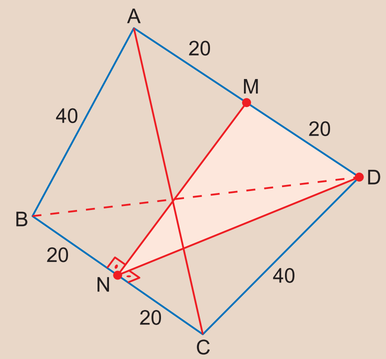
2 Um artista plástico utilizou 6 bastões de vidro com 40 cm de comprimento cada um, para fazer um tetraedro regular ABCD, como pode ser observado na figura seguinte.



Ele pretende colocar um 7º bastão que ligará os pontos M e N, sendo M ponto médio de $\overline{AD}$ e N ponto médio de $\overline{BC}$. O comprimento do 7º bastão será

a) $20\sqrt{2}$ cm b) $25\sqrt{2}$ cm c) $30\sqrt{2}$ cm
d) $35\sqrt{2}$ cm e) $40\sqrt{2}$ cm

Resolução



I) No triângulo equilátero BCD, temos:

$DN = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ cm

II) No triângulo retângulo DMN, temos:

$(MN)^2 + (MD)^2 = (DN)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (MN)^2 + 20^2 = (20\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = 20\sqrt{2}$ cm

Resposta: A

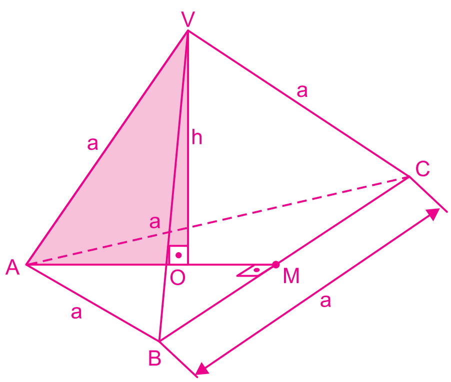
Exercícios Propostos

1 A medida da altura de um tetraedro regular cuja aresta mede **a** é igual a

a) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ b) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

d) $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$ e) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

RESOLUÇÃO:



I) $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **(altura do ΔABC)**

II) $AO = \dfrac{2}{3}\ AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

III) No triângulo VOA, temos:

$(VA)^2 = (VO)^2 + (AO)^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)** – Uma empresa produz dados com 4 faces em forma de tetraedro regular. Os dados são feitos de acrílico e sua aresta mede $\sqrt{3}$ cm. O volume de acrílico utilizado para fabricar 5000 dados é

a) $1200\sqrt{6}\ \text{cm}^3$ b) $1250\sqrt{6}\ \text{cm}^3$

c) $1300\sqrt{6}\ \text{cm}^3$ d) $1350\sqrt{6}\ \text{cm}^3$

d) $1400\sqrt{6}\ \text{cm}^3$

RESOLUÇÃO:
O volume de cada dado é:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}\ \text{cm}^3$$

Assim, $5000 \cdot V = 5000 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{4} = 1250\sqrt{6}\ \text{cm}^3$

Resposta: B

3 Determinar a altura de um tetraedro regular cujo volume é $18\sqrt{2}\ \text{m}^3$.

RESOLUÇÃO:

I) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow 18\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow a^3 = 18 \cdot 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 2^3 \cdot 3^3 \Leftrightarrow a = 6\ \text{m}$

II) $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}\ \text{m}$

4 Determinar a área total de um tetraedro regular, sabendo que o apótema da base mede $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

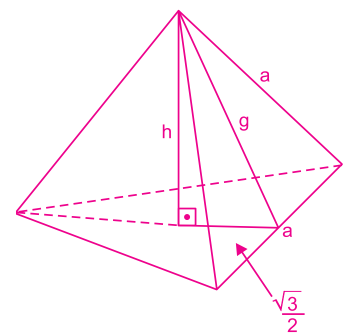
RESOLUÇÃO:

I) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 3$

II) $A_T = a^2\sqrt{3}$

$A_T = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



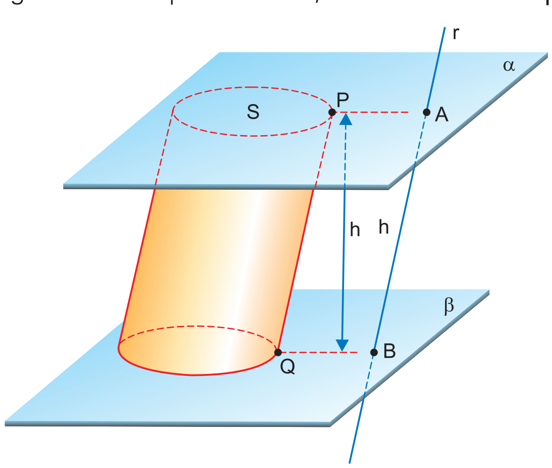
Módulos 38 e 39 – Cilindro

Palavras-chave:
- Círculo
- Geratriz

1. Cilindro de bases circulares

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, **r** uma reta que intercepta os planos α e β e **S** uma região circular contida em α.

Chama-se cilindro de base circular a união de todos os segmentos $\overline{PQ}$ paralelos a **r**, com $P \in S$ e $Q \in \beta$.



Elementos

a) A distância **h** entre os planos α e β é a **altura** do cilindro.

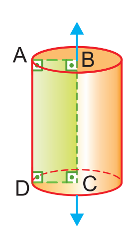
b) A região circular **S** é chamada **base** do cilindro.

c) O segmento de reta $\overline{PQ}$ da figura é chamado **geratriz** do cilindro.

2. Cilindro circular reto

Quando a reta **r** é perpendicular ao plano α, o cilindro é denominado **cilindro circular reto**.

No cilindro circular reto, a altura e a geratriz têm mesma medida.



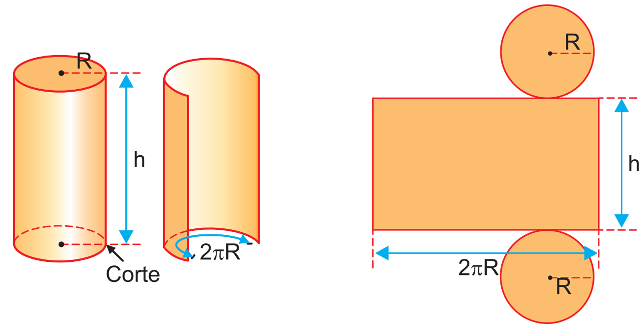
Como o cilindro circular reto pode ser gerado por uma rotação completa de uma região retangular em torno de um de seus lados, ele também é denominado cilindro de revolução.

Na figura:

a) $\overleftrightarrow{BC}$ é o **eixo** do cilindro.

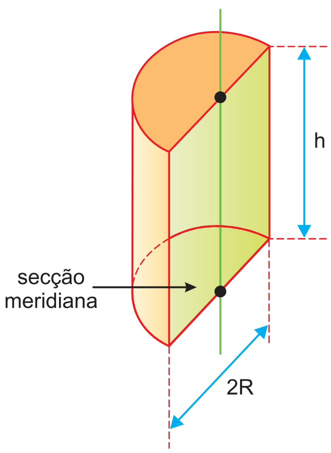
b) $\overline{AD}$ é a **geratriz** da superfície lateral do cilindro.

c) AB = CD é **raio da base** do cilindro.



3. Secção meridiana do cilindro circular reto

É o retângulo que se obtém ao seccionar o cilindro por um plano que contém o seu eixo.



Sendo **R** a medida do raio da base e **h** a medida da altura de um cilindro circular reto, a área da secção meridiana A_{sm} é dada por :

$$A_{sm} = 2 \cdot R \cdot h$$

4. Cilindro equilátero

É todo cilindro circular reto cuja secção meridiana é um **quadrado**.

Assim, no cilindro equilátero, temos: $h = 2R$

5. Cálculo de áreas e volumes

Área da base (A_b)

É a área de um círculo de raio **R**.

Assim, $A_b = \pi \cdot R^2$.

Área lateral (A_ℓ)

A superfície lateral é a de um retângulo de dimensões **2πR** (comprimento da circunferência da base) e **h**.

Assim,

$$A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

Área total (A_t)

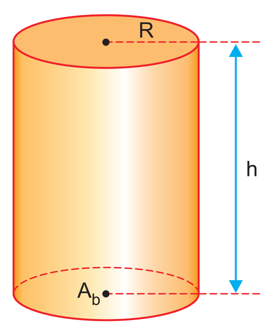
É a soma das áreas das bases com a área lateral.

Assim,

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell$$

Volume do cilindro (V)

O cilindro é equivalente a um prisma de mesma altura e mesma área da base.



Assim,

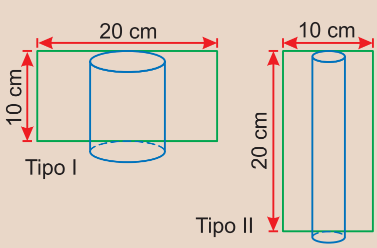
$$V = A_b \cdot h$$

ou

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$.

Exercícios Resolvidos – Módulos 38 e 39

1 **(ENEM)** – Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras a seguir).



Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

a) o triplo. b) o dobro.
c) igual. d) a metade.
e) a terça parte.

Resolução

Sendo R_1 e R_2 os raios e V_1 e V_2 os volumes dos cilindros considerados, temos:

I) $2\,\pi\,R_1 = 20\text{ cm} \Rightarrow R_1 = \dfrac{10}{\pi}\text{ cm}$

$2\,\pi\,R_2 = 10\text{ cm} \Rightarrow R_2 = \dfrac{5}{\pi}\text{ cm}$

II) $V_1 = \pi \cdot \left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10\text{ cm}^3 = \dfrac{1\,000}{\pi}\text{ cm}^3$

$V_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20\text{ cm}^3 = \dfrac{500}{\pi}\text{ cm}^3$

III) Assim:

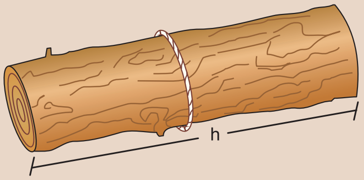
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1\,000}{\pi}\,cm^3}{\frac{500}{\pi}\,cm^3} = 2 \Rightarrow V_1 = 2\,V_2$$

Portanto, o primeiro tem o dobro do custo do segundo.

Resposta: B

2 **(ENEM)** – Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito.

A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

a) 30%. b) 22%. c) 15%.
d) 12%. e) 5%.

Resolução

Sendo R o raio do tronco, V o volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito, e V' o volume do tronco, calculado de acordo com essa prática regimental, tem-se:

1º) $V = \pi\,R^2h$

2º) $V' = \frac{2\pi\,R}{4} \cdot \frac{2\pi\,R}{4} \cdot h = \frac{\pi^2R^2h}{4}$

Assim:

$$\frac{V - V'}{V} = 1 - \frac{V'}{V} =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} \cong 1 - 0{,}78 = 0{,}22 = 22\%$$

Resposta: B

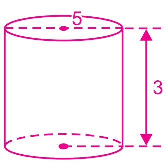
Exercícios Propostos – Módulo 38

1 Determinar a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro circular reto cujo raio da base mede 5 m e a altura 3 m.

RESOLUÇÃO:

I) $A_b = \pi \,.\, R^2$
$A_b = \pi \,.\, 5^2$
$A_b = 25 \,.\, \pi\ m^2$

II) $A_\ell = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, h$
$A_\ell = 2 \,.\, \pi \,.\, 5 \,.\, 3$
$A_\ell = 30 \,.\, \pi\ m^2$



III) $A_t = 2 \,.\, A_b + A_\ell$
$A_t = 2 \,.\, 25 \,.\, \pi + 30 \,.\, \pi$
$A_t = 80 \,.\, \pi\ m^2$

IV) $V = A_b \,.\, h$
$V = 25 \,.\, \pi \,.\, 3$
$V = 75 \,.\, \pi\ m^3$

2 Calcular a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de raio R.

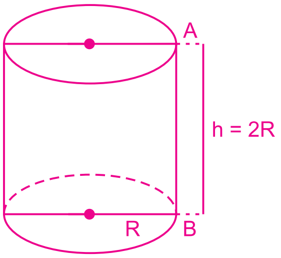
RESOLUÇÃO:

I) $A_b = \pi R^2$

II) $A_\ell = 2\pi R \,.\, h$
$A_\ell = 2\pi R \,.\, 2R$
$A_\ell = 4\pi R^2$

III) $A_t = A_\ell + 2A_b$
$A_t = 4\pi R^2 + 2\pi R^2$
$A_t = 6\pi R^2$

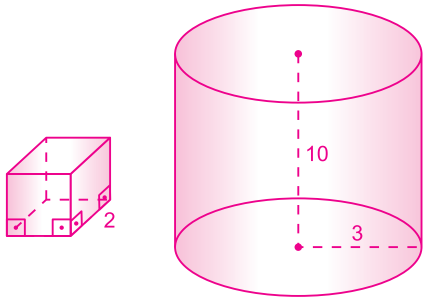
IV) $V = A_b \,.\, h$
$V = \pi R^2 \,.\, 2R$
$V = 2\pi R^3$



3 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Num copo, que tem a forma de um cilindro reto de altura 10 cm e raio da base 3 cm, são introduzidos 2 cubos de gelo, cada um com 2 cm de aresta. Supondo π = 3, o volume máximo de líquido que se pode colocar no copo é

a) 158 mℓ b) 230 mℓ c) 300 mℓ
d) 254 mℓ e) 276 mℓ

RESOLUÇÃO:



a) O volume do cilindro de raio 3 cm e altura 10 cm, supondo π = 3, em centímetros cúbicos, é $\pi \,.\, 3^2 \,.\, 10 = 270$

b) O volume dos dois cubos de aresta 2 cm, em centímetros cúbicos, é $2 \,.\, 2^3 = 16$.

c) O volume máximo de líquido que se pode colocar no copo, em centímetros cúbicos, é 270 – 16 = 254.

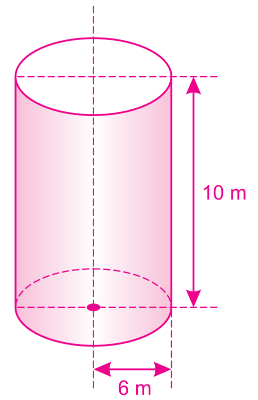
d) $254\ cm^3 = 254\ m\ell$

Resposta: D

4 **(FATEC – MODELO ENEM))** – Um tanque para depósito de combustível tem a forma cilíndrica de dimensões: 10 m de altura e 12 m de diâmetro. Periodicamente é feita a conservação do mesmo, pintando-se sua superfície lateral externa. Sabe-se que com uma lata de tinta pintam-se 14 m^2 da superfície. Nessas condições, é verdade que a menor quantidade de latas que será necessária para a pintura da superfície lateral do tanque é

a) 14 b) 23 c) 27 d) 34 e) 54

RESOLUÇÃO:



A área lateral de um cilindro circular reto de raio 6m e altura 10 m, em m^2, é: $S_{lateral} = 2 . \pi . 6 . 10 = 120\pi$

A menor quantidade de latas de tinta necessária para a pintura desta superfície lateral é:

$$n = \frac{S_{lateral}}{14\ m^2} = \frac{120\pi}{14} \cong \frac{120 \times 3,14}{14} \cong 27$$

Resposta: C

No Portal Objetivo

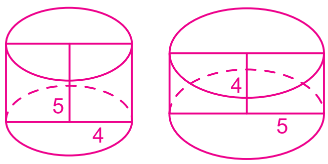
Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M313**

Exercícios Propostos – Módulo 39

1 **(MODELO ENEM)** – Na construção de uma caixa-d'água em forma de cilindro circular reto de 4 m de raio e 5 m de altura, a empreiteira trocou a medida do raio pela medida da altura e vice-versa. A troca acarretou na capacidade original

a) uma perda de 20%
b) um acréscimo de 10%
c) um acréscimo de 20%
d) uma perda de 25%
e) um acréscimo de 25%

RESOLUÇÃO:



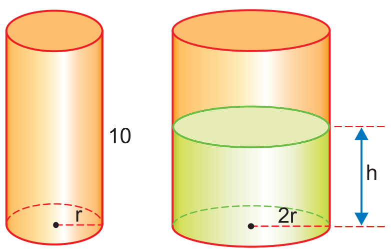
$V_1 = 4^2\pi . 5$ $V_2 = 5^2\pi . 4$

$V_1 = 80\pi\ cm^3$ $V_2 = 100\pi\ cm^3$

$V_2 = 1,25V_1$

Resposta: E

2 **(FEI-SP – MODELO ENEM)** – Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm num determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?



a) 1,5 cm
b) 2 cm
c) 2,5 cm
d) 4,5 cm
e) 5 cm

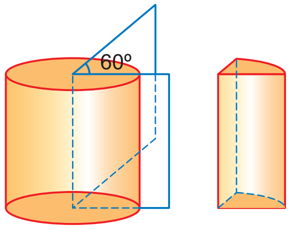
RESOLUÇÃO:

$V_1 = V_2 \Rightarrow A_b . H = A_B . h \Leftrightarrow \pi . r^2 . 10 = \pi . (2r)^2 . h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi . r^2 . 10 = \pi . 4 . r^2 . h \Leftrightarrow 10 = 4 . h \Leftrightarrow h = \dfrac{10}{4} = 2,5\ cm$

Resposta: C

3 **(UNISA – MODELO ENEM)** – De um cilindro circular reto maciço, é cortada uma "fatia", da seguinte maneira: pelos centros de suas bases, passam-se dois planos perpendiculares às bases, formando entre si um ângulo de 60°, como mostra a figura abaixo. Se as dimensões do cilindro são 4 cm de altura e 3 cm de raio da base, então o volume da "fatia" é



a) 36π cm³ b) 18π cm³ c) 12π cm³
d) 9π cm³ e) 6π cm³

RESOLUÇÃO:

$$V_{fatia} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

Assim:

$$V_{fatia} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (3cm)^2 \cdot 4cm = 6\pi \text{ cm}^3$$

Resposta: E

4 **(UNIMEP – MODELO ENEM)** – O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos, cuja altura é igual a $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo raio da base é igual a $\frac{1}{3}$ do raio da base da lata. O número de potes necessários é igual a

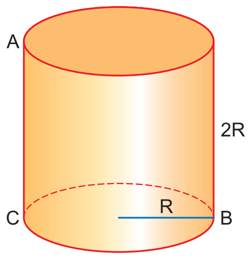
a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

RESOLUÇÃO:
H = 4h, R = 3r

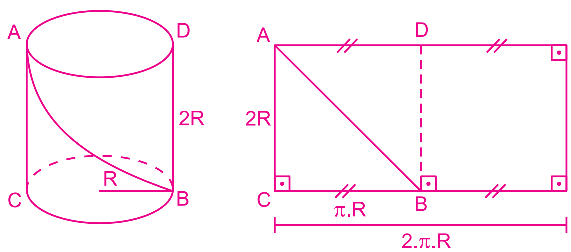
$$\frac{V_{LATA}}{V_{POTE}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{9r^2 \cdot 4h}{r^2 h} = 36$$

Resposta: E

5 A figura representa um cilindro equilátero de raio **R**. Determinar o "menor caminho" pela superfície lateral, para unir **A** e **B**.



RESOLUÇÃO:



$$(AB)^2 = (2R)^2 + (\pi R)^2$$

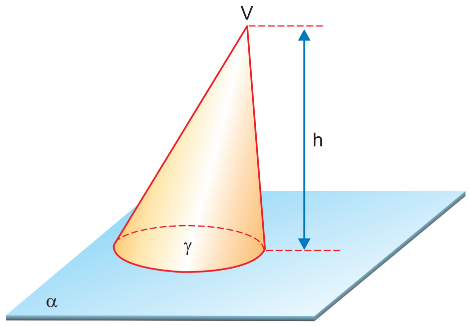
$$(AB)^2 = 4R^2 + \pi^2R^2 \to AB = \sqrt{R^2(4 + \pi^2)} = R\sqrt{4 + \pi^2}$$

Módulos 40 e 41 **Cone**

Palavras-chave:
• Geratriz
• Setor circular

1. Cone circular

Sejam um plano α, um ponto **V** $\notin \alpha$ e um círculo $\gamma \subset \alpha$. Chama-se cone circular à união de todos os segmentos de reta com uma extremidade em **V** e outra em γ.



Elementos

a) O ponto **V** é o **vértice** do cone.

b) O círculo γ é a **base** do cone.

c) A distância **h** do vértice ao plano da base é a **altura** do cone.

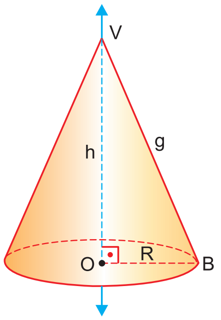
d) O raio do círculo γ é o **raio da base**.

e) Qualquer segmento com uma extremidade em **V** e outra na circunferência da base é chamado **geratriz**.

2. Cone circular reto

Um cone circular é dito reto quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



No cone circular reto da figura:

a) VO = h é a **altura** do cone.

b) OB = R é o **raio da base** do cone.

c) VB = g é a **geratriz** da superfície lateral do cone.

d) O triângulo VOB é retângulo em O e, portanto,

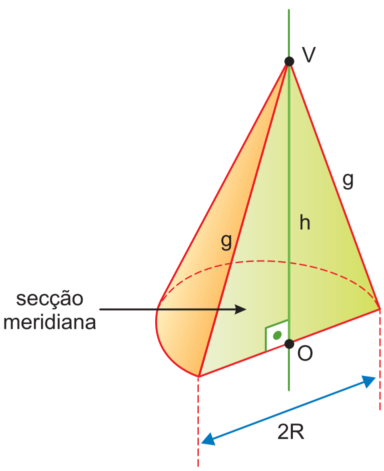
$$g^2 = h^2 + R^2$$.

e) $\overleftrightarrow{VO}$ é o **eixo** do cone.

3. Secção meridiana do cone circular reto

É o triângulo isósceles que se obtém ao seccionar o cone por um plano que contém o seu eixo.

Sendo **R** a medida do raio da base e **h** a medida da altura de um cone circular reto, a área da secção meridiana A_{sm} é dada por:



$$A_{sm} = \frac{2R \cdot h}{2} \Leftrightarrow \boxed{A_{sm} = R \cdot h}$$

4. Cone equilátero

É um cone circular reto cuja secção meridiana é um **triângulo equilátero**. Observe que num cone equilátero, $g = 2R$.

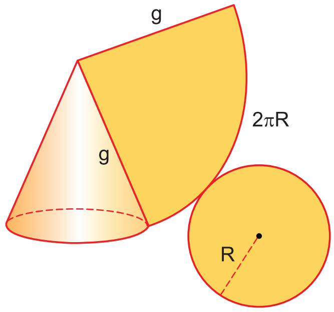
5. Área da base

A área da base de um cone circular reto de raio **R** é

$$A_b = \pi \cdot R^2$$

6. Área lateral

A superfície lateral de um cone circular reto, cujo raio da base é **R** e cuja geratriz é **g**, é equivalente à de um setor circular de raio **g** e cujo arco tem comprimento **2πR**. Assim sendo,

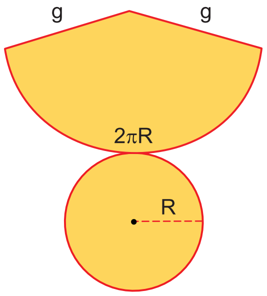


$$A_\ell = \frac{2\pi R \cdot g}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_\ell = \pi \cdot R \cdot g}$$

7. Área total

A área total de um cone circular reto de raio **R** e geratriz **g** é



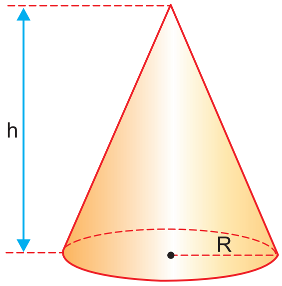
$$A_t = A_b + A_\ell$$

ou

$$A_t = \pi \cdot R \cdot (g + R)$$

8. Volume

Todo cone é equivalente a uma pirâmide de base equivalente à do cone e de mesma altura do cone. Assim sendo,



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

ou

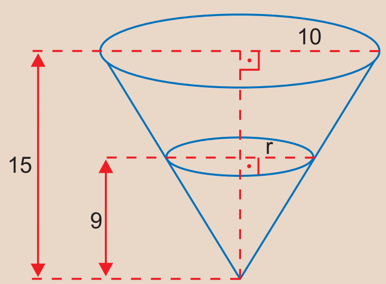
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 40 e 41

1 **(UEL)** – Um reservatório de água possui a forma de um cone circular reto com a base voltada para cima e na horizontal. Sua profundidade é de 15 m e seu diâmetro máximo é de 20 m. Se o nível da água estiver a 9 metros do vértice, qual é a porcentagem da sua capacidade total ocupada pelo volume de água? (Despreze a espessura do material.)

a) 10,3% b) 15,4% c) 21,6%
d) 26,7% e) 31,5%

Resolução



Sejam:
V_c o volume, em metros cúbicos, do reservatório.
V_a o volume, em metros cúbicos, de água dentro do reservatório.
r o raio, em metros, da superfície da água.
Assim:

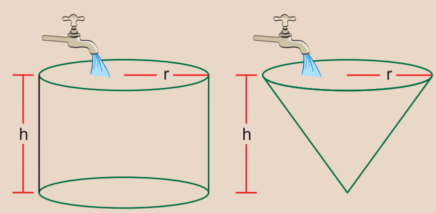
I) $\dfrac{r}{10} = \dfrac{9}{15} \Rightarrow r = 6$

II) $\dfrac{V_a}{V_c} = \dfrac{\dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 6^2 \,.\, 9}{\dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 10^2 \,.\, 15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{V_a}{V_c} = \dfrac{108}{500} = 21,6\%$

Resposta: C

2 **(CESGRANRIO)**



No desenho acima, dois reservatórios de altura **h** e raio **r**, um cilíndrico e um cônico, estão totalmente vazios, e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva duas horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isso ocorra com o reservatório cônico será de

a) 2 h b) 1 h c) 30 min
d) 1h30 min e) 50 min

Resolução

O volume do reservatório em forma de cone é $\dfrac{1}{3}$ do volume do reservatório em forma de cilindro, pois $V_{cilindro} = \pi\, r^2 \,.\, h$ e $V_{cone} = \dfrac{1}{3}\, \pi r^2.h$

Assim, o tempo necessário para o reservatório cônico ficar completamente cheio será $\dfrac{1}{3}$ do tempo necessário para o reservatório cilíndrico ficar completamente cheio, ou seja, $\dfrac{1}{3}$. 2 horas e meia = $\dfrac{1}{3}$. 150 minutos = 50 minutos

Respost: D

Exercícios Propostos – Módulo 40

1 Calcular a área lateral, a área total e o volume de um cone circular reto cujo raio da base mede 8 m e a geratriz 10 m.

RESOLUÇÃO:

I) $A_\ell = \pi Rg$

$A_\ell = \pi \,.\, 8 \,.\, 10 = 80\pi \text{ m}^2$

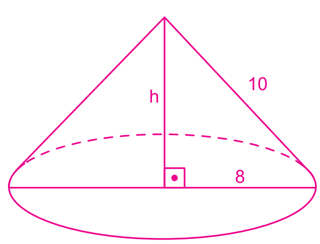
II) $A_t = A_\ell + A_b$

$A_t = 80\pi + \pi 8^2 = 144\pi \text{ m}^2$

III) $h^2 + 8^2 = 10^2$

$h^2 = 100 - 64$

$h = 6$ m



IV) $V = \dfrac{1}{3} A_b \,.\, h = \dfrac{1}{3} \pi 8^2 \,.\, 6 = 128\pi \text{ m}^3$

2 A área lateral de um cone reto é 20π cm². Calcular a área total desse cone, sabendo que sua geratriz mede 5 cm.

RESOLUÇÃO:

I) $A_\ell = \pi Rg$

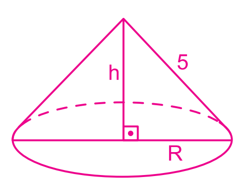
$20\pi = \pi \,.\, R \,.\, 5$

$R = 4$ cm

II) $A_t = A_\ell + A_b$

$A_t = 20\pi + \pi 4^2$

$A_t = 36\pi \text{ cm}^2$



❸ **(MACKENZIE)** – A área lateral de um cone equilátero que tem 16π de área da base vale

a) 32π b) 2π c) 8π d) 4π e) 16π

RESOLUÇÃO:

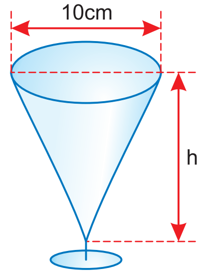
$g = 2R$, $\pi R^2 = 16\pi$ e $A_\ell = \pi\,R\,g$

assim,

$A_\ell = \pi\,R\,.\,2R = 2\,\pi\,R^2 = 32\pi$

Resposta: A

❹ **(UNI-RIO – MODELO ENEM)** – Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π mℓ, a altura é igual a



a) 20 cm
b) 16 cm
c) 12 cm
d) 8 cm
e) 4 cm

RESOLUÇÃO:

I) 100π mℓ = 100π cm^3

II) $V = 100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\,.\,5^2\,.\,h = 100 \Leftrightarrow h = 12$ cm

Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 41

❶ **(PUC)** – A área lateral de um cone reto é igual ao dobro da área da base. Calcule o volume desse cone, sabendo que sua geratriz mede 12 cm.

RESOLUÇÃO:

I) $A_L = 2\,.\,A_B \Leftrightarrow \pi\,R\,g = 2\,\pi\,R^2 \Leftrightarrow 12 = 2R \Rightarrow R = 6$ cm

II) $g^2 = R^2 + h^2 \Leftrightarrow 12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$ cm

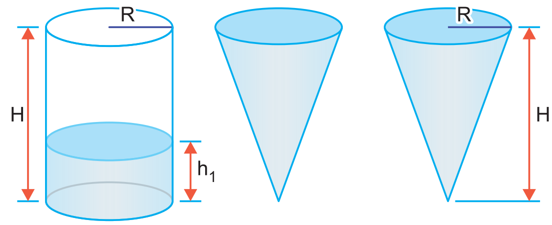
III) $V = \dfrac{1}{3}\,\pi\,R^2h = \dfrac{1}{3}\,\pi\,.\,6^2\,.\,6\sqrt{3} \Rightarrow V = 72\pi\sqrt{3}$ cm^3

Resposta: O volume do cone é $72\pi\sqrt{3}$ cm^3

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M314**

❷ **(UFLA – MODELO ENEM)** – Parte do líquido de um cilindro completamente cheio é transferido para dois cones idênticos, que ficam totalmente cheios.



A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro (h_1) e a altura (H) do cilindro é

a) $h_1 = \dfrac{H}{4}$ b) $h_1 = \dfrac{H}{2}$ c) $h_1 = \sqrt{\dfrac{H}{2}}$

d) $h_1 = \dfrac{H}{3}$ e) $h_1 = \sqrt{\dfrac{H}{3}}$

RESOLUÇÃO:

De acordo com o enunciado, tem-se:

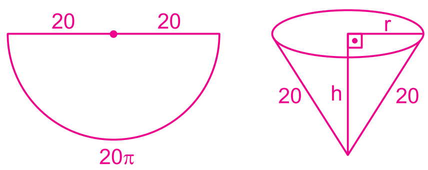
$\pi R^2H - \pi R^2h_1 = 2\,.\,\dfrac{1}{3}\,.\,\pi R^2H \Leftrightarrow \pi R^2h_1 = \dfrac{1}{3}\,\pi R^2H \Leftrightarrow h_1 = \dfrac{H}{3}$

Resposta: D

3 **(UNISANTOS – MODELO ENEM)** – Com um semicírculo de papel, com raio igual a 20 cm, um pipoqueiro faz saquinhos para vender pipocas, com a forma de cone circular reto, o volume desses saquinhos, usando $\pi \cong 3$, é mais próximo de

a) $1100\ cm^3$ b) $1300\ cm^3$ c) $1500\ cm^3$
d) $1700\ cm^3$ e) $2000\ cm^3$

RESOLUÇÃO:



I) $2\pi r = 20\pi \Rightarrow r = 10$

II) $h^2 = 20^2 - r^2 = 20^2 - 10^2 = 300 \Rightarrow h = 10\sqrt{3}$

III) $V = \dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, r^2 \,.\, h = \dfrac{1000\sqrt{3}\,\pi}{3}$

$V \cong \dfrac{1000\,.\,1{,}7\,.\,3}{3} \Leftrightarrow V \cong 1700\ cm^3$

Resposta: D

4 A geratriz de um cone circular reto mede 6 cm e forma com o plano da base um ângulo de 60°. Então, o volume do cone é

a) $54\sqrt{3}\,\pi\ cm^3$ b) $27\sqrt{3}\,\pi\ cm^3$ c) $18\sqrt{3}\,\pi\ cm^3$
d) $9\sqrt{3}\,\pi\ cm^3$ e) $15\sqrt{3}\,\pi\ cm^3$

RESOLUÇÃO:

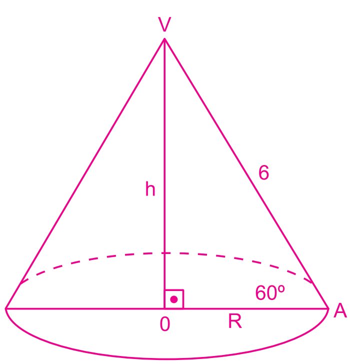
I) No ΔVOA, $\dfrac{R}{6} = \cos 60° \Leftrightarrow R = 6\,.\,\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow R = 3\ cm$

II) $h^2 + R^2 = g^2$

$h^2 + 3^2 = 6^2$

$h^2 = 27$

$h = 3\sqrt{3}\ cm$



III) $V = \dfrac{1}{3}\,\pi R^2 h$

$V = \dfrac{1}{3}\,\pi\,.\,3^2\,.\,3\sqrt{3}$

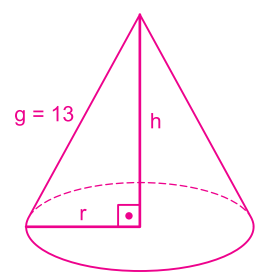
$V = 9\pi\sqrt{3}\ cm^3$

Resposta: D

5 **(MACKENZIE)** – A geratriz de um cone circular reto mede 13 e sua área total é 90π. O raio da base do cone é igual a

a) 18 b) 9 c) 5 d) 10 e) 12

RESOLUÇÃO:



$A_T = 90\pi \Leftrightarrow A_B + A_\ell = 90\pi \Leftrightarrow \pi R^2 + \pi R\,.\,13 = 90\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^2 + 13R - 90 = 0 \Leftrightarrow R = \dfrac{-13 \pm 23}{2} \Rightarrow R = 5$, pois $R > 0$

Resposta: C

Módulos 42 a 44

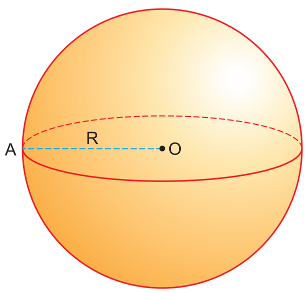
Esfera e suas partes

Palavras-chave:
- Raio
- Superfície esférica

1. Superfície esférica

Chama-se **superfície esférica** o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam uma constante **R** de um ponto fixo **O** denominado centro da superfície esférica.

$\overline{OA}$ é um dos raios da superfície esférica.



Pode-se provar que a área **A** da superfície esférica é dada por

$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

2. Esfera

Chama-se **esfera** a região do espaço limitada por uma superfície esférica.

Prova-se que o volume **V** de uma esfera é dado por

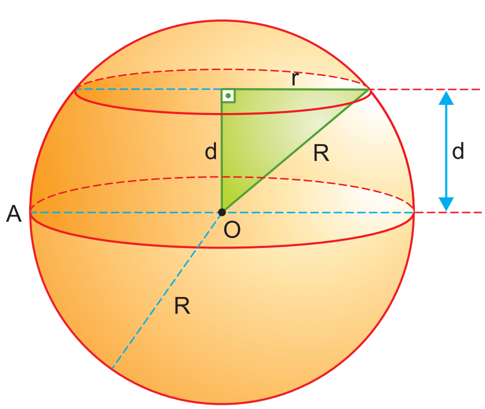
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

3. Secção plana da esfera

Seja λ uma esfera de centro **O** e raio **R** e α um plano que intercepta λ a uma distância **d** do ponto **O**. Quando $0 < d < R$, a intersecção de α e λ é um círculo de raio **r** tal que

$$R^2 = r^2 + d^2$$

Quando $d = 0$, a intersecção de α e λ é um círculo de raio **R**, que contém o centro **O** e que é denominado **círculo máximo**.

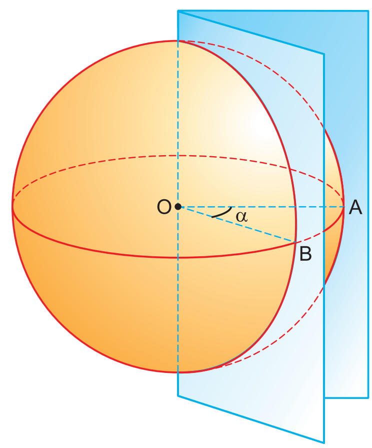


4. Fuso esférico e cunha esférica

Consideremos dois semiplanos distintos com origem na reta suporte de um dos diâmetros de uma esfera. A superfície fica assim dividida em duas regiões denominadas **fusos esféricos** e as regiões correspondentes da esfera são denominadas **cunhas esféricas**.

O arco $\overset{\frown}{AB}$ é denominado **arco equatorial** e o ângulo central correspondente α é o **ângulo equatorial**.

Supondo que a **esfera** seja uma **laranja**, pode-se dizer que:



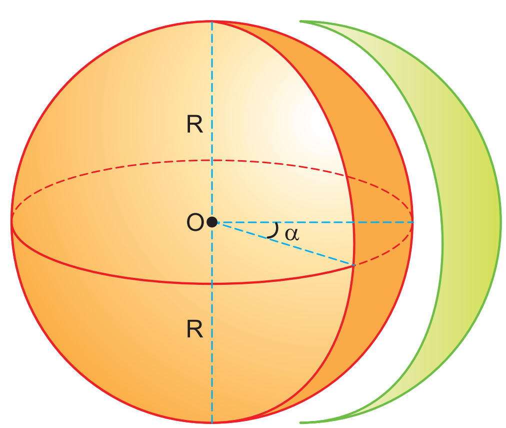
a) A **cunha esférica** é o **gomo da laranja**.

b) O **fuso esférico** é a **casca do gomo da laranja**.

Área do fuso esférico

O fuso esférico é parte da superfície esférica. É a **casca do gomo da laranja**. Sua área é diretamente proporcional ao ângulo equatorial $\boldsymbol{\alpha}$ e pode ser calculada por Regra de Três, como se segue:

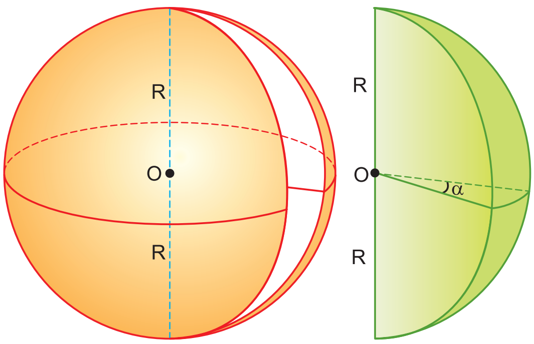
$$\left.\begin{array}{l} A_{fuso} \longrightarrow \alpha \\ A_{esfera} \longrightarrow 360° \end{array}\right\} \quad \frac{A_{fuso}}{A_{esfera}} = \frac{\alpha}{360°} \quad (\alpha \text{ em graus})$$



Volume da cunha esférica

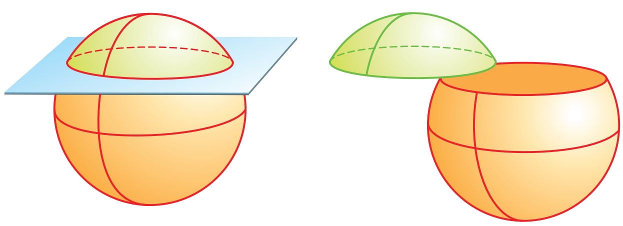
A cunha esférica é um sólido. É parte da esfera. É o **gomo da laranja**. Seu volume é diretamente proporcional ao ângulo equatorial **α** e pode ser calculado por Regra de Três, como se segue:

$$\left.\begin{array}{l} V_{cunha} \longrightarrow \alpha \\ V_{esfera} \longrightarrow 360° \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \frac{\alpha}{360°}} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

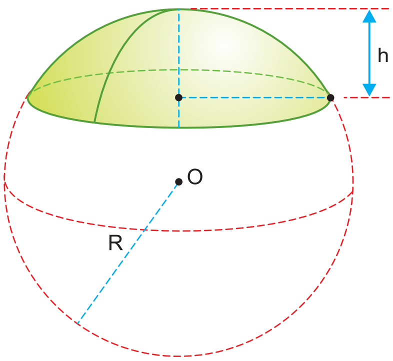


5. Calota esférica e segmento esférico

Um plano secante a uma superfície esférica a divide em duas superfícies denominadas **calotas esféricas**. A esfera fica dividida por este plano em dois sólidos denominados **segmentos esféricos**.



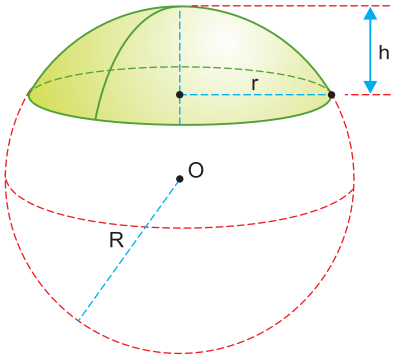
Área da calota esférica



Sendo **R** o raio da esfera e **h** a altura da calota esférica, pode-se provar que a área da calota esférica é dada por

$$\boxed{A_{calota} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h}$$

Volume do segmento esférico



Sendo **h** a altura e **r** o raio da base de um segmento esférico, pode-se provar que o volume do segmento esférico é dado por

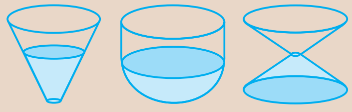
$$\boxed{V_{segm.esférico} = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot r^2 + h^2)}$$

Saiba mais

1. Dividir uma esfera em, por exemplo, 8 cunhas esféricas congruentes, significa que cada cunha obtida tem ângulo equatorial de $\frac{360°}{8} = 45°$ e volume igual a $\frac{1}{8}$ do volume da esfera, isto é, $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

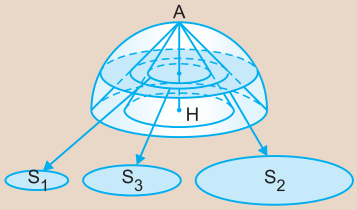
2. Dividir uma superfície esférica em, por exemplo, 10 fusos esféricos congruentes, significa que cada fuso obtido tem ângulo equatorial de $\frac{360°}{10} = 36°$ e área igual a $\frac{1}{10}$ da área da superfície esférica, isto é, $\frac{1}{10} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2$.

1 **(ENEM)** – Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca.
Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.
Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se



a) $V_1 = V_2 = V_3$ b) $V_1 < V_3 < V_2$
c) $V_1 = V_3 < V_2$ d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_1 < V_2 = V_3$

Resolução

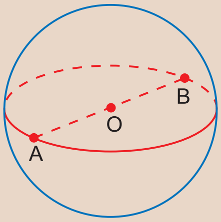


A intersecção de qualquer plano α, perpendicular ao segmento de reta $\overline{AH}$ tal que $A \notin \alpha$ e $H \notin \alpha$ com V_1, V_2 e V_3, determina secções transversais S_1, S_2 e S_3, respectivamente.

Como $S_1 < S_3 < S_2$ para qualquer α, temos: $V_1 < V_3 < V_2$.

Resposta: B

2 **(UNIFESP)** – Um inseto vai-se deslocar sobre uma superfície esférica de raio 50 cm, desde um ponto A até um ponto B, diametralmente opostos, conforme a figura.



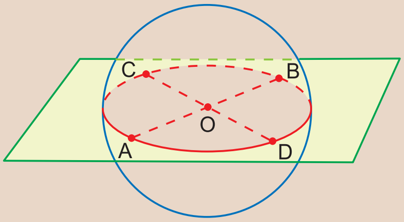
O menor trajeto possível que o inseto pode percorrer tem comprimento igual a:

a) $\dfrac{\pi}{2}$ m b) π m c) $\dfrac{3\pi}{2}$ m
d) 2π m e) 3π m

Resolução

Um trajeto possível que o inseto pode percorrer é a semicircunferência de centro O e raio 50 cm.

Na figura, pode ser a semicircunferência $\overset{\frown}{ACB}$ ou a semicircunferência $\overset{\frown}{ADB}$, ambas de comprimento $\dfrac{2 \,.\, \pi \,.\, 50}{2} = 50\pi$ cm $= \dfrac{\pi}{2}$ m que é o menor valor, dos cinco apresentados.



Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 42

1 Calcular o volume de uma esfera de raio $3\sqrt{2}$ m.

RESOLUÇÃO:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi(3\sqrt{2})^3}{3} = \frac{4\pi \,.\, 9 \,.\, 2 \,.\, 3\sqrt{2}}{3} = 72\pi\sqrt{2}$$

Resposta: $72\pi\sqrt{2}$ m³

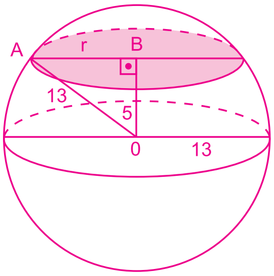
2 Quanto mede, em centímetros, o raio da circunferência obtida pela intersecção de uma esfera de raio 13 cm com um plano que dista 5 cm do centro da esfera.

RESOLUÇÃO:

$r^2 + 5^2 = 13^2$

$r^2 = 144$

r = 12 cm

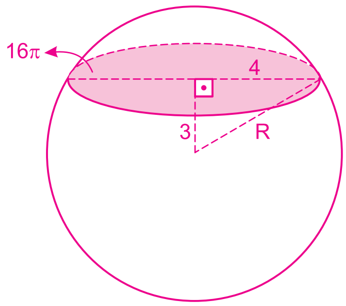


3 **(UFLA)** – A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo de 16π dm^2 de área. Sabendo-se que o plano dista 3 dm do centro da esfera, o volume da esfera é

a) 100π dm^3 b) $\frac{100}{3}\pi$ dm^3 c) 400π dm^3

d) 500π dm^3 e) $\frac{500}{3}\pi$ dm^3

RESOLUÇÃO:



(I) Sendo r a medida do raio do círculo, temos:

$\pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r = 4$dm

(II) $R^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow R = 5$ dm

(III) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ dm^3

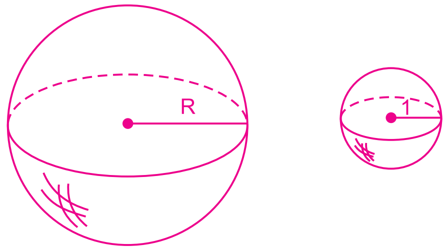
Resposta: E

4 **(PUC – MODELO ENEM)** – Qual é o raio de uma esfera 1 milhão de vezes maior (em volume) que uma esfera de raio 1?

a) 100000 b) 10 c) 10000

d) 1000 e) 100

RESOLUÇÃO:



$V_2 = 1\,000\,000 \cdot V_1 \Leftrightarrow V_2 = 10^6 \cdot V_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 10^6 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^3 = 10^6 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{10^6} = 10^2 = 100$

Resposta: E

5 **(UFES – MODELO ENEM)** – Um ourives deixou como herança para seus oito filhos uma esfera maciça de ouro. Os herdeiros resolveram fundir o ouro e, com ele, fazer oito esferas iguais. Cada uma dessas esferas terá um raio igual a

a) $\frac{1}{2}$ do raio da esfera original.

b) $\frac{1}{3}$ do raio da esfera original.

c) $\frac{1}{4}$ do raio da esfera original.

d) $\frac{1}{6}$ do raio da esfera original.

e) $\frac{1}{8}$ do raio da esfera original.

RESOLUÇÃO:

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Leftrightarrow \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$

Resposta: A

1 Calcular a área de um fuso esférico de uma esfera de raio 3 cm sendo de 60° o seu ângulo equatorial.

RESOLUÇÃO:

I) $\alpha = 60°$

II) $n = \dfrac{360°}{60°} = 6$

III) $A_{fuso} = \dfrac{A_{sup.esf.}}{6}$

$A_{fuso} = \dfrac{4 \,.\, \pi \,.\, R^2}{6}$

$A_{fuso} = 6\pi \text{ cm}^2$

2 Calcular o volume de uma cunha esférica com 20° de ângulo equatorial e 6 cm de raio.

RESOLUÇÃO:

I) $\alpha = 20°$

II) $n = \dfrac{360°}{20°} = 18$

III) $V_{cunha} = \dfrac{V_{esfera}}{18}$

$V_{cunha} = \dfrac{1}{18} \,.\, \dfrac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, R^3$

$V_{cunha} = \dfrac{1}{18} \,.\, \dfrac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, 6^3$

$V_{cunha} = 16\pi \text{ cm}^3$

3 Uma esfera de raio 5 cm é seccionada por um plano distante 3 cm de seu centro. Calcular a área da menor calota esférica obtida e o volume do segmento esférico correspondente.

RESOLUÇÃO:

I) $A = 2\pi Rh$

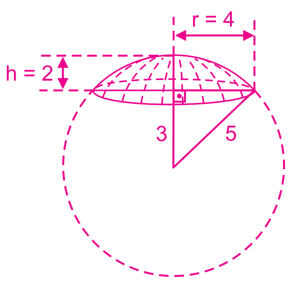
$A = 2\pi\, 5 \,.\, 2$

$A = 20\pi \text{ cm}^2$

II) $V = \dfrac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$

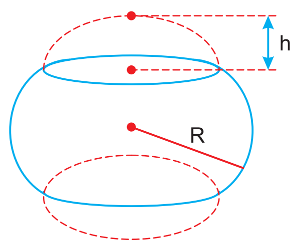
$V = \dfrac{\pi \,.\, 2}{6}(3 \,.\, 4^2 + 2^2)$

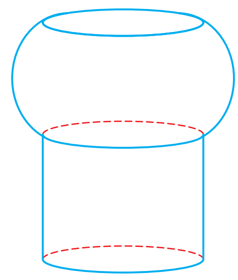
$V = \dfrac{52\pi}{3} \text{ cm}^3$



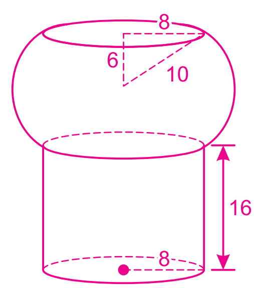
4 **(USF – MODELO ENEM)** – Chama-se calota esférica a região determinada pela secção da superfície de uma esfera de raio R por um plano, cuja distância até essa superfície é h. A área da calota é calculada por A = 2π Rh. Para construir um exaustor eólico (desses que ficam sobre barracões como chaminés), um fabricante projeta uma superfície esférica de raio 10 dm e retira duas calotas, interceptando a superfície por dois planos paralelos, cada um distante 6 dm do centro. A parte superior será fechada e na parte inferior encaixar-se-á um cilindro equilátero aberto. A área, em decímetros quadrados, da superfície desse exaustor, na situação descrita, é de

a) 560π b) 496 c) 580π d) 516π e) 432π





RESOLUÇÃO:



Deve-se calcular a área da superfície esférica, menos a área das duas calotas, mais a área do círculo superior e mais a área lateral do cilindro equilátero.

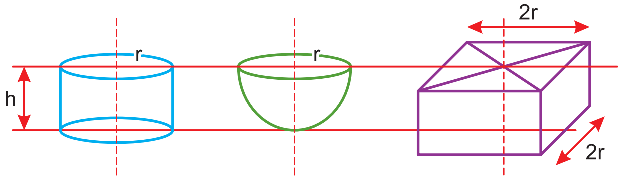
Assim:

$S = 4 \,.\, \pi \,.\, 10^2 - 2 \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, 10 \,.\, (10 - 6) + \pi \,.\, 8^2 + 2 \,.\, \pi \,.\, 8 \,.\, 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = 400\pi - 160\pi + 64\pi + 256\pi \Leftrightarrow S = 560\pi$

Resposta: A

1 **(UNIV.FED.FLUMINENSE – MODELO ENEM)** – Na figura, estão representados três sólidos de mesma altura **h**: um cilindro, uma semiesfera e um prisma, cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.



A relação entre V_1, V_2 e V_3 é

a) $V_3 < V_2 < V_1$
b) $V_2 < V_3 < V_1$
c) $V_1 < V_2 < V_3$
d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_2 < V_1 < V_3$

RESOLUÇÃO:

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot r = \pi \cdot r^3$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4\pi\, r^3}{6} = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3$$

$V_3 = 2r \cdot 2r \cdot h = 2r \cdot 2r \cdot r = 4 \cdot r^3$

Como $\frac{2\pi}{3} < \pi < 4$, tem-se: $V_2 < V_1 < V_3$

Resposta: E

2 **(MODELO ENEM)** – Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que

a) não transbordará.
b) transbordará.
c) os dados são insuficientes.
d) os dados são incompatíveis.
e) todas as afirmações anteriores são falsas.

RESOLUÇÃO:

I) $V_{copo} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

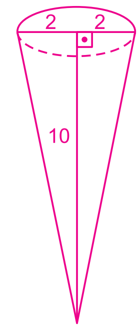
$V_{copo} = \frac{1}{3} \pi\, 2^2 \cdot 10$

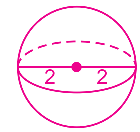
$V_{copo} = \frac{40\pi}{3}\ cm^3$

II) $V_{sorvete} = \frac{4\pi\, R^3}{3}$

$V_{sorvete} = \frac{4\pi\, 2^3}{3}$

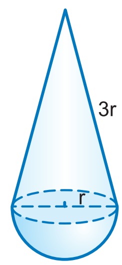
$V_{sorvete} = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$





Resposta: A

3 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Uma boia marítima construída de uma determinada liga metálica tem o formato de uma gota que, separada em dois sólidos, resulta em um cone reto e em uma semiesfera, conforme a figura ao lado, na qual r = 50 cm. Se o preço do m^2 da liga metálica é 1200 reais, adotando-se $\pi = 3$, o custo da superfície da bóia é, em reais, igual a



a) 4200
b) 5700
c) 4500
d) 5200
e) 3800

RESOLUÇÃO:

Sendo S a área da superfície da gota, em metros quadrados, temos:

$$S = S_{\text{lateral do cone}} + S_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot r \cdot 3r + \frac{4\pi r^2}{2} =$$

$$= 3 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 + \frac{4 \cdot 3 \cdot (0,5)^2}{2} = 3,75$$

Assim, o custo da superfície da boia é, em reais, 3,75 . 1200 = 4500

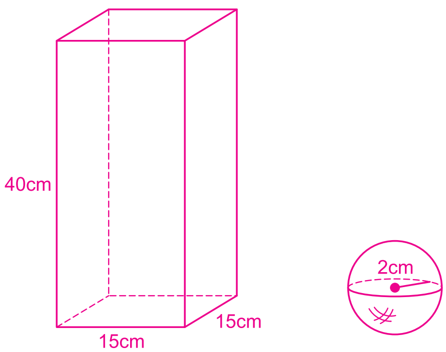
Resposta: C

4 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Com um recipiente de vidro fino e transparente na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, que tem como base um quadrado cujo lado mede 15 cm e a aresta da face lateral mede 40 cm, Márcia montou um enfeite de natal. Para tanto, colocou no interior desse recipiente 90 bolas coloridas maciças de 4 cm de diâmetro cada uma e completou todos os espaços vazios com um líquido colorido transparente. Desprezando-se a espessura do vidro e usando (para facilitar os cálculos) a aproximação $\pi = 3$,

a) dê, em cm^2, a área lateral do recipiente e a área da superfície de cada bola.

b) dê, em cm^3, o volume do recipiente, o volume de cada esfera e o volume do líquido dentro do recipiente.

RESOLUÇÃO:



a) Sejam A_R e A_S as áreas, em cm^2, da lateral do recipiente e da superfície de cada bola, respectivamente.

$A_R = 4 \cdot (15 \cdot 40) = 2400$

$A_S = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$

b) Sejam V_R, V_E e V_L os volumes, em cm^3, do recipiente, de cada esfera e do líquido, respectivamente.

$V_R = (15 \cdot 15) \cdot 40 = 9000$

$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 8 = 32$

$V_L = V_R - 90 \cdot V_E = 9000 - 90 \cdot 32 = 6120$

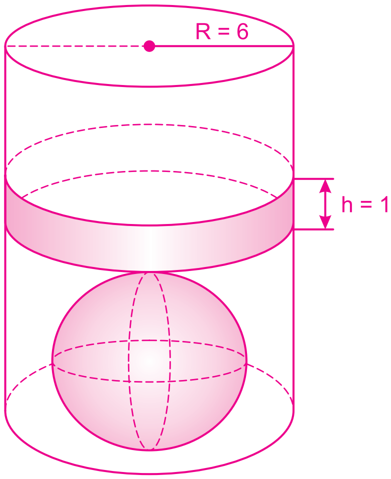
Respostas: a) 2400 cm^2 e 48 cm^2

b) 9000 cm^3, 32 cm^3 e 6120 cm^3

5 **(MODELO ENEM)** – Um recipiente cilindrico, cujo raio da base é 6 cm, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm e) 5 cm

RESOLUÇÃO:



I) Sendo r a medida do raio da esfera, temos:

$V_{ESF} = \frac{4}{3} \pi r^3$

II) Sendo V o volume da água que subiu, temos:

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 1 \Rightarrow V = 36\pi \ cm^3$

III) $V_{ESF} = V \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \ cm$

Resposta: C

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M315**

FRENTE 1

Módulo 33 – Sistema cartesiano ortogonal

1 Determinar as coordenadas dos pontos simétricos de A (– 3; – 2) em relação ao eixo $\overrightarrow{Ox}$ e eixo $\overrightarrow{Oy}$.

2 Dados os pontos A (a + 1; 6) e B (– 2; 3b), determinar **a** e **b** para que A e B sejam coincidentes.

3 O segmento de reta AB, em que A (1; 2), é paralelo ao eixo das ordenadas e mede 5 unidades. Determinar as coordenadas do ponto B, sabendo-se que ele está no 4º quadrante.

4 O triângulo ABC, sendo A (4; 5) e B (1; 5) é retângulo em A. Determinar o vértice C sabendo-se que ele é um ponto do eixo das abscissas.

5 Os pontos A (1; 2) e B (5; 2) são vértices do retângulo ABCD. Sabendo-se que os pontos C e D estão no eixo das abscissas, o perímetro do retângulo é:
a) 20 b) 18 c) 16 d) 14 e) 12

6 Representar no sistema de coordenadas cartesianas ortogonal os pontos A(– 1; 2), B(4; 2) e C(4; 4). Classificar o triângulo ABC quanto aos ângulos.

7 Dar as coordenadas das projeções dos pontos A(2; 3); B(3; – 1); C(– 5; 1); D(– 3; – 2); E(– 5; – 1) sobre os eixos cartesianos:

8 Dar as coordenadas dos pontos simétricos aos pontos A(– 1; 2), B(3; – 1), C(– 2; – 2), D(– 2; 5), E(3; – 5) em relação ao eixo das ordenadas.

9 Determinar em que quadrante pode estar situado o ponto P(x; y) se:
a) x . y > 0 b) x . y < 0
c) x – y = 0 d) x + y = 0

10 Em um sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos P = (2; 0) e Q = (0; 2). O ponto A, simétrico da origem em relação à reta PQ, tem coordenadas

a) (2;2) b) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

d) (2;1) e) (1;2)

Módulo 34 – Distância entre dois pontos

1 Determinar a distância entre os pontos A (1; – 2) e B (– 3; 2).

2 Dados A (–1; y) e B (3; –1) determinar o valor de **y** de modo que a distância entre A e B seja 5 unidades.

3 Determinar no eixo das abscissas o ponto P cuja distância até o ponto A (4; 1) seja igual a $\sqrt{10}$.

4 Determinar o ponto P no eixo das ordenadas equidistante dos pontos A (1; 2) e B (3; 8).

5 No triângulo ABC, sendo A(–1; –1); B(2; 1) e C(–1; 2), a medida do maior lado é:
a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{14}$

6 Determinar no eixo das abscissas um ponto **M**, cuja distância até o ponto P(2; – 3) seja igual a 5 unidades.

7 Determinar a natureza do triângulo de vértices A(2; – 3), B(– 5; 1) e C(4; 3).

8 Determinar o ponto do eixo Ox equidistante dos pontos A(6; 5) e B(– 2; 3).

9 Os vértices de um triângulo são: A(– 3; 6); B(9; – 10) e C(– 5; 4). Determinar o centro e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

10 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio r. Se, num sistema de coordenadas cartesianas, A = (1; 3), B = (5; 7) e C = (5;1), então r é igual a

a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 3 d) $\frac{10}{3}$ e) $\sqrt{10}$

Módulo 35 – Ponto médio de um segmento

1 Dados os pontos A (– 3; 5) e B (– 2; – 4), determinar o ponto médio de $\overline{AB}$.

2 Sendo M (2; 3) ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, em que A (– 1; 2), determinar as coordenadas do ponto B.

3 Seja ABCD um paralelogramo cujos vértices são A(1; 1), B(3; 2), C(4; 5) e D(2; 4). A soma das coordenadas do ponto E, ponto de encontro das diagonais do paralelogramo, é:

a) 5 b) $\frac{11}{2}$ c) 6 d) $\frac{13}{2}$ e) 7

4 Os pontos A (3, 4) e B (5, 4) são extremos de um diâmetro de uma circunferência. Calcule as coordenadas de seu centro.

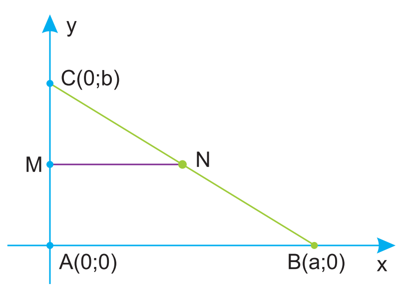
5 No paralelogramo de vértices A(5; 4), B(– 1; 2), C(– 3; – 6) e $D(x_D; y_D)$, as coordenadas do ponto D são:
a) (1; – 1) b) (2; – 2) c) (2; – 4)
d) (3; – 2) e) (3; – 4)

6 Determine o ponto médio do segmento de extremidades:
a) A (1; – 7) e B(3; – 5)
b) A(– 1; 5) e B(5; – 2)
c) A(– 4; – 2) e B(– 2; – 4)

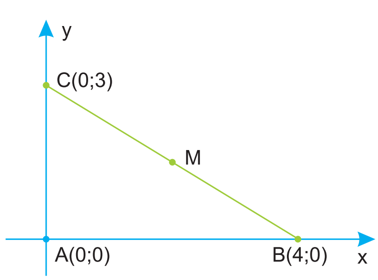
7 Uma das extremidades de um segmento é o ponto A(– 2; – 2). Sabendo-se que M(3; – 2) é o ponto médio desse segmento, calcule as coordenadas do ponto B(x; y), que é a outra extremidade do segmento.

8 **(MODELO ENEM)** – Num paralelogramo ABCD, M(1; – 2) é o ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Sabe-se que A(2; 3) e B(6; 4) são dois vértices consecutivos. Uma vez que as diagonais se cortam mutuamente ao meio, determine as coordenadas dos vértices C e D.

9 Na figura, M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e N é o ponto médio do lado BC. Demonstre, analiticamente, que o comprimento do segmento MN é igual à metade do comprimento do lado $\overline{AB}$.



10 **(MODELO ENEM)** – A figura mostra um triângulo retângulo ABC. Seja M o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$. Prove, analiticamente, que o ponto M é equidistante dos três vértices do triângulo.



Módulo 36 – Área do triângulo e condição de alinhamento

1 Determinar a área do triângulo ABC cujos vértices são A(– 1; – 2), B(1; 0) e C(0; 2).

2 Os valores de **y** para os quais o triângulo ABC, em que A(1; y), B(0; 2) e C(–3; 1), tem área 4 são:

a) $\dfrac{-1}{3}$ e 5 b) – 3 e $\dfrac{1}{5}$ c) 3 e $\dfrac{-1}{5}$

d) 3 e 5 e) – 3 e – 5

3 Os pontos A (– 1; – 3), B (1; 1) e C (2; 1) estão alinhados?

4 Para que valor de x_c os pontos A(2; 1), B(3; – 2) e $C(x_c; 0)$ estão alinhados?

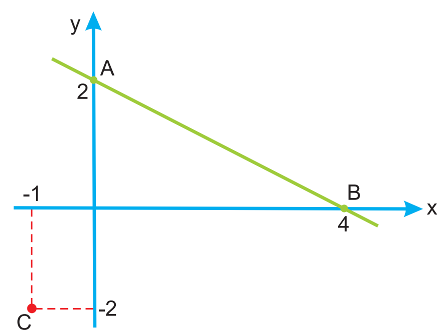
5 A área do quadrilátero ABCD cujos vértices são A (1; 1), B (3; 2), C (5; 5) e D (2; 4) é:
a) 6 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

6 Dados os pontos A(10; – 2) e B(1; 1), determinar o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das abscissas.

7 Achar a área do quadrilátero ABCD, dados A(2; 5), B(7; 1), C(3; – 4) e D(– 2; 3).

8 Dados os pontos $A(x_A; 5)$, B(– 3; 8) e $C\left(4; \dfrac{9}{2}\right)$, determinar $\mathbf{x_A}$ para que os pontos sejam colineares.

9 **(MODELO ENEM)** – A área do triângulo ABC da figura é:



a) – 18 b) – 9 c) 9 d) 15 e) 18

10 **(UNICASTELO)** – Dados 3 pontos do plano, A(1; 2), B(3; 4) e C(4; 5):
a) eles formam um triângulo cuja área mede 16;
b) eles formam um triângulo cuja área mede 32;
c) eles formam um triângulo cuja área mede 64;
d) eles estão alinhados e são parte do gráfico de f(x) = x + 1;
e) eles estão alinhados e são parte do gráfico de f(x) = – 3x + 5.

Módulo 37 – Equação da reta

1 Achar a equação geral das retas determinadas pelos pares de pontos:
a) A (1; – 2) e B (– 3; 4)
b) C (– 1; – 4) e D (5; 5)

2 Os pontos A (1; 2), B (5; 4) e C (2; 7) são vértices de um triângulo ABC. Determine a equação geral da reta suporte da mediana CM do triângulo.

3 Achar a equação geral da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas $x - 3y + 2 = 0$ e $5x + 6y - 4 = 0$ e pelo ponto P (–1; – 3).

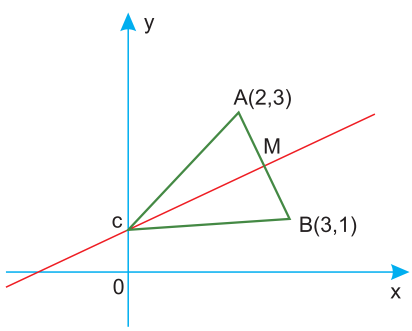
4 Achar a equação geral da reta que passa pelo ponto A(1; 3) e pelo ponto B(2; b), sabendo que B pertence à parábola de equação $y = x^2 - 4x + 3$.

5 **(FATEC)** – Seja **r** a reta que passa pelos pontos (3; 2) e (5; 1). A reta **s** é a simétrica de **r** em relação à reta de equação y = 3. A equação de **s** é

a) $x + 2y - 7 = 0$ b) $x + 2y - 5 = 0$
c) $x - 2y + 5 = 0$ d) $x - 2y - 11 = 0$
e) $2x - y + 5 = 0$

6 **(MACKENZIE)** – No triângulo da figura, se AC = BC, a equação da reta suporte da mediana $\overline{CM}$ é

a) $12x - 25y + 20 = 0$ b) $6x - 10y + 5 = 0$
c) $14x - 25y + 15 = 0$ d) $2x - 4y + 3 = 0$
e) $7x - 9y + 5 = 0$



7 **(MACKENZIE)** – Os gráficos de $y = x + 2$ e $x + y = 6$ definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um quadrilátero de área

a) 12 b) 16 c) 10 d) 8 e) 14

8 **(MACKENZIE)** – As retas $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{3}{4}$ e $x = 0$

definem um triângulo, cuja raiz quadrada da área é

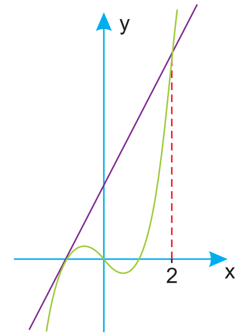
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{5}$

9 **(MACKENZIE)** – Pelo vértice da curva $y = x^2 - 4x + 3$, e pelo ponto onde ela encontra o eixo das ordenadas, passa uma reta que define com os eixos um triângulo de área:

a) 2 b) $\frac{11}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 3 e) $\frac{9}{4}$

10 **(MACKENZIE)** – Na figura, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = ax + b$. O produto a . b é igual a:

a) – 4
b) 4
c) 2
d) 6
e) – 2



Módulo 38 – Posições particulares da reta

1 A reta y = 2 é a mediatriz do segmento que une os pontos

a) A (1; 0) e B (3; 0) d) A (0; –1) e B (0; 5)
b) A (0; 0) e B (4; 0) e) A (0; 0) e B (4; 4)
e) A (0; 0) e B (0; – 4)

2 A equação da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção das retas (r) $2x - y = 0$ e (s) $2 . x + y - 8 = 0$ é:

a) x = 4 b) y = 4 c) x = – 2
d) y = 2 e) x = 2

3 Representar graficamente os pontos (x; y) do plano tais que $-1 < x \le 3$ e $0 \le y < 5$

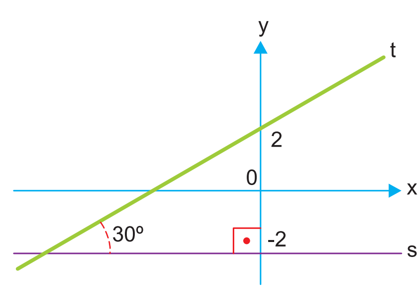
4 **(MACKENZIE)** – Os gráficos de $y = x - 1$ e $y = 2$ definem com os eixos uma região de área:

a) 6 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 3 e) $\frac{7}{2}$

5 **(MACKENZIE)** – Se (a; b) é o ponto comum das retas s e t da figura, a^b vale:

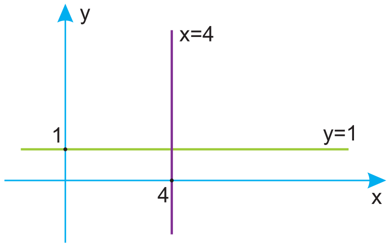
a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{32}$ c) $\frac{16}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{48}$

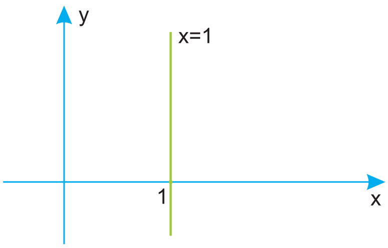


6 A melhor representação gráfica da curva de equação $(x-3) \cdot (y-1) = 0$ é

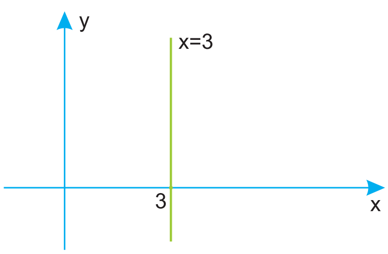
a)



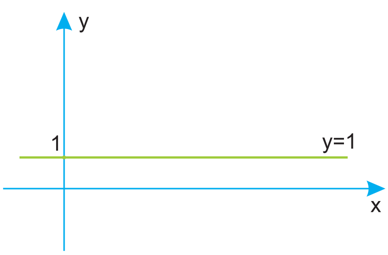
b)



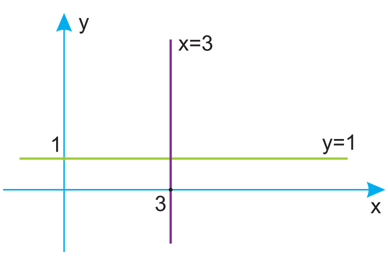
c)



d)



e)



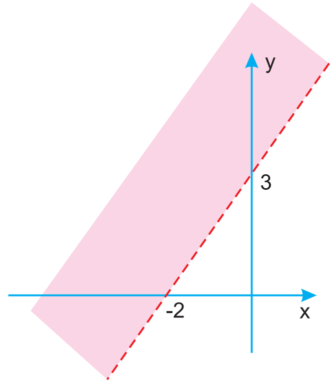
Módulo 39 – Semiplanos

1 Representar graficamente a inequação $3x - 2y - 6 \le 0$.

2 Representar graficamente a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - 4 \ge 0 \\ x - y \le 0 \end{cases}$$

3 Determinar a alternativa que melhor representa o gráfico abaixo



a) $2x - 3y - 6 < 0$
b) $2x - 3y - 6 > 0$
c) $3x - 2y - 6 \le 0$
d) $3x - 2y + 6 > 0$
e) $3x - 2y + 6 < 0$

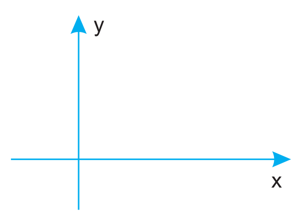
4 **(FGV – MODELO ENEM)** – A reta $x + 3y - 3 = 0$ divide o plano determinado pelo sistema cartesiano de eixos em dois semiplanos opostos. Cada um dos pontos $(-2; 2)$ e $(5; b)$ está situado em um desses dois semiplanos. Um possível valor de b é:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $-\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $-\dfrac{3}{4}$ e) $-\dfrac{1}{2}$

5 **(FGV – MODELO ENEM)** – Represente no plano cartesiano abaixo a região R, dos pontos $(x; y)$, definida pelas condições simultâneas:

$$\begin{cases} 2y + 3x - 12 \le 0 \\ 3y - 2x - 6 \ge 0 \\ -4 \le x \le 0 \\ y \le 5 \end{cases}$$

e calcule a área da região R representada.



6 **(FGV – MODELO ENEM)** – A área da região triangular limitada pelo sistema de inequações $\begin{cases} 3x + 5y - 15 \le 0 \\ 2x + 5y - 10 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ é igual a:

a) 2,5 b) 7,5 c) 5 d) 12,5 e) 3

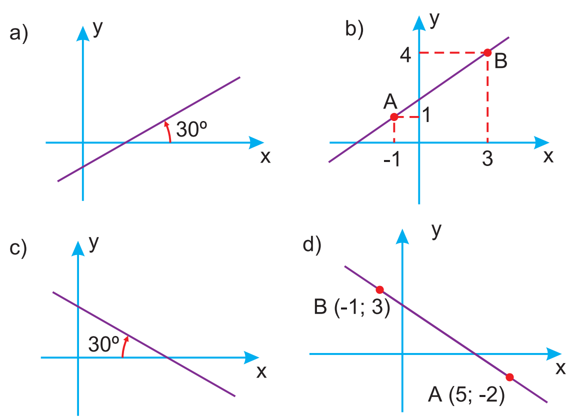
7 **(FGV – MODELO ENEM)** – Maria comprou um aquário e deseja criar dois tipos de peixes: os vermelhos e os amarelos. Cada peixe vermelho necessita de 5 litros de água e consome 10 gramas de ração por dia. Cada peixe amarelo necessita de 3 litros de água e consome 4 gramas de ração por dia. O aquário de Maria tem 300 litros, e ela deseja gastar, no máximo, 500 gramas de ração por dia.

a) Considere as quantidades de peixes vermelhos e amarelos como valores reais x e y, respectivamente. Determine a região do primeiro quadrante do plano xy, cujos pares ordenados definem as quantidades de peixes vermelhos e amarelos que podem estar no aquário .

b) Determine a quantidade de cada tipo de peixe no aquário, de forma a consumirem o total da ração disponível e utilizarem o total da água do aquário.

Módulo 40 – Coeficiente angular e equação reduzida

1 Determinar o coeficiente angular das retas, nos itens abaixo:



2 Determine o valor de **a** para que a reta que passa pelos pontos A(a; –2) e B(–1; a) tenha o coeficiente angular igual a $-\dfrac{3}{2}$.

3 Determine a equação reduzida, o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta (r) de equação – 3x + 2y + 7 = 0.

4 Dados os pontos A(2; 1) e B(3; 2), determine a equação geral e a equação reduzida da reta AB. Em seguida, esboce o seu gráfico no sistema cartesiano.

5 Dados os pontos A(– 1; 3) e B(4; – 2), determinar a equação geral e a equação reduzida da reta AB. Esboçar o seu gráfico no sistema cartesiano.

6 Determinar a equação geral a partir da equação segmentária da reta que passa pelos pontos P(5; 0) e Q(0; – 3).

7 Determinar

a) a equação geral,

b) a equação reduzida,

c) a equação segmentária e

d) o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(– 2; – 3) e B(4; 2).

8 **(MODELO ENEM)** – Achar a equação da reta que corta o eixo dos y no ponto de ordenada – 3 e forma com o eixo dos x um ângulo de 30°.

a) $\sqrt{3} \,.\, x - 3 \,.\, y - 9 = 0$ b) $x - \sqrt{3} \,.\, y - 9 = 0$

c) $3x - 3y - 1 = 0$ d) $x - y - \sqrt{3} = 0$

e) $3x - 3y + 1 = 0$

9 Um triângulo tem vértices A(0; 0), B(0; 4) e C(– 8; 0). Determinar a equação geral e a equação reduzida das retas suportes das medianas do triângulo.

Módulo 41 – Posições relativas entre duas retas

Nas questões de **1** a **3**, determinar a posição relativa das retas.

1 3x – 4y + 2 = 0 e 6x – 8y + 4 = 0

2 3x – 2y + 7 = 0 e 9x – 6y – 2 = 0

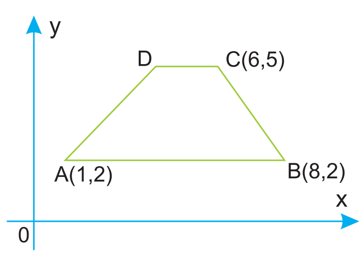
3 3x + 4y – 1 = 0 e 8x – 6y + 5 = 0

4 Determinar o valor de **k** para que as retas (r) 3x – 2y + 7 = 0 e (s) 6x – ky – 5 = 0 sejam concorrentes.

5 Qual é a posição da reta **r**, de equação 15x + 10y – 3 = 0, em relação à reta **s**, de equação 9x + 6y – 1 = 0?

6 Se as retas de equação (a + 3)x + 4y – 5 = 0 e x + ay + 1 = 0 são paralelas, calcule o valor de **a**.

7 **(MODELO ENEM)** – A figura mostra um trapézio ABCD. Determine a equação da reta suporte da base menor do trapézio.



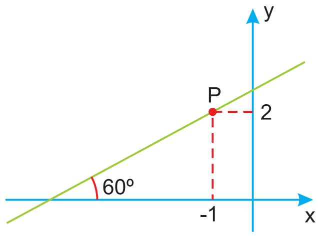
8 **(UNESP)** – Determine a equação da reta que é paralela à reta 3x + 2y + 6 = 0 e que passa pelos pontos $(x_1; y_1) = (0; b)$ e $(x_2; y_2) = (-2; 4b)$ com $b \in \mathbb{R}$.

9 **(UNESP-SP)** – Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, x + 3y + 4 = 0 e 2x – 5y – 2 = 0 são, respectivamente, as equações das retas r e s. Determine as coordenadas do ponto de intersecção de r com s.

10 Quais são as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que as equações das retas suportes de seus lados são x + 2y – 1 = 0, x – 2y – 7 = 0 e y – 5 = 0?

Módulo 42 – Equação de uma reta que passa por $P(x_0; y_0)$

1 A equação reduzida da reta abaixo é:



a) $y = -\sqrt{3} \,.\, x + 2 - \sqrt{3}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \,.\, x + 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

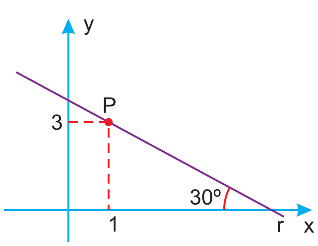
c) $y = \sqrt{3} \,.\, x + 2$ d) $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \,.\, x + 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e) $y = \sqrt{3} \,.\, x + 2 + \sqrt{3}$

2 Determinar a equação geral da reta **t** que passa pelo ponto P(– 2; 3) e é paralela à reta **r** de equação 2 . x – y + 5 = 0.

3 A equação geral da reta que passa pelo ponto P (–1; 3) e é paralela à reta (r) y = – 2x + 1 é:
a) 2x + y – 5 = 0 b) 2x + y – 1 = 0
c) x – 2y + 7 = 0 d) 2x + y – 3 = 0
e) x – 2y – 1 = 0

4 Determine a equação da reta **r** da figura abaixo.



5 Em cada caso, determine a equação da reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta da equação dada:

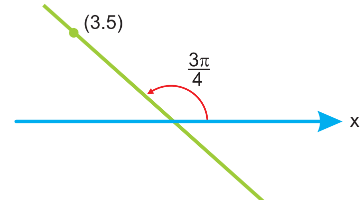
a) P(1; 2) e 8x + 2y – 1 = 0 b) P(2; 5) e $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

c) P(4; – 4) e x + y – 5 = 0 d) P(– 1; 3) e 2x – 5y + 7 = 0

e) P(– 4; 2) e y – 2 = 0 f) P(2; – 5) e x = 2

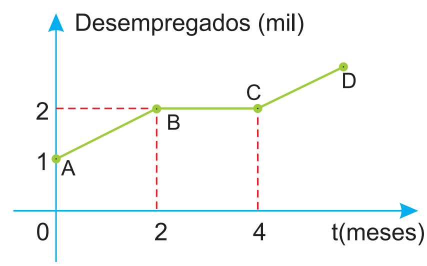
6 Determinar a equação da reta que passa pelo ponto P(2; 5) e tem coeficiente angular m = – 2.

7 **(MODELO ENEM)** – Determinar a equação da reta que passa pelo ponto P(3; 5) e tem inclinação igual a $\dfrac{3\pi}{4}$.



a) x – y + 8 = 0 b) 2x + y – 8 = 0
c) 2x – y – 1 = 0 d) x + y – 8 = 0
e) 2x + y – 11 = 0

8 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – O gráfico abaixo mostra a evolução da quantidade de pessoas desempregadas (em mil), a partir de determinado momento, numa certa região. Se $\overline{AB} // \overline{CD}$, o número de pessoas desempregadas, 5 meses após o início das observações, é:



a) 4 000 b) 3 000 c) 3 500 d) 2 500 e) 2 000

Módulo 43 – Paralelismo e perpendicularismo

1 A reta que passa pelo ponto A(–2; –1) e é perpendicular à reta (r) 5y – x + 3 = 0 tem equação:
a) 5x + y + 11 = 0 b) x + 5y + 7 = 0
c) x – 5y – 3 = 0 d) 5x + y – 1 = 0
e) x – 5y + 3 = 0

2 A equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ dados A(– 3; 1) e B(5; 7) é
a) 4x – 3y – 1 = 0 b) 3x – 4y + 7 = 0
c) 4x + 3y – 16 = 0 d) 3x + 4y – 12 = 0
e) x – y + 8 = 0

3 Os pontos A(0; 0) B(3; –1) e C(5; 2) são vértices de um paralelogramo ABCD. Determine a equação da reta suporte do lado $\overline{CD}$.

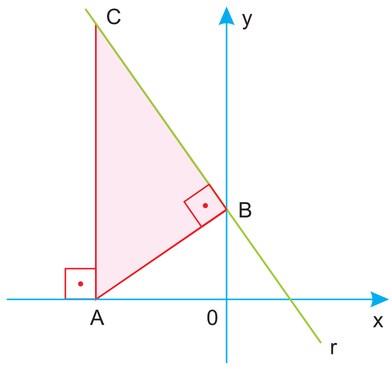
4 Dados os pontos A(– 2; – 1), B(4; 1) e C(0; 5), determinar a equação da reta que contém a altura relativa ao vértice B do triângulo ABC.

5 **(FATEC)** – Se os pontos (1;4), (3;2) e (7;y) são vértices consecutivos de um retângulo, então a sua área, em unidades de superfície, é
a) 8 b) $8\sqrt{2}$ c) 16 d) $16\sqrt{2}$ e) 32

6 **(MACKENZIE)** – Se a reta de equação $(3k - k^2)\,x + y + k^2 - k - 2 = 0$ passa pela origem e é perpendicular à reta de equação $x + 4y - 1 = 0$, o valor de $k^2 + 2$ é:

a) – 2 b) 2 c) – 3 d) 3 e) 1

7 **(MACKENZIE)** – Na figura, se a equação da reta r é $3x + y - 4 = 0$, a área do triângulo ABC é:

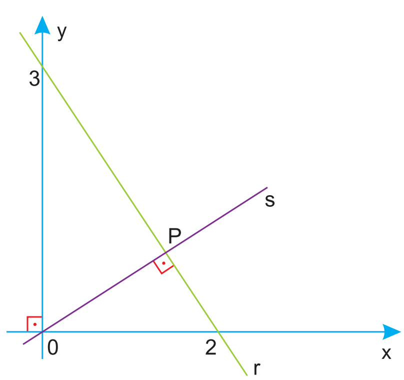


a) 240 b) 220 c) 200 d) 260 e) 280

8 **(MACKENZIE)** – Num sistema cartesiano, as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC são A = (0; 0), B = (3; 6) e C = (8; 0). A soma das coordenadas do ortocentro (encontro das alturas) deste triângulo é

a) $\dfrac{12}{5}$ b) $\dfrac{11}{2}$ c) $\dfrac{13}{6}$ d) $\dfrac{13}{2}$ e) $\dfrac{11}{3}$

9 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Na figura, se r e s são retas perpendiculares, a abscissa de P é



a) 4 b) $\dfrac{6}{13}$ c) $\dfrac{18}{13}$ d) $\dfrac{2}{7}$ e) $\dfrac{6}{7}$

10 **(FGV – MODELO ENEM)** – No plano cartesiano, os pontos A(– 1; 4) e B(3; 6) são simétricos em relação à reta (r). O coeficiente angular da reta (r) vale:

a) – 1 b) – 2 c) – 3 d) – 4 e) – 5

Módulo 44 – Distância de ponto a reta

1 Determinar a distância da reta $3x - 4y - 15 = 0$ à origem.

2 A distância do ponto P (– 5; 1) à reta $3x + y - 6 = 0$ é:

a) $3\sqrt{5}$ b) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ c) 10 d) $2\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{10}$

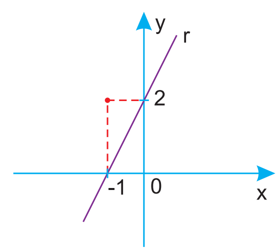
3 Determinar a distância do ponto P(3; – 5) à reta $2x + y - 11 = 0$.

4 Determinar a distância entre as retas (r) $x + 2y - 3 = 0$ e (s) $2x + 4y - 1 = 0$.

5 Se a distância da reta $3x + 4y + k = 0$ ao ponto P (–2; 1) é igual a 4, então os valores de **k** são:

a) – 20 ou 18 b) – 5 ou 5 c) – 18 ou 22
d) – 22 ou 18 e) – 16 ou 20

6 **(MACKENZIE)** – O círculo de centro A e tangente à reta r da figura tem área:



a) $\dfrac{4\pi}{5}$ b) $\dfrac{5\pi}{4}$
c) $\dfrac{3\pi}{5}$ d) $\dfrac{\pi}{5}$
e) $\dfrac{3\pi}{4}$

7 **(MACKENZIE)** – A equação de uma reta, paralela à reta $x + y - 4 = 0$ e distante $3\sqrt{2}$ do ponto P = (2; 1), é:

a) $x + y + 3 = 0$ b) $x + y + 9 = 0$
c) $x + y - 3 = 0$ d) $x - y - 6 = 0$
e) $x + y - 12 = 0$

8 **(FGV)** – No plano cartesiano, existem dois valores de m de modo que a distância do ponto P(m,1) à reta de equação $3x + 4y + 4 = 0$ seja 6; a soma destes valores é:

a) – 16/3 b) – 17/3 c) – 18/3 d) – 19/3 e) – 20/3

9 **(FGV)** – No plano cartesiano, seja P o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3x$. Sabendo que a distância de P à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de P vale:

a) 5,6 b) 5,2 c) 4,8 d) 4,0 e) 4,4

10 **(FGV)**

a) No plano cartesiano, para que valores de m as retas de equações (r) $mx + 2y + 4 = 0$ e (s) $mx - 4y + 5 = 0$ são perpendiculares?

b) Qual a distância entre as retas (t) $3x + 4y = 0$ e (v) $3x + 4y + 5 = 0$?

Módulo 33 – Paralelepípedo e cubo

1 Determinar a área total, o volume e a medida da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 3 cm, 4 cm e 5 cm.

2 Um cubo tem 125 cm^3 de volume. Calcule a sua área total.

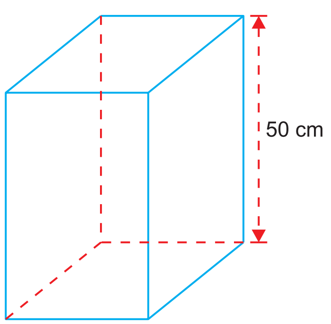
3 A área total de um cubo, cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm, é:

a) 140 cm^2 b) $100\sqrt{3}$ cm^2 c) $120\sqrt{2}$ cm^2
d) 150 cm^2 e) 120 cm^2

4 A diagonal do paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 3 cm, 4 cm e 12 cm, é:

a) $12\sqrt{3}$ cm b) 15 cm c) 13 cm
d) 16 cm e) $13\sqrt{3}$ cm

5 **(MACKENZIE)** – A base do cesto reto da figura é um quadrado de lado 25 cm. Se a parte lateral externa e o fundo externo do cesto devem ser forrados com um tecido que é vendido com 50 cm de largura, o menor comprimento de tecido necessário para a forração é:

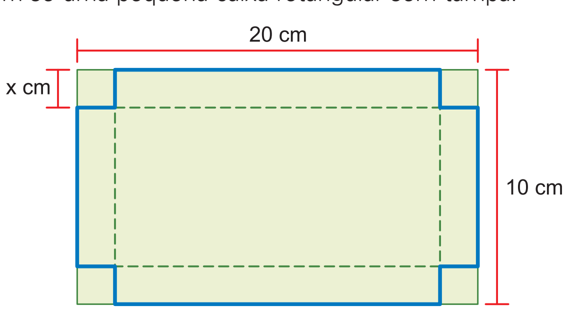


a) 1,115 m
b) 1,105 m
c) 1,350 m
d) 1,250 m
e) 1,125 m

6 **(ENEM)** – Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 17

7 **(UNESP)** – Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 10 cm e lado maior 20 cm. Retirando-se 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada conforme mostra a figura, obtém-se uma pequena caixa retangular sem tampa.



O polinômio, na variável x, que representa o volume, em cm^3, desta caixa é:

a) $4x^3 - 60x^2 + 200x$ b) $4x^2 - 60x + 200$
c) $4x^3 - 60x^2 + 200$ d) $x^3 - 30x^2 + 200x$
e) $x^3 - 15x^2 + 50x$

Módulo 34 – Paralelepípedo e cubo

1 Calcular a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 1 cm, 2 cm e 5 cm.

2 O volume de um paralelepípedo reto retângulo é igual a 336 cm^3. Duas de suas dimensões são 6 cm e 7 cm. A terceira dimensão do paralelepípedo, em centímetros, vale:

a) 8 b) 2 c) 12 d) 16 e) 5

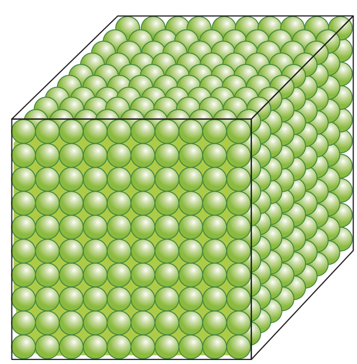
3 Um cubo tem área total igual a 288 m^2. Sua diagonal mede:

a) $2\sqrt{6}$ m b) 6 m c) $\sqrt{6}$ m
d) 12 m e) $4\sqrt{6}$ m

4 A soma das medidas das arestas de um paralelepípedo reto retângulo é 48 m. As dimensões são números inteiros consecutivos. O volume do paralelepípedo, em metros cúbicos, é:

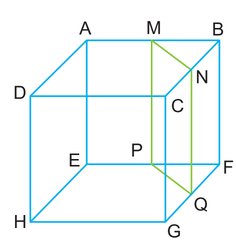
a) 50 b) 75 c) 120 d) 40 e) 60

5 **(ENEM)** – Observe o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta. Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:



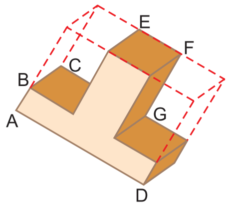
a) 100 bolinhas.
b) 300 bolinhas.
c) 1000 bolinhas.
d) 2000 bolinhas.
e) 10000 bolinhas.

6 **(FEI)** – Os pontos médios das arestas AB, BC, EF e FG do cubo ABCDEFGH são M, N, P e Q. Quanto vale a razão entre o volume do prisma BMNFPQ e o volume do cubo?



a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{8}$

7 **(UNESP)** – Considere o sólido da figura (em cinza), construído a partir de um prisma retangular reto.



Se AB = 2 cm, AD = 10 cm, FG = 8 cm e BC = EF = x cm, o volume do sólido, em cm^3, é:

a) $4x\,(2x + 5)$. b) $4x\,(5x + 2)$. c) $4\,(5 + 2x)$.
d) $4x^2\,(2 + 5x)$. e) $4x^2\,(2x + 5)$.

Módulo 35 – Pirâmide

1 A altura de uma pirâmide regular pentagonal mede 12 cm e o apótema da base mede 5 cm. Calcule o apótema da pirâmide.

2 Qual é a área total de uma pirâmide quadrangular regular com 15 cm de altura, cujo apótema mede 17 cm?

3 Qual a altura de uma pirâmide regular quadrangular cujas oito arestas medem 2 m cada uma?

4 Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular cujas arestas da base medem 6 cm e cujas arestas laterais medem 10 cm.

5 **(UNISA)** – O apótema de uma pirâmide regular de base arbitrária tem 15 cm e aresta lateral 17 cm; então, a aresta da base mede:

a) 8 cm b) 16 cm c) 14 cm
d) 10 cm e) 12 cm

6 **(FUVEST)** – Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{1,5}$ c) $\sqrt{1,75}$
d) $\sqrt{2,5}$ c) $\sqrt{2}$

7 **(UNIV. BARRA MANSA)** – Em relação à pirâmide de base quadrada, com aresta da base medindo 6 cm e aresta lateral 5 cm, analise as afirmativas:

I – Sua área lateral vale 48 cm^2.

II – Sua área total vale 84 cm^2.

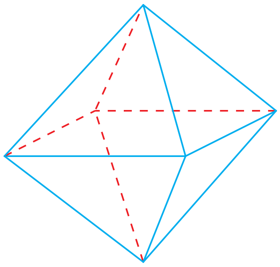
III – O seu volume vale $10\sqrt{2}$ cm^3. Marque:

a) se apenas a afirmativa I for verdadeira.
b) se apenas a afirmativa II for verdadeira.
c) se apenas as afirmativas I e II forem verdadeiras.
d) se apenas as afirmativas I e III forem verdadeiras.
e) se todas forem verdadeiras.

8 **(UNIV. AMAZONAS)** – Qual a área total de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo-se que sua altura mede 24 cm e que o apótema da pirâmide mede 26 cm?

a) 1440 cm^2 b) 1540 cm^2 c) 840 cm^2 d) 1400 cm^2

9 **(PUCCAMP)** Um octaedro regular é um poliedro constituído por 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra a figura a seguir.

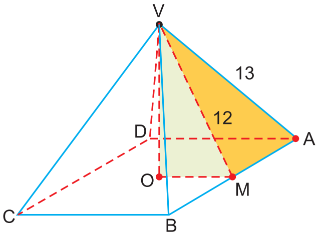


Se o volume desse poliedro é $72\sqrt{2}$ cm^3, a medida de sua aresta, em centímetros, é

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 6 e) $6\sqrt{2}$

Módulo 36 – Pirâmide

Para as questões de **1** a **4**, considere a pirâmide quadrangular regular abaixo, sabendo que o apótema da pirâmide mede 12 cm e a aresta lateral 13 cm.



1 Qual o valor, em centímetros, da aresta da base?

2 Qual o valor, em centímetros, da altura da pirâmide?

3 Qual o valor, em centímetros quadrados, da área lateral?

4 Qual o valor, em centímetros cúbicos, do volume?

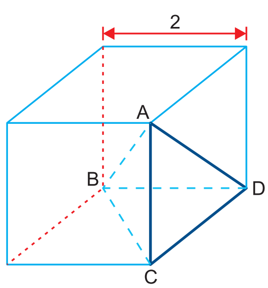
5 **(FATEC)** – As arestas laterais de uma pirâmide reta medem 15 cm, e sua base é um quadrado cujos lados medem 18 cm. A altura dessa pirâmide, em cm, é igual a:

a) $3\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7}$

6 **(URCA)** – O volume de uma pirâmide hexagonal regular é $96\sqrt{3}$ cm^3. Se sua altura mede 12 cm, então a aresta da base da pirâmide, em centímetros, mede:

a) 2 b) $2\sqrt{3}$ c) 4 d) $3\sqrt{3}$ e) 6

7 **(MACKENZIE)** – Remove-se, do cubo da figura, a pirâmide triangular ABCD. Obtém-se, dessa forma, um sólido de volume:

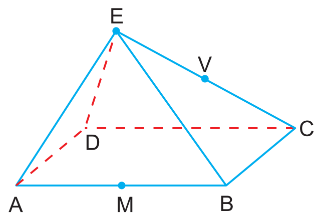


a) $\dfrac{14}{3}$ b) $\dfrac{11}{5}$ c) $\dfrac{18}{5}$

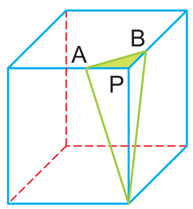
d) $\dfrac{20}{3}$ e) $\dfrac{16}{5}$

8 **(FUVEST)** – A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3



9 **(FGV)** – Um cubo de aresta de 10 m de comprimento deve ser seccionado como mostra a figura, de modo que se obtenha uma pirâmide cuja base APB é triangular isósceles e cujo volume é 0,375% do volume do cubo.



Cada um dos pontos A e B dista de P

a) 5,75 m b) 4,25 m
c) 3,75 m d) 1,5 m
e) 0,75 m

Módulo 37 – Tetraedro regular

1 Calcular a área total de um tetraedro regular de aresta 4 cm.

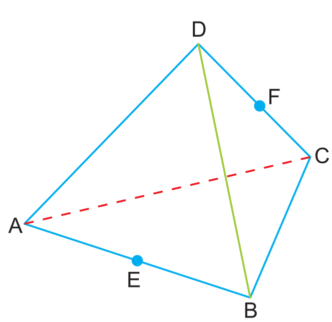
2 Calcular a altura de um tetraedro regular de aresta 4 cm.

3 Calcular o volume de um tetraedro regular de aresta 4 cm.

4 A área total de um tetraedro regular é $9\sqrt{3}$. Qual é o volume desse tetraedro?

5 **(FUVEST)** – Na figura a seguir, ABCD é um tetraedro regular de aresta **a**. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Então, o valor de EF é

a) $\dfrac{a}{2}$ b) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$



6 **(UNESP)** – Calcular a altura de um tetraedro regular de aresta a.

7 **(UNIV. SÃO JUDAS)** – O volume de um tetraedro regular, cuja aresta mede 1 cm, é

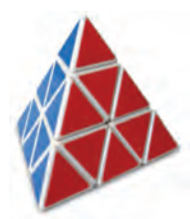
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ cm^3 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ cm^3 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^3

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ cm^3 e) 1 cm^3

8 **(ITA)** – Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm^2. Então sua altura, em cm, é igual a:

a) 2 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

9 A pirâmide mágica é um brinquedo em forma de tetraedro regular, como pode ser observado na figura ao lado. Se a aresta da pirâmide mede 2 cm, então seu volume, em centímetros cúbicos, é igual a



a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10 **(FUVEST)** – É dado um tetraedro regular ABCD da aresta 1. Na aresta BC, toma-se um ponto P de modo que PA + PD tenha o menor valor possível.

a) Qual o valor da razão PB/CB?

b) Calcule PA + PD.

Módulo 38 – Cilindro

Para as questões de **1** a **3**, considere um cilindro circular reto de 2 cm de raio e 5 cm de altura.

1 A área lateral do cilindro é:

a) 20π cm^2 b) 8π cm^2 c) 6π cm^2
d) 12π cm^2 e) 10π cm^2

2 A área total do cilindro é:

a) 20π cm^2 b) 24π cm^2 c) 28π cm^2
d) 16π cm^2 e) 18π cm^2

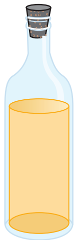
3 O volume do cilindro é:

a) 10π cm^3 b) 20π cm^3 c) 24π cm^3
d) 18π cm^3 e) 16π cm

4 Calcule a área lateral de um cilindro circular reto cuja secção meridiana tem 20 cm^2 de área.

5 Qual o volume do cilindro circular reto circunscrito a um cubo de aresta **a**?

6 **(ENEM)** – Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada. Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7 **(ENEM)** – Para calcular a capacidade total da garrafa do exercício anterior, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

8 **(MACEIÓ)** – Um vaso com o formato de um cilindro circular reto tem altura de 30 cm e diâmetro da base de 20 cm. A capacidade desse recipiente é de:

a) 2π litros b) 3π litros c) 4π litros
d) 5π litros e) 6π litros

9 Um pedaço de cano de 30 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro interno encontra-se na posição vertical e possui a base inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água

a) transborda.
b) ultrapassa o meio do cano.
c) não chega ao meio do cano.
d) enche o cano até a borda.
e) atinge exatamente o meio do cano.

10 **(PUCCAMP)** – Uma piscina circular tem 5m de diâmetro. Um produto químico deve ser misturado à água, na razão de 25g por 500 litros de água. Se a piscina tem 1,6 m de profundidade e está totalmente cheia, quanto do produto deve ser misturado à água?

(Use $\pi = 3{,}1$)

a) 1,45 kg b) 1,55 kg c) 1,65 kg
d) 1,75 kg e) 1,85 kg

Módulo 39 – Cilindro

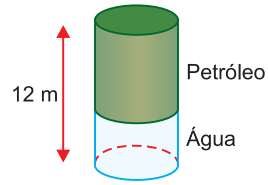
1 Calcule a área total de um cilindro equilátero com 2 cm de raio da base.

2 Qual a razão entre a área total e a área lateral de um cilindro equilátero?

3 Calcular o volume e a área total de um cilindro inscrito num prisma regular triangular, cuja aresta da base mede 6 cm e cuja altura mede 10 cm.

4 Qual é o volume de um cilindro circular reto, cuja base está inscrita num quadrado de 48 m de perímetro e cujo raio da base é o triplo da altura?

5 **(UNESP)** – Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo.



Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é

a) 2π b) 7 c) $\dfrac{7\pi}{3}$
d) 8 e) $\dfrac{8\pi}{3}$

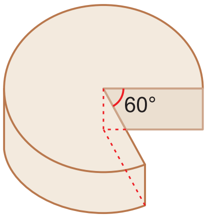
6 Uma caixa cúbica de aresta medindo 10 cm está totalmente cheia de óleo lubrificante. Despeja-se o conteúdo dessa caixa num tubo cilíndrico de 5 cm de raio. A que altura chega o óleo dentro do tubo se este está numa posição em que suas geratrizes ficam na vertical?

a) $\dfrac{50}{\pi}$ b) $\dfrac{40}{\pi}$ c) $\dfrac{30}{\pi}$ d) $\dfrac{25}{\pi}$ e) $\dfrac{20}{\pi}$

7 A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado está acoplado um cano cilíndrico com 4 cm de diâmetro e 50 m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual é o valor aproximado da altura da água na caixa, no instante em que o cano ficou cheio?

a) 90 cm b) 92 cm c) 94 cm
d) 96 cm e) 98 cm

8 **(UNEB)** – De um queijo com formato de um cilindro circular reto, cujos raio e altura medem, respectivamente, 6 cm e 3 cm, foi cortada uma fatia, como mostra a figura.



O volume do sólido restante, em centímetros cúbicos, é:

a) 50π b) 60π c) 70π d) 80π e) 90π

Módulo 40 – Cone

1 Calcular o volume de um cone circular reto de geratriz 13 cm, sabendo que o raio da base é de 5 cm.

2 Calcular a área total de um cone equilátero, cuja área lateral é de 24π cm^2.

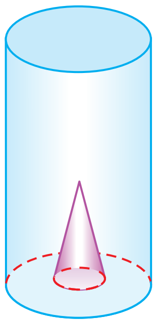
3 Se duplicarmos a altura e reduzirmos à metade o raio da base de um cone circular reto, então o seu volume

a) não se altera. b) se reduz à metade.
c) dobra de valor. d) quadruplica de valor.
e) se reduz à quarta parte.

4 Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de raio 10 cm e ângulo central 216°. Calcule a área total desse cone.

5 **(FATEC)** – A altura de um cone circular mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:
a) 64π b) 48π c) 32π d) 16π e) 8π

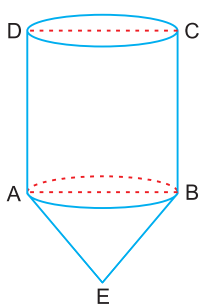
6 **(MACKENZIE)** – Considere o recipiente da figura, formado por um cilindro reto de raio 3 e altura 10, com uma concavidade inferior na forma de um cone, também reto, de altura 3 e raio da base 1. O volume de um líquido que ocupa o recipiente até a metade de sua altura é igual a



a) 89π b) 72π c) 64π
d) 48π e) 44π

7 **(UNIFENAS)** – O diâmetro da base de um cone equilátero é igual a $2\sqrt{3}$ m. O volume desse cone em m^3 é
a) 3π b) 6π c) 9π d) 12π e) 4π

8 **(MACKENZIE)** – No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e $\overline{AE} = \overline{BE} = \sqrt{10}$. O volume desse sólido é:



a) $\dfrac{5\pi}{2}$ b) $\dfrac{4\pi}{3}$ c) 4π d) 5π e) 3π

Módulo 41 – Cone

1 **(MACKENZIE)** – A área lateral de um cone equilátero que tem 16π de área da base vale:
a) 32π b) 2π c) 8π d) 4π e) 16π

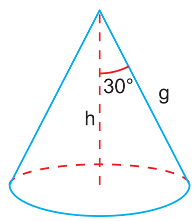
2 **(MACKENZIE)** – A geratriz de um cone circular reto mede 13 e sua área total é 90π. O raio da base do cone é igual a:
a) 18 b) 9 c) 5 d) 10 e) 12

3 A altura de um cone circular reto mede 8 cm e sua geratriz 10 cm. A área total do cone é:
a) 36π cm^2 b) 60π cm^2 c) 90π cm^2
d) 96π cm^2 e) 132π cm^2

4 Um cone circular reto, cujo diâmetro da base mede 24 cm e o perímetro de sua secção meridiana é 50 cm, tem por volume:
a) 240π cm^3 b) 360π cm^3 c) 90π cm^3
d) 180π cm^3 e) 120π cm^3

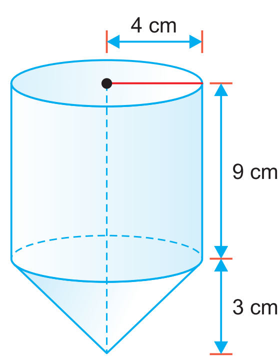
5 **(FUVEST)** – Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:
a) 144° b) 192° c) 240° d) 288° e) 336°

6 **(UEBA)**



Na figura, está representado um cone cuja geratriz g mede $6\sqrt{3}$ cm, e o ângulo que ela faz com a reta que contém a altura do cone mede 30°. O volume desse sólido, em^3, é:
a) 9π b) 27π c) 54π
d) 81π e) 243π

7 **(UNESP)** – Um paciente recebe por via intravenosa um medicamento à taxa constante de 1,5 mℓ/min. O frasco do medicamento é formado por uma parte cilíndrica e uma parte cônica, cujas medidas são dadas na figura, e estava cheio quando se iniciou a medicação.



(figura fora de escala)

Após 4h de administração contínua, a medicação foi interrompida. Dado que 1 cm^3 = 1 mℓ, e usando a aproximação $\pi = 3$, o volume, em mℓ, do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação é, aproximadamente,
a) 120 b) 150 c) 160
d) 240 e) 360

Módulo 42 – Esfera e suas partes

1 O raio de uma esfera mede 3 cm. Calcular o volume da esfera e a área da superfície esférica.

2 Uma esfera de 5 cm de raio é interceptada por um plano α distante 3 cm do seu centro. Calcular a área da secção assim obtida.

3 O volume de uma esfera é de 288π cm^3. A área da superfície dessa esfera vale:

a) 72π cm^2 b) $144\,\pi$ cm^2 c) 112π cm^2
d) $64\,\pi$ cm^2 e) $32\,\pi$ cm^2

4 O volume de uma esfera cujo diâmetro mede 6 cm é:

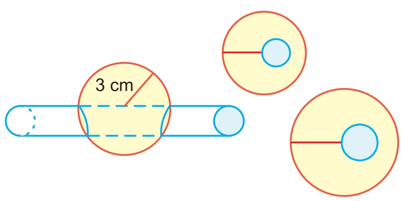
a) 36π cm^3 b) $\dfrac{500}{3}\pi$ cm^3 c) 120π cm^3

d) $\dfrac{500}{3}$ cm^3 e) 64π cm^3

5 O volume de uma esfera é numericamente igual à área de sua superfície esférica. O valor do raio, em centímetros, é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

6 **(ENEM)** – Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e a 3 cm, respectivamente.

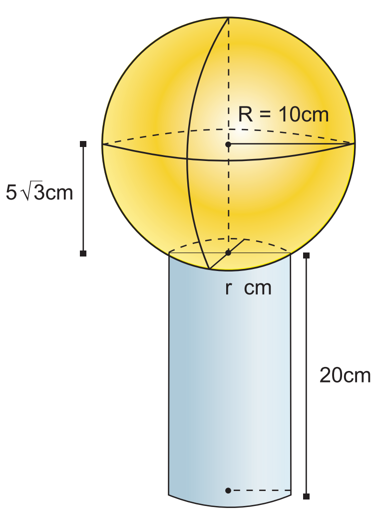


A área da maior fatia possível é

a) duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
b) três vezes a área da secção transversal do cilindro.
c) quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
d) seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
e) oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

7 **(UNESP)** – Um troféu para um campeonato de futebol tem a forma de uma esfera de raio R = 10 cm cortada por um plano situado a uma distância de $5\sqrt{3}$ cm do centro da esfera, determinando uma circunferência de raio r cm, e sobreposta a um cilindro circular reto de 20 cm de altura e raio r cm, como na figura (não em escala).

O volume do cilindro, em cm^3, é



a) $100\,\pi$
b) $200\,\pi$
c) $250\,\pi$
d) $500\,\pi$
e) $750\,\pi$

8 **(FUVEST)** – Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada porum plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência.

O raio desta circunferência, em cm é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Módulo 43 – Esfera e suas partes

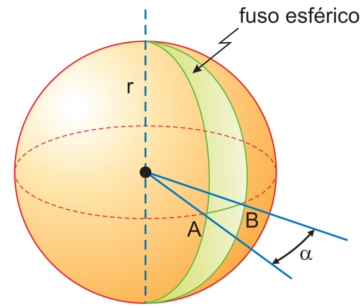
1 Calcular o volume de uma cunha esférica e a área do fuso esférico correspondente sabendo-se que o ângulo equatorial mede 45° e o raio da esfera 2 cm.

2 Uma cunha esférica tem volume igual a 1 m^3. Calcular seu ângulo equatorial sabendo que faz parte de uma esfera cujo volume mede 4,8 m^3.

a) 60° b) 65° c) 70° d) 75° e) 80°

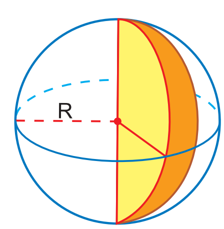
3 Calcular a área da calota esférica e o volume do segmento esférico determinado por um plano que intercepta uma esfera de raio 10 cm a 8 cm do seu centro. Sabe-se que o segmento esférico não contém o centro da esfera.

4 **(FGV)** – Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco AB sob um ângulo α de 72°, como mostra a figura. Isso significa que a área do fuso esférico determinado por α é



a) $20\,\pi$ m^2 b) $15\,\pi$ m^2 c) $10\,\pi$ m^2
d) $5\,\pi$ m^2 e) π m^2

5 **(VUNESP)** – Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, sendo que cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);
b) quantos cm^2 de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

6 Um vasilhame cilíndrico com 20 centímetros de diâmetro e 36 centímetros de altura está completamente cheio de massa de sorvete de chocolate. O número de "bolas" de sorvete, todas com 6 centímetros de diâmetro, que poderão ser servidas com toda essa massa é:

a) 200 b) 180 c) 150 d) 120 e) 100

7 **(FUND.SANTO ANDRÉ)** – Um tanque, na forma de cilindro reto, tem 12 πcm^2 de área da base e 12 cm de altura. Se este tanque estiver completamente cheio de água, e colocarmos no seu interior uma esfera impermeável de raio 3 cm, que fração de seu volume de água vazará?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

8 Com a fusão de todo o material contido em 18 moedas, formou-se uma esfera. Sabendo-se que a altura de cada moeda é 3 mm e o diâmetro da base é 24 mm, o raio da esfera será:
a) 18 mm b) 24 mm c) 28 mm
d) 36 mm e) 42 mm

Módulo 44 – Esfera e suas partes

1 Considere uma bola de sorvete de 36π cm^3 de volume e uma casquinha cônica de 3 cm de raio. A altura da casquinha, para que o sorvete, ao derreter, ocupe todo o seu espaço, em centímetros, é igual a:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

2 **(UNESP)** – O trato respiratório de uma pessoa é composto de várias partes, entre elas os alvéolos pulmonares, pequeninos sacos de ar onde ocorre a troca de oxigênio por gás carbônico. Vamos supor que cada alvéolo tem forma esférica e que, num adulto, o diâmetro médio de um alvéolo seja, aproximadamente, 0,02 cm. Se o volume total dos alvéolos de um adulto é igual a 1 618 cm^3, o número aproximado de alvéolos dessa pessoa, considerando $\pi = 3$, é:
a) $1\,618 \,.\, 10^3$ b) $1\,618 \,.\, 10^4$
c) $5\,393 \,.\, 10^2$ d) $4\,045 \,.\, 10^4$
e) $4\,045 \,.\, 10^5$

3 **(MACKENZIE)** – A quantidade de combustível necessária para manter um balão esférico no ar é diretamente proporcional ao volume do balão e ao tempo que ele permanece no ar. Se, para flutuar durante uma hora, um balão de 20 cm de raio utiliza 0,1 litro de combustível, um balão de 30 cm de raio utilizará, para flutuar por meia hora, uma quantidade de combustível, em litros, mais próxima da alternativa:
a) 0,53 b) 0,45 c) 0,3 d) 0,2 e) 0,16

4 **(FUVEST)** – Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semi-esfera de raio r; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio 2r e altura h; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h. Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{h}$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

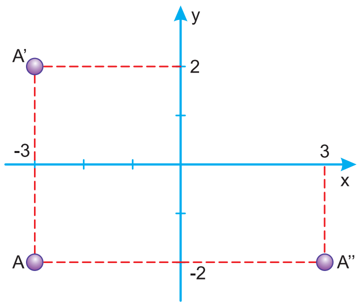
5 **(UNICAMP)** – Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60° de latitude norte; o ponto A está a 15°45′ de longitude leste e o ponto B, a 56°15′ de longitude oeste.
a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6400 km, qual é o raio do paralelo de 60°?
b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de 60°?

[Use 22/7 como aproximação para π.]

FRENTE 1

Módulo 33 – Sistema cartesiano ortogonal

1



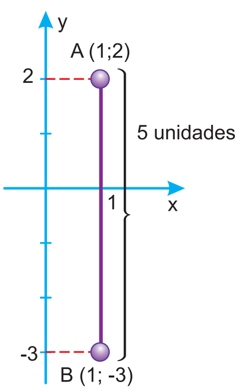
A'(– 3; 2) é o simétrico em relação ao eixo $\vec{O}x$.

A''(3; – 2) é o simétrico em relação ao eixo $\vec{O}y$.

2 A(a + 1; 6) ≡ B(– 2; 3b) ⇔

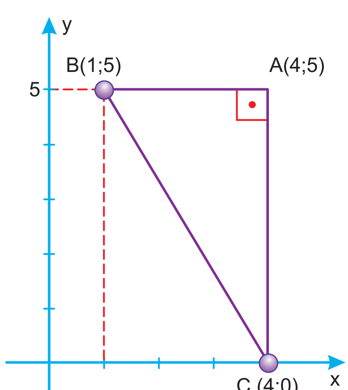
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = -2 \\ 6 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

3



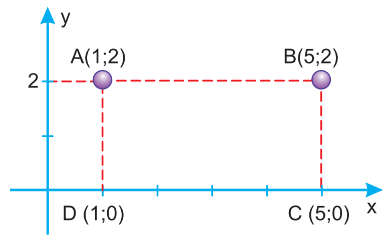
B(1; – 3)

4



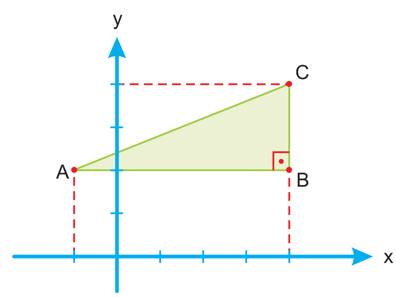
C(4; 0)

5



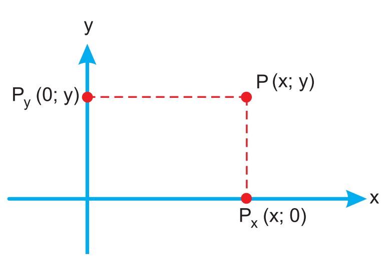
AB = 5 – 1 = 4
BC = 2 – 0 = 2
CD = 5 – 1 = 4
DA = 2 – 0 = 2
O perímetro do retângulo ABCD é
4 + 2 + 4 + 2 = 12.
Resposta: E

6



Observando que $\overline{AB} \,//\, \vec{O}x$ e $\overline{BC} \,//\, \vec{O}y$, conclui-se que o ΔABC é retângulo.

7 Dado P(x; y), chamaremos $\mathbf{P_x}$ e $\mathbf{P_y}$ as projeções do ponto **P** sobre o eixo das abscissas e sobre o eixo das ordenadas, respectivamente.
Teremos:



Daí:

$A(2; 3) \Rightarrow \begin{cases} A_x(2; 0) \\ A_y(0; 3) \end{cases}$

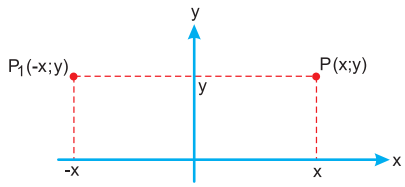
$B(3; -1) \Rightarrow \begin{cases} B_x(3; 0) \\ B_y(0; -1) \end{cases}$

$C(-5; 1) \Rightarrow \begin{cases} C_x(-5; 0) \\ C_y(0; 1) \end{cases}$

$D(-3; -2) \Rightarrow \begin{cases} D_x(-3; 0) \\ D_y(0; -2) \end{cases}$

$E(-5; -1) \Rightarrow \begin{cases} E_x(-5; 0) \\ E_y(0; -1) \end{cases}$

8 Dado P(x; y), chamaremos $\mathbf{P_1}$ o ponto simétrico de **P** em relação ao eixo das ordenadas. Teremos:



Portanto, se P(x; y), então $P_1(-x; y)$ é o simétrico de **P** em relação ao eixo y.
Daí:

$A(-1; 2) \Rightarrow A_1(1; 2)$

$B(3; -1) \Rightarrow B_1(-3; -1)$

$C(-2; -2) \Rightarrow C_1(2; -2)$

$D(-2; 5) \Rightarrow D_1(2; 5)$

$E(3; -5) \Rightarrow E_1(-3; -5)$

9 a) Se $x \cdot y > 0$, então teremos duas possibilidades, a saber:

1ª possibilidade: $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x; y) \in 1^{\circ}$ quadrante

2ª possibilidade: $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x; y) \in 3^{\circ}$ quadrante

b) Se $x \cdot y < 0$, então teremos duas possibilidades, a saber:

1ª possibilidade: $x > 0$ e $y < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x; y) \in 4^{\circ}$ quadrante.

2ª possibilidade: $x < 0$ e $y > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(x; y) \in 2^{\circ}$ quadrante.

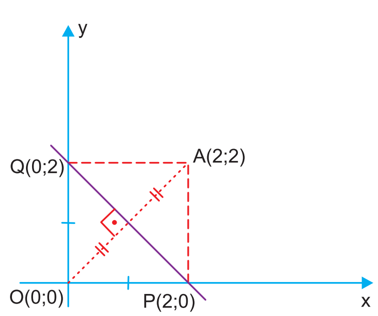
c) Se $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x; y) \in 1^{\circ} \text{ quadrante ou} \\ P(x; y) \in 3^{\circ} \text{ quadrante} \end{cases}$$

d) Se $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x; y) \in 2^{\circ} \text{ quadrante ou} \\ P(x; y) \in 4^{\circ} \text{ quadrante} \end{cases}$$

10



Os pontos P, A, Q e O são vértices de um quadrado cujo lado mede 2. O ponto A é diagonalmente oposto à origem e tem coordenadas (2; 2).
Resposta: A

Módulo 34 – Distância entre dois pontos

1 $d_{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-2)^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

2 $d_{AB} = 5 \Rightarrow \sqrt{(-1-3)^2 + (y+1)^2} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^2 + y^2 + 2y + 1 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -4$

3 P(x; 0) e A(4; 1) e $d_{PA} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + 1 = 10 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = 3$ ou $x - 4 = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 1 \Rightarrow$ P (7; 0) ou P (1; 0)

4 P(0; y), A(1; 2), B(3; 8) e $d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (y-8)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 + y^2 - 16y + 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4y + 16y = 9 + 64 - 1 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12y = 68 \Leftrightarrow y = \dfrac{68}{12} \Leftrightarrow y = \dfrac{17}{3} \Rightarrow P\left(0; \dfrac{17}{3}\right)$

5 $AB = d_{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-1)^2} =$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$AC = d_{AC} = \sqrt{(-1+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$BC = d_{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} =$

$= \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$3 < \sqrt{10} < \sqrt{13} \Rightarrow AC < BC < AB$

$\overline{AB}$ é o maior lado e sua medida é $AB = \sqrt{13}$

Resposta: D

6 Seja M(x; 0), pois $M \in \overrightarrow{Ox} \Leftrightarrow y = 0$

$d_{MP} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = 5$

Assim: $\sqrt{(x-2)^2 + [0-(-3)]^2} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 9 = 25 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$

Portanto, M(6; 0) ou M(– 2; 0)

7 Determinação dos comprimentos dos lados do triângulo.

$AB = \sqrt{(2+5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(4+5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{85}$

$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}$

Como $AB \neq BC \neq AC \Rightarrow \Delta$ escaleno

$BC^2 < AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta$ acutângulo

Portanto, o triângulo é escaleno e acutângulo.

8 Se o ponto procurado é do eixo x, sua ordenada é **nula**, então P(x; 0). Como P(x; 0) é equidistante de A e B, temos:

$$\mathbf{d_{PA} = d_{PB}}$$

Então: $\sqrt{(x-6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (0-3)^2}$

Elevando-se ao quadrado, vem:

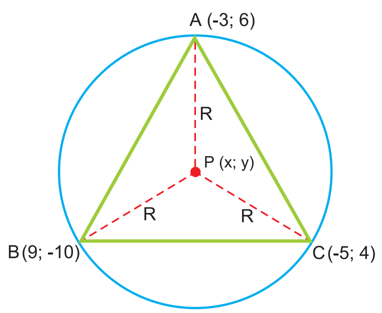
$x^2 - 12x + 36 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 9$

que, simplificando, resulta: $x = 3$

Portanto, o ponto procurado é P(3; 0).

9 Sendo P(x; y) o centro da circunferência de raio R, temos:

$R = d_{PA} = d_{PB} = d_{PC}$



I) $d_{PA} = d_{PB} \Leftrightarrow d^2_{PA} = d^2_{PB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x - (-3)]^2 + (y-6)^2 = (x-9)^2 + [y - (-10)]^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 =$

$= x^2 - 18x + 81 + y^2 + 20y + 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 12y + 18x - 20y = 81 + 100 - 9 - 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24x - 32y = 136 \Leftrightarrow 3x - 4y = 17$

II) $d_{PA} = d_{PC} \Leftrightarrow d^2_{PA} = d^2_{PC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x - (-3)]^2 + (y-6)^2 = [x - (-5)]^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 =$

$= x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 12y - 10x + 8y = 25 + 16 - 9 - 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x - 4y = -4 \Leftrightarrow x + y = 1$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

obtemos o ponto P(3; – 2), que é o centro da circunferência.

O raio da circunferência é

$R = d_{PA} = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (-2-6)^2} \Leftrightarrow R = 10$

Portanto, o centro é P(3; – 2) e o raio é R = 10.

10 Seja P (a; b) o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, então:

1ª) $PA = PB \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} =$

$= \sqrt{(a-5)^2 + (b-7)^2} \Leftrightarrow a + b = 8 \quad (I)$

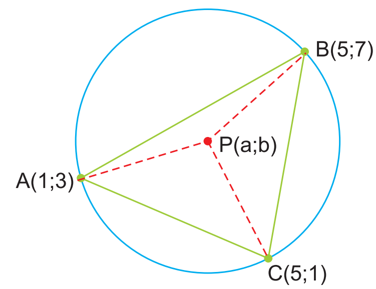
2ª) $PB = PC \Rightarrow \sqrt{(a-5)^2 + (b-7)^2} =$

$= \sqrt{(a-5)^2 + (b-1)^2} \Leftrightarrow b = 4 \quad (II)$

De (I) e (II), temos a = b = 4 e o centro P terá coordenadas (4; 4)

O raio da circunferência pode ser obtido calculando-se:

$r = d_{PA} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$



Resposta: E

Módulo 35 – Ponto médio de um segmento

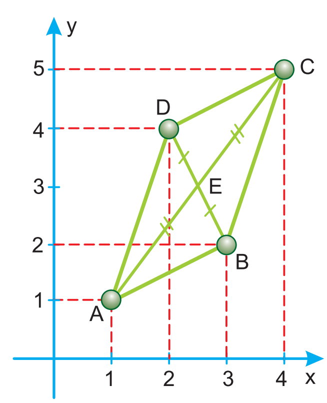
1 $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\dfrac{-3-2}{2}; \dfrac{5 + (-4)}{2}\right)$

$M\left(-\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

2 $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{-1 + x_B}{2} \\ 3 = \dfrac{2 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = 4 \end{cases} \Rightarrow B(5;4)$

3



E é o ponto médio de $\overline{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow E\left(\dfrac{1+4}{2}; \dfrac{1+5}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$

E é o ponto médio de $\overline{BD} \Rightarrow$

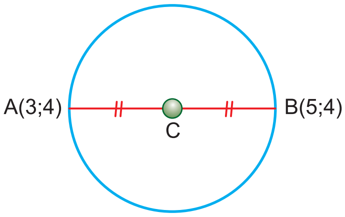
$\Rightarrow E\left(\dfrac{3+2}{2}; \dfrac{2+4}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$

A soma das coordenadas de E é:

$\dfrac{5}{2} + 3 = \dfrac{5+6}{2} = \dfrac{11}{2}$

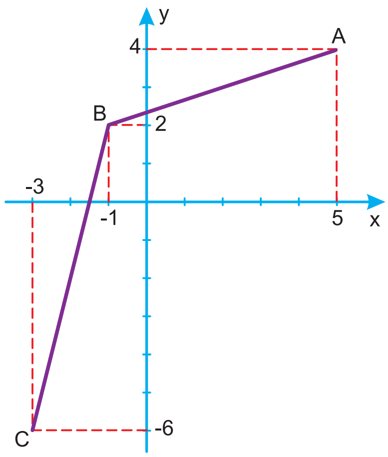
Resposta: B

4



$$C\left(\frac{3+5}{2};\frac{4+4}{2}\right) = (4;4)$$

5



a) Obtenção de E, ponto médio de $\overline{AC}$:

$$E\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{4+(-6)}{2}\right) = (1;-1)$$

b) E é o ponto médio de $\overline{BD}$:

Portanto:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{-1+x_D}{2} \\ -1 = \dfrac{2+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -1 + x_D \\ -2 = 2 + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -4 \end{cases}$$

Resposta: E

6 Considerando o ponto médio $M(x_M; y_M)$, temos:

a) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-7-5}{2} = -6$

Então, M(2; – 6).

b) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{3}{2}$

Então, $M\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$.

c) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-4-2}{2} = -3$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

Então, M(– 3; – 3).

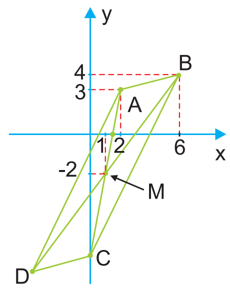
7 Como $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, então:

$3 = \dfrac{-2+x_B}{2} \Rightarrow -2 + x_B = 6 \Rightarrow x_B = 8$

$-2 = \dfrac{-2+y_B}{2} \Rightarrow -2 + y_B = -4 \Rightarrow y_B = -2$

Logo, B(8, – 2).

8



Observando a figura, temos que M(1; – 2) é ponto médio de $\overline{AC}$, sendo A(2; 3) e $C(x_C; y_C)$. Logo:

$\dfrac{2+x_C}{2} = 1 \Rightarrow 2 + x_C = 2 \Rightarrow x_C = 0$

$\dfrac{3+y_C}{2} = -2 \Rightarrow 3 + y_C = -4 \Rightarrow y_C = -7$

Assim, C(0; – 7).

M(1; – 2) é também ponto médio de $\overline{BD}$, sendo B(6; 4) e $D(x_D; y_D)$. Logo:

$\dfrac{6+x_D}{2} = 1 \Rightarrow 6 + x_D = 2 \Rightarrow x_D = -4$

$\dfrac{4+y_D}{2} = -2 \Rightarrow 4 + y_D = -4 \Rightarrow y_D = -8$

Portanto, D(– 4; – 8).

Os pontos C e D são C(0; – 7) e D(– 4; – 8).

9 No exercício, temos:

- $M\left(0; \dfrac{b}{2}\right)$ porque é ponto médio de $\overline{AC}$;

• $N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)$ porque é ponto médio de $\overline{BC}$.

Vamos provar que $MN = \dfrac{AB}{2}$, sendo A(0, 0) e B(a, 0).

$d(A, B) = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$

$d(M, N) = \sqrt{\left(0-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{b}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$

Logo, $MN = \dfrac{AB}{2}$.

10 Como $M(x_M, y_M)$ é ponto médio de $\overline{BC}$ e B(4, 0), C(0, 3), temos:

$x_M = \dfrac{4+0}{2} = 2$

$y_M = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$

Logo, $M\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$.

M é equidistante de B e de C, pois é ponto médio de $\overline{BC}$.

Dessa forma:

$d(M, C) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(3-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$

$d(A, M) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(\dfrac{3}{2}-0\right)^2} = \dfrac{5}{2}$

Logo, M é equidistante dos três vértices do triângulo ABC.

Módulo 36 – Área do triângulo e condição de alinhamento

1 $D = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 = 6$

área do $\Delta ABC = \dfrac{|6|}{2} = 3$

2 $D = \begin{vmatrix} 1 & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3y + 6 - 1 = 7 - 3y$

área do $\Delta ABC = \dfrac{|D|}{2} = 4 \Leftrightarrow |D| = 8 \Leftrightarrow |7-3y| = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 - 3y = 8$ ou $7 - 3y = -8 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}$ ou $y = 5$

Resposta: A

3 $D = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 + 1 - 2 + 1 + 3 =$

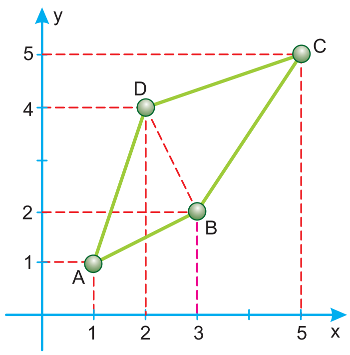
$= -4 \neq 0 \Rightarrow$ A, B e C não estão alinhados.

4 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ x_C & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + x_c + 2x_c - 3 = 3x_c - 7$

A, B e C estão alinhados $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_c - 7 = 0 \Rightarrow 3x_c = 7 \Rightarrow x_c = \dfrac{7}{3}$

5



A área do quadrilátero ABCD é igual à soma das áreas dos triângulos ABD e BCD.

a) Área do ΔABD:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5$

área do $\Delta ABD = \dfrac{|5|}{2} = \dfrac{5}{2}$

b) Área do ΔBCD:

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7$

área do $\Delta BCD = \dfrac{|7|}{2} = \dfrac{7}{2}$

c) Área do quadrilátero ABCD:

$\dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

Resposta: A

6 O ponto **P**, em que a reta AB intercepta o eixo das abscissas, é tal que

a) sua ordenada é nula (y = 0) $\Rightarrow$ P(x; 0)

b) **P**, **A** e **B** são colineares, portanto:

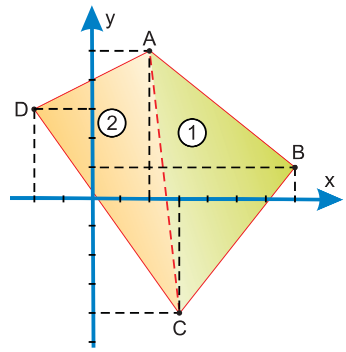
$D = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 + 2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, o ponto procurado é: P(4; 0)

7 A partir da representação do quadrilátero no sistema cartesiano e em seguida dividindo-o em 2 triângulos, temos:

$$\text{a) } S_{\Delta ABC} = \frac{\left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = \frac{41}{2}$$



$$\text{b) } S_{\Delta ACD} = \frac{\left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = \frac{38}{2}$$

A área do quadrilátero representa a soma das áreas dos triângulos, portanto:

$$S_{ABCD} = \frac{41}{2} + \frac{38}{2} = \frac{79}{2} = 39{,}5$$

8 Para que os pontos **A**, **B** e **C** sejam colineares, devemos impor que D = 0

Logo:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x_A + 20 - \frac{27}{2} - 32 + 15 - \frac{9}{2}x_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x_A + 40 - 27 - 64 + 30 - 9x_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x_A = 21 \Leftrightarrow x_A = 3$$

9 Sendo A(0; 2), B(4; 0), C(– 1; – 2) e S a área do triângulo ABC, temos:

$$S = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

Dessa forma, S = 9.

Resposta: C

10 Sendo S a área do triângulo ABC, temos:

$$S = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dessa forma, S = 0 e os pontos ABC estão alinhados e são parte do gráfico de f(x) = x + 1, pois f(1) = 2, f(3) = 4 e f(4) = 5.

Resposta: D

Módulo 37 – Equação da reta

1 a) Equação de $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y + 4 - 6 - 4x - y = 0 \Leftrightarrow$$

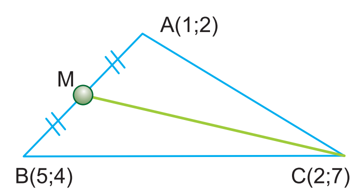
$$\Leftrightarrow -6x - 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 1 = 0$$

b) Equação de $\overleftrightarrow{CD}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 5y - 5 + 20 - 5x + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x + 6y + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 5 = 0$$

2



$$M\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (3; 3)$$

Equação de $\overleftrightarrow{CM}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x + 3y + 6 - 21 - 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + y - 15 = 0$$

3

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 5x + 6y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -4 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 0 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

O ponto de intersecção das retas é

$$Q\left(0; \frac{2}{3}\right)$$

Equação de $\overleftrightarrow{PQ}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x - 2 - 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow 11x - 3y + 2 = 0$$

4 a) Obtenção de b: B(2; b) pertence à parábola $y = x^2 - 4x + 3$, então: $b = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ e B(2; – 1)

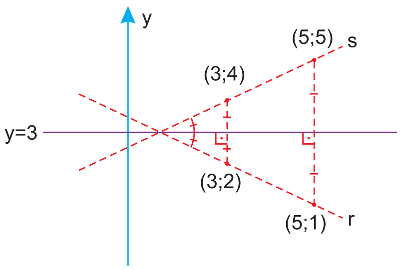
b) Equação de $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 1 - 6 + x - y = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 7 = 0$$

5 A reta **s**, simétrica de **r** em relação à reta de equação y = 3, passa pelos pontos (3; 4) e (5; 5).
A equação da reta **s** é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$$



Resposta: C

6 1º) M é ponto médio de $\overline{AB}$, então M $\left(\dfrac{5}{2}; 2\right)$.

2º) C(0; c) é tal que AC = BC, então:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (c-3)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (c-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + c^2 - 6c + 9 = 9 + c^2 - 2c + 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

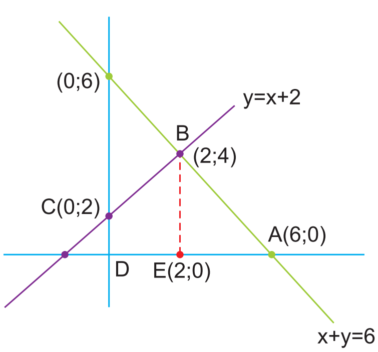
Assim, o ponto C resulta C $\left(0; \dfrac{3}{4}\right)$.

3º) A reta suporte da mediana $\overline{CM}$ tem equação

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5/2 & 2 & 1 \\ 0 & 3/4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 3 = 0$$

Resposta: D

7



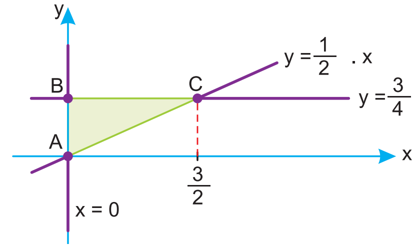
1) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow B(2, 4)$

2) A área S do quadrilátero A(6; 0), B(2; 4), C(0; 2) e D(0; 0) é igual à área S_1 do trapézio EBCD somada com a área S_2 do triângulo ABE. Logo:

$$S = \frac{4+2}{2} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 4}{2} = 6 + 8 = 14$$

Resposta: E

8



Os vértices A, B e C do triângulo são:

A(0;0), B $\left(0; \dfrac{3}{4}\right)$ e C $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$ e a área vale

$$A = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{16}$$

A raiz quadrada **positiva** da área é $\dfrac{3}{4}$.

Resposta: A

9 I) $y = x^2 - 4x + 3$ tem vértice $V(x_0; y_0)$, em que:

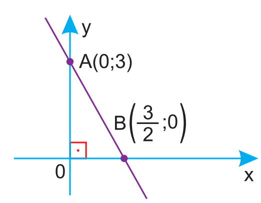
$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \text{e} \\ y_0 = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 \end{array}\right\} V(2; -1)$$

II) A parábola $y = x^2 - 4x + 3$ encontra o eixo das ordenadas no ponto A(0; 3)

III) A equação da reta $\overleftrightarrow{AV}$, é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Esta reta corta o eixo Ox em B(3/2; 0) e, portanto, a área do triângulo AOB é:



$$S_\Delta = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9}{4}$$

Resposta: E

10 $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

A função g(x) = a . x + b passa pelos pontos (2; 6) e (– 1; 0), portanto,

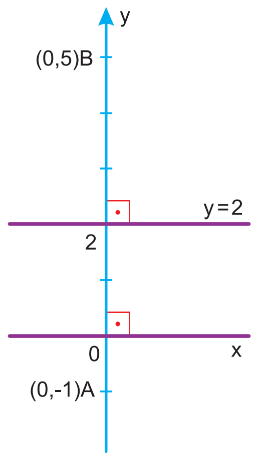
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 2 \cdot x + 2, \text{ da qual se conclui que}$$

a = 2, b = 2 e a . b = 4

Resposta: B

Módulo 38 – Posições particulares da reta

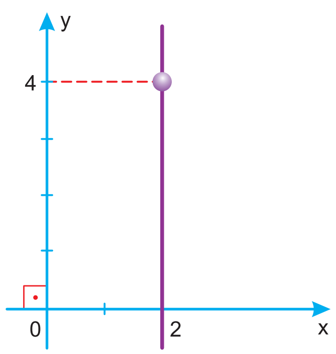
1



Resposta: D

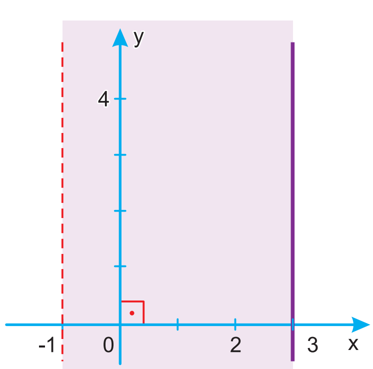
2 I) $r \cap s \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 4)$

II) A reta vertical que passa pela intersecção (2; 4) das retas (r) e (s) tem equação x = 2.

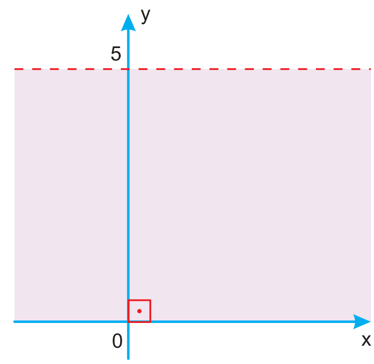


Resposta: E

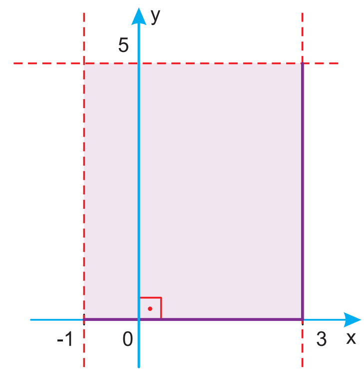
3 I) $-1 < x \leqslant 3$:



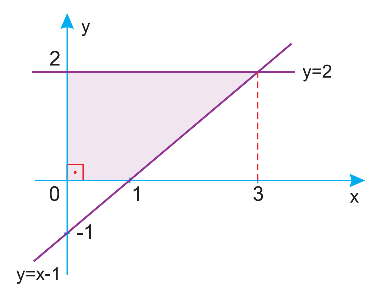
II) $0 \leqslant y < 5$:



III) $\begin{cases} -1 < x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y < 5 \end{cases}$



4 A região definida pelas retas y = x – 1, y = 2 e os eixos coordenados é a hachurada abaixo:



Sua área **S** é igual a:

$$S = \frac{(3 + 1) \cdot 2}{2} = 4$$

Resposta: C

5 As equações das retas t e s são, respectivamente,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 \quad e \quad y = -2$$

Se (a; b) é o ponto comum às duas retas, temos:

$$\begin{cases} b = -2 \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = -\dfrac{12}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Dessa forma,

$$a^b = \left(-\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^{-2} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^{2} = \frac{1}{48}$$

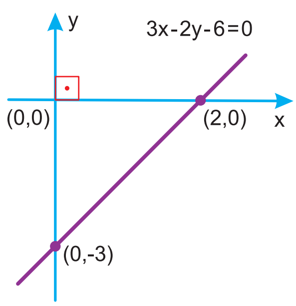
Resposta: E

6 $(x - 3) \,.\, (y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $y - 1 = 0$ que são as equações de duas retas perpendiculares. A reta de equação $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ é paralela ao eixo y e a reta de equação $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ é paralela ao eixo x.

Resposta: E

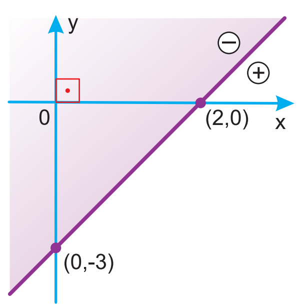
Módulo 39 – Semiplanos

1 I)

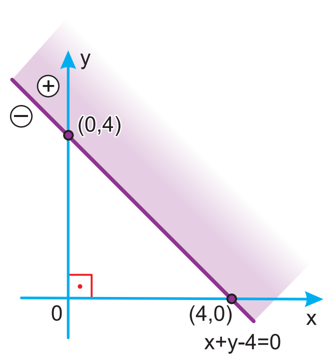


II) Substituindo as coordenadas da origem na equação da reta, temos: $3 \,.\, 0 - 2 \,.\, 0 - 6 < 0$.

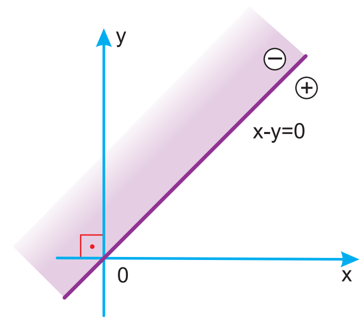
III) Representando graficamente as soluções da inequação $3x - 2y - 6 \leq 0$, temos:



2 I) Representando graficamente as soluções da inequação $x + y - 4 \geq 0$, temos:

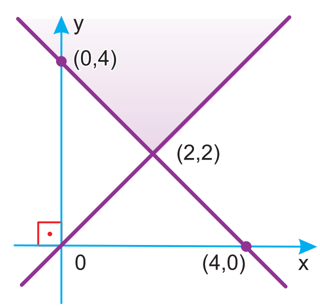


II) Representando graficamente as soluções da inequação $x - y \leq 0$, temos:

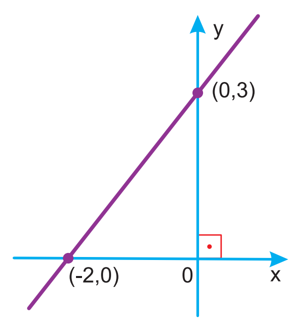


III) Representando graficamente as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y - 4 \geqslant 0 \\ x - y \leqslant 0 \end{cases}, \text{ temos:}$$



3 I)



A reta que passa pelos pontos $(-2; 0)$ e $(0; 3)$ tem equação dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 6 = 0$$

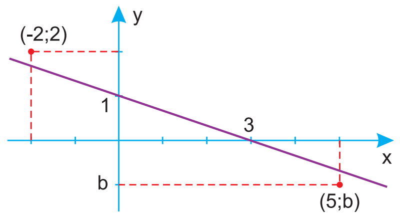
II) Substituindo as coordenadas da origem na equação da reta, temos: $3 \,.\, 0 - 2 \,.\, 0 + 6 > 0$.
Logo, a região do gráfico pode ser representada por: $3x - 2y + 6 < 0$.

Resposta: E

4 Como $(-2; 2)$ e $(5; b)$ estão em semiplanos opostos em relação à reta de equação $x + 3y - 3 = 0$ e $(-2) + 3 \,.\, 2 - 3 > 0$, devemos ter $5 + 3 \,.\, b - 3 < 0 \Leftrightarrow$

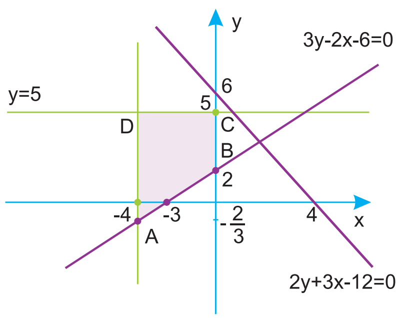
$$\Leftrightarrow b < -\frac{2}{3}$$

Das alternativas apresentadas, somente $-\dfrac{3}{4}$ é menor que $-\dfrac{2}{3}$.



Resposta: D

5 I) A região R, dos pontos (x; y), definida pelas condições simultâneas é:



II) A região R é limitada pelo trapézio de vértices A(– 4; – 2/3), B(0; 2), C(0; 5) e D(– 4; 5). Sua área S é tal que:

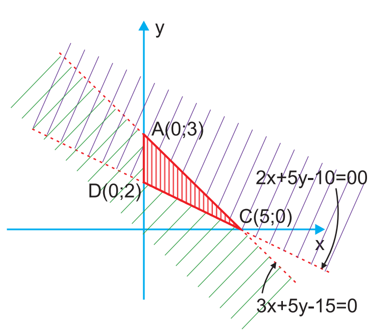
$$S = \frac{(AD + BC)\, CD}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\left(\dfrac{17}{3} + 3\right) 4}{2} \Leftrightarrow S = \frac{52}{3}$$

6 A região triangular limitada pelo sistema de inequações

$$\begin{cases} 3x + 5y - 15 \leq 0 \\ 2x + 5y - 10 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

é dada pelo gráfico abaixo.



A área da região triangular ABC é igual a:

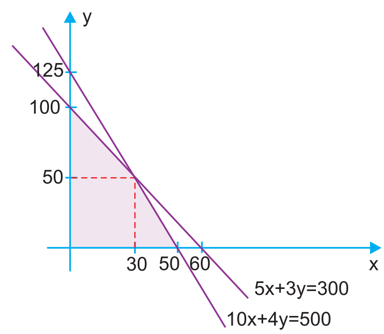
$$A = \frac{1 \,.\, 5}{2} = 2{,}5$$

Resposta: A

7 Os valores reais x e y que representam, respectivamente, as quantidades de peixes vermelhos e amarelos deverão satisfazer as condições:

$$\begin{cases} 5\ell \,.\, x + 3\ell \,.\, y \leq 300\ell \\ 10g \,.\, x + 4g \,.\, y \leq 500g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y \leq 300 \\ 10x + 4y \leq 500 \end{cases}$$

a) A região do primeiro quadrante do plano xy, cujos pares ordenados definem as quantidades de peixes vermelhos e amarelos que podem estar no aquário, é a representada no gráfico seguinte.



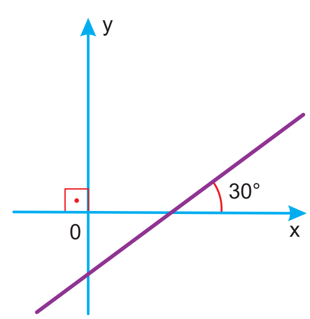
b) A quantidade de cada tipo de peixe no aquário, de forma a consumirem o total da ração disponível e utilizarem o total da água do aquário, e a solução do sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y = 300 \\ 10x + 4y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x - 6y = -600 \\ 10x + 4y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -100 \\ 10x + 4y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow x = 30 \text{ e } y = 50$$

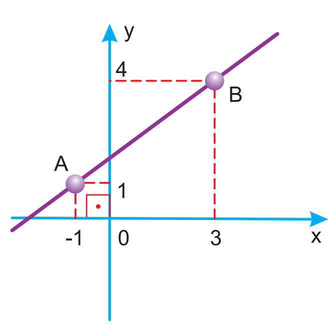
Módulo 40 – Coeficiente angular e equação reduzida

1 a)



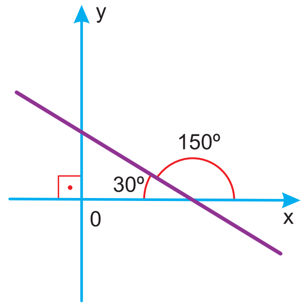
$$m = \text{tg } 30° \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b)



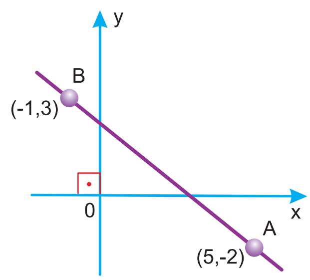
$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{-1 - 3} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

c)



$$m = \text{tg } 150° = -\text{ tg } 30° \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d)



$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{5-(-1)} \Rightarrow m = -\frac{5}{6}$$

2 I) $\left.\begin{matrix} A(a; -2) \\ B(-1; a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-a}{a-(-1)} = \frac{-2-a}{a+1}$$

II) Para que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ seja igual a $-\frac{3}{2}$, devemos ter:

$$-\frac{3}{2} = \frac{-2-a}{a+1} \Leftrightarrow 3a + 3 = 4 + 2a \Leftrightarrow a = 1$$

3 Dada a reta (r) de equação $-3x + 2y + 7 = 0$, temos:

I) Equação reduzida:

$$-3x + 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x - 7 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

II) Coeficiente angular:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

III) Coeficiente linear:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \Rightarrow h = -\frac{7}{2}$$

4 Seja P(x; y) um ponto genérico da reta determinada por A e B. A equação geral é obtida fazendo-se

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 4 - 3 - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$ (equação geral)

Isolando a variável y, teremos:

$y = 1x - 1$, que é a equação reduzida.

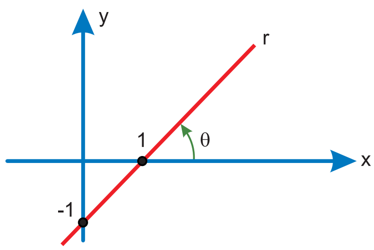
coeficiente linear (h)

coeficiente angular (m)

Note que tg θ = m = 1 (coeficiente angular positivo) indica que a "reta é estritamente crescente".

h = – 1 indica que a reta "corta o eixo $\overrightarrow{Oy}$ no ponto de ordenada – 1".

O gráfico é



5 A equação geral é obtida fazendo-se

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 2 - 12 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ (equação geral)

Isolando a variável y, teremos a equação reduzida:

$y = -1x + 2$

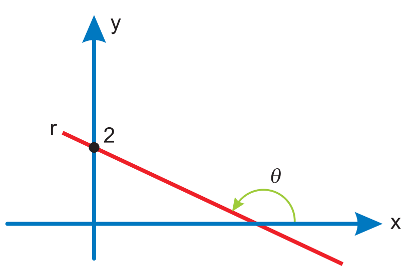
coeficiente linear (h)

coeficiente angular (m)

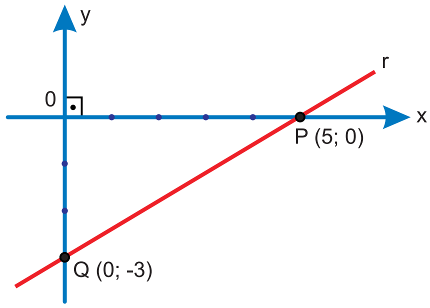
Note que tg θ = m = – 1 (coeficiente angular negativo), então a reta é "estritamente decrescente".

h = + 2, então a reta "corta o eixo $\overrightarrow{Oy}$" no ponto de ordenada + 2.

O gráfico é



6



A partir da equação segmentária

$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$, temos:

$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1 \Leftrightarrow -3x + 5y = -15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 5y - 15 = 0$, que é a equação geral.

7 a) Equação geral:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & 1 \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 6y - 8 = 0$$

b) Equação reduzida:

$$5x - 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow 6y = 5x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{4}{3}$$

c) Equação segmentária:

A partir da equação $5x - 6y - 8 = 0$, podemos obter os interceptos da reta:

$$\left(0; -\frac{4}{3}\right) \text{ e } \left(\frac{8}{5}; 0\right)$$

A partir deles, escrevemos a equação segmentária:

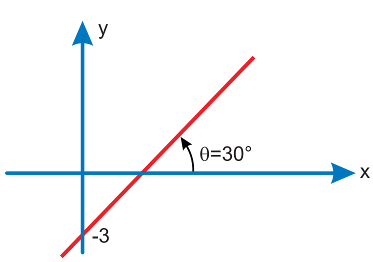
$$\frac{x}{\frac{8}{5}} + \frac{y}{-\frac{4}{3}} = 1$$

d) Coeficiente angular:

$$m_{AB} = \frac{2 - (-3)}{4 - (-2)} = \frac{5}{6}$$

Obs.: O coeficiente angular pode ser obtido diretamente da equação reduzida.

8



Temos:

a) $\theta = 30° \Rightarrow m = \text{tg}\ \theta = \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) A reta corta o eixo dos y no ponto de ordenada – 3. Indica que o coeficiente linear da reta é h = – 3.

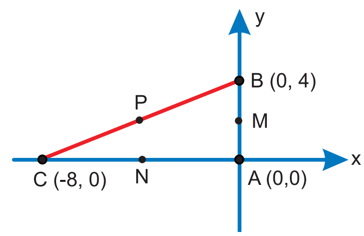
c) A equação reduzida da reta no plano cartesiano é:

$$y = mx + h \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + (-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x - 9 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 9 = 0$$

Resposta: A

9 A **mediana** é o segmento que vai de um vértice ao ponto médio do lado oposto. Inicialmente, devemos obter os pontos médios dos lados do ΔABC.



Assim:

a) M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0; 2)$$

b) N é o ponto médio de $\overline{AC}$.

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + (-8)}{2} = -4 \\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-4; 0)$$

c) P é o ponto médio de $\overline{BC}$.

$$\begin{cases} x_p = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0 + (-8)}{2} = -4 \\ y_p = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-4; 2)$$

Em seguida, obtemos as equações das retas suportes das medianas:

d) Reta suporte da mediana $\overline{AP}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

e) Reta suporte da mediana $\overline{BN}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$$

f) Reta suporte da mediana $\overline{CM}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 8 = 0$$

Equações reduzidas:

$y = \frac{-x}{2}$; $y = x + 4$;

$y = \frac{x}{4} + 2$, respectivamente

Módulo 41 – Posições relativas entre duas retas

1 I) $3x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-3}{-4} \Rightarrow m_1 = \dfrac{3}{4} \\ h_1 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{-2}{-4} \Rightarrow h_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

II) $6x - 8y + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-6}{-8} \Rightarrow m_2 = \dfrac{3}{4} \\ h_2 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{-4}{-8} \Rightarrow h_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

III) $m_1 = m_2$ e $h_1 = h_2 \Rightarrow$ paralelas coincidentes

2 I) $3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-3}{-2} \Rightarrow m_1 = \dfrac{3}{2} \\ h_1 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{-7}{-2} \Rightarrow h_1 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

II) $9x - 6y - 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-9}{-6} \Rightarrow m_2 = \dfrac{3}{2} \\ h_2 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{2}{-6} \Rightarrow h_2 = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

III) $m_1 = m_2$ e $h_1 \neq h_2 \Rightarrow$ paralelas distintas

3 I) $3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-3}{4} \Rightarrow m_1 = -\dfrac{3}{4} \\ h_1 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow h_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

II) $8x - 6y + 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-8}{-6} \Rightarrow m_2 = \dfrac{4}{3} \\ h_2 = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{-5}{-6} \Rightarrow h_2 = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

III) $m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Rightarrow$ perpendiculares

4 I) (r) $3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_r = -\frac{a}{b} = \frac{-3}{-2} \Rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

II) (s) $6x - ky - 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_s = -\frac{a}{b} = \frac{-6}{-k} \Rightarrow m_s = \frac{6}{k}$$

III) Para que (r) e (s) sejam concorrentes, devemos ter:

$$m_r \neq m_s \Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{6}{k} \Leftrightarrow k \neq 4$$

5 Cálculo do coeficiente angular (m_1) da reta r:

$$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$$

Cálculo do coeficinte angular (m_2) da reta s:

$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Como $m_1 = m_2$, então r e s são paralelas.

6 Cálculo do coeficiente angular das retas:

$(a + 3)x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4y = -(a + 3)x + 5 \Rightarrow y = \frac{-(a+3)x}{4} + \frac{5}{4}$$

Então, $m_1 = \dfrac{-(a+3)}{4}$.

$$x + ay + 1 = 0 \Rightarrow ay = -x - 1 \Rightarrow y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a}$$

Logo, $m_2 = -\dfrac{1}{a}$, $a \neq 0$.

Como $m_1 = m_2$, temos:

$$-\frac{a+3}{4} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a+3}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 3a = 4 \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a' = -4 \text{ e } a'' = 1$$

Portanto, o valor de a é – 4 ou 1.

7 Vamos recordar que trapézio é um quadrilátero convexo com dois lados paralelos, chamados de bases.
Pelos dados do problema, as bases são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Como A e B têm a mesma ordenada ($y_B = y_A = 2$), então $\overline{AB}$ é paralela ao eixo x, o que também ocorre com $\overline{CD}$.
Assim, a equação da reta suporte de $\overline{CD}$ é $y = 5$.

8 A equação da reta r, paralela à reta de equação $3x + 2y + 6 = 0$, é da forma $3x + 2y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$
A reta r passa pelos pontos

$$(0;\, b) \text{ e } (-2;\, 4b) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \,.\, 0 + 2 \,.\, b + k = 0 \\ 3\,(-2) + 2 \,.\, 4b + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

que resulta (r) $3x + 2y - 2 = 0$

9 Nosso problema consiste em resolver o sistema formado pelas equações das duas retas, r e s:

$$\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 2x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{10}{11} \text{ e } x = -\frac{14}{11}$$

Logo, o ponto procurado é

$$\left(-\frac{14}{11}; -\frac{10}{11}\right).$$

10 Os vértices do triângulo são pontos de intersecção das retas suportes, tomadas duas a duas.

- Ponto de intersecção das retas
  $x + 2y - 1 = 0$ e $y - 5 = 0$:
  $$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -9$$
  O ponto procurado é $(-9; 5)$.
- Ponto de intersecção das retas
  $x - 2y - 7 = 0$ e $y - 5 = 0$:
  $$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 17$$
  O ponto procurado é $(17; 5)$.
- Ponto de intersecção das retas
  $x + 2y - 1 = 0$ e $x - 2y - 7 = 0$:
  $$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = -\frac{3}{2}$$
  O ponto procurado é $\left(4; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Logo, os vértices do triângulo são os pontos

$(-9; 5)$, $(17; 5)$ e $\left(4; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Módulo 42 – Equação de uma reta que passa por $P(x_0; y_0)$

1 I) A reta passa pelo ponto $P(-1; 2)$ e tem coeficiente angular $m = tg\ 60° = \sqrt{3}$.

II) A equação da reta é dada por:

$y - y_p = m \,.\, (x - x_p) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{3} \,.\, (x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{3} \,.\, x + 2 + \sqrt{3}$

Resposta: E

2 I) O coeficiente angular da reta r de equação $2x - y + 5 = 0$ é

$$m_r = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

II) Como as retas t e r são paralelas, então $m_t = m_r = 2$.

III) A reta t passa por $P(-2; 3)$ e tem $m = 2$, assim, sua equação é dada por:

$y - y_p = m \,.\, (x - x_p) \Rightarrow y - 3 = 2 \,.\, (x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - 3 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 7 = 0$

3 I) O coeficiente angular da reta r de equação $y = -2x + 1$ é $m = -2$.

II) Como a reta procurada é paralela à reta r, então, seu coeficiente angular é, também, $m = -2$.

III) A reta procurada passa por $P(-1; 3)$ e tem $m = -2$, assim, sua equação é dada por:

$y - y_p = m \,.\, (x - x_p) \Rightarrow y - 3 = -2 \,.\, (x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - 3 = -2x - 2 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$

Resposta: B

4 I) A reta r passa pelo ponto $P(1; 3)$ e tem coeficiente angular $m = tg\ 150° = -tg\ 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

II) A equação da reta é dada por:

$y - y_p = m \,.\, (x - x_p) \Rightarrow y - 3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \,.\, (x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y - 9 = -\sqrt{3} \,.\, x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \,.\, x + 3y - 9 - \sqrt{3} = 0$

5 a) Vamos calcular o coeficiente angular m da reta dada:

$8x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = -8x + 1 \Rightarrow y = -4x + \dfrac{1}{2}$

Então, $m = -4$

Como a reta procurada é paralela à reta dada e passa pelo ponto $P(1; 2)$, sua equação é:

$y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -4x + 4 \Rightarrow y = -4x + 6$

b) Vamos calcular o coeficiente angular da reta dada:

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = -3x + 6 \Rightarrow y = -\dfrac{3x}{2} + 3$

Logo, $m = -\dfrac{3}{2}$.

A reta procurada é paralela à reta dada. Portanto, seu coeficiente angular é, também, $-\dfrac{3}{2}$. Como ela passa pelo ponto $P(2; 5)$, sua equacão é:

$y - 5 = -\dfrac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 10 = -3(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y - 10 = -3x + 6 \Rightarrow 2y = -3x + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{3x}{2} + 8$

c) Vamos calcular o coeficiente angular da reta dada:

$x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -x + 5$

Assim, $m = -1$.

A reta procurada tem coeficiente angular igual a $m = -1$ (porque é paralela à reta $x + y - 5 = 0$) e passa pelo ponto $P(4; -4)$.

Então, sua equação é:

$y + 4 = -1(x - 4) \Rightarrow y + 4 = -x + 4 \Rightarrow y = -x$

d) Vamos calcular o coeficiente angular da reta dada:

$2x - 5y + 7 = 0 \Rightarrow -5y = -2x - 7 \Rightarrow y = \dfrac{2x}{5} + \dfrac{7}{5}$

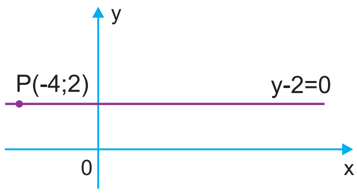
Então, $m = \dfrac{2}{5}$.

De acordo com o problema, a reta procurada passa pelo ponto $P(-1; 3)$ e é paralela à reta dada. Portanto, seu coeficiente angular é $m = \dfrac{2}{5}$. Logo:

$y - 3 = \dfrac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow 5y - 15 = 2(x + 1) \Rightarrow$

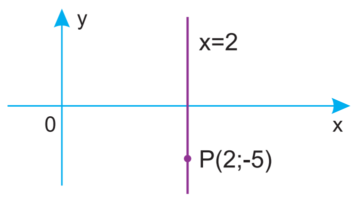
$\Rightarrow 5y - 15 = 2x + 2 \Rightarrow 5y = 2x + 17 \Rightarrow y = \dfrac{2x}{5} + \dfrac{17}{5}$

e) A reta $y - 2 = 0$ é paralela ao eixo x, conforme a figura:



A reta procurada passa por P(– 4, 2) e é paralela à reta dada. Logo, são coincidentes. Portanto, a equação procurada é $y = 2$.

f) A reta $x = 2$ é paralela ao eixo y, conforme a figura:

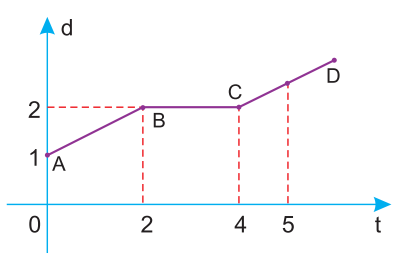


A reta procurada passa por P(2; – 5) e é paralela à reta dada.
Logo, são coincidentes. Portanto, a equação procurada é $x = 2$.

6 As retas que passam pelo ponto P(2; 5) pertencem ao feixe de retas de centro **P**, e, portanto, têm equação do tipo:
$y - 5 = m(x - 2)$
Fazendo $m = -2$, obtemos a equação da reta procurada:
$y - 5 = -2(x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0$

7 O coeficiente da reta será:
$m = \text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = -1$
A equação da reta que passa pelo ponto P(3; 5) e tem coeficiente angular $m = -1$ é $y - 5 = -1(x - 3) \Leftrightarrow x + y - 8 = 0$
Resposta: D

8



I) o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $\dfrac{1}{2}$.

II) o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CD}$ // $\overleftrightarrow{AB}$ é $\dfrac{1}{2}$.

III) A reta $\overleftrightarrow{CD}$ passa por C(4,2) e tem coeficiente angular $\dfrac{1}{2}$. Representando por d (em mil), o número de desempregados em função de tempo t, temos:

$d - 2 = \dfrac{1}{2}(t - 4) \Leftrightarrow 2d - 4 = t - 4 \Leftrightarrow d = \dfrac{1}{2}\,t$

IV) Para $t = 5$, temos $d = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \Leftrightarrow d = 2{,}5$.

O número de desempregados após 5 meses do início da observação é, pois, **2500**.

Resposta: D

Módulo 43 – Paralelismo e perpendicularismo

1 I) O coeficiente angular da reta r de equação

$5y - x + 3 = 0$ é $m_r = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{1}{5}$

II) Como a reta procurada é perpendicular à reta r, então, seu coeficiente angular é $m = -5$.

III) A reta procurada passa por A(– 2; – 1) e tem $m = -5$, assim, sua equação é dada por

$y - y_A = m \cdot (x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -5 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y + 1 = -5x - 10 \Leftrightarrow 5x + y + 11 = 0$

Resposta: A

2 I) Coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$:

$\left.\begin{array}{l} A(-3;\ 1) \\ B(5;\ 7) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7 - 1}{5 + 3} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

II) Ponto médio do segmento $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3 + 5}{2} = 1 \\[2mm] y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1 + 7}{2} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow M(1;\ 4)$$

III) A mediatriz passa por M(1; 4) e tem $m = \dfrac{-4}{3}$, assim, sua equação é dada por:

$y - y_M = m \cdot (x - x_M) \Rightarrow y - 4 = \dfrac{-4}{3} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y - 12 = -4x + 4 \Leftrightarrow 4x + 3y - 16 = 0$

Resposta: C

3 I) Coeficiente angular do lado $\overline{AB}$:

$\left.\begin{array}{l} A(0;\ 0) \\ B(3;\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1 - 0}{3 - 0} = \dfrac{-1}{3}$

II) A reta suporte do lado $\overline{CD}$ passa por C(5; 2) e tem $m = \dfrac{-1}{3}$, assim, sua equação é dada por:

$y - y_C = m \cdot (x - x_C) \Rightarrow y - 2 = \dfrac{-1}{3} \cdot (x - 5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y - 6 = -x + 5 \Leftrightarrow x + 3y - 11 = 0$

4 I) Coeficiente angular do lado $\overline{AC}$:

$$\left.\begin{matrix} A(-2;\,-1) \\ C(0;\,5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5+1}{0+2} = 3$$

II) A reta que contém a altura relativa ao vértice B do triângulo ABC passa por B(4; 1) e tem $m = \frac{-1}{3}$, assim, sua equação é dada por:

$$y - y_B = m \,.\, (x - x_B) \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{3} \,.\, (x - 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y - 3 = -x + 4 \Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0$$

5 Se os pontos A(1;4), B(3;2) e C(7;y) são vértices consecutivos de um retângulo, então os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, portanto:

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} \Rightarrow \frac{y-2}{7-3} = \frac{-1}{\dfrac{2-4}{3-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-2}{4} = 1 \Leftrightarrow y = 6$$

As medidas dos lados AB e BC são:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

$BC = \sqrt{(7-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32}$, e a área, em unidades de superfície, é igual a: $S = AB \,.\, BC = \sqrt{8} \,.\, \sqrt{32} = 16$

Resposta: C

6 I) Se a reta de equação $(3k - k^2) \,.\, x + y + k^2 - k - 2 = 0$ é perpendicular à reta de equação $x + 4y - 1 = 0$, então:

$$\frac{-(3k - k^2)}{1} \,.\, \frac{(-1)}{4} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \text{ ou } k = -1$$

II) Se a reta de equação

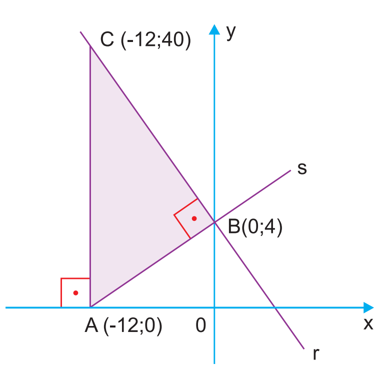
$(3k - k^2) \,.\, x + y + k^2 - k - 2 = 0$ passa pela origem, então:

$k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ou $k = -1$.

Para que as duas condições sejam satisfeitas, temos: $k = -1$, e portanto, $k^2 + 2 = (-1)^2 + 2 = 3$.

Resposta: D

7



O coeficiente angular da reta r:

$3x + y - 4 = 0$ é $m_r = -3$ e, portanto, o coeficiente angular de $s = \overleftrightarrow{AB}$ é $m_s = \frac{1}{3}$, pois $r \perp s$.

Como $B \in r$ é tal que B(0; 4) e $B \in S$, a equação de s é

$$y - 4 = \frac{1}{3} \,.\, (x - 0) \Leftrightarrow x - 3y + 12 = 0.$$

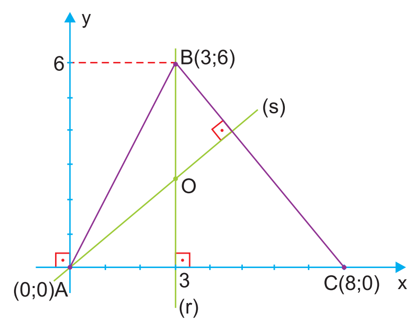
Assim, $A \in s$ é A(–12; 0), e $C \in r$ é C(–12; 40).

Logo, a área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{AC \,.\, 12}{2} = \frac{40 \,.\, 12}{2} = 240$$

Resposta: A

8 Seja o triângulo ABC abaixo.



I) A equação da reta (r), suporte da altura relativa ao lado AC, é x = 3.

II) Se $m_{BC} = -\frac{6}{5}$, a equação da reta (s), suporte da altura relativa ao lado BC, é:

$$y - 0 = \frac{5}{6} \,.\, (x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}\,x$$

III) O ortocentro do triângulo ABC é obtido a partir da intersecção dessas alturas, então:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{5}{6} \,.\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

, cuja soma das coordenadas é:

$$3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

Resposta: B

9 I) A equação da reta r que contém os pontos (2;0) e (0;3) é da forma $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$ e seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{3}{2}$

II) A reta s, que contém o ponto O(0;0), é perpendicular à reta r e tem coeficiente angular igual a

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{2}{3}$$

III) As coordenadas (x; y) do ponto P, intersecção entre as retas r e s, são tais que:

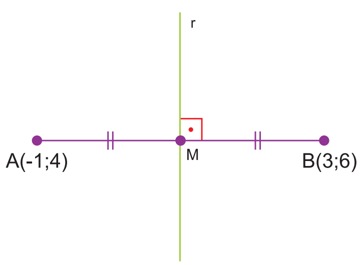
$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 3x + 2 \cdot \frac{2}{3}x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{13} \\ y = \frac{12}{13} \end{cases}$$

Portanto, $P\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right)$

Resposta: C

10 Se A(– 1; 4) e B(3; 6) são simétricos em relação à reta (r), então (r) é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Portanto:

$$m_r = \frac{-1}{m_{\overline{AB}}} = \frac{-1}{\frac{6-4}{3+1}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Resposta: B

Módulo 44 – Distância de ponto a reta

1 $$d = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|3.0 - 4.0 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

2 $$d = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|3 \cdot (-5) + 1 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20 \cdot \sqrt{10}}{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$$

Resposta: E

3 $$d = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 5 - 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

4 I) Na reta (r) $x + 2y - 3 = 0$, fazendo $y = 0$, obtemos $x = 3$, assim P(3; 0) é um ponto da reta r.

II) A distância do ponto P(3; 0) à reta s é:

$$d = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{20}} =$$

$$= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

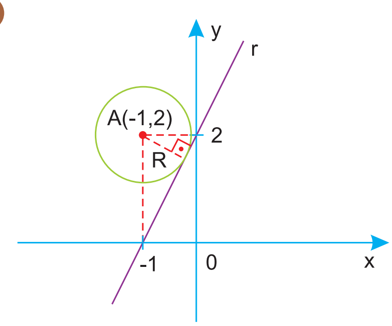
5 $$d = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|3.(-2) + 4 \cdot 1 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{|-2 + k|}{5} \Leftrightarrow |-2 + k| = 20 \Leftrightarrow -2 + k = 20$$

ou $-2 + k = -20 \Leftrightarrow k = 22$ ou $k = -18$

Resposta: C

6



r $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

$$R = d_{A,r} = \frac{|2(-1) + (-1) \cdot 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4\pi}{5} \text{ (ua)}$$

Resposta: A

7 As retas paralelas à reta de equação $x + y - 4 = 0$ são do tipo $x + y + k = 0$.

Destas, as que distam $3\sqrt{2}$ do ponto $P = (2; 1)$ são tais que

$$\frac{|2 + 1 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |3 + k| = 6 \Leftrightarrow k = 3 \text{ ou } k = -9$$

As retas paralelas à reta dada e distantes $3\sqrt{2}$ do ponto $P(2; 1)$ têm equações $x + y + 3 = 0$ ou $x + y - 9 = 0$.

Resposta: A

8 A partir do enunciado, temos:

$$\frac{|3 \cdot m + 4 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6 \Leftrightarrow |3m + 8| = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3m + 8 = \pm 30 \Leftrightarrow m = \frac{\pm 30 - 8}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{22}{3} \text{ ou } m = -\frac{38}{3}$$

Assim, a soma dos valores de m é:

$$-\frac{38}{3} + \frac{22}{3} = -\frac{16}{3}$$

Resposta: A

9 Se P é o ponto do 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3 \cdot x$, então $P(x; 3x)$, com x positivo.

Sabendo que a distância de $P(x; 3x)$ à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, temos:

$$\frac{|3 \cdot x + 4 \cdot 3 \cdot x|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Leftrightarrow |15 \cdot x| = 15 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (pois } x > 0)$$

O ponto P tem coordenadas (1; 3), cuja soma é 4.

Resposta: D

10 a) Se (r) $mx + 2y + 4 = 0$ e

(s) $mx - 4y + 5 = 0$ são perpendiculares, então:

$m \cdot m + 2 \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

b) A distância entre as retas

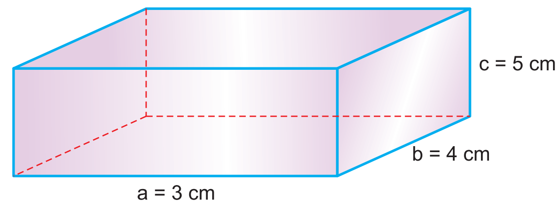
(t) $3x + 4y = 0$ e (v) $3x + 4y + 5 = 0$ é igual a:

$$d = \frac{|5 - 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

FRENTE 2

Módulo 33 – Paralelepípedo e cubo

1



I) $A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (3.4 + 3.5 + 4.5) \Rightarrow A_T = 94 \text{ cm}^2$

II) $V = a \cdot b \cdot c = 3.4.5 \Rightarrow V = 60 \text{ cm}^3$

III) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{50} \Rightarrow D = 5\sqrt{2} \text{ cm}$

2 I) $V = 125 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Leftrightarrow a = 5 \text{ cm}$

II) $A_T = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 \Leftrightarrow A_T = 150 \text{ cm}^2$

3 I) $D = 5\sqrt{3} \text{ cm} \Leftrightarrow a\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 5 \text{ cm}$

II) $A_T = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 \Leftrightarrow A_T = 150 \text{ cm}^2$

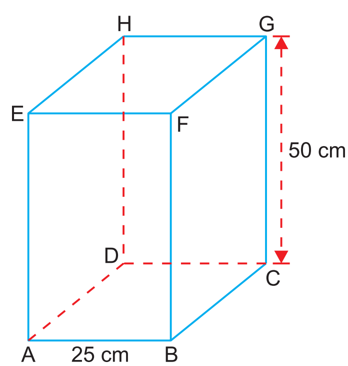
Resposta: D

4 $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} =$

$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} \Leftrightarrow D = 13 \text{ cm}$

Resposta: C

5

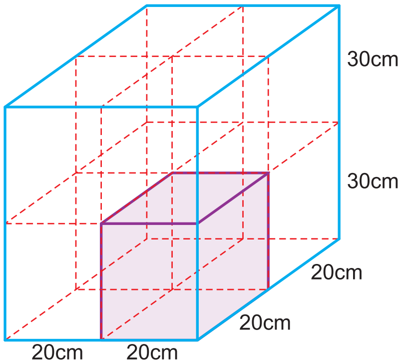


Seja x o menor comprimento de tecido necessário para a forração da base do cesto e da parte lateral externa. Como a largura do tecido é de 50 cm, devemos ter:

$x \cdot 50 = (25)^2 + 4 \cdot (25 \cdot 50) \Leftrightarrow x = 112,5 \text{ cm} \Leftrightarrow x = 1,125 \text{ m}$

Resposta: E

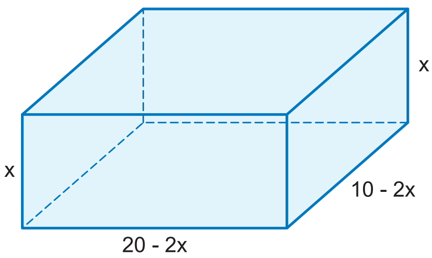
6 Em cada caixa de 40 cm x 40 cm x 60 cm, a transportadora consegue acondicionar 8 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm, conforme ilustra a figura seguinte.



A quantidade de caixas desse tipo necessária para o envio de 100 pacotes é $\frac{100}{8} = 12,5$. Portanto, são necessárias no mínimo 13 caixas.

Resposta: C

7



A caixa retangular sem tampa obtida é um paralelepípedo reto retângulo, cujas dimensões, em centímetros, são 20 – 2x, 10 – 2x e x. Assim, o seu volume V(x) é dado por

$V(x) = (20 - 2x) \,.\, (10 - 2x) \,.\, x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V(x) = (4x^2 - 60x + 200) \,.\, x \Leftrightarrow V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$

Resposta: A

Módulo 34 – Paralelepípedo e cubo

1 I) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} \Rightarrow D = \sqrt{30}$ cm

II) $A_T = 2 \,.\, (ab + ac + bc) = 2 \,.\, (1.2 + 1.5 + 2.5) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 34 \text{ cm}^2$

III) $V = a.b.c = 1.2.5 \Rightarrow V = 10 \text{ cm}^3$

2 $V = a.b.c \Leftrightarrow 336 = 6.7.c \Leftrightarrow c = 8$ cm

Resposta: A

3 I) $A_T = 288 \text{ m}^2 \Leftrightarrow 6.a^2 = 288 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$ m

II) $D = a \,.\, \sqrt{3} = 4 \,.\, \sqrt{3} \,.\, \sqrt{3} \Rightarrow D = 12$ m

Resposta: D

4 Sendo x, x + 1 e x + 2 as medidas das arestas, temos:

$4 \,.\, x + 4(x + 1) + 4 \,.\, (x + 2) = 48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 4x + 4 + 4x + 8 = 48 \Leftrightarrow 12x = 36 \Leftrightarrow x = 3$ m

Assim, as arestas medem 3 m, 4 m e 5 m, logo:

$V = a.b.c = 3.4.5 \Rightarrow V = 60 \text{ m}^3$

Resposta: E

5 Em cada camada da caixa cúbica, de 10 cm de aresta, podem ser colocadas 10 . 10 = 100 bolinhas de gude, de 1 cm de diâmetro.

Nessa mesma caixa cúbica, uma pessoa arrumou as bolinhas em 10 camadas superpostas de 100 bolinhas, tendo assim empregado, ao todo, 1000 bolinhas de gude.

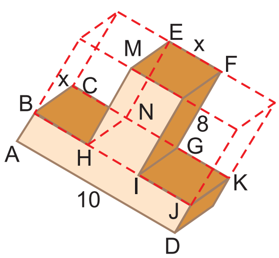
Resposta: C

6 Sendo “a” a medida de cada aresta do cubo, tem-se

$$\frac{V_{BMNFPQ}}{V_{ABCDEFGH}} = \frac{\frac{1}{2} \,.\, \frac{a}{2} \,.\, \frac{a}{2} \,.\, a}{a \,.\, a \,.\, a} = \frac{1}{8}$$

Resposta: E

7



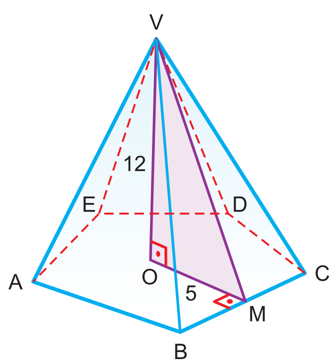
Admitindo-se que os pontos B, C, N, G, K, J, I e H da figura estejam no mesmo plano, paralelo à base do prisma inicial, e que as partes retiradas sejam prismas retangulares retos, tem-se que o volume do sólido é

$V = 2 \,.\, 10 \,.\, x + x \,.\, x \,.\, 8 = 20x + 8x^2 \Leftrightarrow V = 4x(2x + 5)$

Resposta: A

Módulo 35 – Pirâmide

1



Na figura, temos:

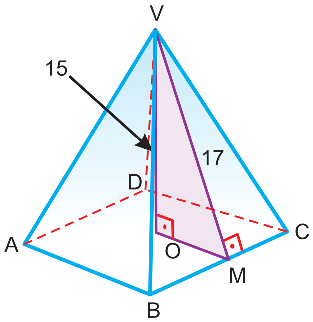
$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2$

$(VM)^2 = 12^2 + 5^2$

VM = 13 cm

O apótema da pirâmide mede 13 cm.

2



I) No triângulo VOM, temos:
$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2$
$17^2 = 15^2 + (OM)^2$
$OM = 8$ cm

II) Como $AB = 2.OM$, temos $AB = 16$ cm.
Assim, a área da base (A_B) da pirâmide é dada por:
$A_B = A_{ABCD} = 16^2 \Leftrightarrow A_B = 256 \text{ cm}^2$

III) Sendo A_L a área lateral da pirâmide, temos:

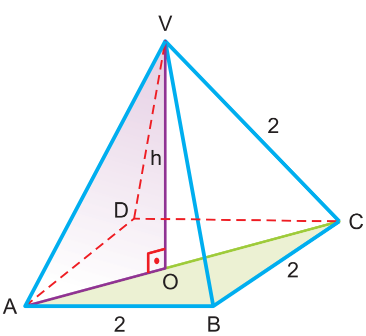
$$A_L = 4 \, . \, A_{\Delta VBC} = 4 \, . \, \frac{(BC) \, . \, (VM)}{2} = 4 \, . \, \frac{16 \, . \, 17}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_L = 544 \text{ cm}^2$$

IV) A área total (A_T) da pirâmide é:

$$A_T = A_B + A_L = 256 + 544 \Rightarrow A_T = 800 \text{ cm}^2$$

3



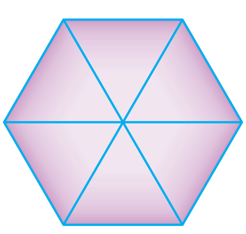
I) No triângulo ABC, temos:
$AC = 2\sqrt{2}$ m (diagonal do quadrado ABCD) e, portanto:

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = \sqrt{2} \text{ m}$$

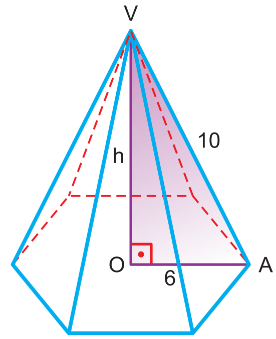
II) No triângulo VOA, temos:
$(VA)^2 = (VO)^2 + (AO)^2 \Rightarrow 2^2 = h^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$ m

4 I) $A_{base} = 6 \, . \, A_{\text{triângulo equilátero}} =$

$$= 6 \, . \, \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \, . \, \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



II)

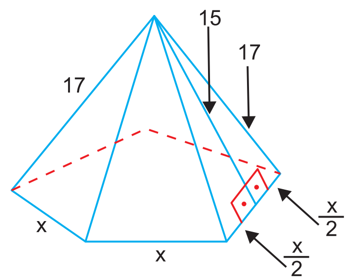


Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VOA da figura, temos: $h^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow h = 8$ cm.

III) O volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \, . \, A_B . h \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \, . \, 54\sqrt{3} . 8 \Leftrightarrow V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

5

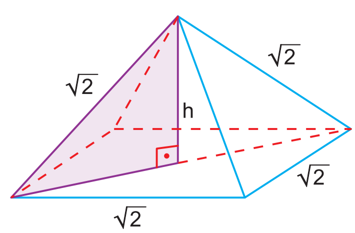


De acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 15^2 = 17^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 64 \Leftrightarrow x = 16$$

Resposta: B

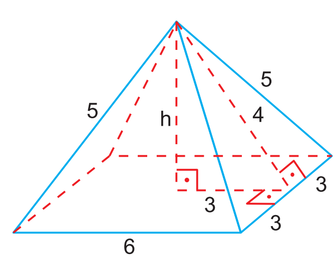
6



$h^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = \sqrt{1}$

Resposta: A

7



$h^2 + 3^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 7 \Leftrightarrow h = \sqrt{7}$

I. Verdadeira, pois $A_\ell = 4 \, . \, \dfrac{6 \, . \, 4}{2} = 48$

II. Verdadeira, pois: $A_t = A_\ell + A_b \Leftrightarrow$

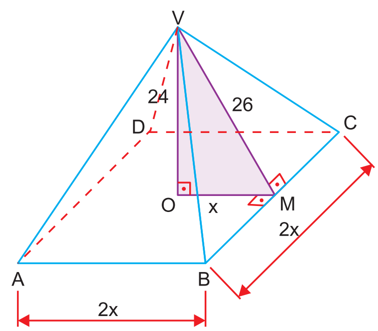
$\Leftrightarrow A_t = 48 + 36 \Leftrightarrow A_t = 84$

III. Falsa, pois: $V = \dfrac{1}{3} A_b \,.\, h \Leftrightarrow V = \dfrac{1}{3} \,.\, 36 \,.\, \sqrt{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = 12\sqrt{7}$

Resposta: C

8



I) No triângulo VOM, temos:

$26^2 = 24^2 + x^2 \Rightarrow x = 10$ cm

II) $AB = 2x = 2 \,.\, 10 \Rightarrow AB = 20$ cm

III) $A_B = A_\square = 20^2 \Rightarrow A_B = 400$ cm^2

IV) $A_L = 4 \,.\, A_{\Delta VBC} = 4 \,.\, \dfrac{20 \,.\, 26}{2} \Rightarrow A_L = 1040$ cm^2

V) $A_T = A_B + A_L = 400 + 1040 \Rightarrow A_T = 1440$ cm^2

Resposta: A

9 Seja *a* a medida, em centímetros, de cada aresta do octaedro regular. Esse octaedro é composto por duas pirâmides congruentes de mesma base (um quadrado de lado a) e mesma altura

$h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Assim:

$2 \,.\, \dfrac{1}{3} \,.\, a^2 \,.\, \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow a = 6$

Resposta: D

Módulo 36 – Pirâmide

1 No triângulo VMA, temos:

$(VA)^2 = (VM)^2 + (AM)^2$

$13^2 = 12^2 + (AM)^2$

$AM = 5$ cm

Assim, a aresta da base AB é dada por:

$AB = 2 \,.\, AM = 2 \,.\, 5 \Leftrightarrow AB = 10$ cm

2 I) No triângulo VMA, temos:

$(VA)^2 = (VM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^2 = 12^2 + (AM)^2 \Rightarrow AM = 5$ cm

II) $AB = 2 \,.\, AM = 2 \,.\, 5 \Rightarrow AB = 10$ cm

III) $OM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM = 5$ cm

IV) No triângulo VOM, temos:

$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2 \Rightarrow 12^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{119}$ cm

3 I) No triângulo VMA, temos:

$(VA)^2 = (VM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^2 = 12^2 + (AM)^2 \Rightarrow AM = 5$ cm

II) $AB = 2.AM = 2.5 \Rightarrow AB = 10$ cm

III) Sendo A_L a área lateral da pirâmide, temos:

$A_L = 4 \,.\, A_{\Delta VAB} = 4 \,.\, \dfrac{(AB).(VM)}{2} =$

$= 4 \,.\, \dfrac{10 \,.\, 12}{2} \Rightarrow A_L = 240$ cm^2

4 I) No triângulo VMA, temos:

$13^2 = 12^2 + (AM)^2 \Leftrightarrow AM = 5$ cm

II) $AB = 2 \,.\, AM = 2 \,.\, 5 \Rightarrow AB = 10$ cm

III) $OM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM = 5$ cm

IV) No triângulo VOM, temos:

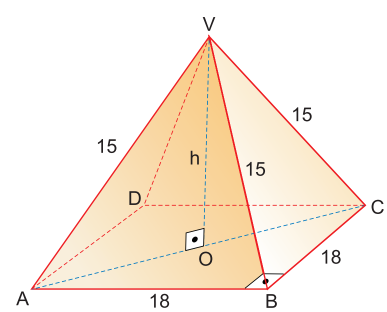
$(VM)^2 = (VO)^2 + (OM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{119}$ cm

V) $V = \dfrac{1}{3} \,.\, A_B \,.\, h = \dfrac{1}{3} \,.\, A_{ABCD} \,.\, h =$

$= \dfrac{1}{3} \,.\, 10^2 \,.\, \sqrt{119} \Rightarrow V = \dfrac{100 \,.\, \sqrt{119}}{3}$ cm^3

5



I) No triângulo ABC, temos:

$(AC)^2 = 18^2 + 18^2 \Rightarrow AC = 18\sqrt{2}$ cm

II) $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{18\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = 9\sqrt{2}$ cm

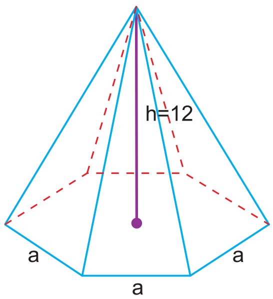
III) No triângulo VOA, sendo h a medida da altura da pirâmide, em centímetros, temos:

$(VA)^2 = (VO)^2 + (AO)^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + (9\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 63 \Rightarrow h = 3\sqrt{7}$

Resposta: B

6



Sendo *a* a medida da aresta da base da pirâmide, em centímetros, tem-se:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 12 = 96\sqrt{3}$$

Assim: $6a^2\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4$

Resposta: C

7 O volume, V, do sólido é a diferença entre o volume do cubo de aresta 2 e o volume da pirâmide ABCD.

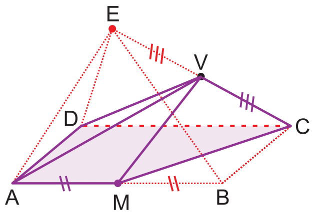
A base da pirâmide é o triângulo BCD e sua área é $\frac{2^2}{2} = 2$. A altura da pirâmide é 2.

Assim sendo:

$$V = 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

Resposta: D

8



De acordo com o enunciado, pode-se concluir que a área da base (A_b) da pirâmide AMCDV é $\frac{3}{4}$ da área da base (A_B) da pirâmide ABCDE e que a altura h da pirâmide AMCDV é metade da altura H da pirâmide ABCDE. Assim, sendo v o volume da pirâmide AMCDV, tem-se:

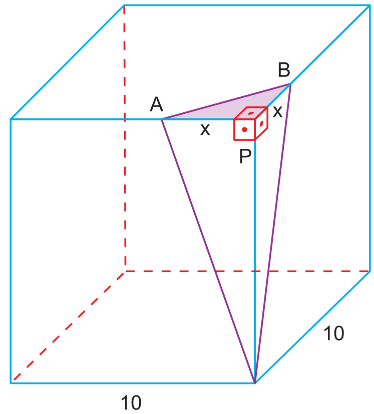
$$v = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot H = \frac{A_B \cdot H}{8}$$

Por outro lado: $\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H = 4 \Leftrightarrow A_B \cdot H = 12$

Logo: $v = \frac{12}{8} = 1,5$

Resposta: B

9



Seja x cm a distância dos pontos A e B até o ponto P.

O volume do cubo, em metros cúbicos, é:

$V_{cubo} = 10^3 = 1000$

O volume da pirâmide, em metros cúbicos, é:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot x}{2} \cdot 10 = \frac{5x^2}{3}$$

Como $V_{pirâmide} = 0,375\% \cdot V_{cubo}$, temos:

$$\frac{5x^2}{3} = \frac{0,375}{100} \cdot 1000 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{100} \Rightarrow x = 1,5,$$ pois x é positivo.

Resposta: D

Módulo 37 – Tetraedro regular

1 Sendo a = 4 cm a aresta do tetraedro regular, a área total é: $A_T = a^2 \cdot \sqrt{3} = 4^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_T = 16 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$

2 Sendo a = 4 cm a aresta do tetraedro regular, a altura é:

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{3}\ cm$$

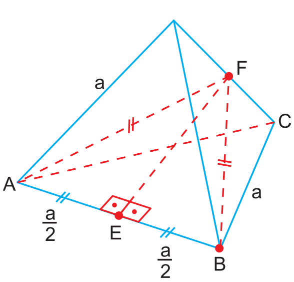
3 Sendo a = 4 cm a aresta do tetraedro regular, o volume é:

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{4^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ cm^3$$

4 I) $A_T = a^2\sqrt{3} \Rightarrow 9\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

II) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{3^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{9 \cdot \sqrt{2}}{4}$

5



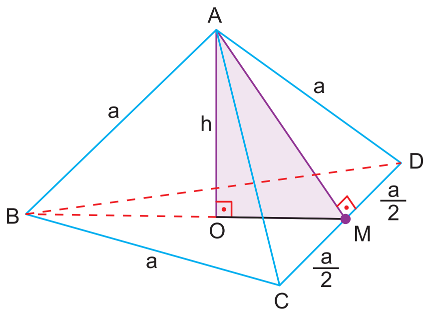
No triângulo retângulo EBF, tem-se: $(EF)^2 + (EB)^2 = (FB)^2$

Assim:

$$(EF)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (EF)^2 = \frac{2a^2}{4} \Leftrightarrow EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: B

6



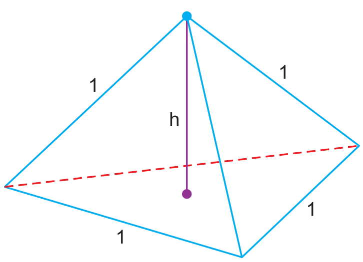
1) $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

2) $OM = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

3) $(AO)^2 + (OM)^2 = (AM)^2 \Leftrightarrow h^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = \dfrac{24\,a^2}{36} \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{6\,a^2}{9} \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

7



I) Cálculo da altura h do tetraedro em centímetros

$h = \dfrac{1\,.\,\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

II) Cálculo da área da base A_b do tetraedro, em centímetros quadrados

$A_b = \dfrac{1^2\,.\,\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow A_b = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

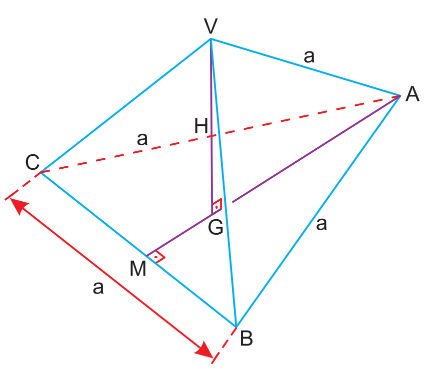
III) Cálculo do volume V do tetraedro, em centímetros cúbicos

$V = \dfrac{1}{3}\,.\,A_b\,.\,h \Leftrightarrow V = \dfrac{1}{3}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,.\,\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \dfrac{3\,.\,\sqrt{2}}{36} \Leftrightarrow V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Resposta: D

8



Sendo G o baricentro do triângulo ABC equilátero cujo lado mede a cm, tem-se:

Área total: $A_t = 4\,.\,\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\,cm^2 = 6\sqrt{3}\,cm^2 \Rightarrow a = \sqrt{6}$

$AG = \dfrac{2}{3}\,AM = \dfrac{2}{3}\,.\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}\,.\,\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$

No triângulo VGA, retângulo em G, e, de acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

$VG^2 + AG^2 = VA^2 \Rightarrow H^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow H = 2\text{ cm}$

Resposta: A

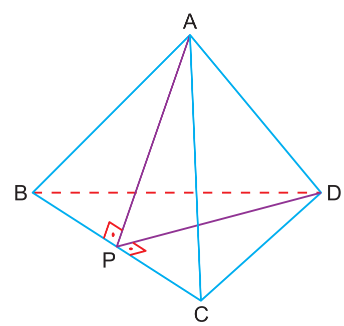
9 Sendo **a** a medida da aresta e **V** o volume do tetraedro regular, temos:

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2^3\sqrt{2}}{12}\,cm^3$

$V = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,cm^3$

Resposta: D

10



a) Para que PA + PD tenha o menor valor possível, o ponto P tem de ser o ponto médio da aresta $\overline{BC}$, pois nesse caso temos:

$\overline{PA} \perp \overline{BC}$ e $\overline{PD} \perp \overline{BC}$

Assim: $PB = \dfrac{CB}{2} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{PB}{CB} = \dfrac{1}{2}}$

b) $\overline{PA}$ e $\overline{PD}$ são, respectivamente, as alturas dos triângulos equiláteros ABC e DBC cujos lados têm medida 1.

Assim: $PA = PD = \dfrac{1\,.\,\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $PA + PD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Módulo 38 – Cilindro

1 A área lateral A_L do cilindro é:

$A_L = 2\pi\,R\,.\,h = 2\pi\,2.\,5 \Leftrightarrow A_L = 20\pi\,cm^2$

Resposta: A

2 Sendo A_B a área da base, A_L a área lateral e A_T a área total do cilindro, temos:

I) $A_B = \pi R^2 = \pi 2^2 \Rightarrow A_B = 4\pi \text{ cm}^2$

II) $A_L = 2\pi R \,.\, h = 2\pi \,.\, 2 \,.\, 5 \Rightarrow A_L = 20\,\pi \text{ cm}^2$

III) $A_T = 2 \,.\, A_B + A_L = 2 \,.\, 4\pi + 20\pi \Rightarrow A_T = 28\pi \text{ cm}^2$

Resposta: C

3 Sendo A_B a área da base e V o volume do cilindro, temos:

I) $A_B = \pi R^2 = \pi \,.\, 2^2 \Rightarrow A_B = 4\pi \text{ cm}^2$

II) $V = A_B \,.\, h = 4\pi \,.\, 5 \Rightarrow V = 20\pi \text{ cm}^3$

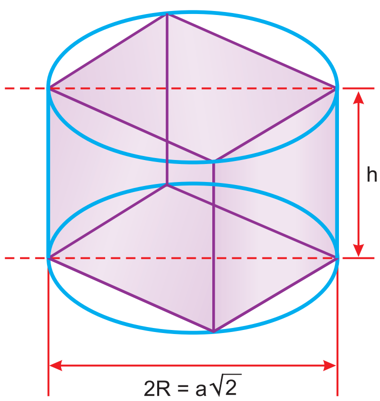
Resposta: B

4 $A_{SEC.MERIDIANA} = 20 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 2 \,.\, R \,.\, h = 20$

$A_{LATERAL} = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, h = \underbrace{2 \,.\, R \,.\, h}_{20} \,.\, \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_{LATERAL} = 20\pi \text{ cm}^2$

5



Se 2R é o diâmetro do cilindro e $a \,.\, \sqrt{2}$ a diagonal da face do cubo, então $2R = a\sqrt{2}$ e, portanto, $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Sendo V o volume, A_B a área da base e h a altura do cilindro, temos:

$V = A_B \,.\, h = \pi \,.\, R^2 \,.\, h = \pi \,.\, \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \,.\, a =$

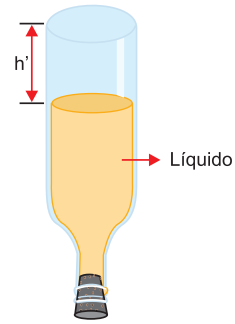
$= \pi \,.\, \dfrac{a^2 \,.\, 2}{4} \,.\, a = \dfrac{\pi \,.\, a^3}{2}$

6 Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, precisamos conhecer o raio R da base do cilindro reto e a sua altura h, pois esse volume é dado por $\pi R^2 h$.

Logo, o número mínimo de medições é igual a 2.

Resposta: B

7



Virando a garrafa de cabeça para baixo, sua capacidade total é igual ao volume do líquido mais o volume da parte não ocupada por ele.

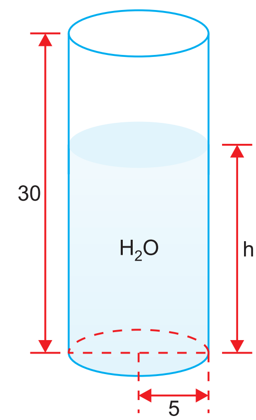
Assim, além das duas medidas anteriores, basta medir apenas a altura h' da parte não ocupada pelo líquido. Logo, o número mínimo de medições é igual a 3.

Resposta: C

8 $V = \pi \,.\, (1 \text{ dm})^2 \,.\, 3 \text{ dm} = 3\pi \text{ dm}^3 = 3\pi$ litros

Resposta: B

9



$\pi \,.\, 5^2 \,.\, h = 2000 \Leftrightarrow h = \dfrac{80}{\pi}$

Como $15\pi < 80 < 30\pi$, tem-se:

$15 < \dfrac{80}{\pi} < 30 \Leftrightarrow 15 < h < 30$

Resposta: B

10 A massa m do produto a ser misturado à água é dada por:

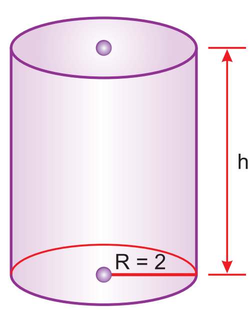
$m = \dfrac{\pi \,.\, (25)^2 \,.\, 16}{500} \,.\, 25g = \dfrac{3{,}1 \,.\, 25 \,.\, 16}{20} \,.\, 25g =$

$= 1550g = 1{,}55kg$

Resposta: B

Módulo 39 – Cilindro

1



I) Como o cilindro é equilátero, temos:

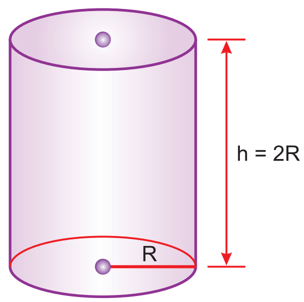
$h = 2R = 2 \, . \, 2 \Rightarrow h = 4$ cm

II) $A_B = \pi R^2 = \pi \, . \, 2^2 \Rightarrow A_B = 4\pi$ cm^2

III) $A_L = 2\pi R \, . \, h = 2\pi \, . \, 2 \, . \, 4 \Leftrightarrow A_L = 16\pi$ cm^2

IV) $A_T = 2 \, . \, A_B + A_L = 2 \, . \, 4\pi + 16\pi \Rightarrow A_T = 24\pi$ cm^2

2

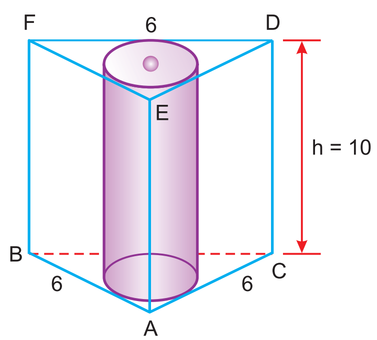


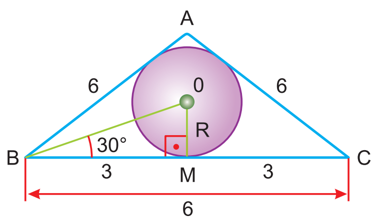
I) $A_L = 2\pi R \, . \, h = 2\pi R \, . \, 2R \Rightarrow A_L = 4\pi R^2$

II) $A_T = 2 \, . \, A_B + A_L = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 \Rightarrow A_T = 6\pi R^2$

III) $\dfrac{A_T}{A_L} = \dfrac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{3}{2}$

3





I) No triângulo BMO, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{R}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{3} \Rightarrow R = \sqrt{3} \text{ cm}$$

II) $A_B = \pi \, . \, (\sqrt{3})^2 \Rightarrow A_B = 3\pi$ cm^2

III) $A_L = 2\pi R \, . \, h = 2\pi \, . \, \sqrt{3} \, . \, 10 = 20\pi \sqrt{3}$ cm^2

IV) $V = A_B \, . \, h = 3\pi \, . \, 10 \Rightarrow V = 30\pi$ cm^3

V) $A_T = 2 \, . \, A_B + A_L = 2 \, . \, 3\pi + 20\pi\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 2\pi \, . \, (3 + 10\sqrt{3})$ cm^2

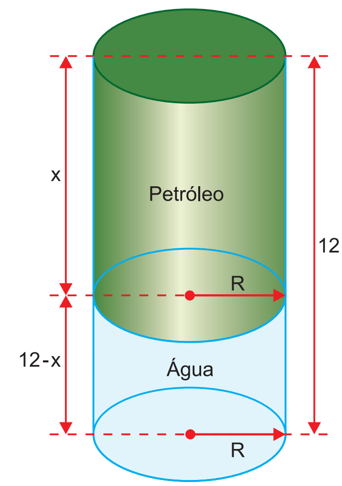
4 Um quadrado de 48 m de perímetro tem 12 m de lado. Como o raio do círculo inscrito no quadrado é a metade do lado, então, o raio do cilindro é 6 m. Se o raio da base é o triplo da altura, então

$R = 3h \Leftrightarrow 6 = 3h \Leftrightarrow h = 2$ m.

O volume do cilindro é

$V = A_B \, . \, h = \pi \, . \, R^2 \, . \, h = \pi \, . \, 6^2 \, . \, 2 = 72 \, \pi$m^3.

5



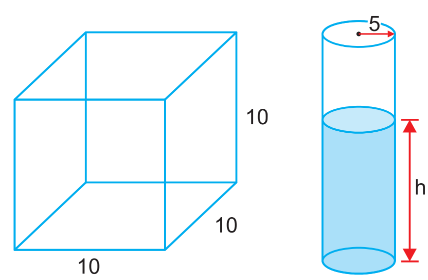
Sendo x a altura do petróleo no tanque, R o raio da base, e V_P e V_A, respectivamente, os volumes, em m^3, de petróleo e água no tanque, tem-se

$$\left.\begin{array}{l} V_P = \pi R^2 \, . \, x = 42 \\ V_A = \pi \, . \, R^2 \, . \, (12 - x) = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^2 x}{\pi R^2 (12 - x)} = \frac{42}{30} \Leftrightarrow \frac{x}{12 - x} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = 7$$

Resposta: B

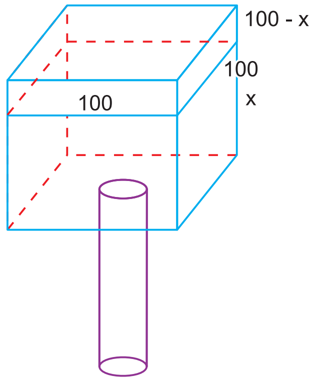
6



$$\pi \, . \, 5^2 \, . \, h = 10^3 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{25\,\pi} \Leftrightarrow h = \frac{40}{\pi}$$

Resposta: B

7



$100 \cdot 100 \cdot (100 - x) = \pi \cdot 2^2 \cdot 5000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100 - x = 2\pi \Leftrightarrow x = 100 - 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \simeq 100 - 6 \Leftrightarrow x \simeq 94$

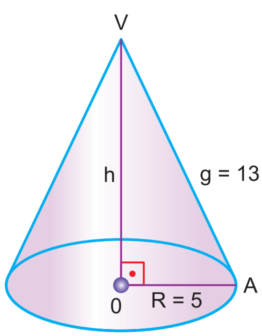
Resposta: C

8 $V = \dfrac{360° - 60°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 3 \Leftrightarrow V = 90\pi$

Resposta: E

Módulo 40 – Cone

1



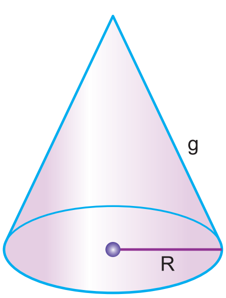
I) No triângulo VOA, temos:

$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$ cm

II) $A_B = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_B = 25\pi$ cm^2

III) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 12 \Rightarrow V = 100\,\pi$ cm^3

2



I) Como o cone é equilátero, temos g = 2R e, portanto:

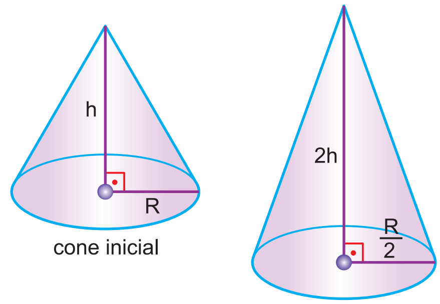
$A_L = 24\pi \Leftrightarrow \pi\, Rg = 24\,\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi \cdot R \cdot 2R = 24\pi \Leftrightarrow R^2 = 12 \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$ cm

II) $A_B = \pi R^2 = \pi.(2\sqrt{3})^2 \Rightarrow A_B = 12\pi$ cm^2

III) $A_T = A_B + A_L = 12\pi + 24\pi \Rightarrow A_T = 36\,\pi$ cm^2

3



cone inicial

cone final

Sendo V_i o volume do cone inicial e V_f o volume do cone final, temos:

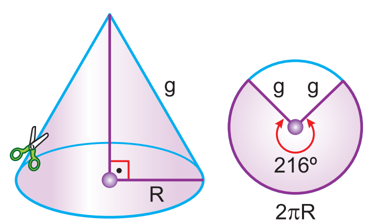
I) $V_i = \pi R^2 \cdot h$

II) $V_f = \pi \cdot \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot 2h \Leftrightarrow V_f = \dfrac{\pi R^2 h}{2}$

Como $V_f = \dfrac{V_i}{2}$, o volume se reduz à metade.

Resposta: B

4

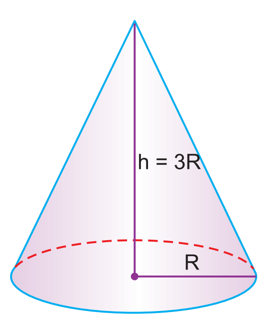


$\dfrac{216°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 = 2 \cdot \pi \cdot R \Leftrightarrow R = 6$ cm

A área total do cone é a soma da área da base e da área lateral do cone. Dessa forma, tem-se:

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\,\pi$ cm^2

5



1) $2\,\pi\,R = 8\,\pi$ cm $\Rightarrow R = 4$ cm

2) $h = 3R = 3 \cdot 4$ cm $= 12$ cm

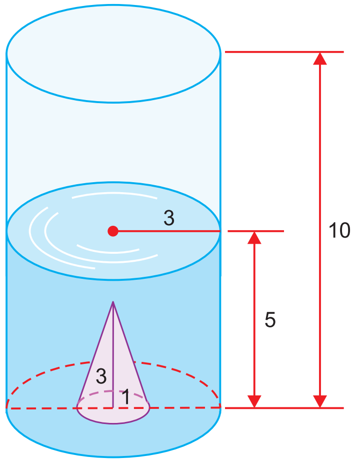
3) $V = \dfrac{\pi\, R^2 h}{3} =$

$= \dfrac{\pi \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot 12\text{ cm}}{3} =$

$= 64\,\pi$ cm^3

Resposta: A

6



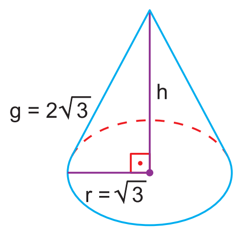
Sendo V o volume do líquido que ocupa o recipiente até a metade de sua altura, temos

$V = \dfrac{1}{2} \cdot V_{cilindro} - V_{cone} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 \Leftrightarrow V = 44\pi$

Resposta: E

7



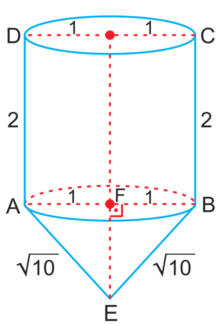
I) $g^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 + h^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3m$

II) $V = \dfrac{1}{3}\ \pi \cdot r^2 \cdot h = \dfrac{1}{3}\ \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 3\pi\ m^3$

Resposta: A

8



I) No Δ AEF, retângulo em F, tem-se

$AF^2 + FE^2 = AE^2 \Rightarrow 1^2 + FE^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow FE = 3$

II) O volume do cilindro é

$V_{ABCD} = \pi \cdot AF^2 \cdot AD = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$

III) O volume do cone é

$V_{ABE} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot AF^2 \cdot FE = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = \pi$

IV)O volume do sólido AEBCD considerado é

$V = V_{ABCD} + V_{ABE} = 2\pi + \pi = 3\pi$

Resposta: E

Módulo 41 – Cone

1 I) $A_B = 16 \cdot \pi \Leftrightarrow \pi \cdot R^2 = 16 \cdot \pi \Leftrightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$

II) Como o cone é equilátero, temos $g = 2R = 8$

III) $A_L = \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32 \cdot \pi$

Resposta: A

2 $A_T = 90\pi \Rightarrow A_B + A_L = 90 \cdot \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g = 90 \cdot \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^2 + R \cdot 13 = 90 \Leftrightarrow R^2 + 13 \cdot R - 90 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = -18$ (não convém) ou $R = 5$

Resposta: C

3 I) $g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + R^2 \Rightarrow R = 6$ cm

II) $A_B = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36.\ \pi\ cm^2$

III) $A_L = \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 6.10 = 60.\ \pi\ cm^2$

IV) $A_T = A_B + A_L = 36 \cdot \pi + 60 \cdot \pi = 96 \cdot \pi\ cm^2$

Resposta: D

4 I) $2.g + 2.R = 50 \Rightarrow 2.g + 24 = 50 \Rightarrow g = 13cm$

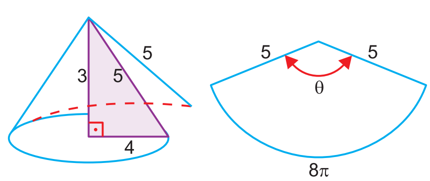
II) $g^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 12^2 \Rightarrow h = 5$ cm

III) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240.\ \pi\ cm^3$

Resposta: A

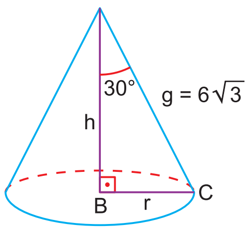
5



$\theta = \dfrac{8\pi}{5}$ radianos $= 288°$

Resposta: D

6



No ΔABC, temos:

I) $\text{sen } 30° = \dfrac{r}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{6\sqrt{3}} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}\text{ cm}$

II) $\cos 30° = \dfrac{h}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{6\sqrt{3}} \Rightarrow h = 9\,\text{cm}$

Assim, sendo V o volume do cone, temos:

$V = \dfrac{1}{3}\, A_B \,.\, h = \dfrac{1}{3}\,\pi\,.\,(3\sqrt{3})^2\,.\,9 \Rightarrow V = 81\pi\text{ cm}^3$

Resposta: D

7 Uma hora tem 60 min. Em 4 horas, há 4 . 60 = 240 min. Se é ministrado 1,5 mℓ de medicamento por minuto, o volume de medicamento ministrado é de 1,5 mℓ . 240 = 360 mℓ.

O recipiente é constituído de um cilindro circular reto com 9 cm de altura e um cone, também circular reto, e de 3 cm de altura. Sendo o raio da base de ambos de 4 cm, o volume do recipiente é igual a:

$V = \pi\,.\,4^2\,.\,9 + \dfrac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,4^2\,.3 = 160\pi\text{ cm}^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = 160\,.\,3\text{ cm}^3 = 480\text{ cm}^3 = 480\text{ m}\ell$

Descontada a quantidade ministrada, restaram (480 – 360)mℓ = 120 mℓ de medicamento.

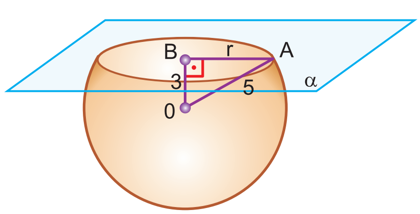
Resposta: A

Módulo 42 – Esfera e suas partes

1 I) $V = \dfrac{4}{3}\,\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\,\pi\,.\,3^3 \Rightarrow V = 36\,\pi\text{ cm}^3$

II) $A = 4\pi R^2 = 4\pi\,.\,3^2 \Rightarrow A = 36\pi\text{ cm}^2$

2



Sendo r o raio do círculo determinado pela intersecção do plano α com a esfera, temos:

I) $r^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow r = 4\text{ cm}$

II) $A_{\text{círculo}} = \pi\,.\,r^2 = \pi\,.\,4^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = 16\pi\text{ cm}^2$

3 I) $V = 288\,\pi \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\,\pi R^3 = 288\pi \Leftrightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6\text{ cm}$

II) $A = 4\pi R^2 = 4\pi.6^2 \Rightarrow A = 144\pi\text{ cm}^2$

Resposta: B

4 O volume da esfera é dado por

$V = \dfrac{4\pi R^3}{3} \Leftrightarrow V = \dfrac{4\pi 3^3}{3} = 36\,\pi\text{cm}^3$

Resposta: A

5 Se $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ e $A = 4\,\pi R^2$ são numericamente iguais

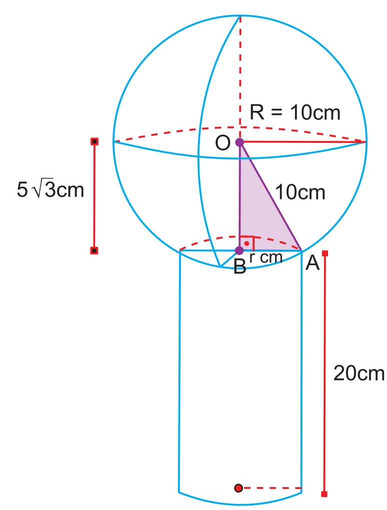
então $\dfrac{4\pi R^3}{3} = 4\,\pi R^2 \Leftrightarrow R = 3$

Resposta: B

6 A maior fatia (adotando-se espessura zero) é a que contém o círculo maior da esfera (laranja).
Descontada a secção transversal do cilindro, cuja área é de $\pi\,.\,1^2$, esta fatia tem área, em cm^2, de $\pi\,.\,3^2 - \pi\,.\,1^2 = 8\pi$, equivalente a oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

Resposta: E

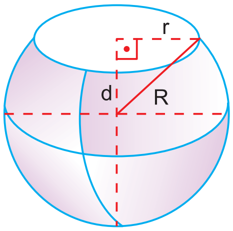
7



No triângulo retângulo AOB, da figura, temos:
$(r\text{ cm})^2 + (5\sqrt{3}\text{ cm})^2 = (10\text{ cm})^2 \Rightarrow r = 5\text{ cm}$
Assim, o volume V do cilindro, em centímetros cúbicos, é:
$V = \pi\,.\,5^2\,.\,20 = 500\pi$

Resposta: D

8



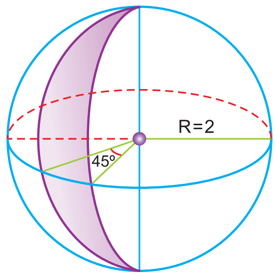
$R = 13$, $d = 12$ e $R^2 = d^2 + r^2$

Assim: $13^2 = 12^2 + r^2 \Rightarrow r = 5$

Resposta: E

Módulo 43 – Esfera e suas partes

1



I) $\dfrac{V_{cunha}}{V_{esfera}} = \dfrac{45°}{360°} \Leftrightarrow V_{cunha} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cunha} = \dfrac{4}{3} \pi \text{ cm}^3$

II) $\dfrac{A_{fuso}}{A_{esfera}} = \dfrac{45°}{360°} \Leftrightarrow A_{fuso} = \dfrac{1}{8} \cdot 4\pi \cdot 2^2 \Rightarrow$

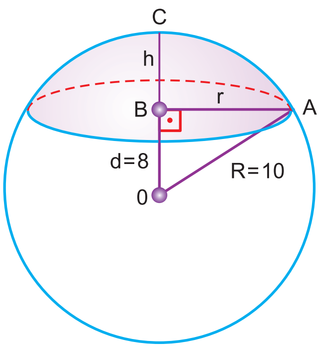
$\Rightarrow A_{fuso} = 2\pi \text{ cm}^2$

2 $V_{cunha} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot V_{esfera} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 4{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{360°}{4{,}8} \Rightarrow \alpha = 75°$

Resposta: D

3



I) $h = R - d \Leftrightarrow h = 10 - 8 \Rightarrow h = 2$ cm

II) $R^2 = r^2 + d^2 \Leftrightarrow 10^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow r = 6$ cm

III) $A_{calota} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 \Rightarrow A_{calota} = 40\pi \text{ cm}^2$

IV) $V_{segmento\ esférico} = \dfrac{\pi h}{6} \cdot [3r^2 + h^2] = \dfrac{\pi . 2}{6} \cdot [3 \cdot 6^2 + 2^2] \Rightarrow$

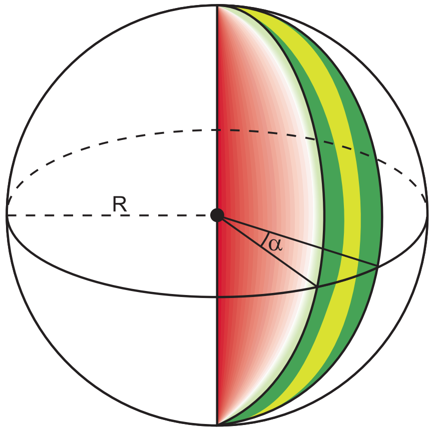
$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \dfrac{112\pi}{3} \text{ cm}^3$

4 Sendo S a área do fuso, em metros quadrados, temos:

$S = \dfrac{72°}{360°} \cdot 4\pi \cdot 5^2 = 20\pi$

Resposta: A

5



a) Como a melancia foi dividida em 12 fatias iguais, a área S_C, em centímetros quadrados, da casca de cada fatia, é:

$S_C = \dfrac{1}{12} \cdot 4\pi R^2 \Leftrightarrow S_C = \dfrac{\pi R^2}{3}$

b) Para embalar cada fatia, serão necessários dois semicírculos de raio R e um fuso esférico de área S_C. Assim, a área S, em centímetros quadrados da superfície total de cada fatia, é:

$S = S_C + 2 \cdot \dfrac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = \dfrac{\pi R^2}{3} + \pi R^2 \Leftrightarrow S = \dfrac{4\pi R^2}{3}$

6 O número "n" de bolas de sorvete que poderão ser servidas é dado por:

$n = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} \Leftrightarrow n = \dfrac{3R^2 . h}{4r^3}$, em que R e h expressam, respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro, em centímetros, e r é o raio de cada esfera de sorvete, também medido em centímetros.

Assim: $n = \dfrac{3 \cdot 10^2 \cdot 36}{4 \cdot 3^3} = 10^2 = 100$

Resposta: E

7 I) Volume, em centímetros cúbicos, do cilindro:

$V_c = 12\pi \cdot 12 \Leftrightarrow V_c = 144\pi$

II) Volume, em centímetros cúbicos, da esfera:

$V_e = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \Leftrightarrow V_e = 36\pi$

III) Fração do volume do cilindro, da água que vazará:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$$

Resposta: D

8 Sendo r o raio, em milímetros, da esfera, tem-se:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 18 \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{18 \cdot 12^2 \cdot 3^2 \cdot \pi}{4\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 18 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 3^2 \Leftrightarrow r^3 = 2^3 \cdot 3^6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow r = 18$$

Resposta: A

Módulo 44 – Esfera e suas partes

1 Sendo h a altura, em centímetros, da casquinha cônica, que será preenchida com o sorvete derretido, tem-se:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h = 36\pi \Leftrightarrow h = \frac{3 \cdot 36\pi}{\pi \cdot 3^2} \Leftrightarrow h = 12$$

Resposta: E

2 O volume de cada alvéolo, em cm^3, é igual a

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}01)^3 = 4 \cdot 10^{-6}, \text{ pois } \pi = 3.$$

O número aproximado de alvéolos da pessoa é

$$n = \frac{1618\ cm^3}{4 \cdot 10^{-6}\ cm^3} = 404{,}5 \cdot 10^6 = 4045 \cdot 10^5$$

Resposta: E

3 O balão I, de 20 cm de raio, tem volume, em cm^3, igual a

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 20^3.$$

O balão II, de 30 cm de raio, tem volume, em cm^3, igual a

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 30^3.$$

Para o balão II flutuar durante uma hora, a quantidade x de combustível necessária e suficiente é tal que

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}1\ell}{x} \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 20^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 30^3} = \frac{0{,}1\ell}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{0{,}1\ell}{x}$$

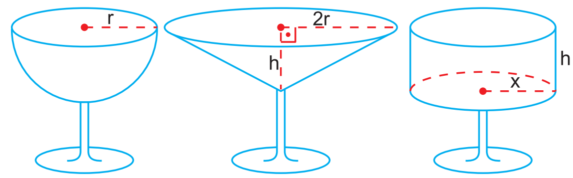
$$x = \frac{2{,}7\ell}{8}$$

Para este balão II flutuar por meia hora, a quantidade de combustível necessária e suficiente é

$$\frac{x}{2} = \frac{2{,}7\ell}{16} = 0{,}16\ell.$$

Resposta: E

4



Do enunciado, tem-se:

I) $V_{semiesfera} = V_{cone}$

Assim: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi (2r)^2 \cdot h \Leftrightarrow r = 2h$

II) $V_{semiesfera} = V_{cilindro} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi x^2 h$

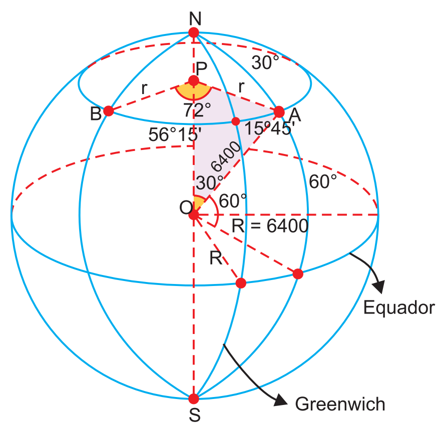
Assim: $\frac{2}{3}(2h)^3 = x^2 h \Leftrightarrow 16h^3 = 3x^2 h \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{h^2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ pois } x > 0 \text{ e } h > 0$$

Resposta: E

5



a) Seja r a medida, em quilômetros, do raio do paralelo de 60°. No triângulo retângulo POA, tem-se:

$$\text{sen } 30° = \frac{PA}{OA}$$

Assim: $\frac{1}{2} = \frac{r}{6400} \Leftrightarrow r = 3200$

b) A menor distância x entre os pontos A e B, medida em quilômetros, ao longo do paralelo de 60°, é dada por:

$$x = \frac{15°45' + 56°\ 15'}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{72°}{360°} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 \Leftrightarrow x = \frac{28\ 160}{7}$$