MATEMÁTICA

FRENTE 1

Esta foto mostra as quatro seções cônicas: círculo, elipse, parábola e hipérbole

Geometria Analítica – Módulos

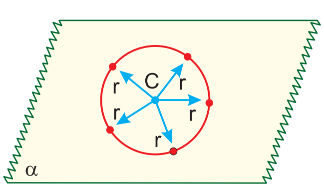
Módulos 45 e 46 – Equação da circunferência

Palavras-chave:
- Lugar geométrico
- Distância entre dois pontos

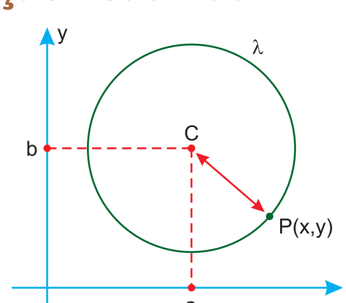
1. Definição

Seja **C** um ponto de um plano α e **r** um número real estritamente positivo.

Circunferência de centro C e raio r é o lugar geométrico dos pontos de α que distam r de C.



2. Equação reduzida



Se λ for uma circunferência de centro **C(a; b)** e raio **r** e P(x; y) um ponto qualquer de λ então:

$$P \in \lambda \Leftrightarrow d_{PC} = r \Leftrightarrow d_{PC}^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Assim sendo, **a equação reduzida da circunferência de centro C(a; b) e raio r é**

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Se o centro da circunferência for a origem do sistema cartesiano, portanto se C(0; 0), então a equação reduzida será $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$.

3. Equação geral

A equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ é equivalente a $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

Substituindo os coeficientes $-2a$, $-2b$ e $a^2 + b^2 - r^2$ por **m, n** e **p**, respectivamente, obtemos uma equação do tipo

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

chamada **equação geral da circunferência**.

Exemplo

A equação reduzida da circunferência de centro C(2; 1) e raio 3 é $\mathbf{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9}$ e a equação geral é $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9$, ou seja, $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0}$.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M401**

Exercícios Resolvidos – Módulos 45 e 46

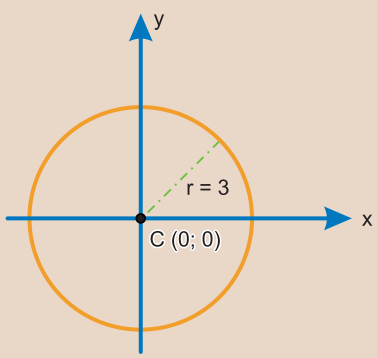
1 Determine a equação da circunferência cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano e cujo raio mede 3 unidades.

Resolução

A equação da circunferência de centro C(a; b) e raio r é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Como C(0; 0) e r = 3, teremos:

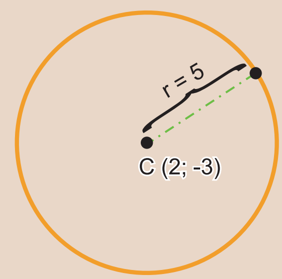


$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

Resposta: $\mathbf{x^2 + y^2 = 9}$

2 Determinar a equação da circunferência de centro C(2; – 3) e raio r = 5 unidades.

Resolução



A equação da circunferência de centro C(a; b) e raio r é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Como C(2; – 3) e r = 5, teremos:

$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = (5)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Resposta: $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0}$

Exercícios Propostos – Módulo 45

1 Determinar a equação da circunferência de centro C (0,0) e raio r = 7.

RESOLUÇÃO:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 7^2$

$x^2 + y^2 = 49$

2 Determinar a equação da circunferência de centro C(– 4;6) e raio r = 8.

RESOLUÇÃO:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

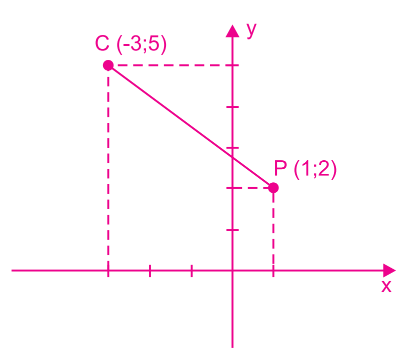
$(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 64$ **(equação reduzida)**

ou $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 - 64 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$ **(equação geral da circunferência)**

3 Obter a equação da circunferência de centro C(– 3;5) e que passa pelo ponto P(1;2).

RESOLUÇÃO:



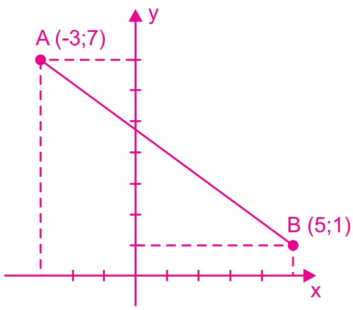
$\overline{CP}$ **é o raio da circunferência.**

$d_{CP} = \sqrt{(1 + 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 = r$

$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

4 Determinar a equação da circunferência, sabendo-se que um diâmetro é determinado pelos pontos A(–3; 7) e B(5;1).

RESOLUÇÃO:



1) $r = \dfrac{AB}{2}$

$r = \dfrac{\sqrt{(5+3)^2 + (1-7)^2}}{2}$

$r = \dfrac{\sqrt{64+36}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{100}}{2} \Rightarrow r = 5$

2) $C(x_C; y_C)$

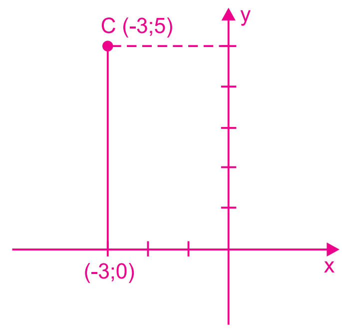
$x_C = \dfrac{-3+5}{2} \Rightarrow x_C = 1$

$y_C = \dfrac{7+1}{2} \Rightarrow y_C = 4$

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$

5 Obter a equação geral da circunferência de centro C(–3;5) e tangente ao eixo das abscissas.

RESOLUÇÃO:



O raio r é a distância de C ao eixo x, logo, r = 5.

$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$

Exercícios Propostos – Módulo 46

1 Determinar as equações das circunferências de centro no eixo **y**, tangentes ao eixo das abscissas e raio igual a 3.

RESOLUÇÃO:

$C_1(0; 3)$ e $C_2(0; -3)$

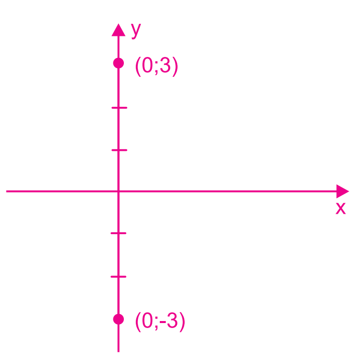
$r = 3$

$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$x^2 + (y-3)^2 = 9$

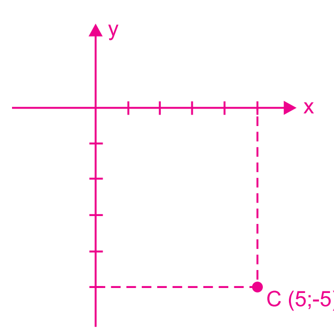
ou

$x^2 + (y+3)^2 = 9$



2 Determinar a equação da circunferência, tangente aos eixos cartesianos, de centro no 4º quadrante e raio r = 5.

RESOLUÇÃO:

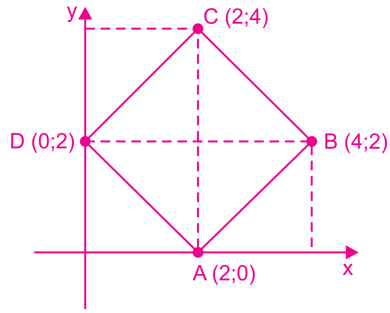


$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 5^2$

$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

3 Determinar a equação da circunferência circunscrita ao quadrado ABCD em que A(2;0); B(4;2); C(2;4) e D(0;2).

RESOLUÇÃO:



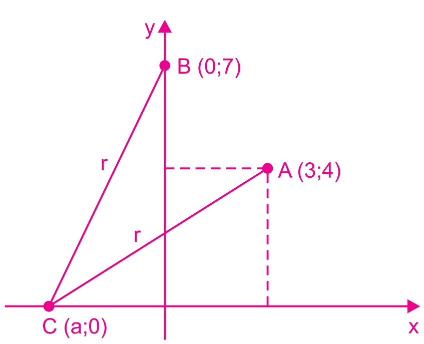
Centro da circunferência: (2, 2)

Raio: 2

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

4 Obter a equação da circunferência que passa pelos pontos A(3;4) e B(0;7) e que tem centro no eixo das abscissas.

RESOLUÇÃO:



I) $r = d_{CA} = d_{BC}$

$\sqrt{(a-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-7)^2}$

$a^2 - 6a + 9 + 16 = a^2 + 49$

$-6a = 24 \Leftrightarrow a = -4$

Centro da circunferência: C(– 4; 0)

II) $r = \sqrt{(-4-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$

Logo, a equação da circunferência é:

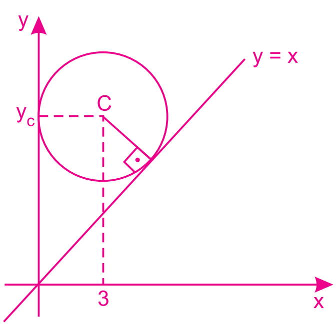
$(x + 4)^2 + y^2 = 65$

5 **(FGV – MODELO ENEM)** – Uma circunferência de raio 3, situada no 1º quadrante do plano cartesiano, é tangente ao eixo y e à reta de equação y = x. Então, a ordenada do centro dessa circunferência vale:

a) $2\sqrt{3} + 1$ b) $2\sqrt{3} + 3$ c) $3\sqrt{2} + 2$

d) $3\sqrt{2} + 3$ e) $3\sqrt{2} - 1$

RESOLUÇÃO:



A distância do ponto C (3; y_c) à reta y = x, ou seja, x – y = 0 é 3. Assim:

$$\frac{|3 - y_c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |3 - y_c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow y_c = 3\sqrt{2} + 3,$$

pois C pertence ao 1º quadrante.

Resposta: D

Módulo 47

Determinação do centro e do raio

Palavras-chave:
• Centro
• Raio

A equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é equivalente a $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Esta última, por sua vez, será equivalente a $\mathbf{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0}$ se, e somente se:

$$\begin{cases} -2a = m \\ -2b = n \\ a^2 + b^2 - r^2 = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{m}{2} \\ b = -\dfrac{n}{2} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}}{2} \end{cases}$$

Conclusões

a) $\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$ é a **equação reduzida** de uma circunferência de centro **C(a; b)** e raio **r**.

b) $\mathbf{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0}$ é a **equação geral** de uma circunferência de centro $\mathbf{C\left(-\dfrac{m}{2}; -\dfrac{n}{2}\right)}$ e raio $\mathbf{r = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}}{2}}$.

c) A condição necessária e suficiente para que $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ seja a equação de uma circunferência é $\mathbf{m^2 + n^2 - 4p > 0}$

Exemplos

1. A circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$ tem centro C(5; – 3) e raio 4.

2. Determinar o centro e o raio de uma circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$

Resolução

a) O centro da circunferência é C(– 2; 5) pois

$$a = -\frac{m}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$b = -\frac{n}{2} = -\frac{-10}{2} = 5$$

b) O raio é 6, pois

$$r = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{4^2 + (-10)^2 - 4 \,.\, (-7)}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6$$

Pode-se também calcular o raio pela fórmula $r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$.

Assim: $r = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 - (-7)} = \sqrt{36} = 6$

Exercícios Resolvidos

1 Determinar as coordenadas do centro e o raio de cada uma das circunferências abaixo.

a) $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 64$

b) $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 1 = 0$

Resolução

a) Comparando a equação dada com a equação da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, de centro C(a; b) e raio r, de imediato conclui-se que o centro é C(5; 7) e o raio, r = 8.

b) A partir da equação geral da circunferência, de centro C(a; b) e raio r, $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, temos:

Centro:

$$\left.\begin{array}{l} a = -\dfrac{m}{2} \Rightarrow a = -\dfrac{-12}{2} \Leftrightarrow a = 6 \\ b = -\dfrac{n}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{16}{2} \Leftrightarrow b = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow C(6; -8)$$

Raio:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} \Rightarrow r = \sqrt{6^2 + (-8)^2 - (-1)} = \sqrt{101}$$

Resposta: a) C(5; 7) e r = 8

b) C(6; – 8) e $\mathbf{r = \sqrt{101}}$

2 Dada a circunferência:

$$x^2 + y^2 - 3x + 5x - 14 = 0,$$

determinar o centro e o raio.

Resolução

A partir da equação $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$, temos:

a) centro

$$\left.\begin{array}{l} a = -\dfrac{-3}{2} \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow b = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}; \frac{-5}{2}\right)$$

b) raio:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - (-14)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{90}{4}} \Leftrightarrow r = \frac{3 \,.\, \sqrt{10}}{2}$$

Resposta: $\mathbf{C\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{-5}{2}\right)}$ **e** $\mathbf{r = \dfrac{3 \,.\, \sqrt{10}}{2}}$

Exercícios Propostos

Determinar o centro e o raio das circunferências nas questões de 1 a 5.

1 $x^2 + y^2 = 16$

RESOLUÇÃO:
C(0; 0)
$r^2 = 16 \rightarrow r = 4$

2 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

RESOLUÇÃO:
C(3; 2)
$r^2 = 25 \rightarrow r = 5$

3 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

RESOLUÇÃO:
C(– 1; 3)
$r^2 = 5 \rightarrow r = \sqrt{5}$

4 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$

RESOLUÇÃO:
$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 11$
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 11 + 4 + 9$
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 24$
C(2; 3)
$r = 2\sqrt{6}$

5 $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

RESOLUÇÃO:
$x^2 - 4x + y^2 + 8y = 5$
$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 5 + 4 + 16$
$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$
C(2; – 4)
r = 5

6 **(FGV-SP – MODELO ENEM)** – Dada a equação $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, , se p é o maior valor possível de x, e q é o maior valor possível de y, então, 3p + 4q é igual a

a) 73. b) 76. c) 85. d) 89. e) 92.

RESOLUÇÃO:
Da equação da circunferência $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 6 = 0$, temos como centro o ponto de coordenadas (7; 3) e raio igual a 8.
Assim, sendo q o maior valor de y e p, o maior valor de x, temos:
q = 3 + 8 = 11 e p = 7 + 8 = 15
Portanto, 3p + 4q = 3 . 15 + 4 . 11 = 89
Resposta: D

Módulo 48

Posição relativa de um ponto e uma circunferência

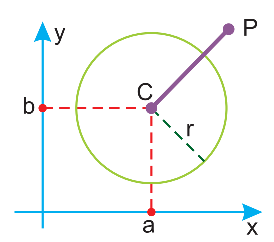
Palavra-chave:

- Distância entre dois pontos

Seja λ uma circunferência de centro C(a; b) e raio **r** e seja P(x; y) um ponto qualquer do plano cartesiano. Observe que:

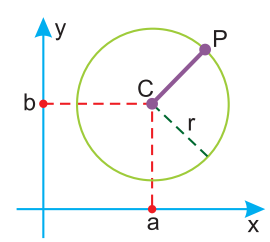
a) Se **P** for **exterior** à circunferência, então $d_{PC} > r$ e, portanto,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$



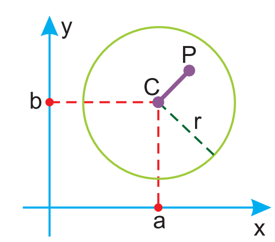
b) Se **P** for **um ponto da circunferência λ**, então $d_{PC} = r$ e, portanto,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

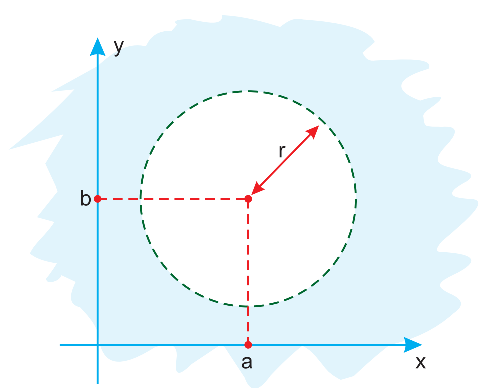


c) Se **P** for **interior** à circunferência, então $d_{PC} < r$ e, portanto,

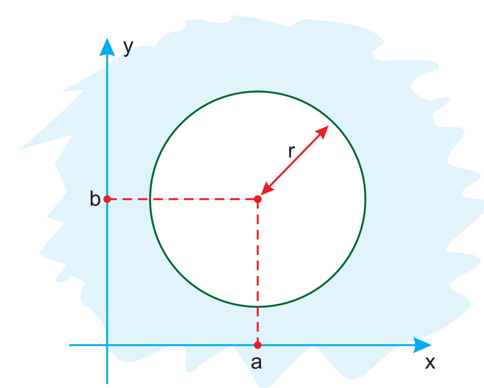
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$



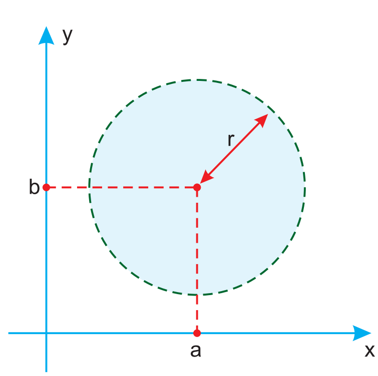
Ficam, então, caracterizadas quatro regiões do plano cartesiano. São elas:



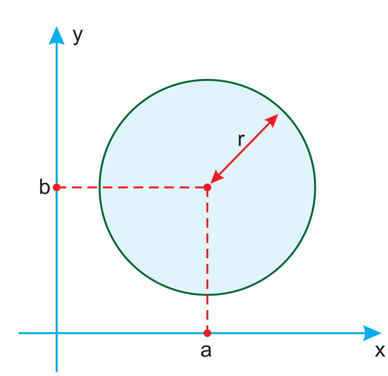
$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$



$(x - a)^2 + (y - b)^2 \geq r^2$



$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$



$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$

Exercícios Resolvidos

1 **(UNIRIO – MODELO ENEM)** – Considerando uma circunferência de centro (2,1) que passa pelo ponto (2, – 2), assinale a opção correta:

a) A equação da circunferência é $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$.

b) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$.

c) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 < 0$.

d) O exterior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 2 > 0$.

e) O ponto (5, – 1) pertence à circunferência.

Resolução

centro: C(2, 1)

raio: $r = \sqrt{(2-2)^2 + (1+2)^2} = 3$

A equação da circunferência é:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

Os pontos internos da circunferência são representados por:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 < 0$

Resposta: C

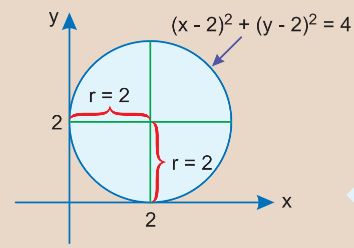
2 **(FATEC – MODELO ENEM)** – Considere que R é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$ e $x - y \leqslant 0$. A área de R, em unidades de superfície, é:

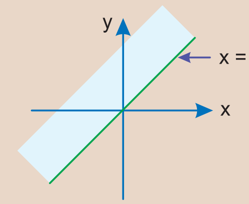
a) π b) 2π c) π^2 d) 4π e) $4\pi^2$

Resolução

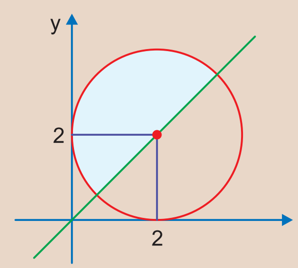
Os pontos do plano que satisfazem as sentenças estão representados nas figuras abaixo:

I) $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$ II) $x - y \leqslant 0$





As duas condições simultâneas representam um semicírculo, cuja área é: $A = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$

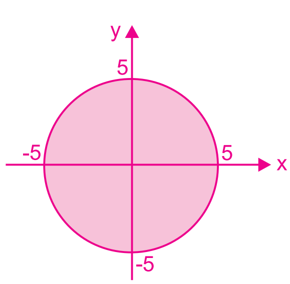


Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Representar graficamente o conjunto dos pontos do plano tais que $x^2 + y^2 \leq 25$.

RESOLUÇÃO:



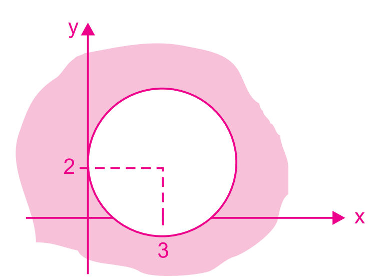
$\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$

C(0; 0)

r = 5

2 Representar graficamente o conjunto dos pontos do plano tais que $(x-3)^2 + (y-2)^2 \geq 9$.

RESOLUÇÃO:



$\mathbf{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9}$

C(3; 2)

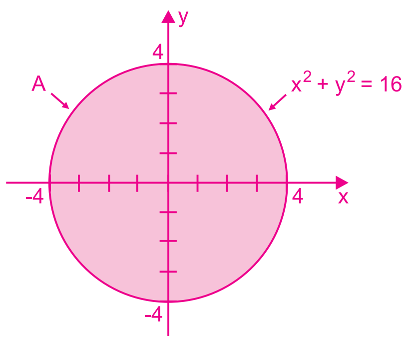
r = 3

3 **(UNESP)** – Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 16$ e $x^2 + (y - 1)^2 \geq 9\}$ uma região do plano. A área de **S** é:

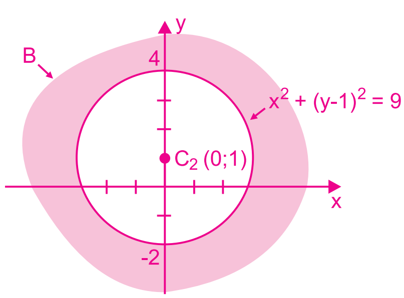
a) 5. b) 7. c) 5π. d) 7π. e) $7\pi^2$.

RESOLUÇÃO:

I) $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 16\}$, em que $x^2 + y^2 = 16$ é a equação de uma circunferência de centro $C_1(0; 0)$ e raio $r_1 = 4$.

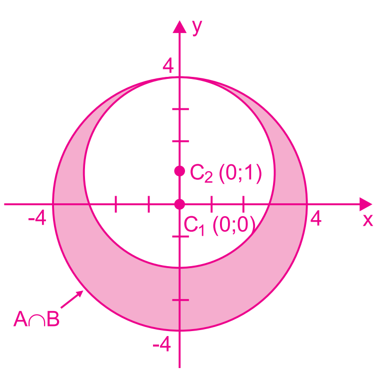


II) $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + (y - 1)^2 \geq 9\}$, em que $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação de uma circunferência de centro $C_2(0; 1)$ e raio $r_2 = 3$.



III) Dos itens (I) e (II) temos: $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 16$ e $x^2 + (y - 1) \geq 9\} = A \cap B$ como sendo a região entre as 2 circunferências. Portanto:

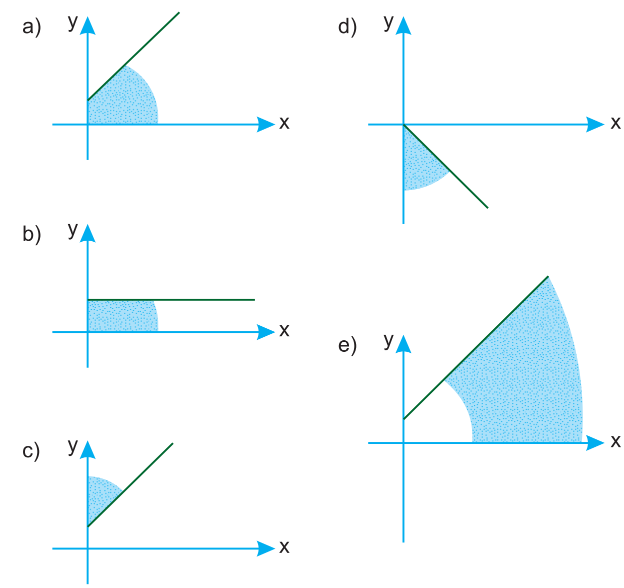
Área $= \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 3^2 = 7\pi$



Resposta: D

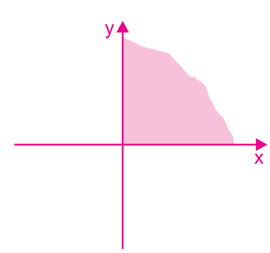
4 **(FUVEST – MODELO ENEM)** – Das regiões hachuradas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x; y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ x - y + 1 \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq 9, \end{cases} \quad \text{é:}$$

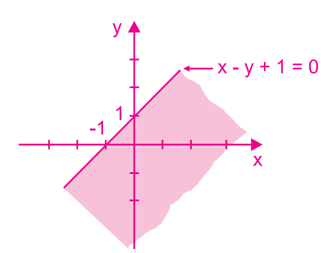


RESOLUÇÃO:

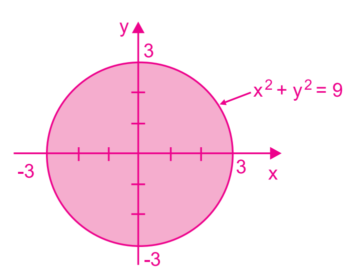
I) $x \geq 0$ e $y \geq 0$



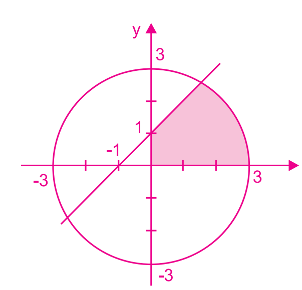
II) $x - y + 1 \geq 0$



III) $x^2 + y^2 \leq 9$



IV) A região dos pontos do plano que satisfazem ao conjunto das desigualdades é:



Resposta: A

Módulo 49

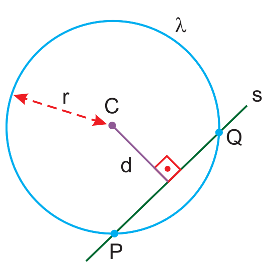
Posição relativa de reta e circunferência

Palavras-chave:
- Distância de ponto a reta
- Secante
- Tangente
- Exterior

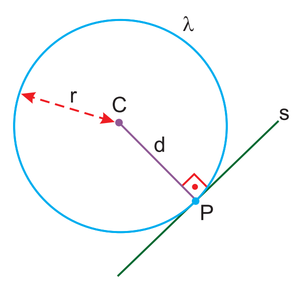
1. Reta e circunferência

A reta **s** de equação $Ax + By + C = 0$ e a circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ são:

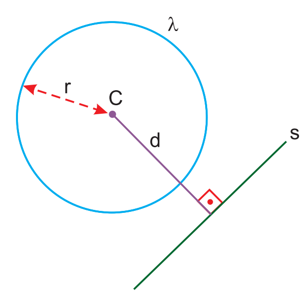
a) **Secantes**, se $d < r$ ou se o sistema $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$ tiver **duas soluções**, às quais correspondem os pontos **P** e **Q**.



b) **Tangentes**, se $d = r$ ou se o sistema $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$ tiver **uma única solução**, à qual corresponde o ponto **P**.



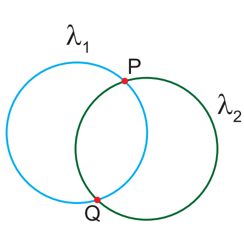
c) **Exteriores**, se $d > r$ ou se o sistema $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$ **não tiver solução**, o que significa que não existe ponto de intersecção.



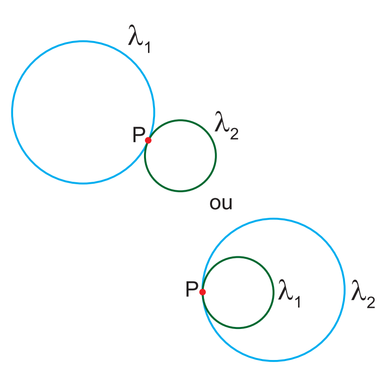
2. Circunferência e circunferência

As circunferências λ_1, de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, e λ_2, de equação $(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2$, são:

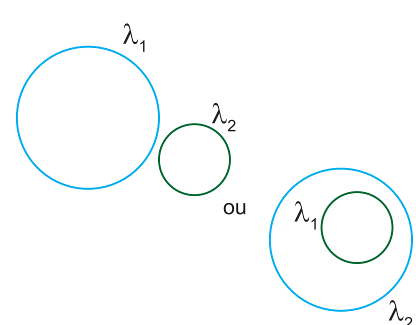
a) **Secantes**, se o sistema $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ (x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \end{cases}$ tiver **duas soluções**, às quais correspondem os pontos **P** e **Q**.



b) **Tangentes**, se o sistema $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ (x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \end{cases}$ tiver **uma única solução**, à qual corresponde o ponto **P**.



c) **Disjuntas**, se o sistema $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ (x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \end{cases}$ **não tiver solução**, o que significa que não existe ponto de intersecção.



Exercícios Resolvidos

1 Determinar a posição relativa entre a reta (**s**) e a circunferência (λ), nos casos:

1) **s**: $x + y = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$

Resolução

$$\begin{cases} x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x & (I) \\ x^2 + y^2 = 1 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$x^2 + (-x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8.$

Como $\Delta > 0$, a reta (**s**) é **secante** à circunferência (λ).

2) **s**: $x - y - \sqrt{2} = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$

Resolução

$$\begin{cases} x - y - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = x - \sqrt{2} & (I) \\ x^2 + y^2 = 1 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$

Como $\Delta = 0$, a reta (**s**) é **tangente** à circunferência (λ).

3) **s**: $x - y - 9 = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$

Resolução

$$\begin{cases} x - y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = x - 9 & (I) \\ x^2 + y^2 = 1 & (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), tem-se:

$x^2 + (x - 9)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 80 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 40 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = -79.$

Como $\Delta < 0$, a reta (**s**) é **exterior** à circunferência (λ).

2 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Com relação à reta que passa pela origem e é tangente à curva $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, considere as afirmações:

I. é paralela à reta $3x - 4y = 25$.

II. é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

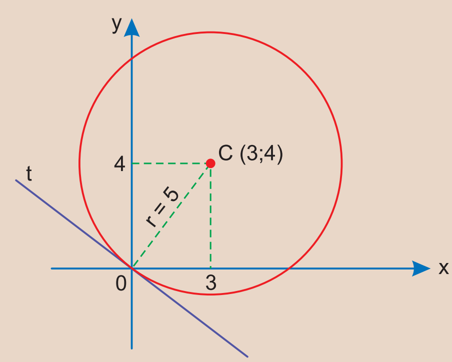
III. é perpendicular à reta $4x - 3y = 0$.

Dessa forma,

a) somente I está correta.
b) somente II está correta.
c) somente III está correta.
d) somente I e III estão corretas.
e) I, II e III estão incorretas.

Resolução

A circunferência $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ tem centro C(3; 4), raio r = 5 e passa pela origem.



Sendo $m_{OC} = \dfrac{4 - 0}{3 - 0} = \dfrac{4}{3}$, temos $m_t = \dfrac{-3}{4}$ e a reta tangente à circunferência, passando pela origem, tem equação $y = \dfrac{-3}{4} \cdot x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 4y = 0$

Portanto, as afirmativas (I) e (II) são falsas. A afirmativa (III) é verdadeira, pois $4x - 3y = 0$ e $3x + 4y = 0$ são perpendiculares, visto que o coeficiente angular de uma das retas é o oposto do inverso da outra reta.

Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Determinar a posição da reta $x - y - 2 = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 = 2$.

RESOLUÇÃO:

C(0; 0) e r = $\sqrt{2}$

Vamos calcular a distância de C à reta dada:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$$

Logo, a reta dada é tangente.

2 Obter o comprimento da corda que a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ determina no eixo das abscissas.

RESOLUÇÃO:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

Fazendo y = 0 (ponto no eixo das abscissas), temos:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ **ou** $x = 3$

Logo, a circunferência determina no eixo das abscissas uma corda com extremidades nos pontos (– 1; 0) e (3; 0) e, portanto, com comprimento igual a 4 unidades.

3 Calcular o comprimento da corda determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

RESOLUÇÃO:

I) Vamos determinar os pontos de intersecção entre a reta e a circunferência, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ (x-1)^2 + (x+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow P(1;\ 1) \text{ e } Q(-1;\ -1)$$

Logo, a circunferência determina na reta y = x uma corda com extremidades nos pontos P(1; 1) e Q(– 1; – 1).

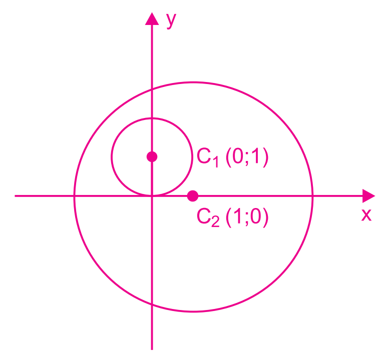
II) $d_{PQ} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

4 Determinar a posição relativa das circunferências λ_1 de equação $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e λ_2 de equação $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$.

RESOLUÇÃO:

λ_1: $x^2 + (y - 1)^2 = 1 \rightarrow C_1(0;\ 1)$ e $r_1 = 1$

λ_2: $(x - 1)^2 + y^2 = 3^2 \rightarrow C_2(1;\ 0)$ e $r_2 = 3$



λ_1 está no interior de λ_2

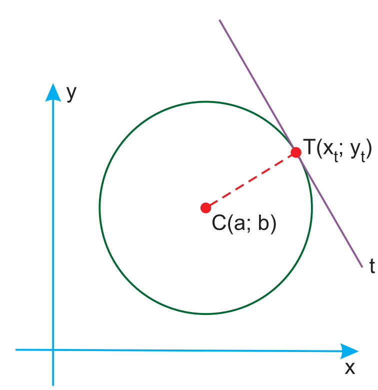
Módulo 50

Tangentes a uma circunferência

Palavras-chave:
- Coeficiente angular
- Distância de ponto a reta

1. Tangente por um ponto da circunferência

Se a reta **t** é **tangente** à circunferência de centro C(a; b) em T(x_t; y_t) então:



a) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CT}$ é

$$m_{CT} = \frac{y_t - b}{x_t - a}$$

b) O coeficiente angular da reta $t \perp \overleftrightarrow{CT}$ é

$$m_t = -\frac{1}{m_{CT}}$$

c) A equação da reta **t** é

$$y - y_t = m_t \cdot (x - x_t)$$

Se a reta **t** for vertical a equação será $x = x_t$

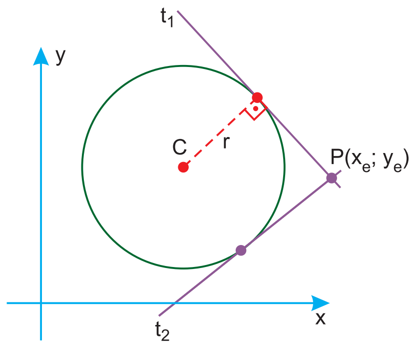
2. Tangente por um ponto externo à circunferência

A equação da reta **t** **tangente** à circunferência, de centro C(**a**; **b**) e raio **r**, e que contém o ponto P(x_e, y_e) é

$$y - y_e = m \cdot (x - x_e)$$

O coeficiente angular **m** é obtido impondo que a distância do centro **C** à reta **t** seja igual a **r**.

Sempre existem duas retas tangentes. Se uma delas for vertical, sua equação será $\boxed{x = x_e}$.



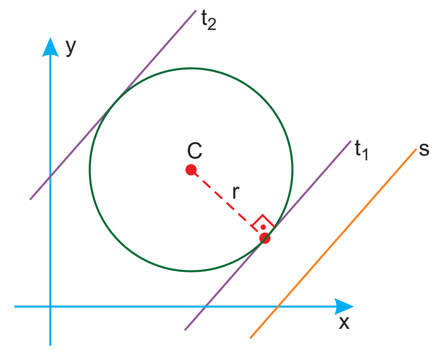
3. Tangente paralela a uma reta dada

Seja a circunferência de centro C(**a**; **b**) e raio **r** e a reta **s** de equação Ax + By + C = 0.

A equação da reta **t**, paralela a **s** e tangente à circunferência, é

$$\boxed{Ax + By + k = 0}$$

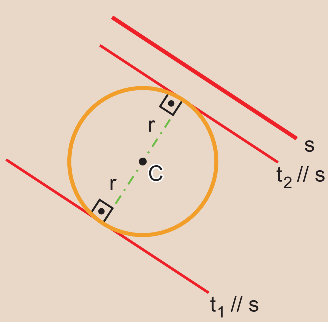
O número **k** é obtido impondo que a distância do centro **C** à reta **t** seja igual a **r**. Sempre existem duas retas tangentes.



Exercícios Resolvidos

1 Dada a reta (s) $3x + 4y - 1 = 0$ e a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinar as equações das retas tangentes a (λ) e paralelas a **s**.

Resolução



A equação do feixe de retas paralelas à reta **s** é: $3x + 4y + k = 0$ (I)

As retas procuradas pertencem a esse feixe e são tais que a distância do centro a elas é igual ao raio.

Como $x^2 + y^2 = 1$ tem centro C(0; 0) e raio r = 1

resulta: $1 = \dfrac{|3 \,.\, 0 + 4 \,.\, 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow |k| = 5 \Leftrightarrow k = \pm 5$

Retornando em (I), obtemos as retas tangentes:

se k = 5, resulta: $3x + 4y + 5 = 0$ (t_1)

se k = – 5, resulta: $3x + 4y - 5 = 0$ (t_2).

Resposta: $\mathbf{t_1: 3x + 4y + 5 = 0}$

$\mathbf{t_2: 3x + 4y - 5 = 0}$

2 Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ traçadas pelo ponto P(– 2; 7).

Resolução

A equação da família de retas que passam pelo ponto P(– 2; 7) é:

$y - 7 = m \,.\, (x + 2) \Leftrightarrow mx - y + 7 + 2m = 0$ (I),

em que **m** é um parâmetro a ser determinado.

A circunferência tem centro C(– 1; 4) e raio $r = \sqrt{5}$.

Para que a reta que passa por **P** seja tangente à circunferência, a sua distância ao centro deve ser igual ao raio. Portanto:

$$\frac{|m \,.\, (-1) - 4 + 7 + 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

Elevando ao quadrado e simplificando, a equação resulta $2m^2 - 3m - 2 = 0$, que, resolvida, apresenta como solução: m = 2 ou m = – 1/2.

Retornando à equação (I), com os valores obtidos de **m**, temos as equações das retas tangentes: $2x - y + 11 = 0$ ou $x + 2y - 12 = 0$

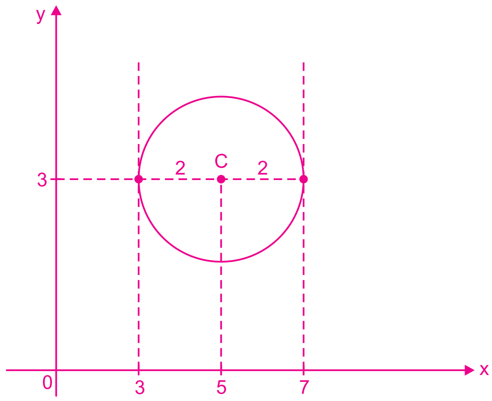
Resposta: 2x – y + 11 = 0 ou x + 2y – 12 = 0

Exercícios Propostos

1 **(FGV-adaptado)** – No plano cartesiano, a reta de equação x = k tangencia a circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Os valores de k são:

a) – 2 ou 0 b) – 5 ou 5 c) 9 ou 1
d) 7 ou 3 e) 8 ou 4

RESOLUÇÃO:
A circunferência $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ tem centro C(5;3) e raio 2. A reta x = k é vertical e tangente à circunferência, portanto com equação x = 7 ou x = 3.



Então: k = 7 ou k = 3
Resposta: D

2 Escrever a equação da circunferência de centro C(2;5) e que é tangente à reta x + y – 3 = 0.

RESOLUÇÃO:

$s: x + y - 3 = 0$

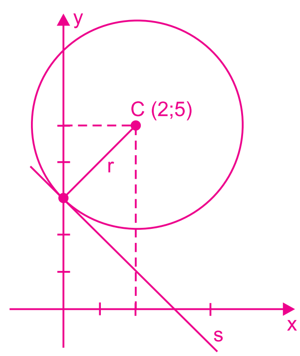
$r = d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

$= \dfrac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{|4|}{\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (2\sqrt{2})^2$

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 8$



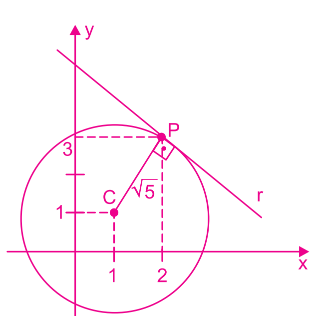
3 O ponto P(2;3) pertence à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$. Determinar a equação da reta tangente à circunferência e que passa pelo ponto **P**.

RESOLUÇÃO:

$m_{CP} = \dfrac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \rightarrow m_r = \dfrac{-1}{2}$

$r: y - 3 = \dfrac{-1}{2}(x - 2)$

$x + 2y - 8 = 0$



4 Dada a reta (s) 3x + 4y – 7 = 0 e a circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$, determinar as equações das retas tangentes à circunferência e paralelas à reta **s**.

RESOLUÇÃO:

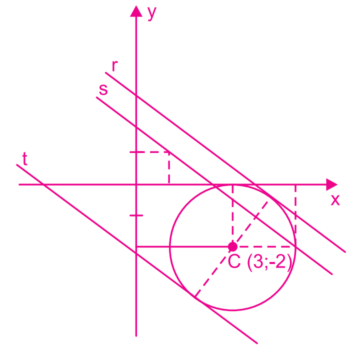
$s: 3x + 4y - 7 = 0$

$r: 3x + 4y + c = 0$

$t: 3x + 4y + c' = 0$

E a distância de r e de t a C é igual a 2 (raio da circunferência).

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



$2 = \dfrac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|9 - 8 + k|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|1 + k|}{5}$

$|1 + k| = 10$

$k = 9$ **ou** $k = -11$

Logo, as retas são: $3x + 4y + 9 = 0$ **ou** $3x + 4y - 11 = 0$

5 Determinar as equações das retas que passam pelo ponto P(– 3;2) e são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

RESOLUÇÃO:

$y - 2 = m(x + 3)$

$mx - y + 3m + 2 = 0$

$d_{CS} = \dfrac{|m \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 3m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$

$|3m + 2| = 2\sqrt{m^2 + 1}$

$9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$

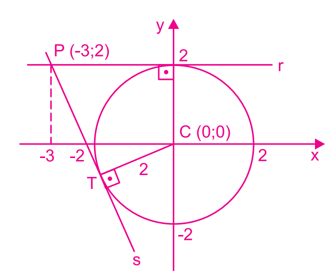
$5m^2 + 12m = 0$

$m = 0$ **ou** $m = \dfrac{-12}{5}$

$r: y - 2 = 0$

$s: \dfrac{-12}{5}x - y + 3 \cdot \left(\dfrac{-12}{5}\right) + 2 = 0$

$12x + 5y + 26 = 0$



Módulos 51 e 52
Elipse

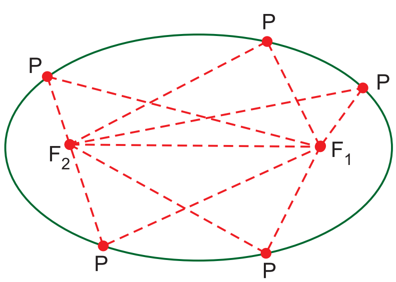
Palavras-chave:
• Eixo maior
• Eixo menor • Distância focal

1. Definição

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos tais que $F_1F_2 = 2f$ e o número real $2a$ tal que $2a > 2f$.

Elipse é o lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a 2a. Simbolicamente:

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$



2. Elementos da elipse

a) O ponto **O**, médio de $\overline{F_1F_2}$, é o **centro** da elipse.

b) Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ são chamados **focos**.

c) A distância entre os focos é a **distância focal**. Assim: $F_1F_2 = 2f$

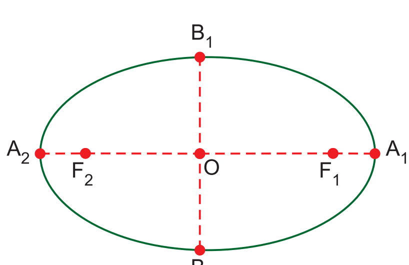
d) Os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ são chamados **vértices** da elipse.

e) O segmento $\overline{A_1A_2}$ é o **eixo maior** da elipse e sua medida é **2a**, pois: $A_1 \in \text{elipse} \Leftrightarrow A_1F_1 + A_1F_2 = 2a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_2F_2 + A_1F_2 = 2a \Leftrightarrow$ $A_1A_2 = 2a$

f) Os pontos $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ são chamados **polos** da elipse.

g) O segmento $\overline{B_1B_2}$, cuja medida representaremos por **2b**, é o **eixo menor** da elipse. Assim: $B_1B_2 = 2b$

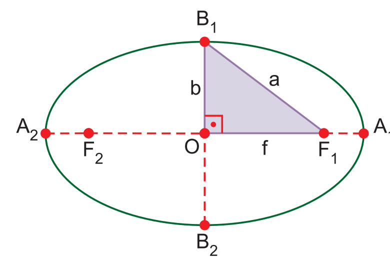


3. Relação entre a, b e f

Sendo B_1 ponto da elipse e notando, por simetria, que $B_1F_1 = B_1F_2$ temos: $B_1 \in \text{elipse} \Leftrightarrow B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B_1F_1 + B_1F_1 = 2a \Leftrightarrow 2B_1F_1 = 2a \Leftrightarrow B_1F_1 = a$

Utilizando o triângulo retângulo OB_1F_1 concluímos, então, que:

$$a^2 = b^2 + f^2$$



4. Equação da elipse

a) Com centro na origem e eixo maior contido no eixo das abscissas.

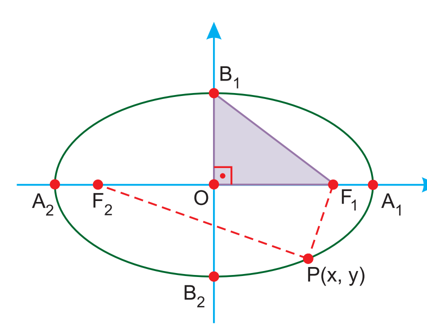
Se a origem do sistema cartesiano for o centro O da elipse e o eixo maior $\overline{A_1A_2}$ estiver contido no eixo das abscissas, então:

$$\begin{cases} F_1(f; 0) \ ; \ F_2(-f; 0) \\ A_1(a; 0) \ ; \ A_2(-a; 0) \\ B_1(0; b) \ ; \ B_2(0; -b) \end{cases}$$

Neste caso, sendo P(x; y) um ponto genérico da elipse, temos: $PF_1 + PF_2 = 2a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+f)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Desta igualdade, após simplificações convenientes, resulta



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

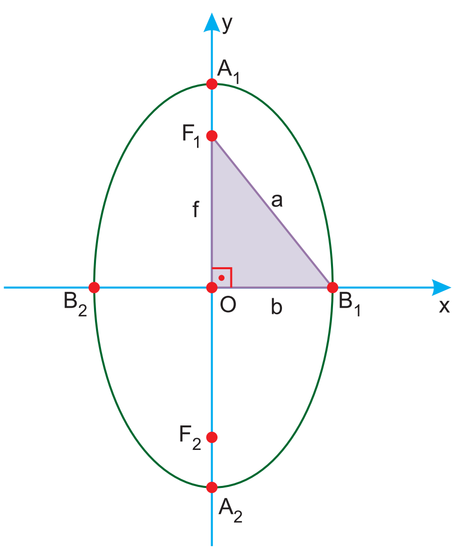
b) Com centro na origem e eixo maior contido no eixo das ordenadas.

Se a origem do sistema cartesiano for o centro O da elipse e o eixo maior $\overline{A_1A_2}$ estiver contido no eixo das ordenadas, então:

$$\begin{cases} F_1(0; f) & ; \; F_2(0; -f) \\ A_1(0; a) & ; \; A_2(0; -a) \\ B_1(b; 0) & ; \; B_2(-b; 0) \end{cases}$$

Neste caso, a equação da elipse será:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$



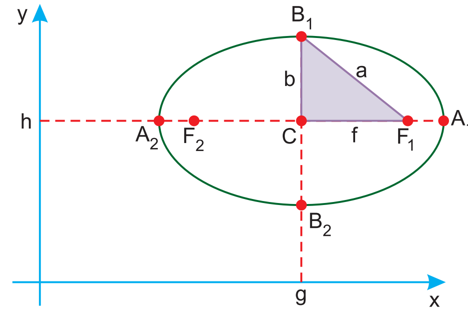
c) Com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.

Se a elipse tiver o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas e centro no ponto **C(g; h)**, então:

$$\begin{cases} F_1(g + f; h) & ; \; F_2(g - f; h) \\ A_1(g + a; h) & ; \; A_2(g - a; h) \\ B_1(g; h + b) & ; \; B_2(g; h - b) \end{cases}$$

Neste caso, a equação será:

$$\frac{(x - g)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$



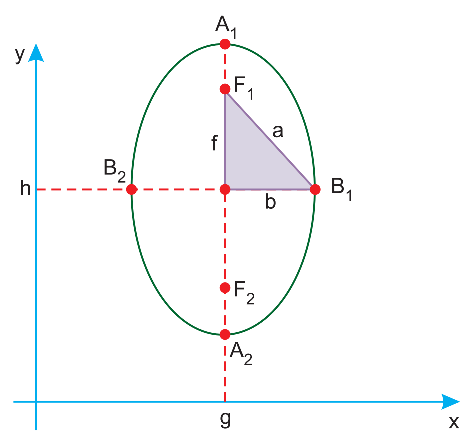
d) Com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

Se a elipse tiver eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas e centro no ponto **C(g; h)**, então:

$$\begin{cases} F_1(g; h + f) & ; \; F_2(g; h - f) \\ A_1(g; h + a) & ; \; A_2(g; h - a) \\ B_1(g + b; h) & ; \; B_2(g - b; h) \end{cases}$$

Neste caso, a equação será:

$$\frac{(y - h)^2}{a^2} + \frac{(x - g)^2}{b^2} = 1$$



5. Excentricidade da elipse

A **excentricidade** da elipse, representada por **e**, é a razão entre **f** e **a**. Sendo, na elipse, $0 < f < a$, resulta $0 < e < 1$.

Simbolicamente:

$$e = \frac{f}{a} \quad \text{e} \quad 0 < e < 1$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** **(www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M402**

Exercícios Resolvidos – Módulos 51 e 52

1 Determinar a equação da elipse de centro na origem, com eixo maior horizontal medindo 10 unidades e eixo menor medindo 8 unidades:

Resolução

Temos: Centro (0; 0)

eixo maior: $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

eixo menor: $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$

Se o eixo maior é horizontal, então a equação da elipse é do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substituindo, pelos valores, resulta:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Resposta: $\mathbf{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

2 Determinar a equação da elipse cujos focos estão no eixo das ordenadas e são simétricos em relação à origem, sabendo que seu eixo maior mede 10 unidades e que a distância entre seus focos é de 8 unidades.

Resolução

Temos: Centro (0; 0)

eixo maior: $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

distância focal: $2f = 8 \Leftrightarrow f = 4$

Da relação fundamental da elipse $a^2 = b^2 + f^2$, temos:

$5^2 = b^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 - 16 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = 3$

Se o eixo maior é vertical com centro na origem, a equação da elipse é do tipo:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

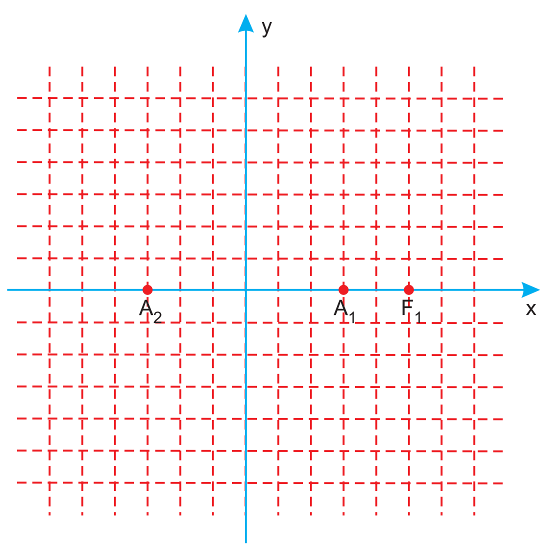
Substituindo, pelos valores, resulta:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Resposta: $\mathbf{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$

Exercícios Propostos – Módulo 51

1 Os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, representados no sistema cartesiano, são os vértices de uma elipse e $\mathbf{F_1}$ é um de seus focos. Pede-se:



a) as coordenadas dos vértices
b) a medida do eixo maior (2a)
c) as coordenadas dos focos
d) a distância focal (2f)
e) a medida do eixo menor (2b)
f) as coordenadas dos polos
g) desenhar a elipse
h) a equação da elipse
i) a excentricidade da elipse

RESOLUÇÃO:

a) $A_1(5;0)$ e $A_2(-5;0)$ **b)** $2a = 10$

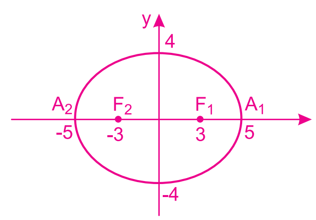
c) $F_1(3;0)$ e $F_2(-3;0)$ **d)** $2f = 6$

e) $a^2 = b^2 + f^2$

$5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$

f) $B_1(0;4)$ e $B_2(0;-4)$

g)



h) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

i) $e = \frac{3}{5} = 0,6$

2 O eixo maior de uma elipse mede 20 e a excentricidade é 0,8. Obter a medida do eixo menor.

RESOLUÇÃO:

I) $2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$

II) $e = \frac{f}{a}$

$0,8 = \frac{f}{10} \Rightarrow f = 8$

III) $a^2 = b^2 + f^2$

$10^2 = b^2 + 8^2 \Rightarrow b = 6$

Logo, $2b = 12$

3 Determinar a equação da elipse cujos vértices são (13; 0) e (– 13; 0) e cuja distância focal é 10.

RESOLUÇÃO:

I) $a = 13$ e $f = 5$

II) $a^2 = b^2 + f^2$

$13^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b = 12$

III) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

4 Determinar a equação reduzida da elipse cujos focos são (0; 3) e (0; – 3) sabendo que o eixo maior mede 8.

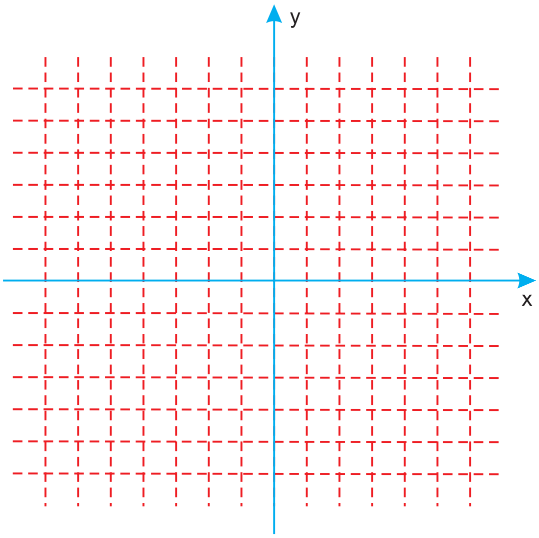
RESOLUÇÃO:

I) $a^2 = b^2 + f^2$

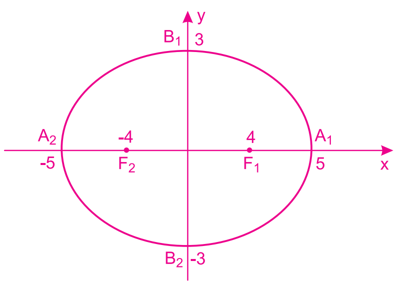
$4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 7$

II) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$

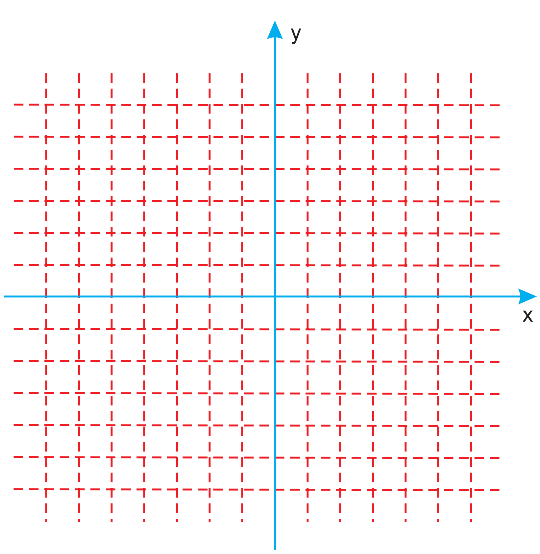
1 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ destacando os vértices, os polos e os focos.



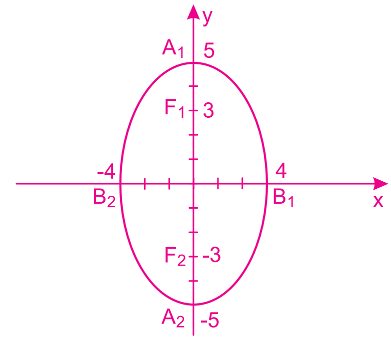
RESOLUÇÃO:



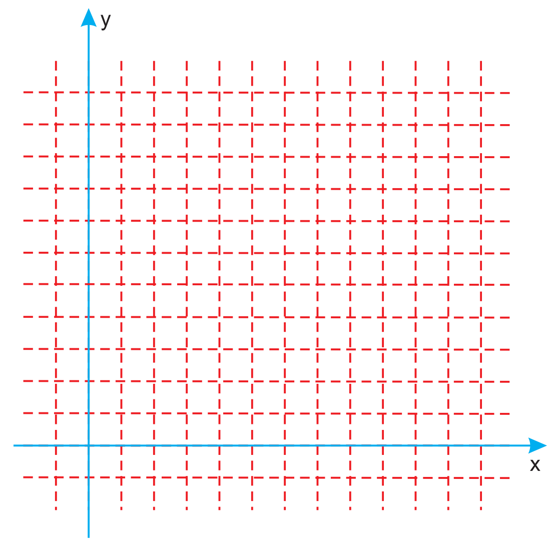
2 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ destacando os vértices, os polos e os focos.



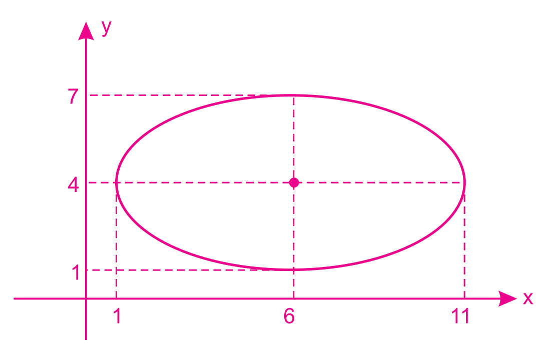
RESOLUÇÃO:



3 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a elipse de centro C(6; 4), eixo maior paralelo ao eixo Ox e medindo 10, e eixo menor medindo 6. Obter em seguida, a equação da elipse.

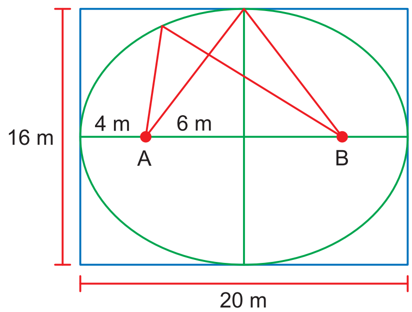


RESOLUÇÃO:



$$\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

4 **(UEL – MODELO ENEM)** – Existem pessoas que nascem com problemas de saúde relacionados ao consumo de leite de vaca. A pequena Laura, filha do Sr. Antônio, nasceu com este problema. Para solucioná-lo, o Sr. Antônio adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular medindo 20 m de comprimento e 16 m de largura. Acontece que as cabras comem tudo o que aparece à sua frente, invadindo hortas, jardins e chácaras vizinhas. O Sr. Antônio resolveu amarrar a cabra em uma corda presa pelas extremidades nos pontos A e B que estão 12 m afastados um do outro. A cabra tem uma argola na coleira por onde a corda é passada, de tal modo que ela possa deslizar livremente por toda a sua extensão. Observe a figura e responda a questão a seguir.



Qual deve ser o comprimento da corda para que a cabra possa pastar na maior área possível, dentro do campo retangular?
a) 10 m. b) 15 m. c) 20 m. d) 25 m. e) 30 m.

RESOLUÇÃO:
Os pontos A e B serão os focos da elipse, com eixos maior e menor, respectivamente, 2a = 20 m e 2b = 16 m.
Para que a cabra possa pastar na maior área possível (interior da elipse de focos em A e B), o comprimento da corda é tal que
PA + PB = 2a (definição de elipse)
Assim: PA + PB = 20 m
Resposta: C

Módulos 53 e 54 **Hipérbole**

Palavras-chave:
• Eixo transverso
• Eixo conjugado • Distância focal

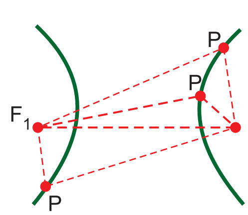
1. Definição

Sejam $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ dois pontos distintos tais que $\mathbf{F_1F_2 = 2f}$ e o número real **2a** tal que $\mathbf{0 < 2a < 2f}$.

Hipérbole é o lugar geométrico de todos os pontos do plano tais que a diferença das distâncias, em módulo, a F_1 e F_2 é constante e igual a 2a.

Simbolicamente:

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$



2. Elementos da hipérbole

a) O ponto **O**, médio de $\overline{F_1F_2}$, é o **centro** da hipérbole.

b) Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ são chamados **focos** da hipérbole.

c) A distância entre os focos é a **distância focal**. Assim: $F_1F_2 = 2f$

d) Os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ são chamados **vértices** da hipérbole.

e) O segmento $\overline{A_1A_2}$ é o **eixo transverso** da hipérbole e sua medida é **2a**, pois: $A_1 \in$ hipérbole $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Leftrightarrow A_1F_2 - A_2F_2 = 2a \Leftrightarrow$ $A_1A_2 = 2a$

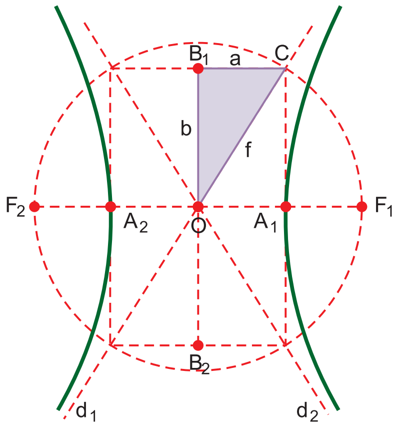
f) Os pontos $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ são chamados **polos** da hipérbole.

g) O segmento $\overline{B_1B_2}$, cuja medida representaremos por **2b**, é o **eixo conjugado** da hipérbole. Assim: $B_1B_2 = 2b$

h) Os pontos B_1 e B_2 são escolhidos de tal modo que $OF_1 = OC = f$

i) As retas $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ são chamadas **assíntotas**.

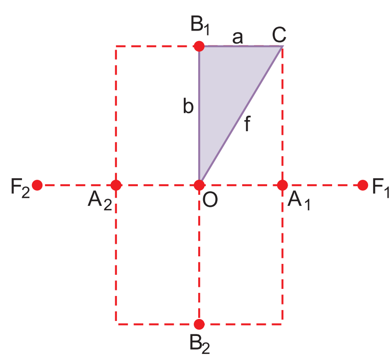
j) Se **a = b**, a hipérbole é chamada **equilátera**.



3. Relação entre a, b e f

No triângulo retângulo OB_1C, temos:

$$f^2 = a^2 + b^2$$



4. Equação da hipérbole

a) Com centro na origem e eixo transverso contido no eixo das abscissas.

Se a origem do sistema cartesiano for o centro **O** da hipérbole e o eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ estiver contido no eixo das abscissas, então:

$$\begin{cases} F_1(f;\,0) \;;\; F_2(-\,f;\,0) \\ A_1(a;\,0) \;;\; A_2(-\,a;\,0) \\ B_1(0;\,b) \;;\; B_2(0;\,-\,b) \end{cases}$$

Neste caso, sendo P(x; y) um ponto genérico da hipérbole, temos:

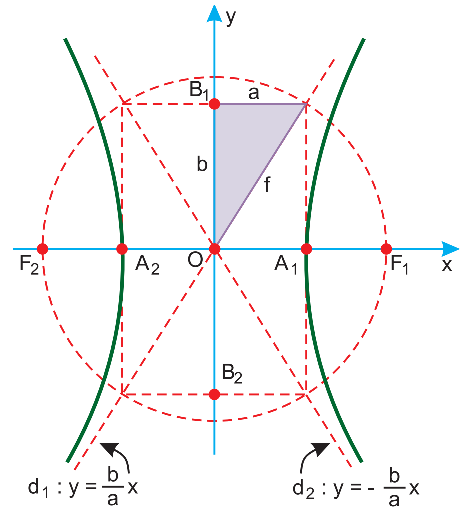
$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+f)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Desta igualdade, após simplificações convenientes, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se a hipérbole for equilátera, então, $x^2 - y^2 = a^2$



b) Com centro na origem e eixo transverso contido no eixo das ordenadas.

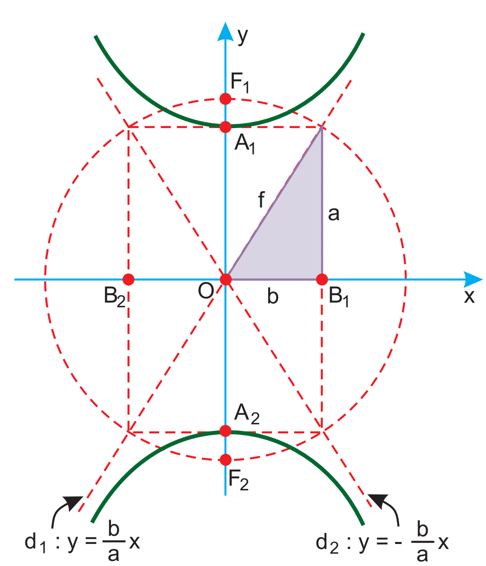
Se a origem do sistema cartesiano for o centro **O** da hipérbole e o eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ estiver contido no eixo das ordenadas, então:

$$\begin{cases} F_1(0;\,f) \;;\; F_2(0;\,-\,f) \\ A_1(0;\,a) \;;\; A_2(0;\,-\,a) \\ B_1(b;\,0) \;;\; B_2(-\,b;\,0) \end{cases}$$

Neste caso, a equação da hipérbole será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Se a hipérbole for equilátera, então, $y^2 - x^2 = a^2$



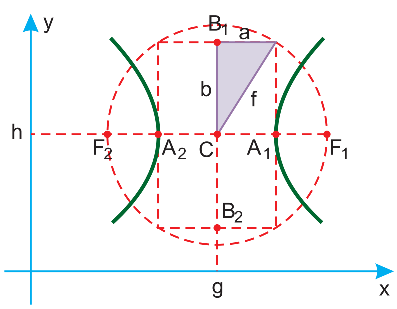
c) Com eixo transverso paralelo ao eixo das abscissas.

Se a hipérbole apresentar eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ paralelo ao eixo das abscissas e centro no ponto **C(g; h)**, então:

$$\begin{cases} F_1(g+f;\,h) \quad ; \quad F_2(g-f;\,h) \\ A_1(g+a;\,h) \quad ; \quad A_2(g-a;\,h) \\ B_1(g;\,h+b) \quad ; \quad B_2(g;\,h-b) \end{cases}$$

Neste caso, a equação da hipérbole será:

$$\frac{(x-g)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$



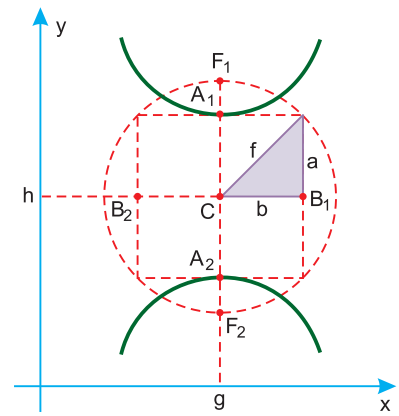
d) Com eixo transverso paralelo ao eixo das ordenadas.

Se a hipérbole apresentar eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ paralelo ao eixo das ordenadas e centro no ponto **C(g; h)**, então:

$$\begin{cases} F_1(g;\,h+f) \quad ; \quad F_2(g;\,h-f) \\ A_1(g;\,h+a) \quad ; \quad A_2(g;\,h-a) \\ B_1(g+b;\,h) \quad ; \quad B_2(g-b;\,h) \end{cases}$$

Neste caso, a equação de hipérbole será:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-g)^2}{b^2} = 1$$



5. Excentricidade da hipérbole

A **excentricidade** da hipérbole, representada por **e**, é a razão entre **f** e **a**. Sendo, na hipérbole, f > a > 0, resulta e > 1.

Simbolicamente: $e = \dfrac{f}{a}$ e $e > 1$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M403**

Exercícios Resolvidos – Módulos 53 e 54

1 Os vértices de uma hipérbole são os pontos $A_1(0;\,3)$ e $A_2(0;\,-3)$, seus focos são os pontos $F_1(0;\,5)$ e $F_2(0;\,-5)$.

a) Determine a equação da hipérbole.

b) Determine a excentricidade da hipérbole.

c) Esboce o gráfico da hipérbole.

Resolução

A distância entre os vértices é $A_1A_2 = 2 \,.\, a = 6 \Leftrightarrow a = 3$.

A distância focal é: $F_1F_2 = 2 \,.\, f = 10 \Leftrightarrow f = 5$

Sendo $f^2 = a^2 + b^2$, temos $5^2 = 3^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 4$

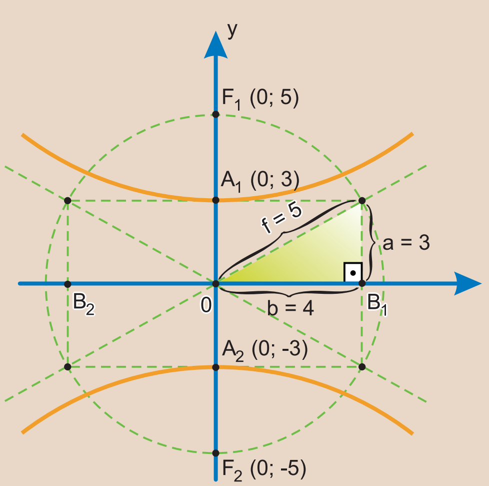
Portanto:

a) Equação da hipérbole (com vértices e focos no eixo $\vec{Oy}$)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Excentricidade: $e = \dfrac{f}{a} = \dfrac{5}{3}$

c)



Respostas: a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ b) $e = \dfrac{5}{3}$ c) gráfico

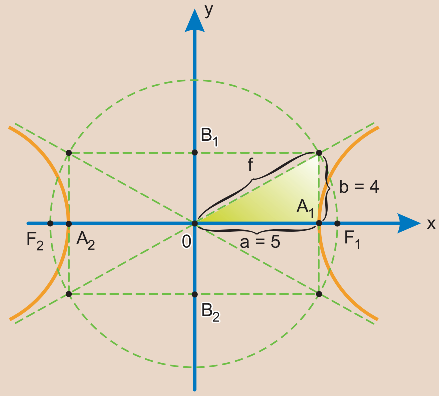
2 **(MODELO ENEM)** – Determinar a equação da hipérbole cujos focos estão situados no eixo das abscissas, simetricamente situados em relação à origem, sabendo que seus eixos são: 2a = 10 (eixo transverso) e 2b = 8 (eixo conjugado).

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

e) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

Resolução



De acordo com o enunciado, temos:

Centro C(0; 0)

eixo transverso: 2a = 10 ⇔ a = 5

eixo conjugado: 2b = 8 ⇔ b = 4

Se o eixo transverso é horizontal e o centro é a origem, a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{y^2}{\mathbf{b}^2} = 1$$

Substituindo pelos valores, vem:

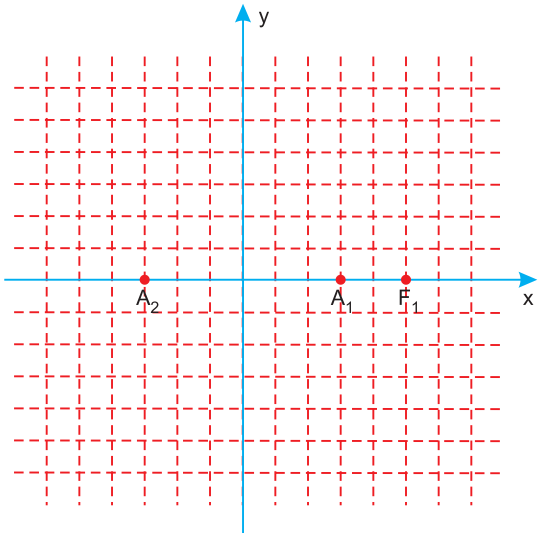
$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 53

1 Os pontos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, representados no sistema cartesiano, são os vértices de uma hipérbole e $\mathbf{F_1}$ é um de seus focos. Pede-se

a) as coordenadas dos vértices;
b) a medida do eixo transverso (2a);
c) as coordenadas dos focos;
d) a distância focal (2f);
e) a medida do eixo conjugado (2b);
f) as coordenadas dos polos;
g) o desenho da hipérbole;
h) a equação da hipérbole;
i) a excentricidade da hipérbole.



RESOLUÇÃO:

a) $A_1(3;0)$ e $A_2(-3;0)$

b) 2a = 6

c) $F_1(5;0)$ e $F_2(-5;0)$

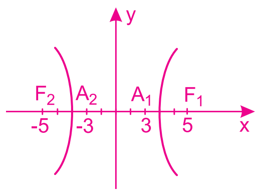
d) 2f = 10

e) $f^2 = a^2 + b^2$

$5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$

f) $B_1(0;4)$ e $B_2(0;-4)$

g)



h) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

i) $e = \frac{f}{a} = \frac{5}{3} \cong 1,66$

2 O eixo transverso de uma hipérbole mede 8 e a excentricidade é 1,5. Obter a medida do eixo conjugado.

RESOLUÇÃO:

I) 2a = 8 ⇔ a = 4

II) $e = \frac{f}{a}$ e e = 1,5

$1,5 = \frac{f}{4} \Rightarrow f = 6$

III) $f^2 = a^2 + b^2$

$6^2 = 4^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$

Logo, $2b = 4\sqrt{5}$

3 Determinar a equação da hipérbole cujos vértices são $A_1(8; 0)$ e $A_2(-8; 0)$ e cuja distância focal é 20.

RESOLUÇÃO:

I) 2f = 20 ⇔ f = 10

II) $f^2 = a^2 + b^2$

$10^2 = 8^2 + b^2 \Rightarrow b = 6$

III) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

4 Determinar a equação da hipérbole de focos $F_1(0; 5)$ e $F_2(0; -5)$ sabendo que o eixo conjugado mede 8.

RESOLUÇÃO:

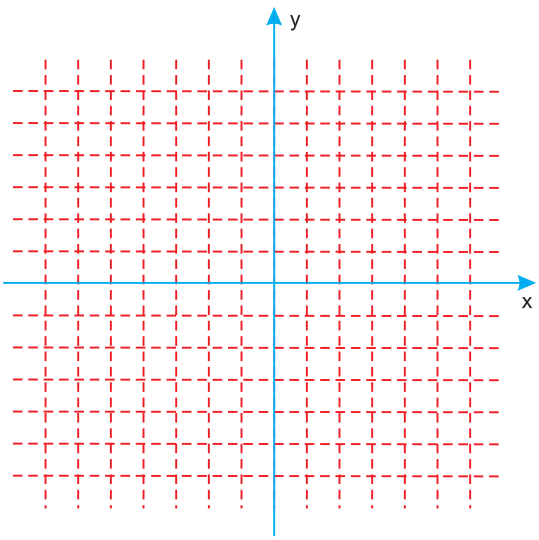
I) 2b = 8 ⇔ b = 4

II) $f^2 = a^2 + b^2$

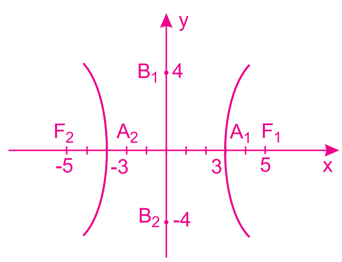
$5^2 = a^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9$

III) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

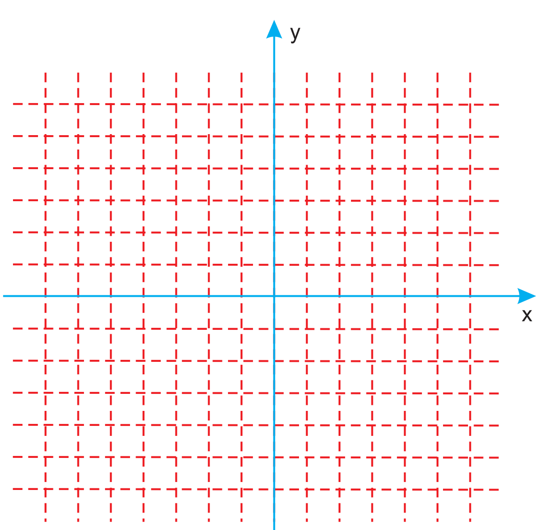
1 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, destacando os vértices, os focos e os polos.



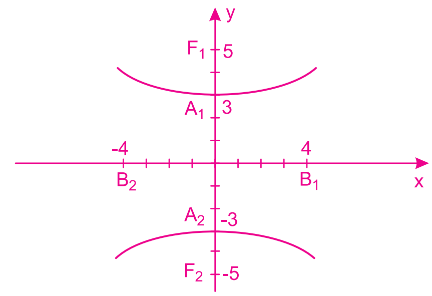
RESOLUÇÃO:



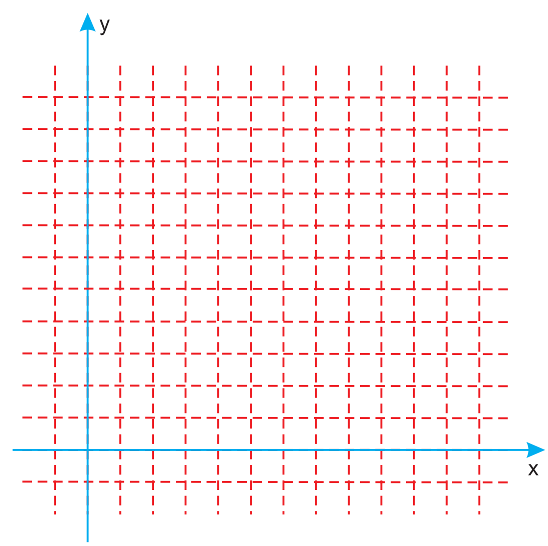
2 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a hipérbole de equação $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$, destacando os vértices, os focos e os polos.



RESOLUÇÃO:



3 Representar, no sistema cartesiano abaixo, a hipérbole de equação $\dfrac{(y-6)^2}{16} - \dfrac{(x-5)^2}{9} = 1$, destacando os vértices, os polos e os focos. Calcular, em seguida, a excentricidade de hipérbole.



RESOLUÇÃO:

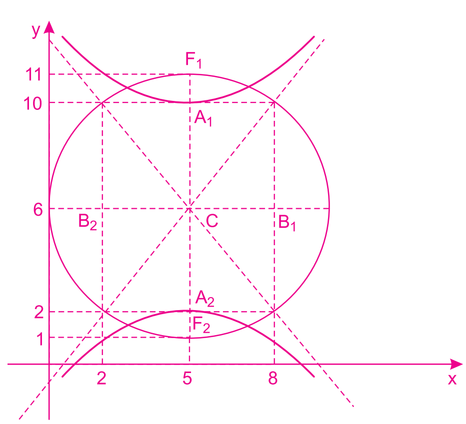
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

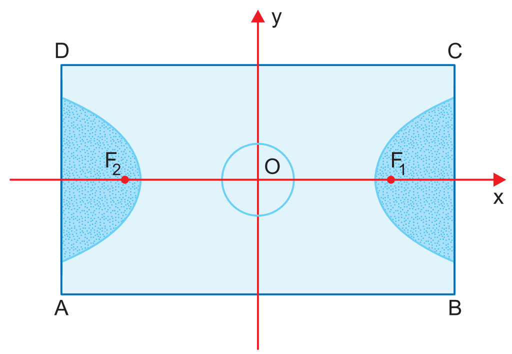
$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow f = 5$

$e = \dfrac{f}{a}$

$e = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$



4 **(UFPB – MODELO ENEM)** – Uma quadra de futsal está representada na figura abaixo pelo retângulo ABCD, no qual A(– 20; – 10) e C(20; 10). Cada uma das áreas dos goleiros (regiões hachuradas) é delimitada por uma das linhas de fundo, $\overline{AD}$ ou $\overline{BC}$, e por um dos dois ramos de uma hipérbole de focos $F_1 = (6\sqrt{5}; 0)$ e $F_2 = (-6\sqrt{5}; 0)$. O círculo central e a hipérbole são concêntricos, o raio do círculo mede 3 m e um dos polos da hipérbole é $B_1(0; 6)$.



Nesse contexto, identifique as proposições verdadeiras:

01. A distância entre o centro do círculo e um vértice da hipérbole é de 12 m.

02. A quadra tem 800 m^2 de área.

04. A equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{180} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

08. A excentricidade da hipérbole é igual a $\dfrac{5}{3}$.

16. O eixo conjugado da hipérbole tem comprimento igual a 4 vezes o raio do círculo.

A soma dos valores atribuídos às proposições verdadeiras é igual a $\boxed{}$

RESOLUÇÃO:
A partir do enunciado, temos:

I) Centro O(0; 0) e polo $B_1(0; 6) \Rightarrow b = 6$

II) Centro O(0; 0) e foco $F_1(6\sqrt{5}; 0) \Rightarrow f = 6\sqrt{5}$

III) $a^2 + b^2 = f^2 \Rightarrow a^2 + 6^2 = (6\sqrt{5})^2 \Rightarrow a = 12$

Na análise das proposições, temos:

(V) 01) a distância do centro a um vértice da hipérbole tem medida igual 12 m, pois $OA_1 = a = 12$.

(V) 02) a área da quadra = AB . BC = 40 . 20 = 800 m^2

(F) 04) a equação da hipérbole é: $\dfrac{x^2}{12^2} - \dfrac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

(F) 08) a excentricidade da hipérbole é: $e = \dfrac{f}{a} = \dfrac{6\sqrt{5}}{12} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(V) 16) o eixo conjugado tem medida: 2b = 2 . 6 = 12, que é igual a 4 vezes o raio do círculo (3 m).

Resposta: 19

Módulos 55 e 56 – Parábola

Palavras-chave:
- Foco
- Vértice
- Diretriz

1. Definição

Seja **d** uma reta e **F** um ponto não pertencente a **d**.

Parábola é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes da reta d e do ponto F.

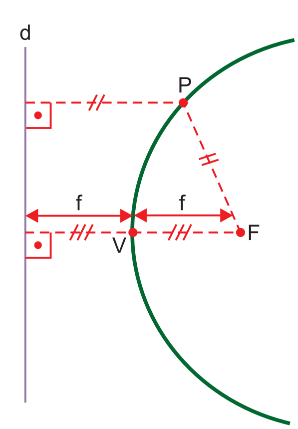
Simbolicamente:

$$P \in parábola \Leftrightarrow Pd = PF$$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M404**

2. Elementos da parábola



a) O ponto **F** é o **foco** da parábola.

b) A reta **d** é a **diretriz** da parábola.

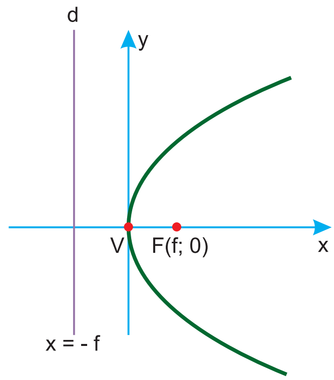
c) O ponto **V** tal que Vd = VF = f é o **vértice**.

d) **f** é a **distância focal** e **2f** é o **parâmetro**.

e) A reta $\overleftrightarrow{VF}$ é o **eixo de simetria** da parábola.

3. Equação da parábola

a) Com a concavidade para a direita:



Se a origem do sistema cartesiano for o vértice **V**, o eixo de simetria for Ox e a parábola estiver "voltada para a direita", então:

$$\begin{cases} \textit{o foco é o ponto } F(f;\, 0) \\ \textit{a equação da diretriz é } x = -f \end{cases}$$

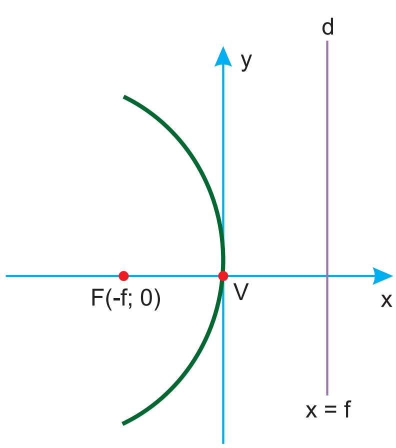
Sendo P(x; y) um ponto genérico da parábola, temos:

$$PF = Pd \Leftrightarrow \sqrt{(x-f)^2 + (y-0)^2} = x + f$$

Desta igualdade, após simplificações, resulta:

$$y^2 = 4fx$$

b) Com a concavidade para a esquerda:



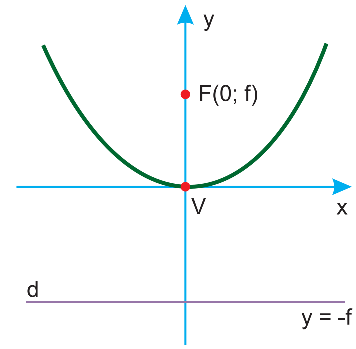
Se a origem do sistema cartesiano for o vértice **V**, o eixo de simetria for Ox e a parábola estiver "voltada para a esquerda", então:

$$\begin{cases} \textit{o foco é o ponto } F(-f;\, 0) \\ \textit{a equação da diretriz é } x = f \end{cases}$$

Neste caso, a equação da parábola será:

$$y^2 = -4fx$$

c) Com a concavidade para cima:



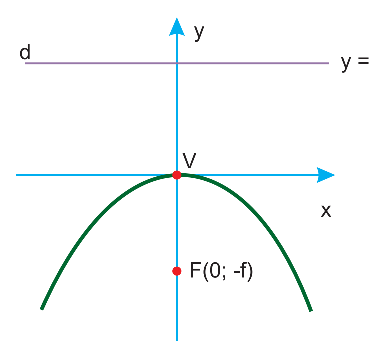
Se a origem do sistema cartesiano for o vértice **V**, o eixo de simetria for Oy e a parábola estiver "voltada para cima", então:

$$\begin{cases} \textit{o foco é o ponto } F(0;\, f) \\ \textit{a equação da diretriz é } y = -f \end{cases}$$

Neste caso, a equação da parábola será:

$$x^2 = 4fy$$

d) Com a concavidade para baixo:



Se a origem do sistema cartesiano for o vértice **V**, o eixo de simetria for Oy e a parábola estiver "voltada para baixo", então:

$$\begin{cases} \textit{o foco é o ponto } F(0;\, -f) \\ \textit{a equação da diretriz é } y = f \end{cases}$$

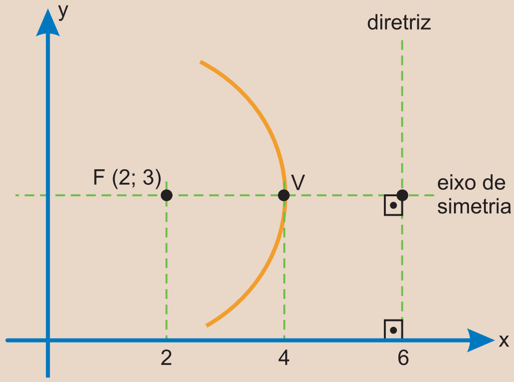
Neste caso, a equação da parábola será:

$$x^2 = -4fy$$

Exercícios Resolvidos – Módulos 55 e 56

1 Determinar a equação da parábola com foco F(2; 3) e diretriz com equação x = 6.

Resolução



Pelo enunciado, conclui-se que a parábola tem eixo de simetria horizontal e é voltada para a esquerda, portanto, sua equação é do tipo

$(y - h)^2 = -4 \cdot f \cdot (x - g)$

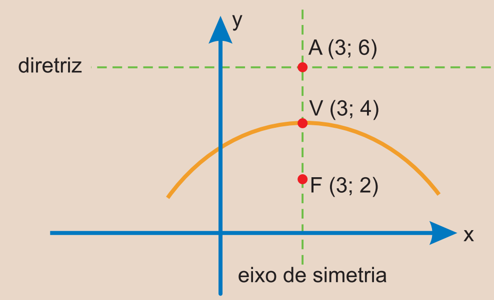
Como a diretriz tem equação x = 6 e o foco é o ponto F(2; 3), conclui-se que:

- V(4; 3) é o vértice (ponto médio)
- VF = f = 2

A equação da parábola resulta: **$(y - 3)^2 = -8 \cdot (x - 4)$**

2 Determinar a equação da parábola com vértice V(3; 4) e foco F(3; 2). Obter a equação da diretriz dessa parábola.

Resolução



Pelo enunciado conclui-se que a parábola tem eixo de simetria vertical e é voltada para baixo, portanto, sua equação é do tipo:

$(x - g)^2 = -4 \cdot f \cdot (y - h)$

Como V(3; 4) e F(3; 2), então f = VF = 2, e a equação da parábola resulta:

$$(x - 3)^2 = -8 \cdot (y - 4)$$

A equação da diretriz será y = 6, visto que se trata de uma reta horizontal que passa pelo ponto A(3; 6).

Exercícios Propostos – Módulo 55

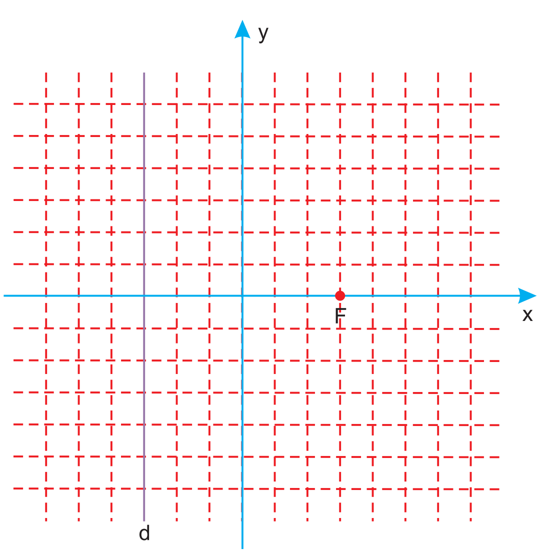
Questões de **1** a **4**

O ponto **F** e a reta **d**, representados no sistema cartesiano são, respectivamente, o foco e a diretriz de uma parábola. Pede-se, em cada caso

a) as coordenadas do foco; b) a equação da diretriz; c) as coordenadas do vértice;

d) o parâmetro (2f); e) a equação da parábola; f) desenhar a parábola.

1



RESOLUÇÃO:

a) F(3; 0)

b) x + 3 = 0

c) V(0;0)

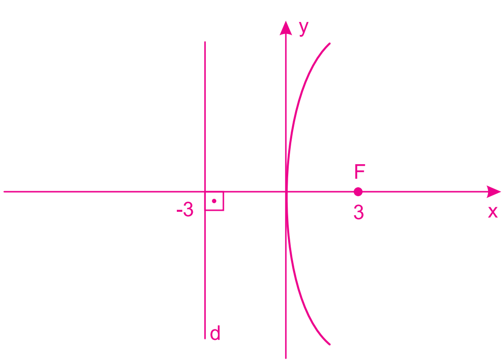
d) p = 2f = 6

e) $y^2 = 4fx$

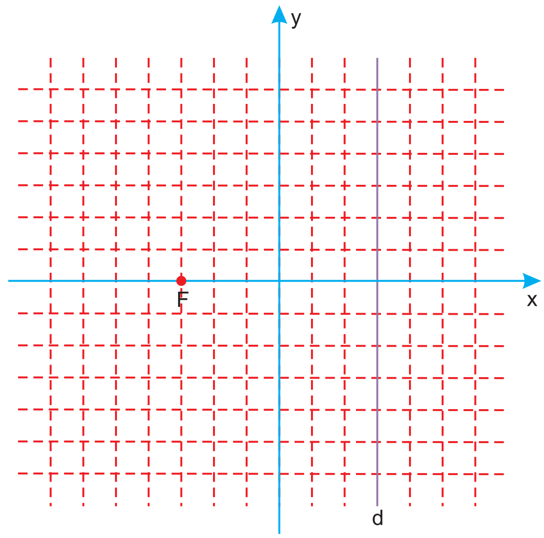
$y^2 = 4 \cdot 3x$

$y^2 = 12x$

f)



2



RESOLUÇÃO:

a) F(– 3; 0)

b) $x - 3 = 0$

c) V(0;0)

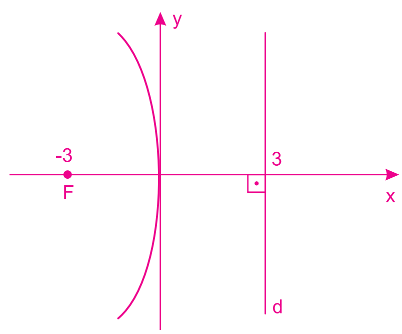
d) $p = 2f = 6$

e) $y^2 = -4fx$

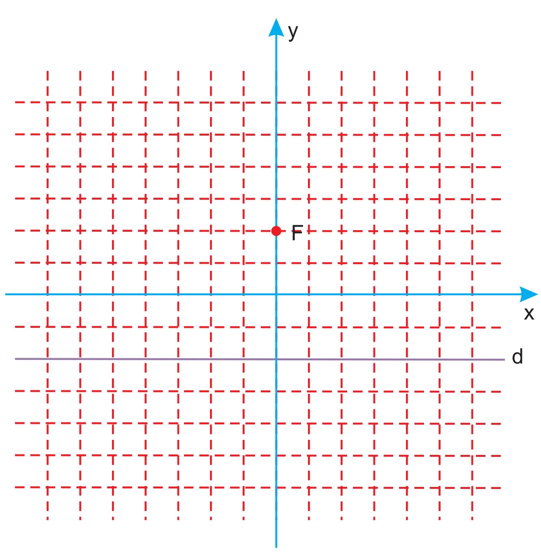
$y^2 = -4 \cdot 3x$

$y^2 = -12x$

f)



3



RESOLUÇÃO:

a) F(0; 2)

b) $y + 2 = 0$

c) V(0;0)

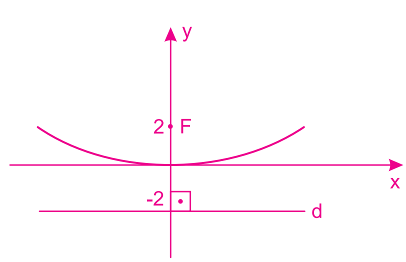
d) $p = 2f = 4$

e) $x^2 = 4fy$

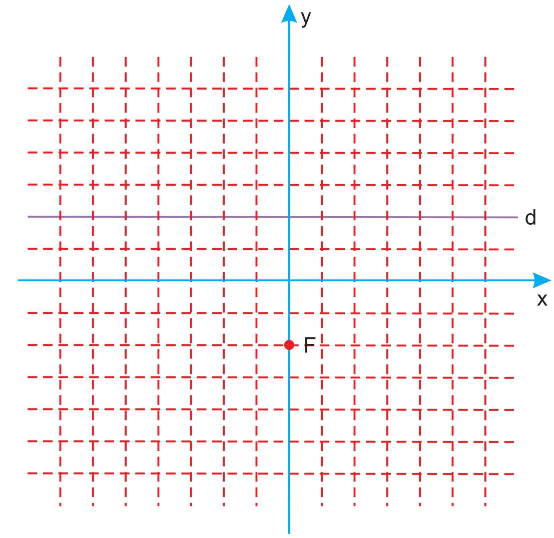
$x^2 = 4 \cdot 2y$

$x^2 = 8y$

f)



4



RESOLUÇÃO:

a) F(0; – 2)

b) $y - 2 = 0$

c) V(0;0)

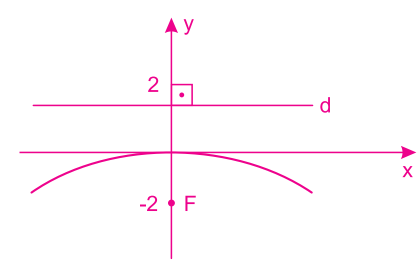
d) $p = 2f = 4$

e) $x^2 = -4fy$

$x^2 = -4 \cdot 2y$

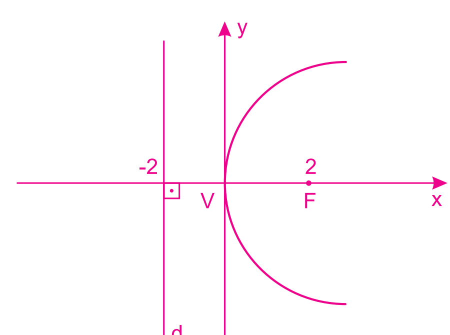
$x^2 = -8y$

f)



5 Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do ponto F(2; 0) e da reta $x + 2 = 0$.

RESOLUÇÃO:

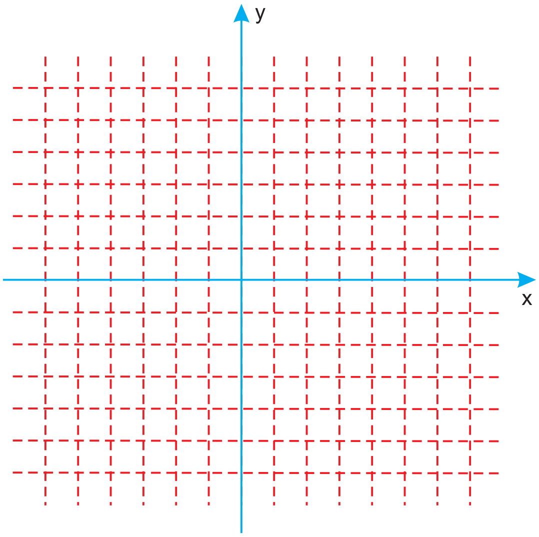


$y^2 = 4fx$

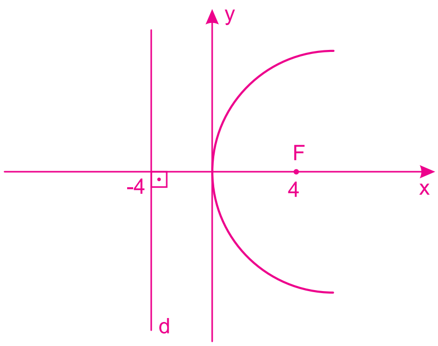
$y^2 = 4 \cdot 2x$

$y^2 = 8x$

1 Obter a equação da parábola cujo foco é o ponto (4; 0) e cuja diretriz é a reta de equação x + 4 = 0. Representar esta parábola no plano cartesiano.



RESOLUÇÃO:

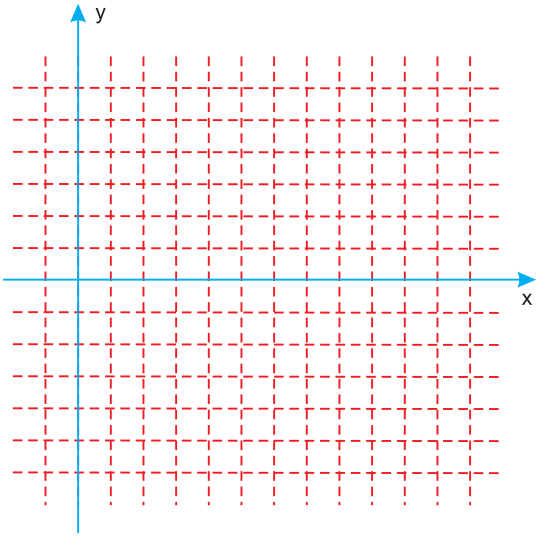


$y^2 = 4fx$

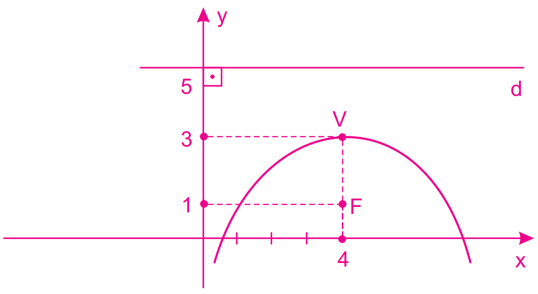
$y^2 = 4 \cdot 4x$

$y^2 = 16x$

2 Obter a equação da parábola cujo foco é o ponto (4; 1) e cujo vértice é o ponto (4; 3). Representar esta parábola no plano cartesiano.



RESOLUÇÃO:



F(4; 1)

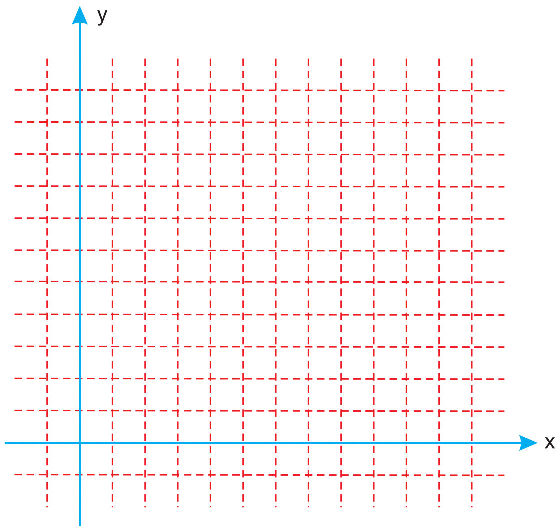
V(4; 3)

$(x - g)^2 = -4f(y - h)$

$(x - 4)^2 = -4 \cdot 2(y - 3)$

$(x - 4)^2 = -8(y - 3)$

3 Representar, no plano cartesiano, a parábola de equação $(y - 7)^2 = -12(x - 5)$ destacando o foco, o vértice e a diretriz.

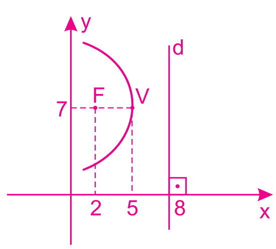


RESOLUÇÃO:

V(5; 7)

f = 3

F(2; 7)



4 **(UNESP)** – Fixado um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, considere os pontos O(0;0), A(0;2) e a reta r de equação $y = -1$.

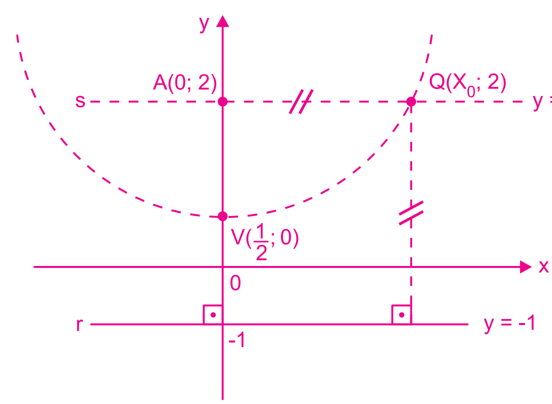
a) Se a distância do ponto $Q(x_0, 2)$ ao ponto A é igual à distância de Q à reta r, obtenha o valor de x_0, supondo $x_0 > 0$.

b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos P(x;y) desse plano, cuja distância até o ponto A é igual à distância até a reta r.

RESOLUÇÃO:

a) **A reta s, que passa pelos pontos A(0;2) e $Q(x_0;2)$ é horizontal e, portanto, paralela à reta r, de equação $y = -1$. Assim, a distância entre as retas r e s é igual a 3.**

Se a distância do ponto $Q(x_0;2)$ ao ponto A é igual à distância de Q à reta r (distância entre as retas r e s), devemos ter AQ = 3 e, portanto, supondo $x_0 > 0$, resulta $x_0 = 3$.



b) **O lugar geométrico dos pontos P(x; y) desse plano cuja distância até o ponto A(0; 2) é igual à distância até a reta r, de equação $y + 1 = 0$ representa uma parábola de foco A(0; 2) e diretriz $y + 1 = 0$. O vértice da parábola é o ponto**

$$V\left(\frac{2-1}{2}; 0\right) = \left(\frac{1}{2}; 0\right) \text{ e a equação é}$$

$$(x - 0)^2 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 = 6 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Respostas: a) $x_0 = 3$ b) $x^2 = 6 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$

MATEMÁTICA

Johannes Kepler (1571-1630), astrónomo alemão, imaginou um modelo do sistema solar, composto por esferas concêntricas inscritas e circunscritas num cubo, num tetraedro, num octaedro, num dodecaedro e num icosaedro.

Geometria Métrica e de Posição – Módulos

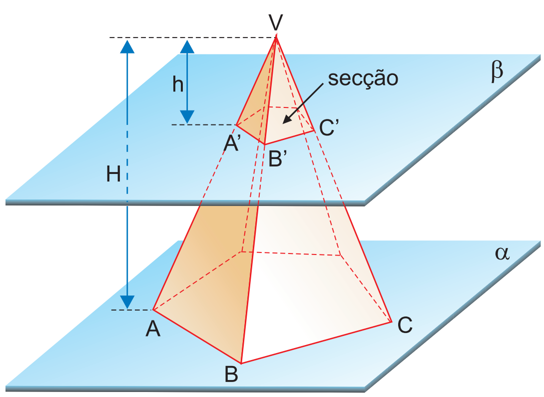
Módulo 45 – Tronco de pirâmide de bases paralelas

Palavra-chave:

• Pirâmide

1. Tronco de pirâmide de bases paralelas

Quando interceptamos todas as arestas laterais da pirâmide por um plano paralelo à base, que não contém esta e nem o vértice, obtemos uma secção poligonal, tal que:



a) As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão, chamada razão de semelhança.

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \dots = \frac{h}{H}$$

b) A secção obtida e a base são polígonos semelhantes.

c) A razão entre as áreas da secção A_s e da base A_B é igual ao **quadrado da razão de semelhança**.

$$\frac{A_s}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

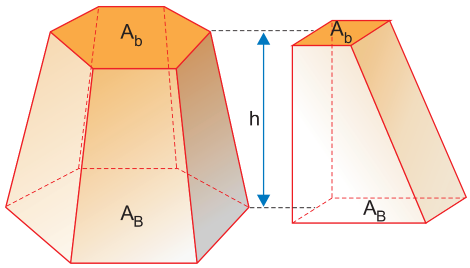
d) A "parte" (região) da pirâmide compreendida entre a base e a citada secção é denominada **tronco de pirâmide de bases paralelas**.

e) A razão entre os volumes da pirâmide com base de área A_s e da pirâmide com base de área A_B é igual ao **cubo da razão de semelhança**.

$$\frac{V_s}{V_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

2. Cálculo da área total e do volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas

Sendo $\mathbf{A_B}$ e $\mathbf{A_b}$ as áreas das bases, **h** a altura (distância entre os planos que contêm as bases), $\mathbf{A_\ell}$ a área lateral, $\mathbf{A_t}$ a área total e **V** o volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas, temos:



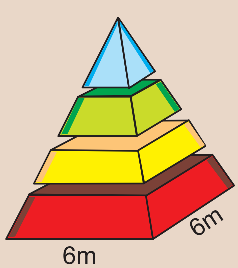
$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

e

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$

Exercícios Resolvidos

1 **(ENEM)** – Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3. b) 189 cm^3. c) 192 cm^3.
d) 216 cm^3. e) 540 cm^3.

Resolução

De acordo com o enunciado, pode-se concluir que a altura da pirâmide de parafina é 16 cm e que a altura da pirâmide menor retirada é 4 cm. Assim, o volume, em centímetros cúbicos, de parafina para fabricar o novo modelo de vela é igual a:

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot (1{,}5)^2 \cdot 4 = 192 - 3 = 189$$

Resposta: B

2 Numa câmara de ar suficientemente cheia para ser utilizada como "boia" está impressa uma figura de área **S**. Se insuflarmos mais ar para dentro da "boia", tal que seu volume fique duplicado, então a figura passará a ter área igual a:

a) 2S b) $S\sqrt{2}$ c) $S\sqrt{3}$
d) $S\sqrt[3]{2}$ e) $S\sqrt[3]{4}$

Resolução

Seja A a nova área da figura, V o volume inicial da boia e K a razão de semelhança.

Assim:

$$\frac{V}{2V} = k^3 \text{ e } \frac{S}{A} = k^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = k \text{ e } \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{A}} = k$$

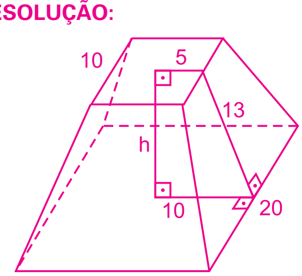
Logo: $\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{A}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow A = S\sqrt[3]{4}$

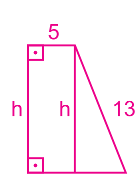
Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Calcular a área lateral, total e o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular, cujos apótemas das bases medem 5 cm e 10 cm e o apótema lateral mede 13 cm.

RESOLUÇÃO:





I) $h^2 + 5^2 = 13^2$
$h^2 = 169 - 25$
$h = 12$ cm

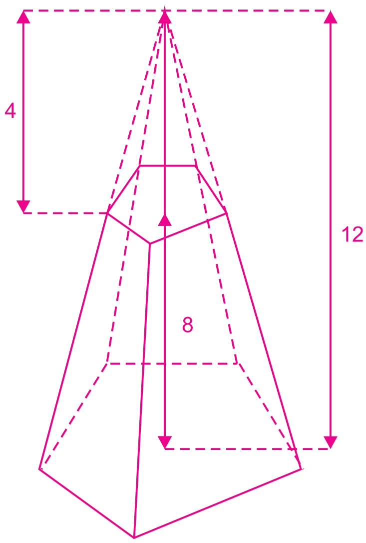
II) $A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(20 + 10) \cdot 13}{2} = 2 \cdot 30 \cdot 13 = 780 \text{ cm}^2$

III) $A_t = A_B + A_b + A_\ell$
$A_t = 20^2 + 10^2 + 780 = 1280 \text{ cm}^2$

IV) $V = \dfrac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$
$V = \dfrac{12}{3}\left(400 + 100 + \sqrt{400 \cdot 100}\right) = 4 \cdot 700 = 2800 \text{ cm}^3$

2 Uma pirâmide de base pentagonal com 12 cm de altura e 81 cm^2 de área da base é seccionada por um plano α, paralelo ao plano da base e distante 8 cm da mesma. Qual a área do pentágono obtido nessa intersecção?

RESOLUÇÃO:



$$\frac{A_S}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

$$\frac{A_S}{81} = \left(\frac{4}{12}\right)^2$$

$$\frac{A_S}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

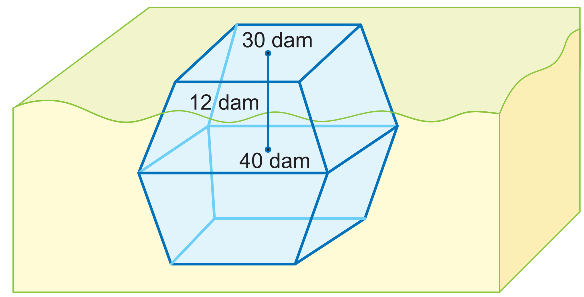
$$\frac{A_S}{81} = \frac{1}{9}$$

$A_S = 9$ cm^2

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT2M405**

3 **(UNESP)** – Com o fenômeno do efeito estufa e consequente aumento da temperatura média da Terra, há o desprendimento de *icebergs* (enormes blocos de gelo) das calotas polares terrestres. Para calcularmos o volume aproximado de um *iceberg*, podemos compará-lo com sólidos geométricos conhecidos. Suponha que o sólido da figura, formado por dois troncos de pirâmides regulares de base quadrada simétricos e justapostos pela base maior, represente aproximadamente um *iceberg*.



As arestas das bases maior e menor de cada tronco medem, respectivamente, 40 dam e 30 dam e a altura é de 12 dam. Sabendo que o volume V_S da parte submersa do *iceberg* corresponde a aproximadamente 7/8 do volume total V, determine V_S.

RESOLUÇÃO:

1) O volume V, em decâmetros cúbicos, do iceberg é dado por:

$$V = 2 \cdot \frac{12}{3}\left(40^2 + 30^2 + \sqrt{40^2 \cdot 30^2}\right) =$$

$$= 8 \cdot (1600 + 900 + 1200) = 8 \cdot 3700 = 29600$$

2) O volume V_S, em decâmetros cúbicos, da parte submersa do iceberg é dado por:

$$V_S = \frac{7}{8} \cdot (8 \cdot 3700) = 25900$$

Resposta: 25900 decâmetros cúbicos

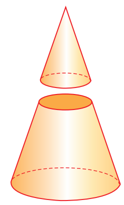
Módulo 46

Tronco de cone de bases paralelas

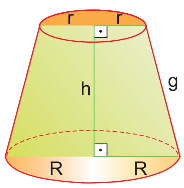
Palavra-chave:

• Cone

Seccionando um cone circular reto por um plano paralelo à base, obtemos dois sólidos: um novo cone e um **tronco de cone de bases paralelas**.



No tronco de cone de bases paralelas da figura, temos:

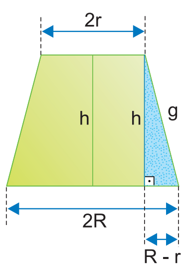


a) **r** é o **raio** da base **menor**.

b) **R** é o **raio** da base **maior**.

c) **h** é a **altura** do tronco de cone.

d) **g** é a **geratriz** do tronco de cone.

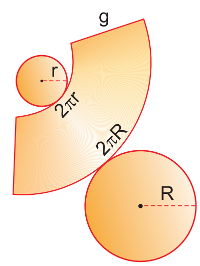


e) o trapézio isósceles de bases **2r** e **2R** e altura **h** é a **secção meridiana** do tronco de cone.

f) o triângulo retângulo hachurado tem catetos **h** e **R – r** e hipotenusa **g** e, portanto:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$.

g) a área da base menor é: $A_b = \pi r^2$.



h) a área da base maior é: $A_B = \pi R^2$.

i) a área lateral é: $A_\ell = \pi g(R + r)$.

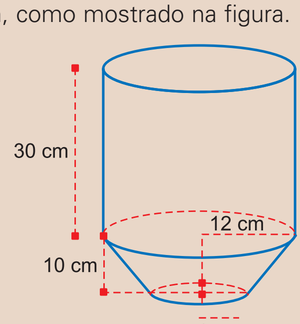
j) a área total é: $A_t = A_B + A_b + A_\ell$.

k) o volume é: $$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$.

l) lembrando que $A_b = \pi r^2$ e $A_B = \pi R^2$, pode-se também escrever: $$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$.

Exercícios Resolvidos

1 **(UNESP)** – Numa região muito pobre e com escassez de água, uma família usa para tomar banho um chuveiro manual, cujo reservatório de água tem o formato de um cilindro circular reto de 30 cm de altura e base com 12 cm de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 12 cm e 6 cm, respectivamente, e altura 10 cm, como mostrado na figura.



Por outro lado, numa praça de uma certa cidade há uma torneira com um gotejamento que provoca um desperdício de 46,44 litros de água por dia. Considerando a aproximação $\pi = 3$, determine quantos dias de gotejamento são necessários para que a quantidade de água desperdiçada seja igual à usada para 6 banhos, ou seja, encher completamente 6 vezes aquele chuveiro manual.

Dado: 1 000 cm^3 = 1 litro.

Resolução

O volume V, em centímetros cúbicos, de água usada para 6 banhos, é:

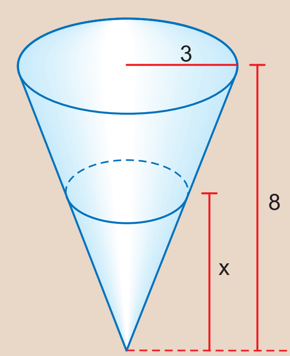
$$6 \cdot \left[\pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \frac{\pi \cdot 10}{3}(12^2 + 6^2 + 12 \cdot 6)\right] =$$

$= 6 \cdot (12960 + 2520) = 92880$

Assim, a quantidade de água usada em 6 banhos é de 92,88 litros e, como o gotejamento na torneira desperdiça 46,44 litros de água por dia, conclui-se que, em $\frac{92,88}{46,44} = 2$ dias toda essa água será desperdiçada.

Resposta: 2 dias

2 **(FUVEST)** – Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:



a) $\frac{8}{3}$ cm b) 6 cm c) 4 cm

d) $4\sqrt{3}$ cm e) $4\sqrt[3]{4}$ cm

Resolução

O volume do suco será igual à metade do volume do copo.

$$\frac{V_{suco}}{V_{copo}} = \left(\frac{x}{8}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{x}{8}\right)^3 \Leftrightarrow$$

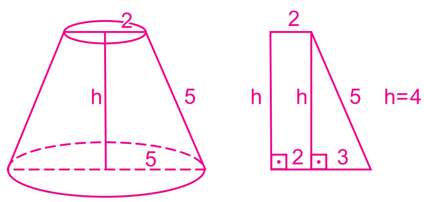
$\Leftrightarrow x^3 = 256 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{256} \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4}$ cm

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 A geratriz de um tronco de cone de bases paralelas mede 5 cm. Os raios das bases desse tronco medem 5 cm e 2 cm. Calcule o seu volume.

RESOLUÇÃO:



$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R\,.\,r)$$

$$V = \frac{\pi\,.\,4}{3}(5^2 + 2^2 + 5\,.\,2) = \frac{4\pi}{3}\,.\,39$$

$$V = 52\pi \text{ cm}^3$$

2 Calcular a área total do tronco de cone do exercício anterior.

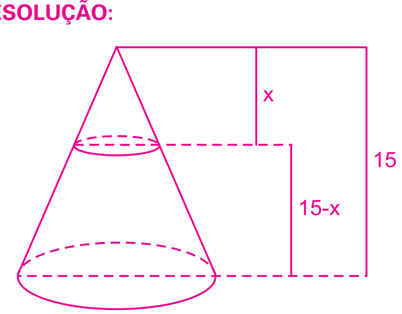
RESOLUÇÃO:

$A_T = A_L + A_B + A_b = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 =$

$= \pi\,.\,5(5 + 2) + \pi\,.\,5^2 + \pi\,.\,2^2 = 35\pi + 29\pi = 64\pi \text{ cm}^2$

3 A que distância do vértice devemos cortar um cone de revolução de 15 cm de altura, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja $\frac{1}{27}$ do volume do primeiro?

RESOLUÇÃO:



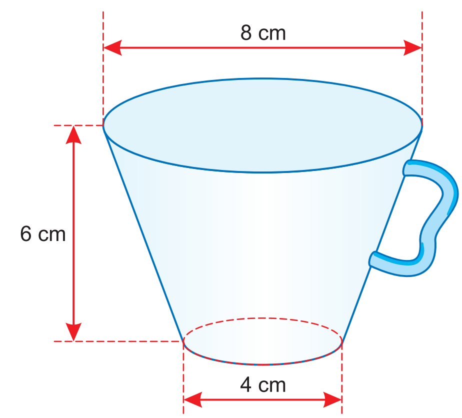
$$\frac{V_p}{V_g} = \frac{x^3}{15^3} = \left(\frac{x}{15}\right)^3$$

$$\frac{\frac{1}{27}V}{V} = \left(\frac{x}{15}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{27} = \left(\frac{x}{15}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

Distância = 5 cm

4 **(MACKENZIE – MODELO ENEM)** – Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura. Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é:



a) 168 cm^3 b) 172 cm^3 c) 166 cm^3
d) 176 cm^3 e) 164 cm^3

RESOLUÇÃO:

O volume máximo de líquido que a xícara pode conter é o volume do tronco do cone dado por

$$V = \frac{6}{3}\,.\,\left(\pi\,.\,4^2 + \pi\,.\,2^2 + \sqrt{\pi.\,4^2\,.\,\pi\,.\,2^2}\right)\text{cm}^3 =$$

$$= 2(16\pi + 4\pi + 8\pi)\text{ cm}^3 = 56\pi \text{ cm}^3$$

Supondo $\pi = 3$, resulta $V = 56\,.\,3 \text{ cm}^3 = 168 \text{ cm}^3$

Resposta: A

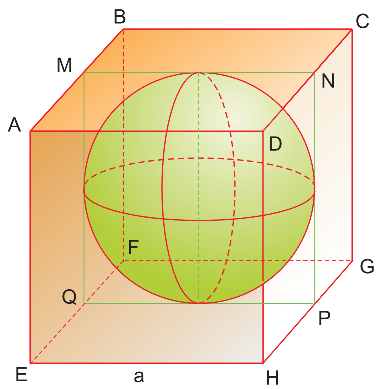
Módulo 47

Inscrição e circunscrição de sólidos I

Palavras-chave:
- Inscrito
- Circunscrito

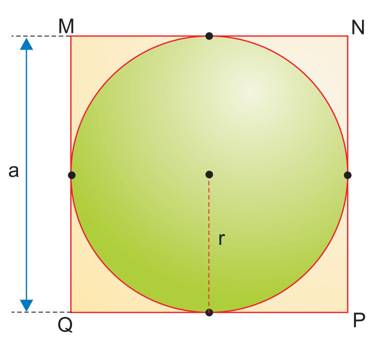
1. Esfera inscrita no cubo

Seja **r** o raio da esfera inscrita no cubo ABCDEFGH de aresta **a**.



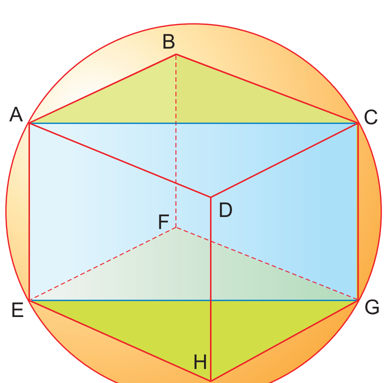
Seccionando o cubo por um plano que contém os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ obtém-se um círculo de raio **r** inscrito no quadrado MNPQ de lado **a**.

Assim sendo: $\boldsymbol{r = \dfrac{a}{2}}$

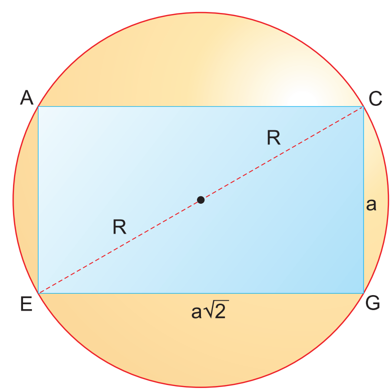


2. Cubo inscrito na esfera

Seja **R** o raio da esfera circunscrita ao cubo ABCDEFGH de aresta **a**.



Seccionando o cubo por um plano que contém os pontos **A**, **C** e o centro da esfera obtém-se o retângulo ACGE, de dimensões $\mathbf{a\sqrt{2}}$ e **a**, inscrito num círculo de raio **R**.



Nesse retângulo pode-se destacar o triângulo retângulo EGC de catetos $\mathbf{a\sqrt{2}}$ e **a** e hipotenusa **2R**.

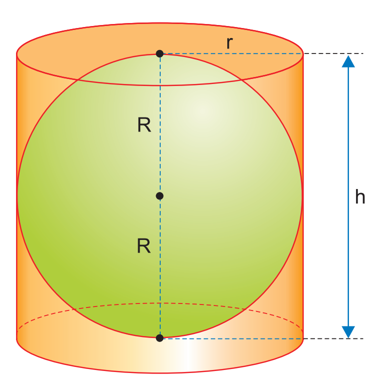
Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo temos:

$$(2R)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 3a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

3. Esfera inscrita no cilindro

Seja **R** o raio da esfera inscrita num cilindro de raio **r** e altura **h**.



a) A base do cilindro e a esfera têm o mesmo raio.

$\boldsymbol{r = R}$

b) A altura do cilindro é o dobro do raio da esfera.

$$h = 2 \, . \, R$$

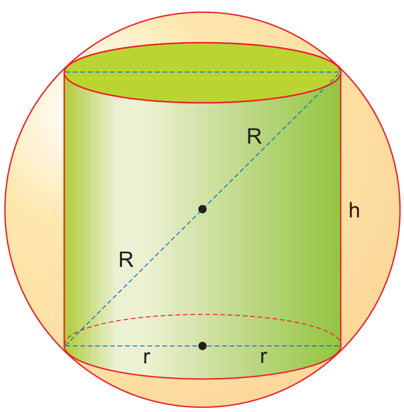
4. Cilindro inscrito na esfera

Sejam **r** e **h**, respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro inscrito na esfera de raio **R**.

Seccionando o cilindro por um plano que contém seu eixo obtém-se um retângulo de dimensões **2r** e **h** inscrito no círculo de raio **R**.

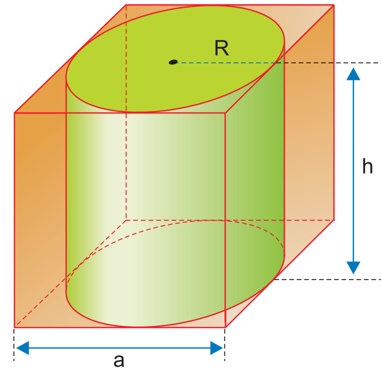
Assim sendo:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$



5. Cilindro inscrito no cubo

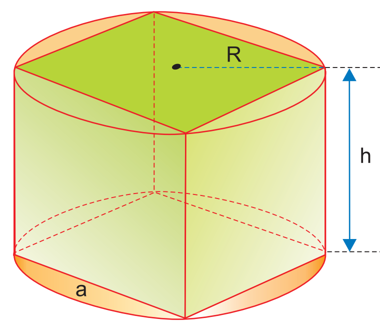
Se **R** e **h** são, respectivamente o raio da base e a altura do cilindro inscrito no cubo de aresta **a**, então:



$$R = \frac{a}{2}$$ e $$h = a$$

6. Cubo inscrito no cilindro

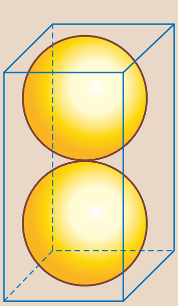
O raio **R** da base do cilindro é a metade da diagonal de um quadrado de lado **a**. A altura do cilindro é igual à aresta do cubo.



Assim: $$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$ e $$h = a$$

Exercícios Resolvidos

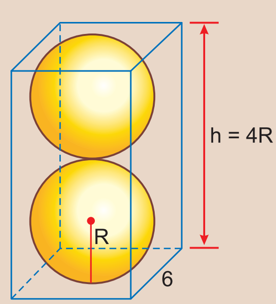
1 **(FATEC)** – Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo.



O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a:

a) 0,144 b) 0,206 c) 1,44
d) 2,06 e) 20,6

Resolução



Sejam R e h, respectivamente, as medidas, em centímetros, do raio da esfera e da altura do paralelepípedo. Assim,

a) $R = \dfrac{6}{2} = 3$

b) $h = 4R = 4 \, . \, 3 = 12$

Sendo V_L o volume do líquido, V_P o volume do paralelepípedo e V_E o volume da esfera, em centímetros cúbicos, temos:

$V_L = V_P - 2 \, . \, V_E = 6^2 \, . \, 12 - 2 \, . \, \dfrac{4}{3} \pi \, . \, 3^3 =$

$= 432 - 72\pi \cong 205{,}92$

Logo, o volume do líquido é aproximadamente 0,206 litro.

Resposta: B

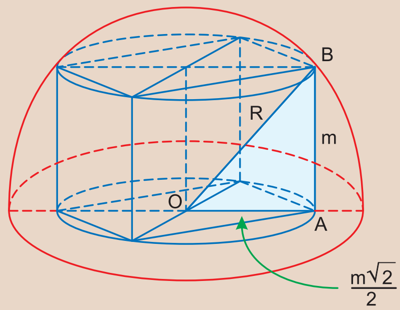
2 **(FUVEST)** – Um cubo de aresta **m** está inscrito em uma semiesfera de raio R, de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Então, **m** é igual a:

a) $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $R\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $R\,\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) R

e) $R\sqrt{\frac{3}{2}}$

Resolução



De acordo com o Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo AOB, tem-se: $(OA)^2 + (AB)^2 = (OB)^2$.

Assim:

$$\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3m^2}{2} = R^2 \Rightarrow m^2 = R^2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

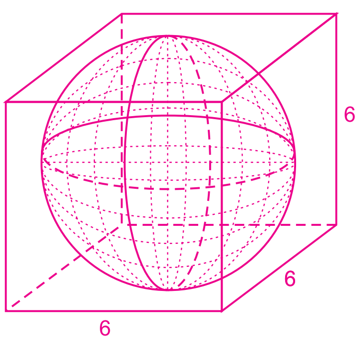
Resposta: A

Exercícios Propostos

1 O volume da esfera inscrita num cubo cuja aresta mede 6 cm é:

a) 30π cm³ b) 32π cm³ c) 34π cm³
d) 36π cm³ e) 38π cm³

RESOLUÇÃO:



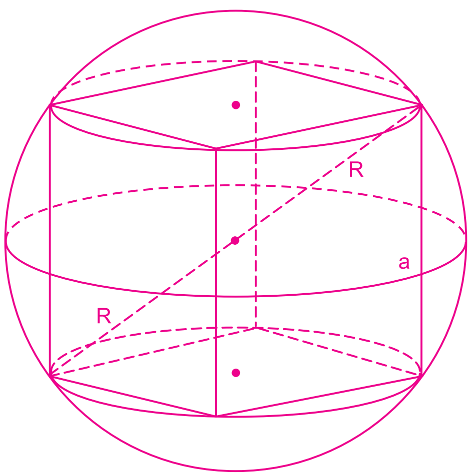
I) $R = \frac{6}{2} \Rightarrow R = 3$

II) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\, 3^3 \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$

Resposta: D

2 Calcular a área total de um cubo que está inscrito numa esfera cujo raio mede $2\sqrt{3}$ cm.

RESOLUÇÃO:



I) **Diagonal do cubo = Diâmetro de esfera**

$a\sqrt{3} = 2R$

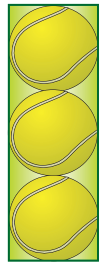
$a\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

$a = 4$

II) $A_T = 6a^2 \Rightarrow A_T = 6 \cdot 4^2 \Rightarrow A_T = 96 \text{ cm}^2$

3 **(MACKENZIE)** – Bolas de tênis, normalmente, são vendidas em embalagens cilíndricas contendo três unidades que tangenciam as paredes internas da embalagem. Numa dessas embalagens, se o volume não ocupado pelas bolas é 2π, o volume da embalagem é:

a) 6π b) 8π c) 10π
d) 12π e) 4π



RESOLUÇÃO:

I) Cálculo do raio r das bolas:

$$\pi \cdot r^2 \cdot 6r - 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 2\pi \Leftrightarrow 2\pi\, r^3 = 2\pi \Leftrightarrow r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1$$

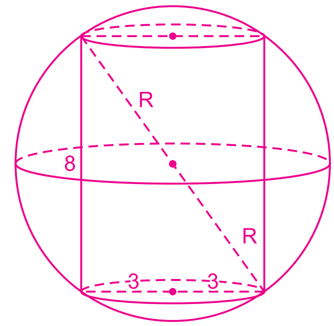
II) Cálculo do volume V da embalagem cilíndrica:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 6r \Leftrightarrow V = 6 \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow V = 6 \cdot \pi \cdot 1^3 \Leftrightarrow V = 6\pi$$

Resposta: A

4 Calcular a área da superfície esférica circunscrita a um cilindro circular reto de raio 3 cm e altura 8 cm.

RESOLUÇÃO:



I) $(2R)^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$2R = 10 \Rightarrow R = 5$

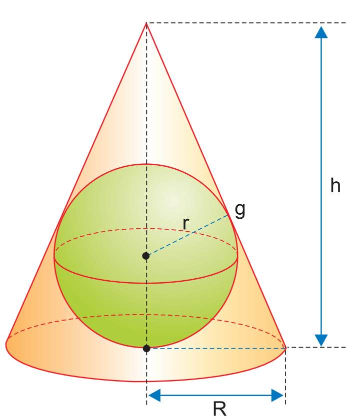
II) $A = 4\pi\, R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 5^2$

$A = 100\pi\ cm^2$

Módulo 48 — Inscrição e circunscrição de sólidos II

Palavras-chave:
- Inscrito
- Circunscrito

1. Esfera inscrita no cone



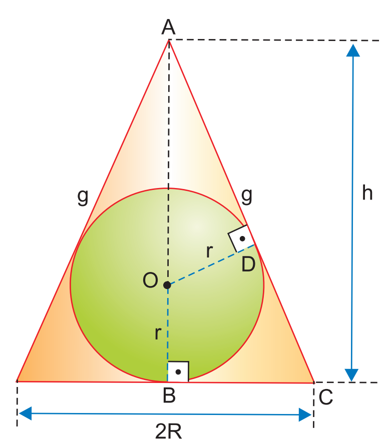
Seja **r** o raio da esfera inscrita no cone de raio **R**, altura **h** e geratriz **g**.

Seccionando o cone por um plano que contém seu eixo, obtém-se um círculo de raio **r** inscrito num triângulo isósceles de base **2R** e altura **h** e com os dois lados congruentes iguais a **g**.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC temos:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

O triângulo ADO, retângulo em **D**, é semelhante ao triângulo ABC, retângulo em **B**.

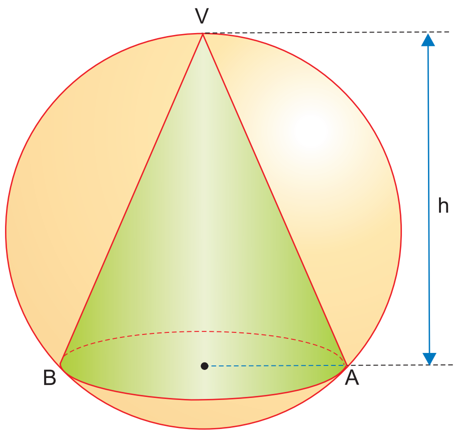


Da semelhança desses triângulos, notando que $AO = h - r$, temos:

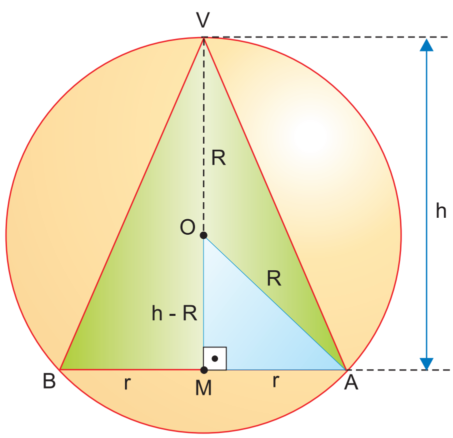
$$\frac{r}{R} = \frac{h - r}{g}$$

2. Cone inscrito na esfera

Sejam **r** e **h**, respectivamente, o raio e a altura do cone inscrito na esfera de raio **R**.



Seccionando os sólidos por um plano que contém o eixo do cone obtém-se um triângulo isósceles **VAB** de base **2r** e altura **h** inscrito no círculo de raio **R**.

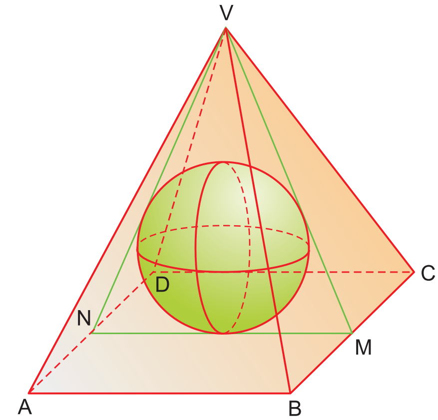


Sendo **O** o centro da esfera, **M** o centro da base do cone e notando que o triângulo **OMA** é retângulo, temos:

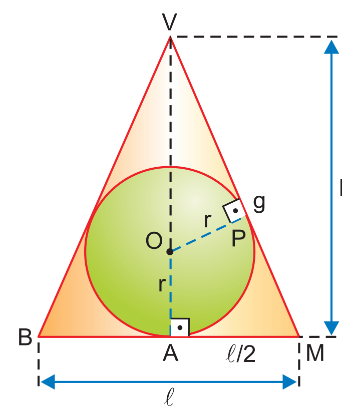
$$R^2 = r^2 + (h - R)^2$$

3. Esfera inscrita numa pirâmide regular de base quadrada

Seja **r** o raio da esfera inscrita na pirâmide regular de base quadrada e sejam **ℓ** e **h**, respectivamente, o lado da base e a altura da pirâmide.



Seccionando os sólidos por um plano que contém o vértice **V** da pirâmide e os pontos médios **M** e **N** dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, obtemos um círculo de raio **r** inscrito num triângulo isósceles de base **ℓ** e altura **h**.



Sendo VAM um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o apótema **g** da pirâmide e os catetos são **h** e $\dfrac{\ell}{2}$, aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

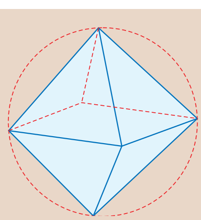
$$g^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

O triângulo VPO, retângulo em **P**, é semelhante ao triângulo VAM, retângulo em **A**. Usando a semelhança desses triângulos e notando que VM = g e VO = h – r, temos:

$$\frac{r}{\ell/2} = \frac{h - r}{g} \Leftrightarrow \frac{2r}{\ell} = \frac{h - r}{g}$$

Exercícios Resolvidos

1 De um cristal de rocha, com o formato de uma esfera, foi lapidada uma joia na forma de um octaedro regular, como mostra a figura seguinte.

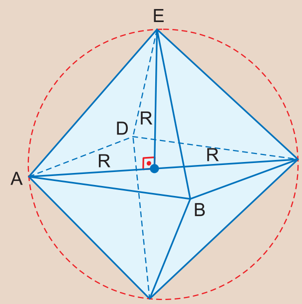


Se tal joia tem $9\sqrt{2}$ cm^3 de volume, quantos centímetros cúbicos de rocha foram retirados do cristal original para lapidá-la? (Use: $\pi = 3$)

a) $36\sqrt{2}$ b) $32\sqrt{2}$ c) $24\sqrt{2}$

d) $18\sqrt{2}$ e) $12\sqrt{2}$

Resolução



Seja R a medida, em centímetros, do raio da esfera. Sendo V_E o volume da esfera, V_J o volume da joia, V_P o volume da pirâmide ABCDE e V o volume de rocha retirado do cristal original, temos:

I) $V_J = 2 \,.\, V_P = 9\sqrt{2}\ cm^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, \dfrac{1}{3} \,.\, \dfrac{(2R)^2}{2} \,.\, R = 9\sqrt{2}\ cm^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^3 = \dfrac{27\sqrt{2}}{4}\ cm^3$

II) $V_E = \dfrac{4}{3}\ \pi\ R^3 =$

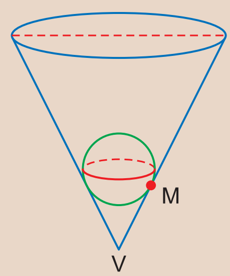
$= \dfrac{4}{3} \,.\, 3 \,.\, \dfrac{27\sqrt{2}}{4}\ cm^3 = 27\sqrt{2}\ cm^3$

III) $V = V_E - V_J =$

$= 27\sqrt{2}\ cm^3 - 9\sqrt{2}\ cm^3 = 18\sqrt{2}\ cm^3$

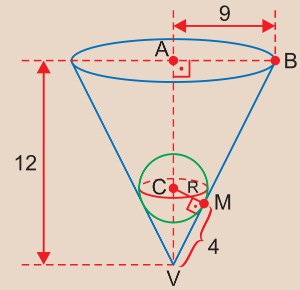
Resposta: D

2 **(MACKENZIE)** – Na figura, a esfera foi introduzida no cone e verificou-se que $\overline{VM} = 4$, sendo M ponto de tangência. Se o cone reto tem altura 12 e raio da base 9, o volume da esfera é:



a) 12π b) 48π c) 32π
d) 36π e) 64π

Resolução



Seja R o raio da esfera, considerando a semelhança entre os triângulos ABV e MCV temos:

$\dfrac{R}{9} = \dfrac{4}{12} \Leftrightarrow R = 3$

Logo, o volume da esfera será:

$V = \dfrac{4}{3}\ \pi\ R^3 = \dfrac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, 3^3 \Leftrightarrow V = 36\,\pi$

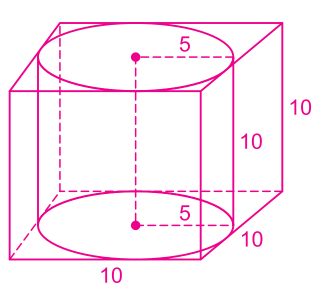
Resposta: D

Exercícios Propostos

1 **(MODELO ENEM)** – Um fabricante de molhos enlata seus produtos em embalagem cilíndrica circular reta e posteriormente encaixota uma a uma em embalagens cúbicas de 10 centímetros de aresta. Se as faces da caixa cúbica tangenciam a embalagem cilíndrica, então a pessoa que adquire este molho pela aparência externa da caixa está sendo lesada em aproximadamente:

a) 15,5% b) 21,5% c) 32%
d) 33,5% e) 38%

RESOLUÇÃO:



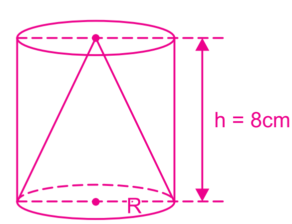
$\dfrac{V_{cil.}}{V_{cubo}} = \dfrac{\pi \,.\, 5^2 \,.\, 10}{10^3} = \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{V_{cubo} - V_{cil.}}{V_{cubo}} = \dfrac{4 - \pi}{4} \cong 0{,}215 = 21{,}5\%$

Resposta: B

2 Determinar o volume de um cone circular reto inscrito num cilindro equilátero de altura 8 m.

RESOLUÇÃO:



I) Cilindro equilátero: h = 8m ⇒ R = 4 m

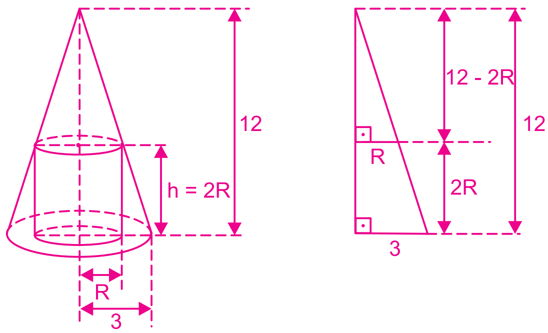
II) O volume do cone é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \,.\, A_B \,.\, h = \dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, R^2 \,.\, h = \dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 4^2 \,.\, 8$

$V = \dfrac{128 \,.\, \pi}{3}\ m^3$

3 Determinar o volume de um cilindro equilátero inscrito num cone circular reto de raio da base 3 m e altura 12 m.

RESOLUÇÃO:



I) $\frac{3}{R} = \frac{12}{12 - 2R} \Rightarrow 4R = 12 - 2R \Rightarrow R = 2 \text{ m}$

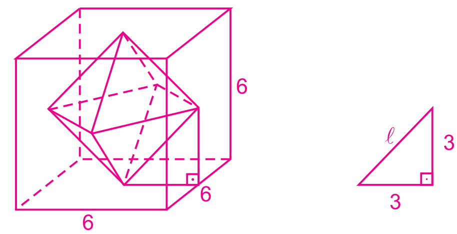
II) $V = A_B \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot R^3 = 2 \cdot \pi \cdot 2^3$

$V = 16 \cdot \pi \text{ m}^3$

4 Os centros das faces de um cubo de aresta 6 m são os vértices de um octaedro regular cujo volume é:

a) $216\sqrt{3}$ b) $216\sqrt{5}$ c) 18
d) $54\sqrt{3}$ e) 36

RESOLUÇÃO:



I) $\ell^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

II) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 3$

$V = 36 \text{ m}^3$

Resposta: E

Módulo 49 – Sólidos de revolução

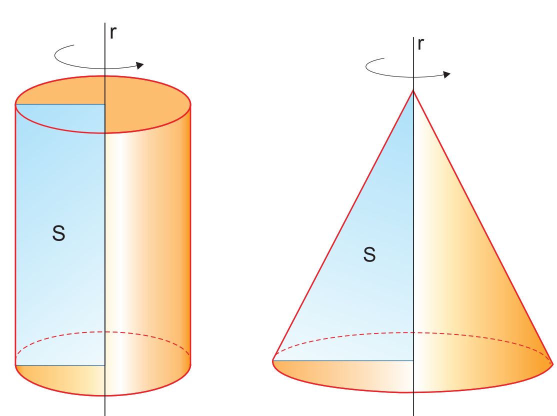
Palavra-chave:

• Rotação de figuras planas

A rotação, de 360°, de uma superfície plana **S** em torno de uma reta **r**, coplanar com **S**, gera um sólido chamado **sólido de revolução**.

O **cilindro circular reto** é um **sólido de revolução** gerado pela rotação, de 360°, de um retângulo em torno de um de seus lados.

O **cone circular reto** também é um **sólido de revolução** gerado pela rotação, de 360°, de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



Os sólidos abaixo são outros exemplos de sólidos de revolução.

Figura 1

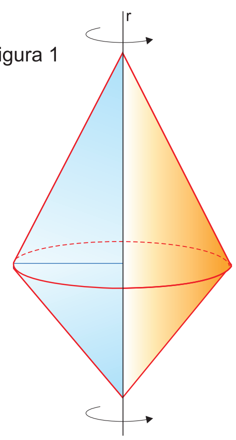


Figura 2

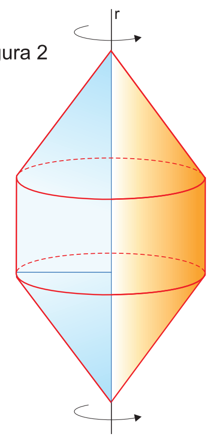
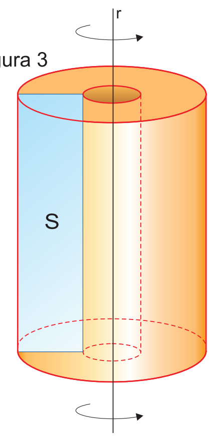
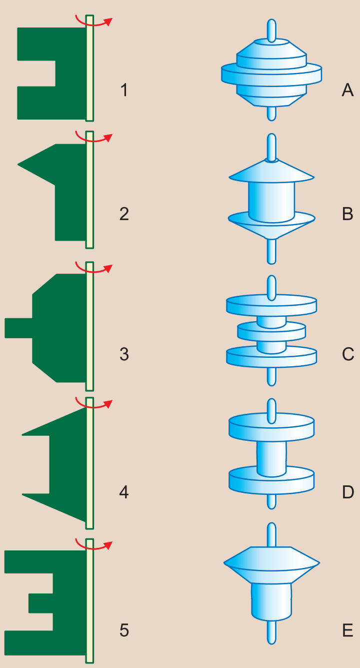


Figura 3



Exercícios Resolvidos

1 **(ENEM)** – Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras seguintes em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

a) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.
b) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.
c) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.
d) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.
e) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

Resolução

Girando de 360° cada figura plana em torno da haste indicada, obtém-se:

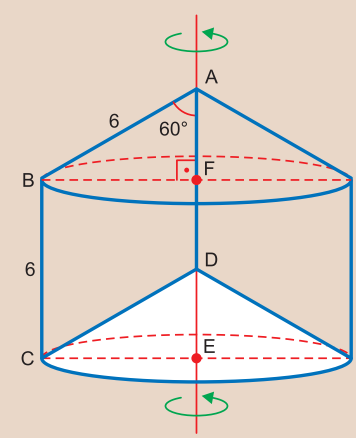
- para a figura 1, o sólido D;
- para a figura 2, o sólido E;
- para a figura 3, o sólido A;
- para a figura 4, o sólido B;
- para a figura 5, o sólido C.

Resposta: D

2 **(FATEC)** – Considere o losango cujos lados medem 6 cm e um dos ângulos internos mede 60°. A rotação desse losango em torno de um de seus lados gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é

a) $146\sqrt{3}\pi$ b) 162π c) $162\sqrt{3}\pi$
d) 178π e) $178\sqrt{3}\pi$

Resolução



A rotação de 360° do losango ABCD em torno do lado $\overline{AD}$ gera um sólido equivalente ao cilindro gerado pela rotação de 360° do retângulo BCEF em torno do lado $\overline{EF}$.

Assim, sendo V o volume do cilindro, em centímetros cúbicos, temos:

$V = \pi.(BF)^2.(BC) = \pi.(6 \,.\, \text{sen } 60°)^2 \,.\, 6 =$

$= \pi \,.\, \left(6 \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 .\, 6 = 162\pi$

Resposta: B

Exercícios Propostos

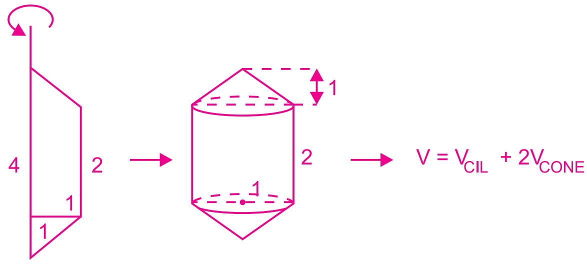
1 **(MODELO ENEM)** – Num trapézio isósceles, a base maior mede 4 cm, a base menor 2 cm e a altura 1 cm. O volume do sólido gerado pela revolução de 360° da superfície do trapézio em torno da base maior é

a) 2π cm^3 b) $\dfrac{7\pi}{3}$ cm^3 c) $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3

d) 3π cm^3 e) $\dfrac{10\pi}{3}$ cm^3

RESOLUÇÃO:

Observação: A figura 2 da teoria pode ser aproveitada neste exercício.



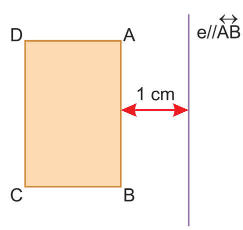
$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1$

$V = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

$V = \frac{8\pi}{3}\ \text{cm}^3$

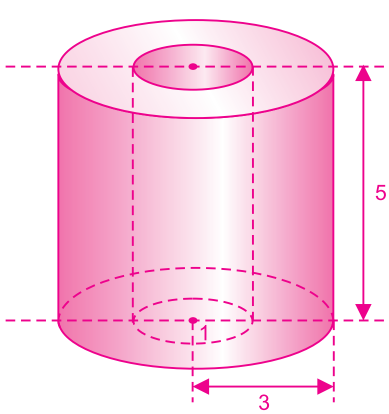
Resposta: C

2 **(MODELO ENEM)** – No retângulo ABCD, temos AB = 5 cm e BC = 2 cm. A área total do sólido gerado pela revolução de 360° da região do retângulo ABCD em torno do eixo e paralelo ao lado $\overline{AB}$ e distante 1 cm de $\overline{AB}$ como mostra a figura é, em centímetros quadrados:



a) 53π b) 54π c) 55π
d) 56π e) 57π

RESOLUÇÃO:



Observação: A figura 3 da teoria pode ser aproveitada neste exercício.

$A_T = A_{T \text{ GRANDE}} + A_{L \text{ PEQUENO}} - 2A_{\odot}$

$A_T = (2\pi \cdot 3 \cdot 5 + 2\pi\, 3^2) + (2\pi \cdot 1 \cdot 5) - (2\pi \cdot 1^2)$

$A_T = 30\pi + 18\pi + 10\pi - 2\pi$

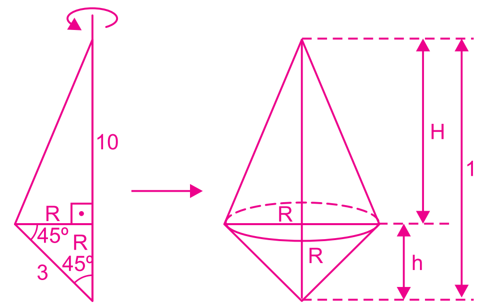
$A_T = 56\pi\ \text{cm}^2$

Resposta: D

3 Num triângulo o lado maior mede 10, o menor 3 e o ângulo formado por esses dois lados, 45°. O volume do sólido gerado por uma revolução desse triângulo em torno do lado maior é:

a) $5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}\,\pi$ c) $\frac{45\sqrt{2}}{2}\,\pi$
d) 15π e) 45π

RESOLUÇÃO:
Observação: A figura 1 da teoria pode ser aproveitada neste exercício.



I) $R^2 + R^2 = 9 \Leftrightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{2}$

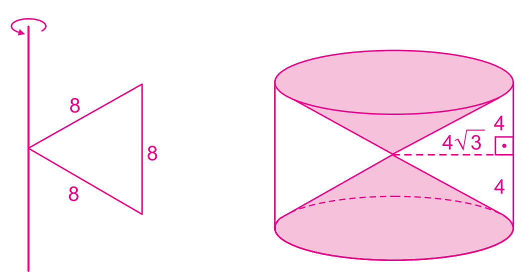
II) $V = V_G + V_p \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h =$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (H + h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{9}{2} \cdot 10 = 15\pi$

Resposta: D

4 Um sólido é gerado pela rotação de um triângulo equilátero ao redor de um eixo paralelo a um de seus lados, conduzido pelo vértice oposto a esse lado. Qual é o volume desse sólido, se o lado do triângulo mede 8 cm?

RESOLUÇÃO:



$V = V_{cilindro} - 2V_{cone}$

$V = \pi(4\sqrt{3})^2 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{\pi(4\sqrt{3})^2 \cdot 4}{3}$

$V = \frac{2}{3}\,\pi(4\sqrt{3})^2 \cdot 8$

$V = \frac{2}{3}\,\pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot 8$

$V = 256\pi\ \text{cm}^3$

Módulo 50

Geometria de posição – entes primitivos e postulados

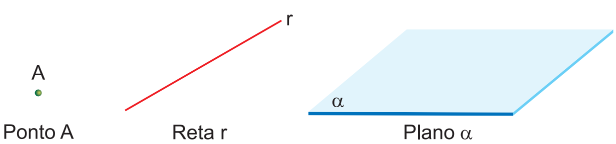
Palavras-chave:

• Ponto • Reta • Plano

1. Entes primitivos

Entende-se por “ente primitivo” tudo que não pode ser definido. Na geometria, usamos três conceitos primitivos: o **ponto**, a **reta** e o **plano**. Apesar de não podermos defini-los, podemos estudá-los e relacioná-los e é isto que faremos no estudo da geometria de posição.

Representam-se o **ponto**, a **reta** e o **plano** da seguinte forma:



Observação

Para representar os pontos usamos, geralmente, letras maiúsculas; para as retas, letras minúsculas e para os planos, letras do alfabeto grego.

2. Postulados

Os postulados são proposições aceitas sem demonstração. Apresentamos a seguir os principais postulados da geometria de posição.

Observação

É importante saber que os teoremas são proposições que podem ser demonstradas a partir dos postulados e de propriedades já demonstradas.

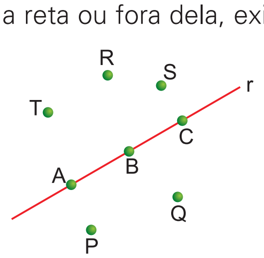
3. Postulados de existência

Postulado 1

Existem ponto, reta e plano.

Postulado 1a

Na reta ou fora dela, existem infinitos pontos



$A \in r$

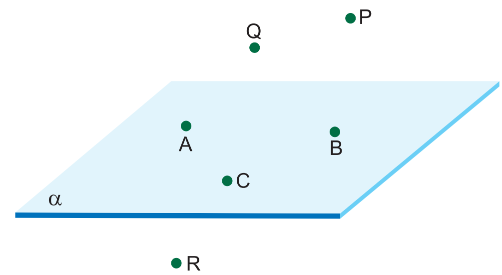
$P \notin r$

Observação

O postulado **1a** permite que se tome numa reta ou fora dela, tantos pontos quantos forem necessários para a resolução de um exercício.

Postulado 1b

No plano ou fora dele, existem infinitos pontos



$A \in \alpha$

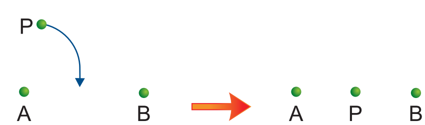
$P \notin \alpha$

Observação

O postulado **1b** permite que se tome num plano ou fora dele, tantos pontos quantos forem necessários para a resolução de um exercício.

Postulado 1c

Dados dois pontos distintos **A** e **B**, sempre existe um terceiro ponto **P** entre eles.

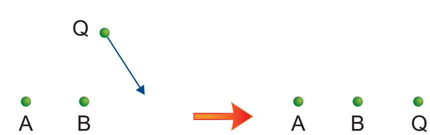


Observação

O postulado **1c** nos permite assimilar melhor a ideia de que o ponto não tem dimensão.

Postulado 1d

Dados dois pontos distintos **A** e **B**, existe sempre um ponto **Q**, tal que **B** está entre **A** e **Q**.



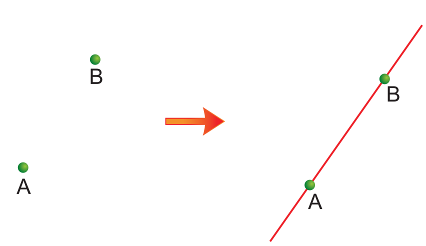
Observação

O postulado **1d** nos permite assimilar melhor a ideia de que o espaço é infinito.

4. Postulados da determinação

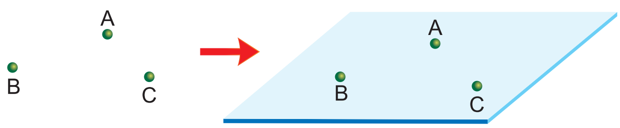
Postulado 2a

Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.



Postulado 2b

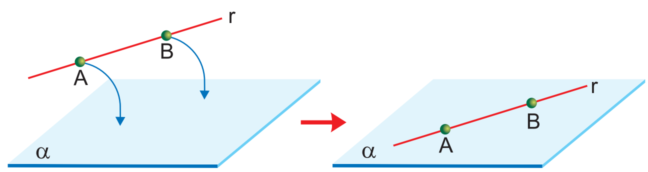
Três pontos **não colineares** determinam um único plano que os contém.



5. Postulado de inclusão

Postulado 3

Se dois pontos **distintos** de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.



6. Postulados da divisão

Postulado 4a – Divisão do plano

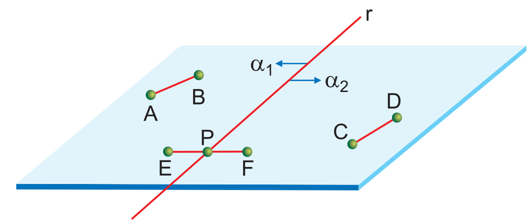
Uma reta **r** contida em um plano $\boldsymbol{\alpha}$, divide-o em duas regiões $\boldsymbol{\alpha_1}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$ denominadas **semiplanos** e tais que

1) se $A \in \alpha_1$, $A \notin r$, $B \in \alpha_1$ e $B \notin r$, então $\overline{AB} \subset \alpha_1$;

2) se $C \in \alpha_2$, $C \notin r$, $D \in \alpha_2$ e $D \notin r$, então $\overline{CD} \subset \alpha_2$;

3) se $E \in \alpha_1$, $E \notin r$, $F \in \alpha_2$ e $F \notin r$, então existe um único ponto **P** tal que $\overline{EF} \cap r = \{P\}$.

A reta **r** é chamada de origem dos semiplanos.



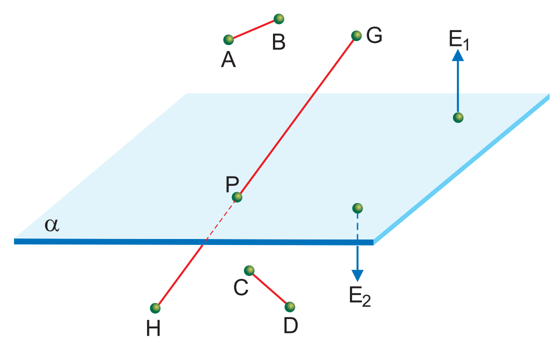
Postulado 4b – Divisão do espaço

Um plano $\boldsymbol{\alpha}$ divide o espaço em duas regiões $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ denominadas **semiespaços** e tais que

1) se $A \in E_1$, $A \notin \alpha$, $B \in E_1$ e $B \notin \alpha$, então $\overline{AB} \subset E_1$;

2) se $C \in E_2$, $C \notin \alpha$, $D \in E_2$ e $D \notin \alpha$, então $\overline{CD} \subset E_2$;

3) se $G \in E_1$, $G \notin \alpha$, $H \in E_2$ e $H \notin \alpha$, então existe um único ponto **P** tal que $\overline{GH} \cap \alpha = \{P\}$.



Exercícios Resolvidos

1 Dadas as proposições:

I) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.
II) Três pontos distintos determinam um único plano que os contém.
III) Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano. É correto afirmar que

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) apenas I e II são falsas.
d) apenas II e III são falsas.
e) apenas I e III são falsas.

Resolução

A proposição (I) é verdadeira (postulado da determinação de reta).
A proposição (II) é falsa (os pontos devem ser não colineares).
A proposição (III) é falsa (os dois pontos devem ser distintos).

Resposta: D

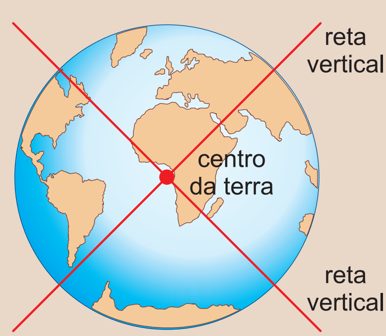
2 Considere as duas seguintes definições:

I. Uma reta vertical é uma reta contendo o centro da Terra.
II. Uma reta horizontal é uma reta perpendicular a alguma reta vertical.

Com base nestas definições, a afirmação **falsa** é:

a) Duas retas horizontais podem ser paralelas.
b) Toda reta vertical é uma reta horizontal.
c) Toda reta é horizontal.
d) Duas retas horizontais podem ser perpendiculares.
e) Duas retas verticais distintas podem ser paralelas.

Resolução



Duas retas verticais distintas são sempre concorrentes, pois apresentam um ponto em comum, que é o centro da Terra.

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Cite os postulados da existência.

RESOLUÇÃO:
a) Na reta ou fora dela, existem infinitos pontos.
b) No plano ou fora dele, existem infinitos pontos.
c) Entre dois pontos distintos, sempre existe mais um.

2 Cite os postulados da determinação e da inclusão.

RESOLUÇÃO:
Determinação:
a) Dois pontos distintos determinam uma reta.
b) Três pontos distintos não colineares determinam um plano.
***Inclusão*:**
Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, esta reta está contida neste plano.

3 **(MODELO ENEM)** – Analise se as frases são verdadeiras ou falsas e justifique a resposta dada.
a) Todas as afirmações podem ser demonstradas.
b) Plano por definição é um conjunto de pontos coplanares.
c) Ponto não tem dimensão.
d) Reta, sendo ente primitivo, não tem definição.
e) Teorema é sempre um postulado.
f) Para se obter um plano basta obter 3 dos seus pontos não colineares.

RESOLUÇÃO:
a) Falso. Exemplo: postulado.
b) Falso. Plano não tem definição.
c) Verdadeiro.
d) Verdadeiro.
e) Falso. Teorema tem sempre uma demonstração.
f) Verdadeiro.

4 É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme.
Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

RESOLUÇÃO:
Isso não acontece com uma mesa de três pernas porque três pontos não colineares determinam um só plano que os contém. No caso da mesa de 4 pernas há a possibilidade do "quarto pé" não pertencer ao plano determinado pelos outros três.

5 Cite os postulados da divisão.

RESOLUÇÃO:
a) Uma reta contida em um plano divide-o em duas regiões denominadas semiplanos.
b) Um plano divide o espaço em duas regiões denominadas semiespaços.

Módulo 51 – Retas e planos no espaço

Palavras-chave:
• Paralela • Concorrente • Reversa
• Contida • Incidente • Secante

1. Posições relativas entre duas retas

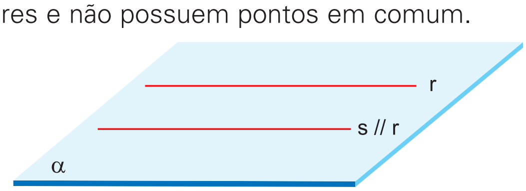
Paralelas coincidentes

Duas retas são **paralelas coincidentes** quando possuem todos os pontos em comum.

$r \cap s = r = s$

Paralelas distintas

Duas retas são **paralelas distintas** quando são coplanares e não possuem pontos em comum.

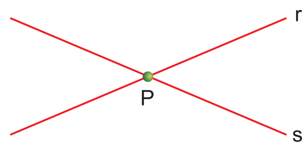


$r \cap s = \varnothing$

Observação: duas retas são coplanares quando existe um plano que as contém.

Concorrentes

Duas retas são **concorrentes** quando elas possuem um único ponto em comum.

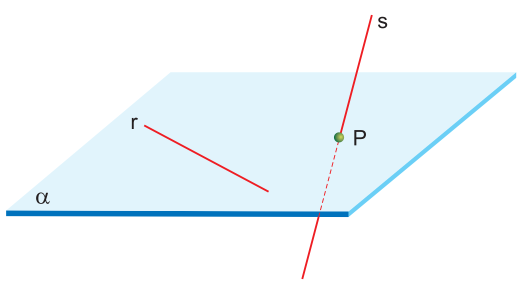


$r \cap s = \{P\}$

Observação: lembre-se que duas retas concorrentes que determinam um ângulo reto são chamadas **perpendiculares**.

Reversas

Duas retas são **reversas** quando não são coplanares, ou seja, quando não existe um plano que as contém.



$r \subset \alpha$; $s \cap \alpha = \{P\}$; $r \cap s = \varnothing$

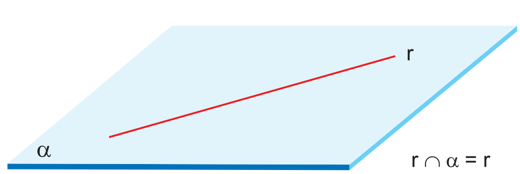
Observação: Para medir o ângulo entre duas retas reversas, consideramos uma paralela a uma delas que intercepte a outra e em seguida medimos o ângulo. Quando duas retas reversas determinam ângulo reto, elas são ditas **ortogonais**.

2. Posições relativas entre reta e plano

Contida

Uma reta é dita **contida** num plano quando todos os seus pontos pertencem ao plano.

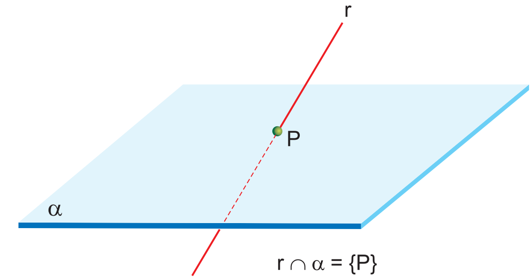
Lembre-se que para **r** estar contida em **α** é **suficiente** que dois pontos distintos de **r** estejam em **α**.



$r \cap \alpha = r$

Incidente

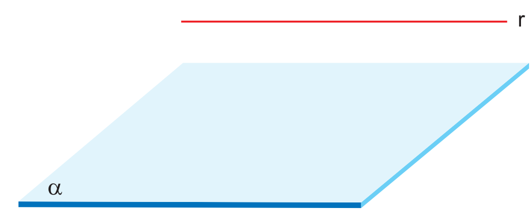
Uma reta é dita **incidente** num plano quando ela possui um único ponto em comum com o plano.



$r \cap \alpha = \{P\}$

Paralela

Uma reta é dita **paralela** a um plano quando ela não possui ponto em comum com o plano.

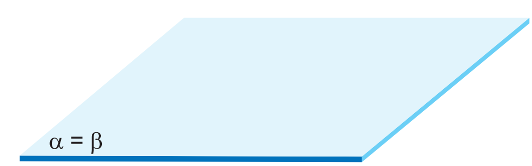


$r \cap \alpha = \varnothing$

3. Posições relativas entre dois planos

Paralelos coincidentes

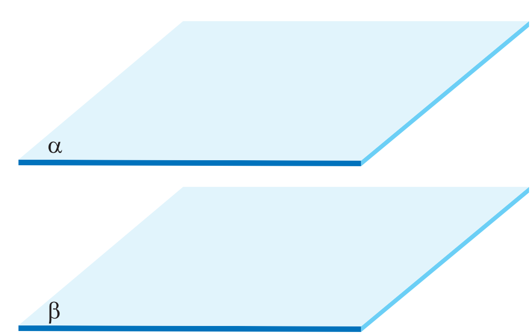
Dois planos são **paralelos coincidentes** quando possuem todos os pontos em comum.



$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Paralelos distintos

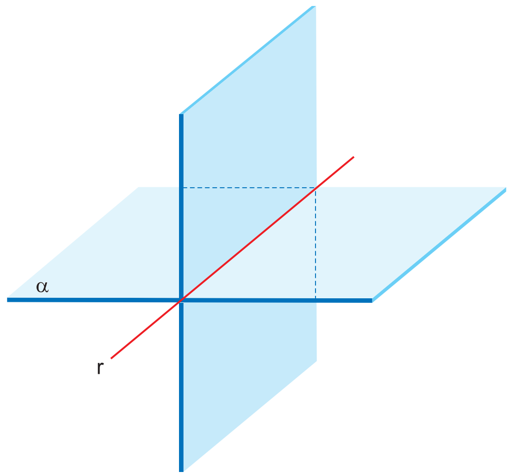
Dois planos são **paralelos distintos** quando não possuem ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Secantes

Dois planos são **secantes** quando interceptam-se numa reta.



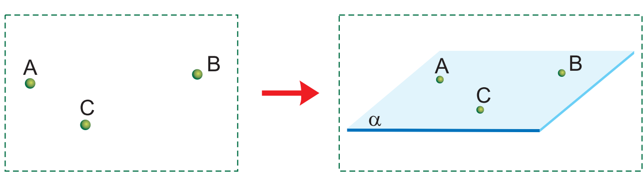
$\alpha \cap \beta = r$

4. Determinação de planos

Existem quatro formas de determinar um plano:

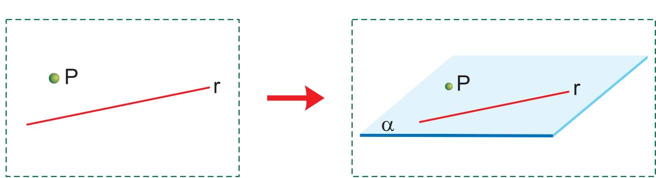
Postulado

Três pontos não colineares determinam um único plano que os contém.



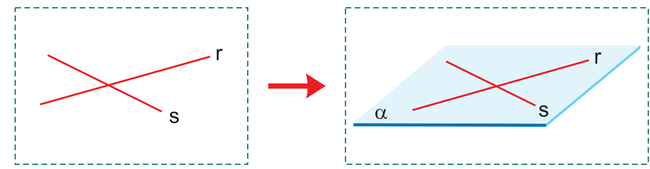
Teorema

Uma reta e um ponto, não pertencente a ela, determinam um único plano que os contém.



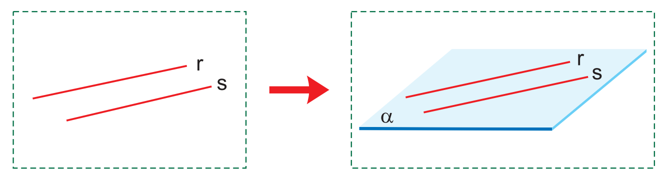
Teorema

Duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.



Teorema

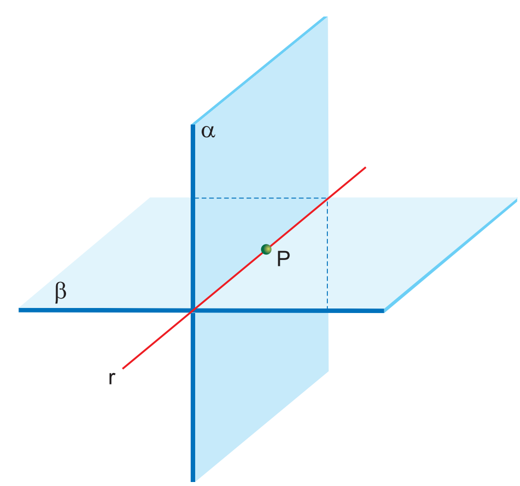
Duas retas paralelas distintas determinam um único plano que as contém.



5. Intersecção de planos

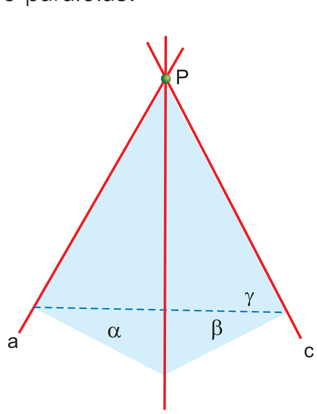
Intersecção de dois planos

Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então eles se interceptam numa reta.

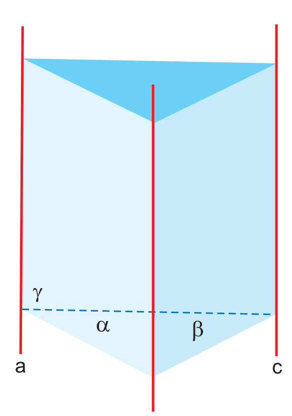


Intersecção de três planos

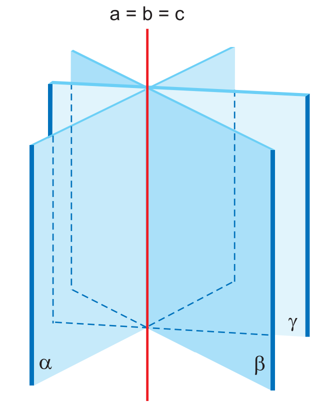
Se três planos distintos interceptam-se dois a dois em três retas, então elas são concorrentes num mesmo ponto ou são paralelas.



a, b e c concorrem no ponto P



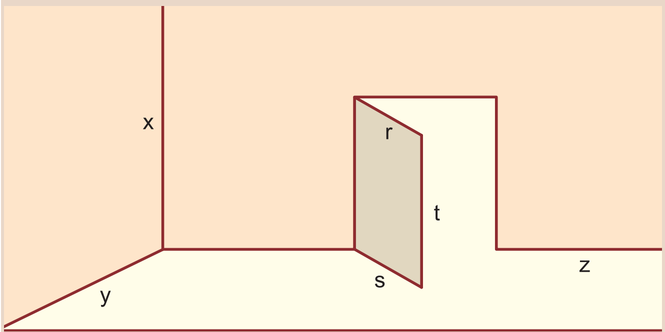
a, b e c são paralelas distintas



a, b e c são paralelas coincidentes

Exercícios Resolvidos

1 **(FAAP)** – A figura abaixo mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



As retas **r** e **s**; **s** e **t**; **x** e **r** têm, respectivamente, as posições relativas:

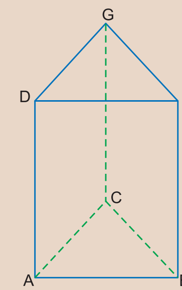
a) paralelas, paralelas e perpendiculares.
b) paralelas, perpendiculares e reversas.
c) paralelas, perpendiculares e perpendiculares.
d) reversas, paralelas e perpendiculares.
e) perpendiculares, reversas e paralelas.

Resolução

1) As retas **r** e **s** são paralelas.
2) As retas **s** e **t** são perpendiculares.
3) As retas **x** e **r** são reversas.

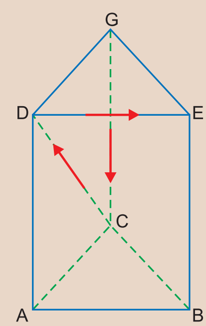
Resposta: B

2 **(FUVEST)** – Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares *ABC* e *DEG*, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice *G*, percorreu toda a aresta perpendicular à base *ABC*, para em seguida caminhar toda a diagonal da face *ADGC* e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a $\overline{CG}$. A formiga chegou ao vértice



a) A b) B c) C d) D e) E

Resolução



1º trecho do trajeto: "partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC" (aresta $\overline{GC}$), chegando a C.

2º trecho do trajeto: partiu do vértice C, "caminhou toda a diagonal da face ADGC" (diagonal $\overline{CD}$), chegando a D.

3º trecho do trajeto: partiu do vértice D, "percorreu a aresta reversa a $\overline{CG}$" (aresta $\overline{DE}$), chegando ao vértice E.

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Complete:

a) Duas retas que não têm pontos em comum são ....**paralelas distintas**.... ou ....**reversas**....

b) Duas retas que têm ponto em comum são ....**concorrentes**.... ou ....**coincidentes**....

c) Dois planos que não têm pontos em comum são ....**paralelos distintos**....

d) Dois planos que têm ponto em comum são ....**secantes**.... ou ....**coincidentes**....

e) Se dois planos distintos possuem um ponto em comum eles são ....**secantes**.... e a sua intersecção é ....**uma reta**....

2 Coloque (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas:

( ) Duas retas que têm ponto em comum são concorrentes.
( ) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas distintas.
( ) Duas retas não coplanares são sempre reversas.
( ) Se uma reta não tem ponto em comum com um plano, ela é paralela a ele.
( ) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro determinam neste último intersecções paralelas.

RESOLUÇÃO:
F, F, V, V, V

3 **(MODELO ENEM)** – Assinale a alternativa **falsa**:

a) Se dois planos são paralelos distintos, então toda reta de um deles é paralela ou reversa a qualquer reta do outro.
b) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
c) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
d) Se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a um outro plano, então os dois planos são paralelos.
e) Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

Resposta: C

4 Coloque (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas.

( ) Dois planos sendo paralelos, toda reta que fura um fura o outro.
( ) Dois planos sendo paralelos, todo plano que intercepta um intercepta o outro.
( ) Dois planos sendo paralelos, se um terceiro os interceptar, o fará em retas paralelas.

RESOLUÇÃO:
V, V, V

Paralelismo

Palavra-chave:

• Teorema de Tales

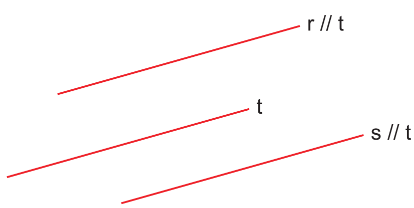
1. Paralelismo

Transitividade no paralelismo

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, t \\ s \,//\, t \end{array}\right\} \Rightarrow r \,//\, s$$

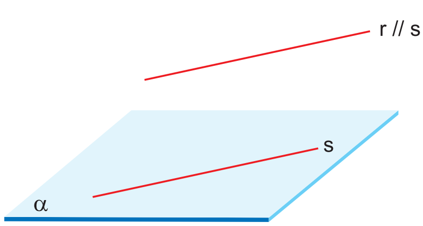


2. Teorema fundamental do paralelismo

A condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano é que não esteja contida nele e seja paralela a uma reta desse plano.

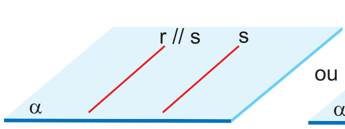
Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, s \\ s \subset \alpha \\ r \not\subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \,//\, \alpha$$

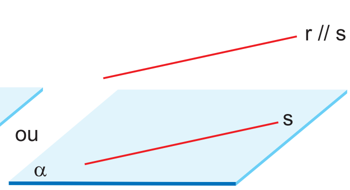


Consequências

a) Dadas duas retas paralelas distintas, todo plano que contém uma é paralelo ou contém a outra.



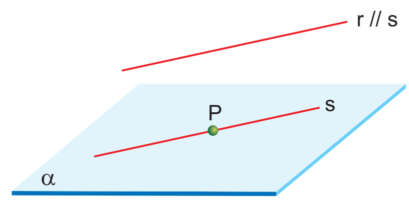
ou



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, s \\ s \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha \text{ ou } r \,//\, \alpha$$

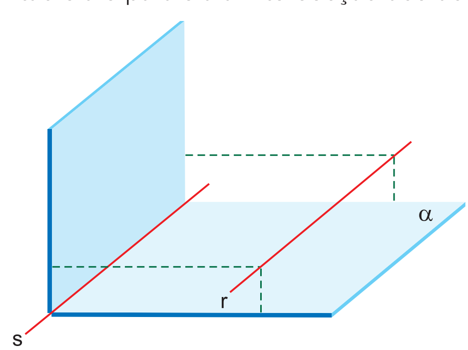
b) Se uma reta é paralela a um plano, toda reta paralela a ela e tendo um ponto em comum com o plano estará contida nele.



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, \alpha \\ s \,//\, r \\ \exists\, P \in s \mid P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \alpha$$

c) Se um reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à intersecção dos dois planos.



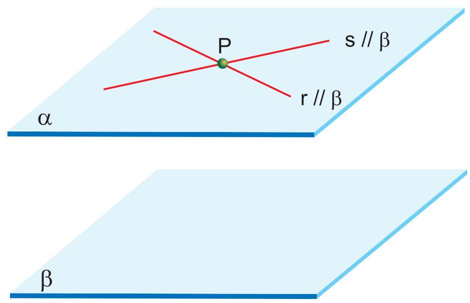
Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \,//\, \alpha \\ r \,//\, \beta \\ \alpha \cap \beta = s \end{array}\right\} \Rightarrow r \,//\, s$$

Observe que o recíproco não é verdadeiro, pois ela pode estar contida nos planos.

3. Teorema fundamental do paralelismo de planos

A condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é um deles conter duas retas concorrentes entre si e paralelas ao outro.

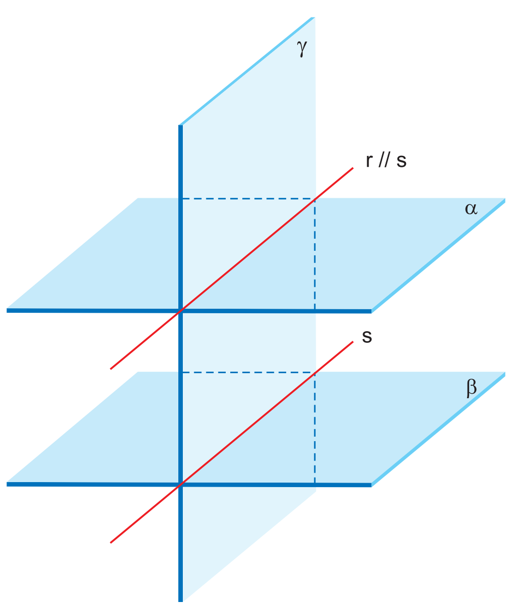


Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \text{ e } r \,//\, \beta \\ s \subset \alpha \text{ e } s \,//\, \beta \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha \,//\, \beta$$

4. Propriedades do paralelismo de planos

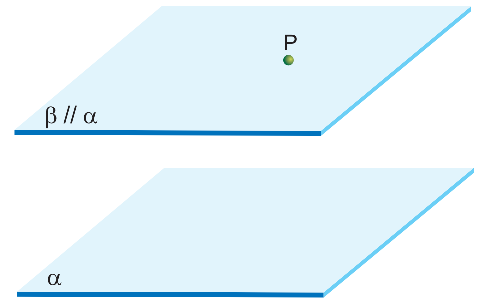
a) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro têm intersecções paralelas.



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \,//\, \beta \\ \gamma \cap \alpha = r \\ \gamma \cap \beta = s \end{array}\right\} \Leftrightarrow r \,//\, s$$

b) Por um ponto não pertencente a um plano existe, e é único, o plano paralelo a ele (extensão do Postulado de Euclides da Geometria Plana).

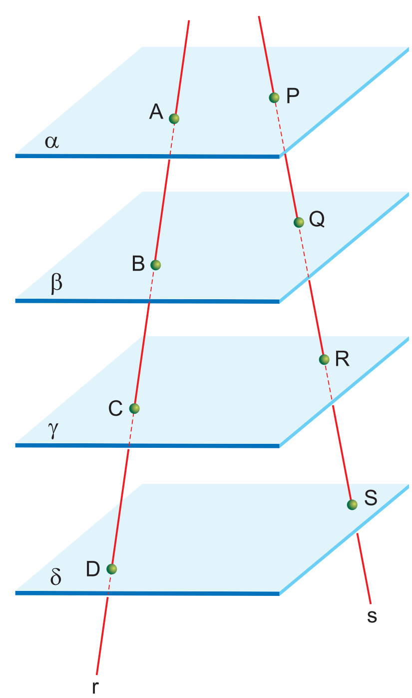


Simbolicamente:

$$\text{Existe um único plano } \beta \text{ tal que: } \left\{\begin{array}{l} P \in \beta \\ P \notin \alpha \\ \beta \,//\, \alpha \end{array}\right.$$

c) Teorema de Tales

Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos correspondentes respectivamente proporcionais.



Simbolicamente:

$$\alpha \,//\, \beta \,//\, \gamma \,//\, \delta \Leftrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{AC}{PR}$$

Observação

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ da transversal **r** são respectivamente correspondentes aos segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{PR}$ da transversal **s**.

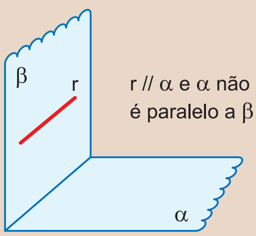
Exercícios Resolvidos

1 **(FUND. CARLOS CHAGAS-SP)** – Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que:

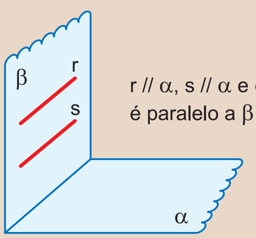
a) uma reta de um seja paralela ao outro.
b) duas retas de um sejam paralelas ao outro.
c) duas retas paralelas de um sejam paralelas ao outro.
d) toda reta de um seja paralela a qualquer reta do outro.
e) um deles contenha duas retas concorrentes, paralelas ao outro.

Resolução

a) Falso



b) Falso



c) Falso. O desenho do item (b) serve como contraexemplo.

d) Falso. Toda reta de um dos planos será paralela com infinitas retas do outro, mas também será reversa com infinitas retas do outro.

e) Verdadeiro. Teorema fundamental do paralelismo de planos.

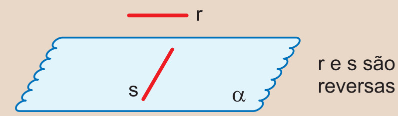
Resposta: E

2 **(MACKENZIE)** – A reta **r** é paralela ao plano α. Então,

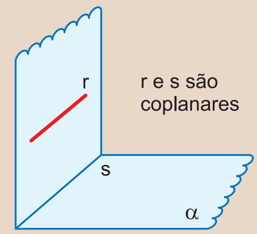
a) todas as retas de α são paralelas a **r**.
b) a reta **r** não pode ser coplanar com nenhuma reta de α.
c) existem em α retas paralelas a **r** e também existem em α retas reversas com **r**.
d) existem em α retas paralelas a **r** e também retas perpendiculares a **r**.
e) todo plano que contém **r** é paralelo a α.

Resolução

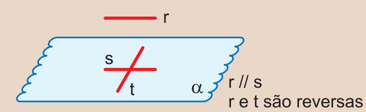
a) Falso



b) Falso



c) Verdadeiro



d) Falso. Não existe em α reta perpendicular a **r**, porque r ∩ α = Ø.

e) Falso. O desenho do item (b) serve como contraexemplo.

Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Complete:

a) Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então **ela é paralela à intersecção dos planos.** ....

b) Por um ponto não pertencente a um plano existem **infinitas** .... retas paralelas a ele.

c) Por um ponto não pertencente a um plano existe **um único** .... plano paralelo a ele.

d) Se dois planos são paralelos toda reta incidente em um deles é **incidente no outro.** ....

e) Um feixe de planos paralelos determinam sobre duas retas transversais **pares de segmentos correspondentes proporcionais.** ....

2 **(MODELO ENEM)** – Assinale a alternativa **falsa**:

a) Dados dois pontos distintos **A** e **B** existe um plano que os contém.
b) Por um ponto fora de uma reta existe uma única paralela à reta dada.
c) Existe um e um só plano que contém um triângulo dado.
d) Duas retas não coplanares são reversas.
e) Três pontos distintos determinam um e um só plano.

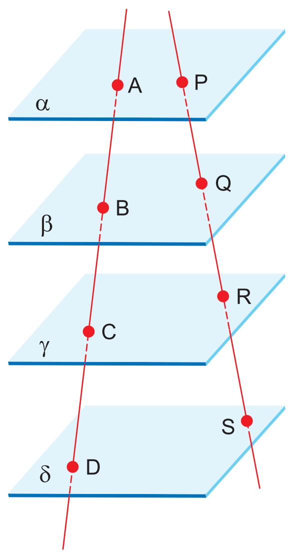
Resposta: E

3 **(MODELO ENEM)** – Se a reta **r** é paralela ao plano α, então:

a) Todas as retas de α são paralelas a **r**.
b) Existem em α retas paralelas a **r** e retas reversas a **r**.
c) Existem em α retas paralelas a **r** e retas perpendiculares a **r**.
d) Todo plano que contém **r** intercepta α, segundo uma reta paralela a **r**.

Resposta: B

4 Na figura α // β // γ // δ, AB = 3 cm, BC = 5 cm, CD = 7 cm e QR = 4 cm. Determine PQ e RS.



RESOLUÇÃO:

I) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{PQ}{QR}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{PQ}{4}$

PQ = 2,4 cm

II) $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{QR}{RS}$

$\dfrac{5}{7} = \dfrac{4}{RS}$

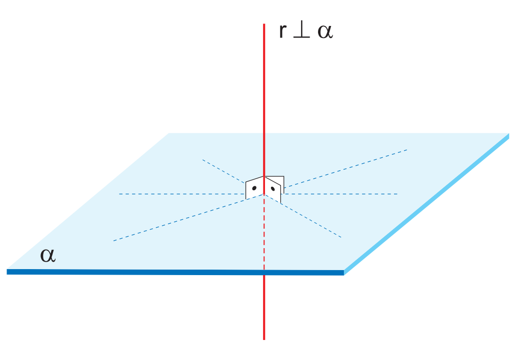
RS = 5,6 cm

Módulo 53 Perpendicularismo

Palavras-chave:
- Reta incidente
- Plano secante

1. Reta perpendicular a plano

Dizemos que uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto onde ela intercepta o plano. O ponto onde ela intercepta o plano é chamado "**pé da perpendicular**."

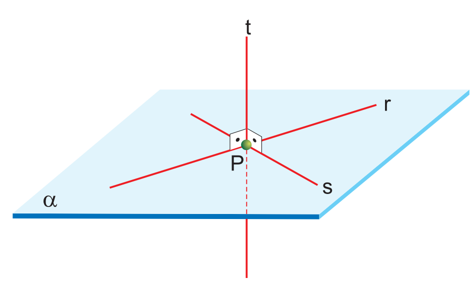


2. Teorema fundamental do perpendicularismo

A condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que forme **ângulo reto com duas concorrentes do plano**.

Para as condições deste teorema temos três casos possíveis:

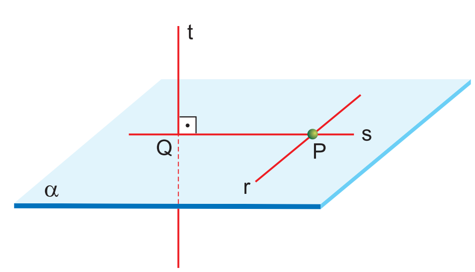
a) A reta **t** é perpendicular às duas retas concorrentes do plano.



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} t \perp r,\ r \subset \alpha \\ t \perp s,\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

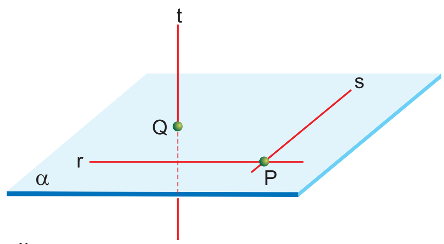
b) A reta **t** é perpendicular a uma das retas concorrentes e ortogonal à outra.



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \\ t \perp s \\ t \text{ ortogonal a } r \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

c) A reta **t** é ortogonal às duas retas concorrentes.



Simbolicamente:

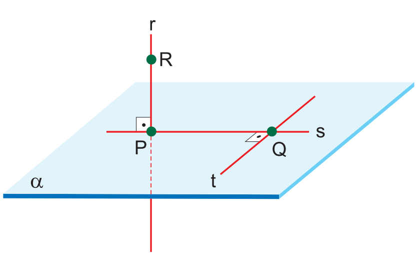
$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \\ t \text{ ortogonal a } r \\ t \text{ ortogonal a } s \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

Lembre-se:

Se uma reta é perpendicular a um plano então ela forma ângulo reto com todas as retas do plano.

3. Teorema das três perpendiculares

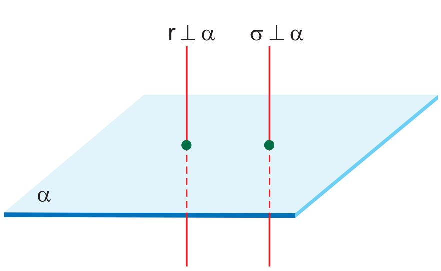
Seja **r** perpendicular a **α** no ponto **P**, **s** contida em **α** passando por **P**, **t** contida em **α** não passando por **P** e perpendicular a **s** em **Q**.



Se R é um ponto qualquer de r, então, a reta $\overleftrightarrow{RQ}$ é perpendicular a t.

4. Propriedades do perpendicularismo de reta com plano

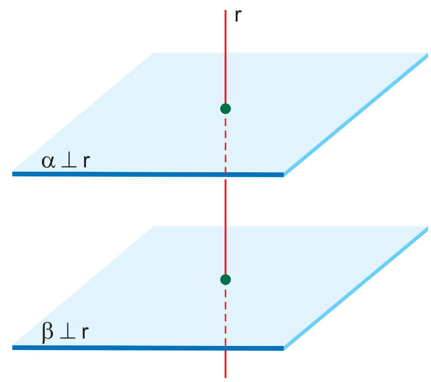
a) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.



Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \,//\, s$$

b) Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

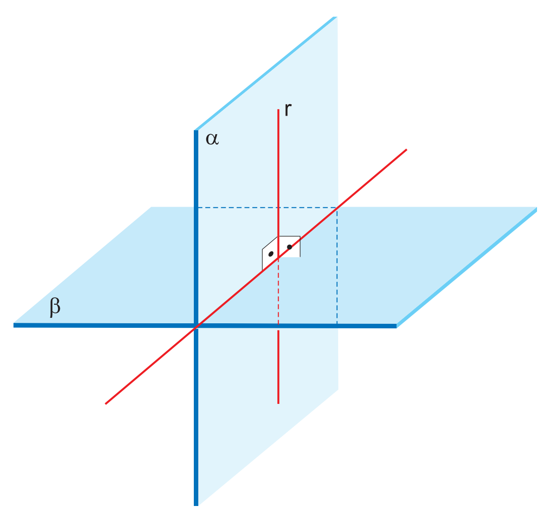


Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp r \\ \beta \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$$

5. Plano perpendicular a plano

Dizemos que dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

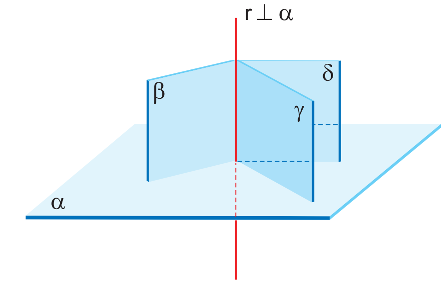


Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

6. Propriedades do perpendicularismo de planos

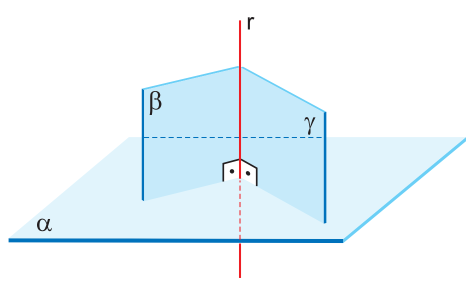
a) Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.



Simbolicamente:

$$\begin{cases} r \perp \alpha \\ r \subset \beta \\ r \subset \gamma \\ r \subset \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \perp \alpha \\ \gamma \perp \alpha \\ \delta \perp \alpha \end{cases}$$

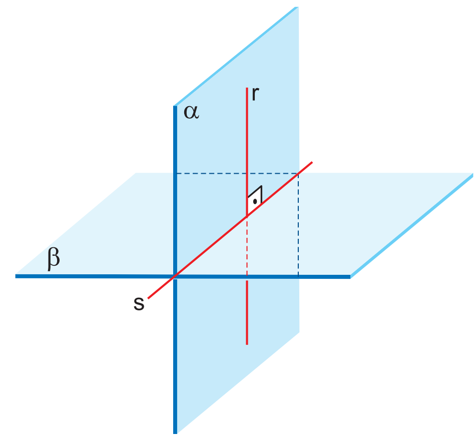
b) Se dois planos secantes são perpendiculares a um terceiro plano, a sua intersecção também será perpendicular a este terceiro plano.



Simbolicamente:

$$\begin{cases} \beta \perp \alpha \\ \gamma \perp \alpha \\ \beta \cap \gamma = r \end{cases} \Rightarrow r \perp \alpha$$

c) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um plano, perpendicular à intersecção, é perpendicular ao outro.



Simbolicamente:

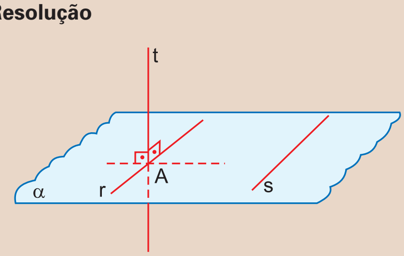
$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = s \\ r \subset \alpha \\ r \perp s \end{cases} \Leftrightarrow r \perp \beta$$

Exercícios Resolvidos

1 **(ESPM)** – Sejam **r** e **s** duas retas distintas, paralelas entre si, contidas em um plano **α**. A reta **t**, perpendicular ao plano **α**, intercepta a reta **r** em **A**. As retas **t** e **s** são

a) reversas e não ortogonais.
b) ortogonais.
c) paralelas entre si.
d) perpendiculares entre si.
e) coplanares.

Resolução



A reta t é perpendicular a α e $t \cap \alpha = \{A\}$
Assim, pode-se afirmar que t é perpendicular a todas as retas de α que passam por A, e que t é ortogonal a todas as retas de α que não passam por A. Portanto:

$\begin{cases} \text{t e r são perpendiculares} \\ \text{t e s são ortogonais} \end{cases}$

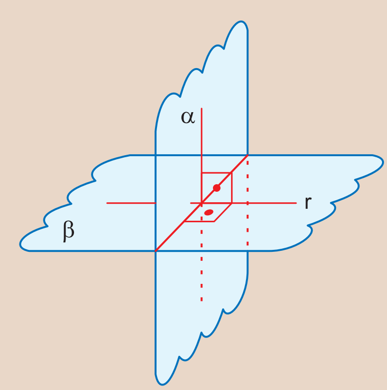
Resposta: B

2 Assinale a alternativa correta.

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então, esses planos são paralelos.
b) Uma condição suficiente para que 2 planos sejam paralelos é que 2 retas de um sejam paralelas ao outro.
c) Se uma reta é perpendicular a 2 retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
d) Se 2 retas quaisquer são paralelas a um plano, então elas são paralelas uma à outra.
e) Um plano perpendicular a uma reta de um outro plano é perpendicular a este último plano.

Resolução

Um plano α, sendo perpendicular a uma reta r de um outro plano, β, faz com que o plano β contenha uma reta *r* perpendicular ao plano α e, portanto, β é perpendicular a α. Logo, α é perpendicular a β.



$$\left.\begin{matrix} \alpha \perp r \\ r \subset \beta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} r \perp \alpha \\ r \subset \beta \end{cases} \Leftrightarrow \beta \perp \alpha \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Defina reta perpendicular a plano.

RESOLUÇÃO:
Uma reta é perpendicular a um plano, se, e somente se, ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto onde a reta intercepta o plano.

2 Complete:

a) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas **concorrentes** de um plano ela é **perpendicular** a ele.

b) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano então elas são **paralelas entre si**

c) Se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta então eles são **paralelos entre si**

d) Se um plano contém uma reta perpendicular a outro então eles são **perpendiculares**

e) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um, perpendicular à intersecção, é **perpendicular ao outro**

3 **(MODELO ENEM)** – Assinale a alternativa verdadeira:

a) Uma reta paralela a um plano é paralela a todas as retas desse plano.
b) Uma reta perpendicular a duas retas de um plano é perpendicular ao plano.
c) Se dois planos são perpendiculares todas as retas de um são perpendiculares ao outro.
d) Duas retas reversas não podem ser perpendiculares a uma mesma reta.
e) Duas retas reversas são sempre paralelas a um mesmo plano.

Resposta: E

4 **(MODELO ENEM)** – Se uma reta **r** é paralela a um plano α, então

a) qualquer reta perpendicular a **r** é perpendicular a α.
b) qualquer plano paralelo a **r** é paralelo a α.
c) não existe plano contendo **r** e perpendicular a α.
d) todo plano perpendicular a **r** é perpendicular a α.
e) toda reta paralela a α é paralela a **r**.

Resposta: D

5 Assinale a alternativa correta:

a) Se uma reta é perpendicular a duas retas de um plano ela é perpendicular ao plano.
b) Se duas retas são paralelas a um mesmo plano então elas são paralelas entre si.
c) Se dois planos são secantes existe sempre uma reta contida num deles e perpendicular ao outro.
d) Sendo **r** e **s** retas distintas, existe sempre um plano α contendo **r** e paralelo a **s**.
e) Três pontos quaisquer sempre são coplanares.

Resposta: E

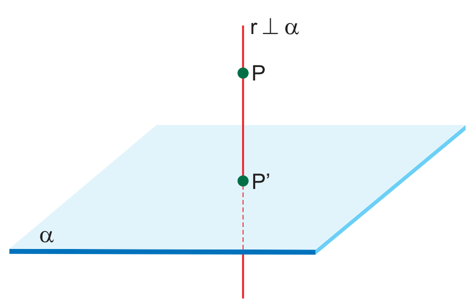
Módulo 54

Projeções ortogonais

Palavra-chave:
• Perpendicular

1. Projeção de um ponto

A projeção ortogonal de um ponto num plano é o "pé da perpendicular" ao plano pelo ponto.



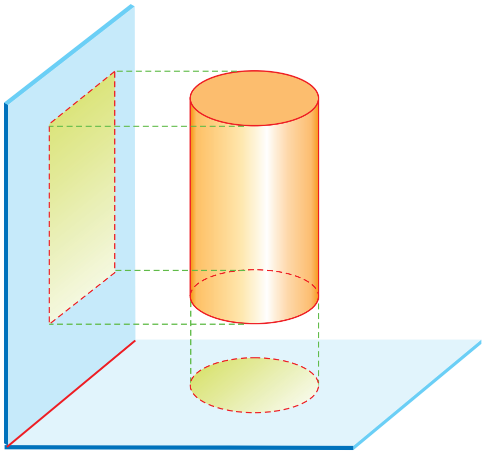
O ponto **P'** é a projeção ortogonal de **P** em $\boldsymbol{\alpha}$. O plano $\boldsymbol{\alpha}$ é chamado **plano de projeção** e a reta perpendicular **r** é chamada **reta projetante**.

2. Projeção de uma figura

A projeção ortogonal de uma figura num plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura.

Exemplo

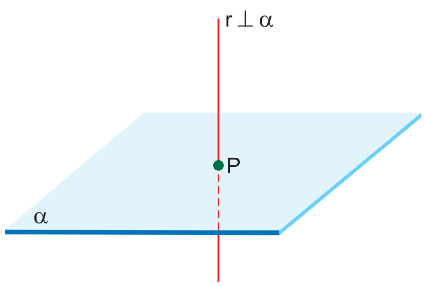
A projeção ortogonal de um cilindro num plano paralelo ao eixo é um **retângulo**. A projeção do mesmo cilindro num plano paralelo à base é um **círculo**.



3. Projeção de uma reta

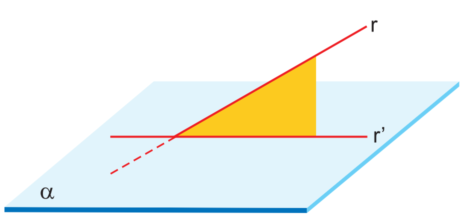
A projeção ortogonal de uma reta num plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da reta neste plano.

a) Se a reta for perpendicular ao plano, a sua projeção ortogonal será um ponto.



Na figura, **P** é a projeção ortogonal de **r** em **α**.

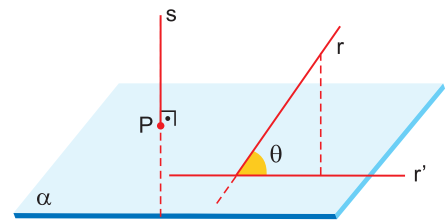
b) Se a reta não for perpendicular ao plano, a sua projeção ortogonal será outra reta.



Na figura, **r'** é a projeção ortogonal de **r** em **α**.

4. Ângulo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a um plano, o ângulo entre ela e o plano é reto. Se a reta é oblíqua em relação ao plano, o ângulo entre ela e o plano é o ângulo que ela forma com a sua projeção ortogonal.



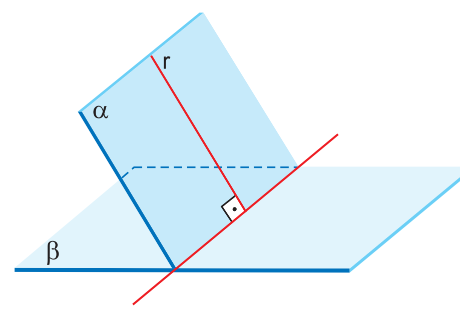
Na figura, temos:

a) A reta **s** forma ângulo reto com **α**.

b) O ângulo **θ** que a reta **r** forma com o plano **α** é o ângulo que a reta **r** forma com sua projeção ortogonal **r'**.

5. Retas de maior declive

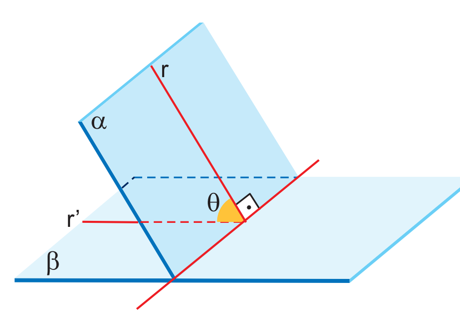
Chamamos de retas de maior declive de um plano **α** em relação a um plano **β** às retas de **α** que formam o maior ângulo possível com **β**. Prova-se que, se os dois planos são secantes, as retas de maior declive de um em relação ao outro são perpendiculares à intersecção.



Na figura, **r** é uma reta de maior declive de **α** em relação a **β**.

6. Ângulos entre planos

Define-se ângulo entre dois planos como sendo o ângulo que uma reta de maior declive de um forma com o outro.



Na figura,

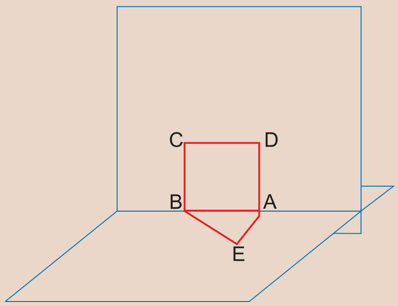
r é uma reta de maior declive de **α** em relação a **β**

r' é a projeção ortogonal da reta **r** em **β**

θ é o ângulo entre **α** e **β**

Exercícios Resolvidos

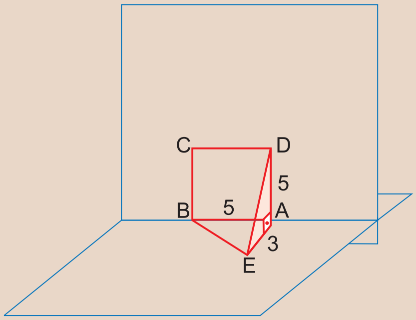
1 **(UFSCar)** – O triângulo ABE e o quadrado ABCD estão em planos perpendiculares, conforme indica a figura.



Se EA = 3 e AB = 5, então ED é igual a

a) $\sqrt{24}$. b) 5. c) $3\sqrt{3}$. d) $4\sqrt{2}$. e) $\sqrt{34}$.

Resolução



I) Como ABCD é um quadrado, temos: AD = AB = 5.

II) O triângulo ADE é retângulo em A, pois os planos são perpendiculares.

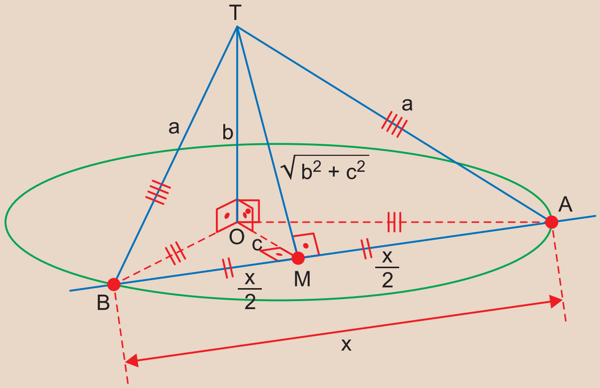
Assim, do Teorema de Pitágoras, temos:

$(ED)^2 = (EA)^2 + (AD)^2 \Leftrightarrow (ED)^2 = 3^2 + 5^2 \Leftrightarrow ED = \sqrt{34}$

Resposta: E

2 Um aparelho transmissor de rádio, cujas ondas atingem no máximo uma distância **a**, está situado no alto de uma torre vertical de altura **b**. As ondas do transmissor atingem uma estrada retilínea e horizontal que está a uma distância **c** do pé da torre. Calcule o comprimento do trecho da estrada no qual se pode captar a transmissão, sendo $a^2 > b^2 + c^2$.

Resolução



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = a^2 - b^2 - c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4(a^2 - b^2 - c^2) \Leftrightarrow x = 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$$

Resposta: $\mathbf{2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$

Exercícios Propostos

1 Assinale a sentença verdadeira.

a) A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.

b) Dois planos que têm uma reta comum são secantes.

c) Se duas retas são ortogonais, então existe um único plano por uma delas, que é perpendicular à outra.

d) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um é paralela a qualquer reta do outro.

e) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Resposta: C

2 Sejam um plano α e uma reta r tais que $r \cap \alpha = \{P\}$. Nestas condições, é verdade que

a) existe um plano paralelo a α, que contém **r**.

b) se o ponto **Q** pertence a α, ele também pertence a **r**.

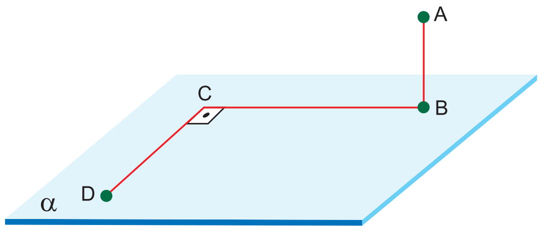
c) toda reta **s**, contida em α, intercepta **r**.

d) toda reta de α é perpendicular a **r**.

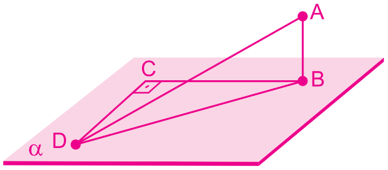
e) existe um plano perpendicular a α, que contém **r**.

Resposta: E

3 **(UNESP)** – Na figura abaixo o segmento AB é perpendicular ao plano α, CD e BC estão contidos nesse plano e CD é perpendicular a BC. Se AB = 2 cm, BC = 4 cm e CD = 3 cm, ache a distância de **A** a **D**.



RESOLUÇÃO:

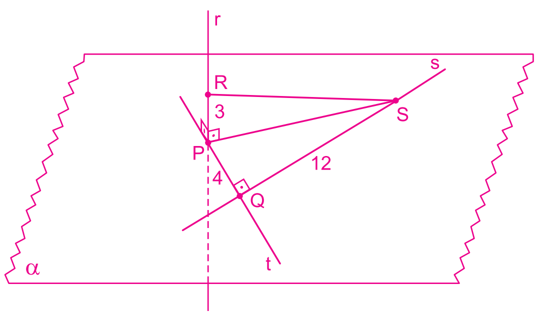


$$\left.\begin{array}{l}(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \\ (BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2\end{array}\right\} \Rightarrow (AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AD)^2 = 2^2 + 4^2 + 3^2 = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}\ \text{cm}$$

4 Uma reta **r** é perpendicular a um plano α em **P**. Uma reta **s** contida em α, dista 4 cm de **P** e uma reta **t** passando por **P** é perpendicular a **s** em **Q**. Em **r** toma-se um ponto **R** distante 3 cm de **P** e em **s** um ponto **S** distante 12 cm de **Q**. Calcular a distância entre os pontos **R** e **S**.

RESOLUÇÃO:



$$\left.\begin{array}{l}(RS)^2 = (RP)^2 + (PS)^2 \\ (PS)^2 = (PQ)^2 + (QS)^2\end{array}\right\} (RS)^2 = (RP)^2 + (PQ)^2 + (QS)^2 \Rightarrow$$

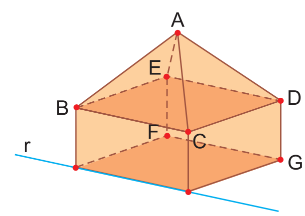
$$\Rightarrow (RS)^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow RS = 13\ \text{cm}$$

5 **(VUNESP – MODELO ENEM)** – Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas **r** e **s** reversas. Seja **t** a perpendicular comum a **r** e a **s**. Então:

a) **t** é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
b) **t** é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
c) **t** é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) **t** é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em **r** e **s**.
e) **t** é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus centros.

Resposta: C

6 **(UNIFESP)** – Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide. Seja **r** a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.



Quantos pares de retas reversas é possível formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo **r** uma das retas do par?

a) 12. b) 10. c) 8. d) 7. e) 6.

RESOLUÇÃO:

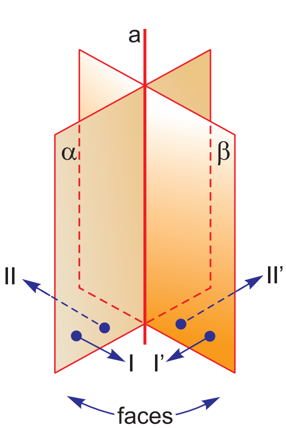
A reta r forma par de retas reversas com $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DG}$, totalizando 8 pares.

Resposta: C

Módulo 55 – Diedros, triedros e poliedros

Palavras-chave:
• Vértice • Face • Aresta

1. Diedros

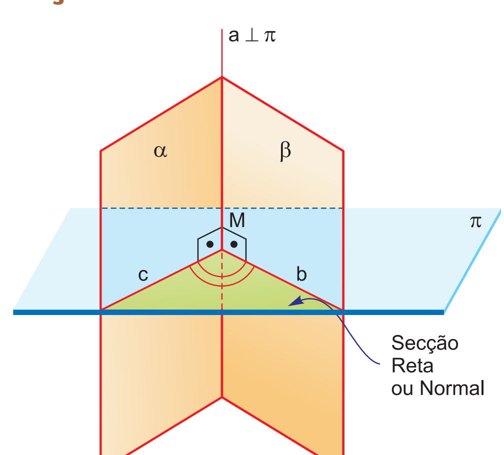


Dois planos secantes α e β determinam no espaço quatro semiespaços.

Chama-se **diedro** à intersecção de dois desses semiespaços.

Na figura, os semiplanos α e β são as **faces** e a reta **a** é a **aresta** do diedro determinado pela intersecção dos semiespaços **I** e **I'**.

2. Secção reta de um diedro



A região angular determinada pela intersecção de um diedro com um plano perpendicular a sua aresta é a **secção reta** (ou secção normal) do diedro.

Na figura, o plano π perpendicular à aresta **a** determina a secção reta definida pelo ângulo $\mathbf{b\hat{M}c}$.

Observações

a) Todas as secções retas do mesmo diedro são congruentes.

b) A medida de um diedro é a medida da sua secção reta.

c) Dois diedros são congruentes quando suas secções retas são congruentes.

d) Se o plano π não for perpendicular à aresta **a**, teremos simplesmente uma secção ou secção inclinada.

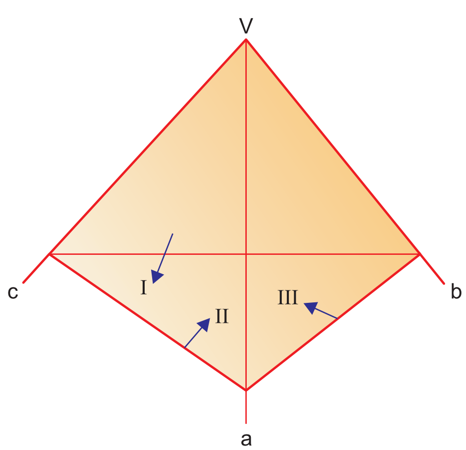
3. Triedros

Dadas três semirretas $\overrightarrow{Va}$, $\overrightarrow{Vb}$ e $\overrightarrow{Vc}$ de mesma origem **V** e não coplanares, consideremos os semiespaços **I**, **II** e **III** como segue:

I com origem no plano (bc) e contendo $\overrightarrow{Va}$;

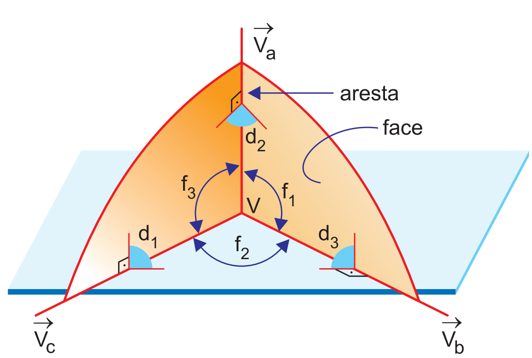
II com origem no plano (ac) e contendo $\overrightarrow{Vb}$;

III com origem no plano (ab) e contendo $\overrightarrow{Vc}$.



Chama-se **triedro** determinado por $\overrightarrow{Va}$, $\overrightarrow{Vb}$ e $\overrightarrow{Vc}$ à intersecção dos semiespaços I, II e III.

$$V(a;\, b;\, c) = I \cap II \cap III$$



O ponto **V** é denominado **vértice** do triedro, as semirretas $\overrightarrow{Va}$, $\overrightarrow{Vb}$ e $\overrightarrow{Vc}$ são as **arestas**, os ângulos $\mathbf{a\hat{V}b}$, $\mathbf{a\hat{V}c}$ e $\mathbf{b\hat{V}c}$ (ou $\hat{ab}$, $\hat{ac}$ e $\hat{bc}$), são as **faces**, e $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ e $\mathbf{d_3}$ são os **diedros** do triedro.

4. Relações entre as faces de um triedro

a) Em todo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas.

Assim, sendo $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_3}$ as faces de um triedro, temos:

$$\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases}$$

b) A soma das medidas (em graus) das faces de um triedro qualquer é menor que 360°.

Assim:

$$f_1 + f_2 + f_3 < 360°$$

5. Relações entre os diedros de um triedro

a) Em qualquer triedro, a medida (em graus) de um diedro aumentada de 180° supera a soma das medidas dos outros dois.

Assim, sendo $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ e $\mathbf{d_3}$ as medidas (em graus) dos diedros de um triedro, temos:

$$\begin{cases} d_1 + 180° > d_2 + d_3 \\ d_2 + 180° > d_1 + d_3 \\ d_3 + 180° > d_1 + d_2 \end{cases}$$

b) A soma dos diedros de um triedro está compreendida entre 2 ângulos retos (180°) e 6 ângulos retos (540°). Assim:

$$180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

6. Superfície poliédrica

Superfície poliédrica é a união de um número finito **n** ($n \in \mathbb{N}^*$) de polígonos planos, tais que:

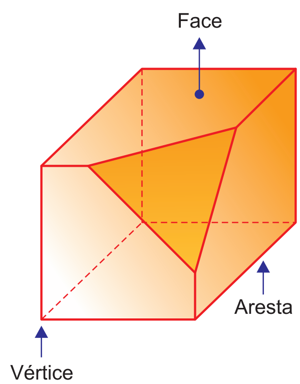
a) Dois polígonos que têm um lado em comum, nunca são coplanares;

b) Cada lado de polígono está no máximo em dois polígonos;

c) Todo polígono tem pelo menos um lado comum com um dos demais polígonos.

7. Elementos

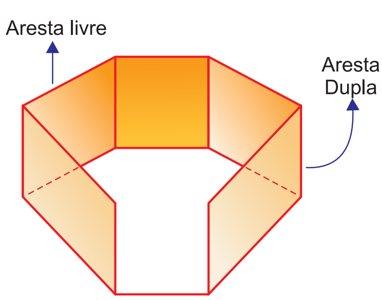
Numa superfície poliédrica, temos:
a) as **faces**, que são os polígonos planos;
b) as **arestas**, que são os lados dos polígonos;
c) os **vértices**, que são os vértices dos polígonos.



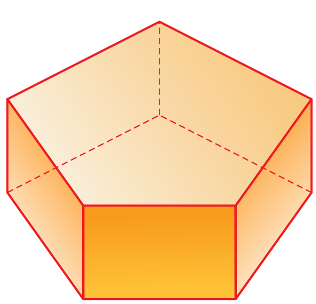
Chama-se **aresta livre** a aresta que é lado de um único polígono. Se a aresta é lado de dois polígonos, ela é chamada **aresta dupla**.

8. Classificação

Chama-se **superfície poliédrica aberta** a superfície poliédrica que tem aresta livre. Se a superfície poliédrica não tem aresta livre, ela é chamada **superfície poliédrica fechada**.



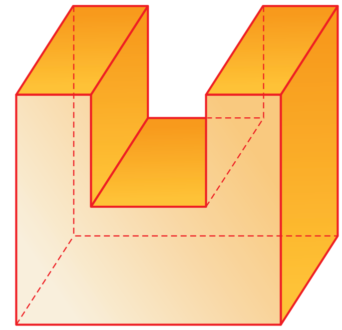
Superfície poliédrica aberta



Superfície poliédrica fechada

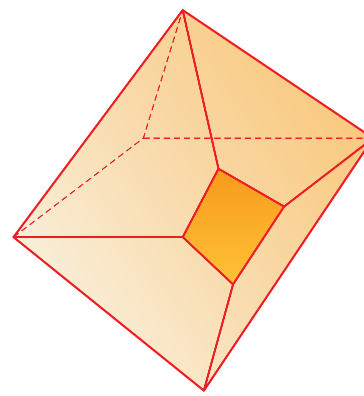
9. Superfície poliédrica convexa

Uma superfície poliédrica é **convexa** quando o plano de cada polígono deixa todos os demais polígonos num mesmo semiespaço.



Superfície poliédrica não convexa

10. Poliedro



Poliedro convexo

Poliedro é a região do espaço delimitado por uma superfície poliédrica fechada.

Se a superfície poliédrica fechada é convexa, o poliedro por ela delimitado, é chamado, **poliedro convexo**.

11. Relações de Euler

a) Numa **superfície poliédrica convexa aberta** com **V** vértices, **A** arestas e **F** faces, vale a relação:

$$V - A + F = 1$$

b) Numa **superfície poliédrica convexa fechada** ou um **poliedro convexo** com **V** vértices, **A** arestas e **F** faces, vale a relação:

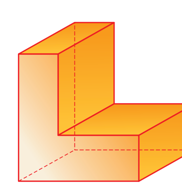
$$V - A + F = 2$$

Todo poliedro que satisfaz essa relação é chamado poliedro Euleriano.

É importante saber que:

"Todo poliedro convexo é Euleriano mas nem todo poliedro Euleriano é convexo".

Observe que o poliedro da figura ao lado não é convexo mas obedece à relação $V - A + F = 2$.



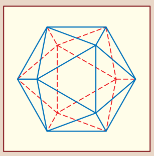
12. Soma dos ângulos das faces

Em todo poliedro convexo de **V** vértices, a soma dos ângulos de todas as suas faces é dada por:

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Exercícios Resolvidos

1 Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais se retiram 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) 1,4 m b) 2,1 m c) 2,8 m
d) 6,3 m e) 7,0 m

Resolução

1º) O número de arestas:

$$A = \frac{20 \,.\, 6 + 12 \,.\, 5}{2} \Leftrightarrow A = 90$$

2º) Comprimento de linha gasto pelo artesão:
$C = 90 \times 7$ cm $= 630$ cm $= 6{,}3$ m

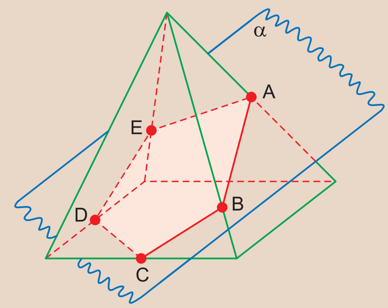
Resposta: D

2 **(ENEM)** – Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
d) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

Resolução

O plano α da figura seguinte intercepta as quatro faces laterais e a base da pirâmide, determinando o pentágono ABCDE.



Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Num triedro duas faces medem respectivamente 80° e 130°. Determinar o intervalo de variação da medida da terceira face.

RESOLUÇÃO:
Sendo $f_1 = 80°$ e $f_2 = 130°$, devemos ter:

$$\begin{cases} 80° < 130° + f_3 \\ 130° < 80° + f_3 \\ f_3 < 80° + 130° \\ 80° + 130° + f_3 < 360° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_3 > -50° \\ f_3 > 50° \\ f_3 < 210° \\ f_3 < 150° \end{cases}$$

Logo, $50° < f_3 < 150°$.

2 **(MODELO ENEM)** – Um poliedro convexo possui 8 faces e 6 vértices. O número de arestas é:

a) 14 b) 13 c) 12 d) 11 e) 48

RESOLUÇÃO:
$V - A + F = 2 \Leftrightarrow 6 - A + 8 = 2 \Leftrightarrow A = 12$
Resposta: C

3 **(MODELO ENEM)** – Um poliedro convexo possui doze faces pentagonais. Seu número de vértices é:

a) 60 b) 30 c) 20 d) 18 e) 12

RESOLUÇÃO:

I) $A = \dfrac{12 \,.\, 5}{2} = 30$

II) $V - A + F = 2$
$V - 30 + 12 = 2$
$V = 20$

Resposta: C

4 A superfície de um poliedro convexo é constituída de 6 quadriláteros e 8 triângulos. Determinar o número de vértices desse poliedro.

RESOLUÇÃO:

I) $F = \underbrace{6}_{\text{quadr.}} + \underbrace{8}_{\text{triang.}} = 14$

II) $A = \dfrac{6 \,.\, 4 + 8 \,.\, 3}{2} = 24$

III) $V - A + F = 2$
$V - 24 + 14 = 2$
$V = 12$

5 **(MODELO ENEM)** – A soma de todos os ângulos das faces de uma pirâmide é 1800°. Essa pirâmide é de natureza

a) triangular. b) quadrangular. c) pentagonal.
d) hexagonal. e) heptagonal.

RESOLUÇÃO:
$S = (V - 2) \,.\, 360°$
$1800° = (V - 2) \,.\, 360°$
$5 = V - 2$
$V = 7$
Logo, a pirâmide é de natureza hexagonal.
Resposta: D

Módulo 56

Poliedros de Platão e regulares

Palavras-chave:
• Triângulo
• Quadrilátero • Pentágono

1. Poliedros de Platão

Um poliedro é denominado **poliedro de Platão** quando:

a) Todas as faces têm o mesmo número de lados;

b) Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas;

c) Vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT2M406**

Os poliedros de Platão são apenas cinco. A saber: **Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro**.

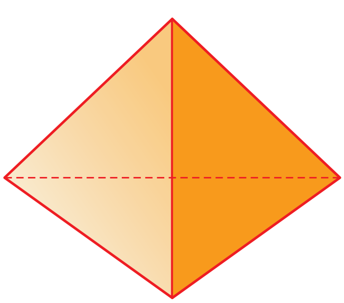
Para os poliedros de Platão, vale a seguinte tabela:

Nome	Tipo de face	Nº de faces	Nº de arestas	Nº de vértices
Tetraedro	**Triângulo**	**4**	**6**	**4**
Hexaedro	**Quadrilátero**	**6**	**12**	**8**
Octaedro	**Triângulo**	**8**	**12**	**6**
Dodecaedro	**Pentágono**	**12**	**30**	**20**
Icosaedro	**Triângulo**	**20**	**30**	**12**

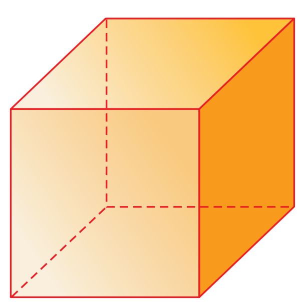
2. Poliedros regulares

Um poliedro é denominado **poliedro regular** quando ele é um poliedro de **Platão** e todas as suas faces são **polígonos regulares**.

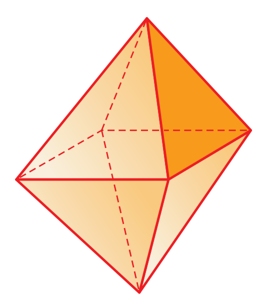
Existem, portanto, apenas cinco tipos de poliedros regulares.



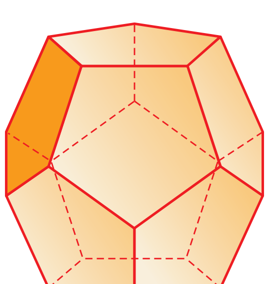
Tetraedro regular
(4 triângulos equiláteros)



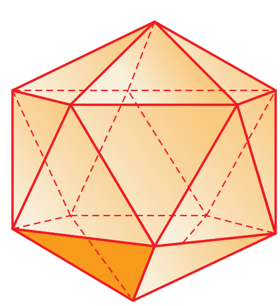
Hexaedro regular
(6 quadrados)



Octaedro regular
(8 triângulos equiláteros)



Dodecaedro regular
(12 pentágonos regulares)



Icosaedro regular
(20 triângulos equiláteros)

Exercícios Resolvidos

1 Quantas são ao todo as diagonais de um icosaedro regular?

a) 20 b) 35 c) 36 d) 100 e) 170

Resolução

Num icosaedro regular, o número de faces é F = 20, o número de arestas é $A = \dfrac{20 \, . \, 3}{2} = 30$ e o número de vértices é

V = 30 – 20 + 2 = 12.

Assim, sendo *D* o número total de diagonais desse poliedro, tem-se:

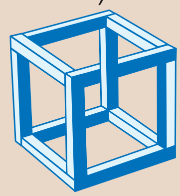
$C_{V,2} = D + A \Leftrightarrow C_{12,2} = D + 30 \Leftrightarrow 66 = D + 30 \Leftrightarrow D = 36$

Resposta: C

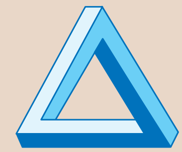
2 **(ENEM)**

Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida ao lado. Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

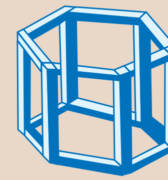
a)



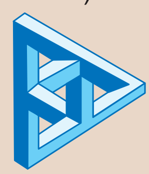
b)



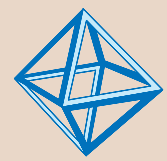
c)



d)



e)



Resolução

Com “ripas rígidas” e de mesmo tamanho, utilizadas como arestas, o marceneiro consegue construir apenas sólidos que não tenham entrelaçamento de arestas. Dos cinco “sólidos” apresentados, apenas o da alternativa E (octaedro regular) é passível de ser construído.

Resposta: E

Exercícios Propostos

1 Defina Poliedro de Platão.

RESOLUÇÃO:

a) Todas as faces têm o mesmo número de lados.

b) Em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

c) Vale a relação de Euler (V – A + F = 2)

2 Completar a tabela

POLIEDRO DE PLATÃO

Nome	Tipo de face	Nº de faces	A	V
T	△	**4**	**6**	**4**
H	□	**6**	**12**	**8**
O	△	**8**	**12**	**6**
D	⬠	**12**	**30**	**20**
I	△	**20**	**30**	**12**

3 **(UNIMEP – MODELO ENEM)** – O hexaedro regular é um poliedro com

a) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices.

b) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices.

c) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices.

d) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices.

e) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices.

Resposta: A

4 **(MODELO ENEM)** – O icosaedro regular possui

a) 30 arestas e 20 vértices. b) 12 faces e 30 arestas.

c) 12 vértices e 30 arestas. d) 20 arestas e 20 vértices.

e) 30 arestas e 15 vértices.

RESOLUÇÃO:

I) $A = \dfrac{20 \, . \, 3}{2} = 30$

II) $V + F = A + 2$

$V + 20 = 30 + 2 \Leftrightarrow V = 12$

Resposta: C

5 O número de diagonais de um icosaedro regular é:

a) 32 b) 36 c) 40 d) 80 e) 100

RESOLUÇÃO:

$A = 30$

$V = 12$

$d = C_{12;2} - A$

$d = \dfrac{12 \, . \, 11}{2} - 30$

$d = 36$

Resposta: B

FRENTE 1

Módulo 45 – Equação da circunferência

1 Obter a equação da circunferência de centro na origem e raio r = 5.

2 Determinar a equação da circunferência de centro C(– 5; 1) e raio r = 3.

3 Determinar a equação da circunferência, sabendo que um diâmetro é determinado pelos pontos A(– 5; 2) e B(7; 4).

4 Obter a equação da circunferência, de centro C(2; 3) e tangente ao eixo das ordenadas.

5 Determinar a equação da circunferência de centro C(– 2; 1) e que passa pelo ponto P(3; 0).

6 A reta 3x – 2y – 6 = 0 encontra os eixos coordenados nos pontos A e B. Determinar a equação da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

7 Determinar a equação geral (ou normal) da circunferência de centro C(– 1; – 3) e raio r = 4.

8 Qual a equação reduzida da circunferência com C(– 1; 3) e r = 5?

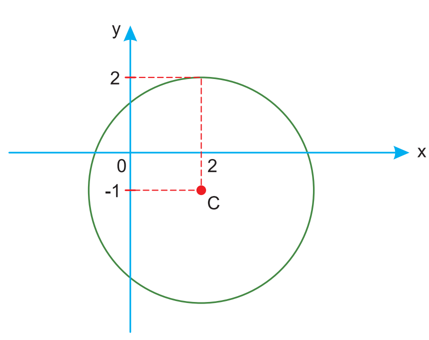
9 Determinar a equação da circunferência que tem um diâmetro determinado pelos pontos A(5; – 1) e B(– 3; 7).

10 Determinar a equação da circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano e cujo centro é o ponto de coordenadas (4; – 3).

11 **(FATEC)** – A circunferência de centro (2,1) e raio 3 intercepta o eixo das abscissas nos pontos de abscissas

a) $-2 + 2\sqrt{2}$ e $-2 - 2\sqrt{2}$
b) $2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$
c) $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$
d) $-1 - \sqrt{5}$ e $-1 + \sqrt{5}$
e) $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$

12 **(ESPM)** – Na figura abaixo, tem-se representada, em um sistema de eixos cartesianos, a circunferência λ de centro C.



A equação de λ é:
a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

13 **(U.F.AMAZONAS – MODELO ENEM)** – Uma circunferência passa pelos pontos A(0;2), B(0;8) e C(8;8). Então a equação da circunferência é:
a) $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 8 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 16 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 41 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 16 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

14 **(UNESP)** – A equação da circunferência com centro no ponto C = (2,1) e que passa pelo ponto P = (0,3) é dada por
a) $x^2 + (y - 3)^2 = 0$
b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$
d) $(x - 2)^2 + (y-1)^2 = 16$
e) $x^2 + (y - 3)^2 = 8$

15 **(FGV)** – No plano cartesiano, a circunferência que passa pelo ponto P(1,3) e é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ tem a seguinte equação:
a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 40 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 19 = 0$

Módulo 46 – Equação da circunferência

1 Obter as equações das circunferências de centro no eixo das abscissas, tangentes ao eixo y e com raio igual a 5.

2 Obter a equação da circunferência de centro C(– 4; 2) e tangente à reta 3x – 4y + 16 = 0.

3 Determinar a equação da circunferência, tangente aos eixos coordenados, de centro no 2º quadrante e raio r = 3.

4 Determinar a equação da circunferência que passa pelos pontos A (– 3; 4) e B(0; 7) e que tem centro no eixo das ordenadas.

5 **(FUVEST-ADAPTADO)** – No plano Oxy, a circunferência (I) tem centro no ponto C(– 5, 1) e é tangente à reta t de equação 4x – 3y – 2 = 0. Escreva uma equação para a circunferência (I).

6 **(UFJF)** – Uma circunferência de centro no ponto C(5; 4) é tangente à reta de equação $x = 5 + 2\sqrt{2}$.

a) Essa circunferência intercepta o eixo das abscissas?

b) Qual é a equação dessa circunferência?

c) Qual é a posição do ponto P(3,2) em relação a essa circunferência?

7 **(MODELO ENEM)** – Uma circunferência de raio 3, situada no 1º quadrante do plano cartesiano, é tangente ao eixo y e à reta de equação y = x. Então, a ordenada do centro dessa circunferência vale:

a) $2\sqrt{3} + 1$ b) $2\sqrt{3} + 3$ c) $3\sqrt{2} + 2$

d) $3\sqrt{2} + 3$ e) $3\sqrt{2} - 1$

8 Determinar a equação da circunferência que passa pelo ponto A(– 1; 6) e é tangente ao eixo dos "y", no ponto B(0; 3).

9 Obter a equação da circunferência que tem centro no ponto (3;5) e é tangente à reta $3x - 4y + 1 = 0$.

10 **(FATEC)** – Seja P o ponto de intersecção das retas de equações $y = x + 3$ e $y = 2$.

A equação da circunferência que tem centro em P e tangencia o eixo das abscissas é

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -1$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -3$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = -1$

11 **(FATEC)** – A área do quadrilátero determinado pelos pontos de intersecção da circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$ com os eixos coordenados, em unidades de área, é igual a

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Módulo 47 – Determinação do centro e do raio

Determinar o centro e o raio das circunferências, nas questões de **1** a **4**.

1 $x^2 + y^2 = 25$

2 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

3 $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

4 $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 13$

5 Determinar o centro e o raio da circunferência de equação $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 5 = 0$.

6 Qual é a área do círculo determinado pela circunferência de equação

$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$?

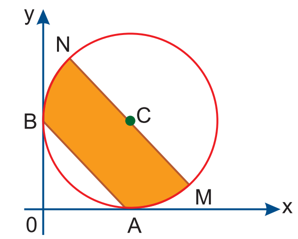
7 Dê as coordenadas do centro e o raio das circunferências representadas pelas equações:

a) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$ b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 5$

c) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

e) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ f) $x^2 + y^2 = 10$

8 **(FUVEST)** – A circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ é tangente aos eixos coordenados x e y nos pontos A e B, conforme a figura. O segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento AB e contém o centro C da circunferência.



É correto afirmar que a área da região hachurada vale

a) $\pi - 2$ b) $\pi + 2$ c) $\pi + 4$

d) $\pi + 6$ e) $\pi + 8$

9 As seguintes equações representam circunferências; determine as coordenadas do centro e o raio em cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

10 **(UNESP)** – Considere a circunferência λ, de equação $(x - 3)^2 + y^2 = 5$.

a) Determine o ponto P = (x, y) pertencente a λ, tal que y = 2 e x > 3.

b) Se r é a reta que passa pelo centro (3, 0) de λ e por P, dê a equação e o coeficiente angular de r.

11 **(FGV)** – A equação da reta que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - x - 4y + \dfrac{9}{4} = 0$ e é perpendicular à reta x = k (k é um número real) é:

a) y = 2 b) x + y = k c) x = 2

d) $x = \dfrac{1}{2}$ e) $y = \dfrac{1}{2}$

12 **(FATEC)** – Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, considere a circunferência λ e a reta r, de equações $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ e $3x + 7y - 21 = 0$.

A reta s, que é paralela a r e contém o centro de λ, tem equação

a) $3x + 7y - 2 = 0$ b) $3x - 7y - 2 = 0$

c) $3x - 7y + 5 = 0$ d) $7x + 3y - 2 = 0$

e) $3x + 7y - 16 = 0$

13 **(FGV)** – As coordenadas do ponto da circunferência $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$ que fica mais afastado da origem O(0, 0) são:

a) (8, 6) b) (4, 3) c) (0, 25) d) (13, 12) e) (12, 9)

14 Determinar o ponto simétrico do centro da circunferência $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2 = 0$, em relação à origem.

Módulo 48 – Posição relativa de um ponto e uma circunferência

Representar graficamente o conjunto dos pontos do plano tais que:

1 $x^2 + y^2 < 9$

2 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$

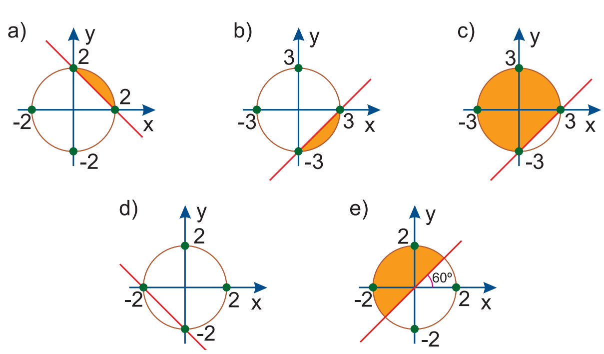
3 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$

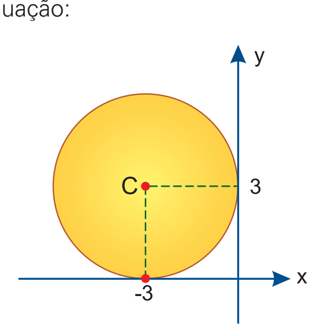
5 A melhor representação gráfica dos pontos (x; y) do plano tais que

$\begin{cases} x - y - 3 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

é a apresentada na alternativa:



6 Os pontos (x; y) do plano, hachurados na figura a seguir, satisfazem inequação:



a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9$. b) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 9$.

c) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 3$. d) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$.

e) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leq 6$.

7 **(UNIRIO)** – Considerando uma circunferência de centro (2,1) que passa pelo ponto (2, – 2), assinale a opção correta.

a) A equação da circunferência é $(x-2)^2 + (y - 1)^2 = 3$.

b) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$.

c) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 < 0$.

d) O exterior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 2 > 0$.

e) O ponto (5, – 1) pertence à circunferência.

Módulo 49 – Posição relativa de reta e circunferência

1 Determinar a posição da reta $y = x + 3$ em relação à circunferência de equação $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

2 Determinar a posição da reta de equação $3x + y - 10 = 0$ em relação à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$.

3 Determinar o comprimento da corda que a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ determina no eixo das ordenadas.

4 Determinar o comprimento da corda determinada pela reta $x - y = 0$ na circunferência $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

5 Determinar o comprimento da corda determinada pela reta $3x + 4y + 8 = 0$ na circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

6 **(FGV)** – Sabendo-se que a circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$ possui apenas um ponto em comum com a reta $y = x - 1$, conclui-se que p é igual a

a) –9 b) 7 c) 9 d) 11 e) 5

7 **(MACKENZIE)** – A curva $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ tem um único ponto comum com a reta $x + y = k$, $k \in \mathbb{R}$. A soma dos possíveis valores de k é:

a) 4 b) – 2 c) – 4 d) 2 e) 0

8 **(MACKENZIE)** – Com relação à reta que passa pela origem e é tangente à curva $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, considere as afirmações:

I. é paralela à reta $3x - 4y = 25$.

II. é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

III. é perpendicular à reta $4x - 3y = 0$.

Dessa forma,

a) somente I está correta.

b) somente II está correta.

c) somente III está correta.

d) somente I e III estão corretas.

e) I, II e III estão incorretas.

9 Determinar a posição relativa entre a reta (s) e a circunferência (λ), nos casos:

1) s: $x + y = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$
2) s: $x - y - \sqrt{2} = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$
3) s: $x - y - 9 = 0$ λ: $x^2 + y^2 = 1$

10 **(FGV)** – No plano cartesiano, considere a reta de equação $2x - y = 5$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Podemos afirmar que:

a) A reta passa pelo centro da circunferência.
b) A reta é tangente à circunferência.
c) A circunferência intercepta o eixo y em dois pontos cuja distância é 2.
d) A circunferência intercepta o eixo x em dois pontos cuja distância é 1.
e) A área do círculo determinado pela circunferência é 4π.

11 **(FUVEST)** – A reta $x = m$ intercepta a circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ se, e somente se:

a) $m = 3$ ou $m = -1$ b) $-1 \le m \le 1$
c) $m \le -1$ ou $m \ge 3$ d) $-1 \le m \le 3$
e) $1 \le m \le 3$

12 A intersecção da reta $y = k$ com a circunferência $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ é não vazia, se e somente se:

a) $-6 \le k \le 0$ b) $-5 \le k \le 1$ c) $-1 \le k \le 5$
d) $0 \le k \le 6$ e) $6 \le k \le 12$

50 – Tangentes a uma circunferência

1 Quais são os valores de k para os quais a reta de equação $x = k$ é tangente à circunferência $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 4$?

2 Obter a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 2$, no ponto T(1; – 1).

3 Obter a equação da circunferência de centro C(– 4; 2) e tangente à reta $3x + 4y - 16 = 0$.

4 Determinar k para que a reta $y = k$, intercepte a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

5 Dada a reta (s) $3x + 4y - 1 = 0$ e a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, determinar as equações das retas tangentes a (λ) e paralelas a s.

6 O ponto $P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Determinar a equação da reta t, tangente à circunferência, no ponto P.

7 Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$, paralelas à reta (s) $x - y + 3 = 0$.

8 **(FUVEST-ADAPTADO)** – No plano Oxy, a circunferência (λ) tem centro no ponto C(– 5, 1) e é tangente à reta t de equação $4x - 3y - 2 = 0$. Escreva uma equação para a circunferência (λ).

9 **(FUVEST)** – A reta $y = mx$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x.

a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e) $\sqrt{5}$

10 **(MACKENZIE)** – Uma reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 10$, no ponto de abscissa 3, encontra o eixo das ordenadas num ponto P. A distância da origem a esse ponto é:

a) 9 b) 6 c) $\sqrt{10}$ d) 10 e) $\sqrt{8}$

11 **(FGV)** – Uma circunferência de raio 3, situada no 1º quadrante do plano cartesiano, é tangente ao eixo y e à reta de equação $y = x$. Então, a ordenada do centro dessa circunferência vale:

a) $2\sqrt{3} + 1$ b) $2\sqrt{3} + 3$ c) $3\sqrt{2} + 2$
d) $3\sqrt{2} + 3$ e) $3\sqrt{2} - 1$

12 No plano cartesiano, uma circunferência tem equação $(x - 1)^2 + y^2 = 20$. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto P(3; 4) e tangencia essa circunferência?

a) $3x + 4y - 25 = 0$ b) $-x + 2y - 5 = 0$
c) $x + 2y - 5 = 0$ d) $2x + y - 10 = 0$
e) $x + 2y - 11 = 0$

13 Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 22 = 0$ e as retas de equação $4y - 3x + k = 0$. Os valores de k para que as retas sejam tangentes à circunferência são:

a) $\pm 3\sqrt{2}$ b) ± 3 c) $\pm 2\sqrt{3}$
d) $\pm 3\sqrt{5}$ e) $\pm 5\sqrt{3}$

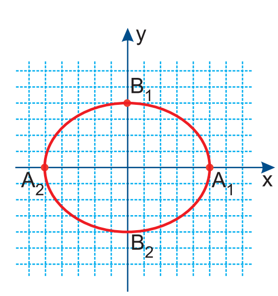
14 Considere uma circunferência de raio $r < 4$, com centro na origem do sistema de eixos coordenados. Se uma das tangentes à circunferência, pelo ponto P(4; 0), forma com o eixo x um ângulo de 30°, então o ponto de tangência correspondente pode ser:

a) $\left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$ b) $(1; \sqrt{3})$ c) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

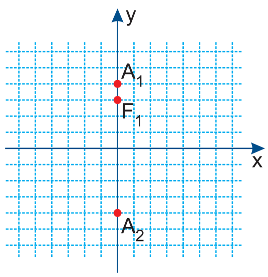
d) $\left(\dfrac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$ e) $(1; \sqrt{2})$

51 – Elipse

1 Determinar a equação da elipse representada na figura. Calcular, também a distância focal e a excentricidade.



2 Os pontos A_1 e A_2, representados no sistema cartesiano, são os vértices de uma elipse e F_1 é um dos focos. Determinar a excentricidade e a equação dessa elipse.



3 O centro de uma elipse é o ponto (0; 0), um dos vértices é o ponto (3; 0) e um dos polos é o ponto (0; – 1). Obter a equação dessa elipse.

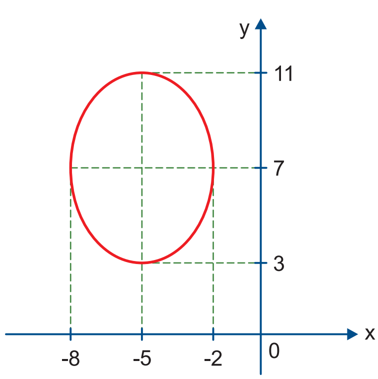
4 **(UNESP)** – A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por

a) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{20} = 1.$ b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1.$

c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{15} = 1.$ d) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{15} = 1.$

e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1.$

5 **(UNESP)** – A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 1.$

b) $\dfrac{(x+5)^2}{9} + \dfrac{(y-7)^2}{16} = 1.$

c) $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 1.$

d) $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y+7)^2}{16} = 1.$

e) $\dfrac{(x+3)^2}{5} + \dfrac{(y-4)^2}{7} = 1.$

6 **(USF)** – As medidas dos lados de um retângulo são iguais às medidas do eixo maior e do eixo menor da elipse de equação $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1.$

Nessas condições, a diagonal do retângulo mede, em u.c.,

a) 8 b) 4 c) $\sqrt{10}$ d) 3 e) $\sqrt{6}$

Módulo 52 – Elipse

1 Os focos de uma elipse são os pontos $F_1(0; 2)$ e $F_2(0; -2)$ e a excentricidade é igual a $\dfrac{2}{3}$. Achar a equação reduzida da elipse.

2 A elipse de equação $9 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 = 225$ tem excentricidade igual a:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) $\dfrac{5}{4}$

3 A equação reduzida da elipse, com vértices nos pontos $A_1(6; 2)$ e $A_2(-4; 2)$ e focos nos pontos $F_1(5; 2)$ e $F_2(-3; 2)$, é:

a) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

d) $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$

e) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

4 Os focos da elipse de equação $16x^2 + 9y^2 = 144$ são:

a) $(-\sqrt{7}; 0)$ e $(\sqrt{7}; 0)$ b) $(0; -\sqrt{7})$ e $(0; \sqrt{7})$

c) (0; 3) e (0; – 3) d) (3; 0) e (– 3; 0)

e) (0; 5) e (0; – 5)

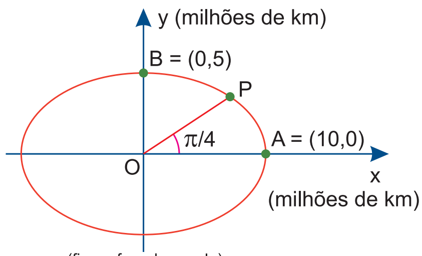
5 **(FUVEST)** – A elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ b) $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ e) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

6 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com x e y em milhões de quilômetros.

A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo PÔA mede $\frac{\pi}{4}$.



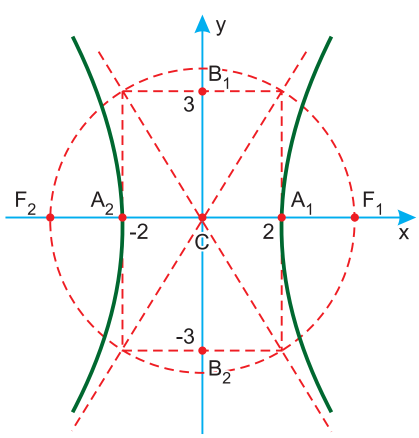
(figura fora de escala)

A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:

a) $2\sqrt{5}$. b) $2\sqrt{10}$. c) $5\sqrt{2}$.
d) $10\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{10}$.

Módulo 53 – Hipérbole

1 Determinar a equação reduzida da hipérbole da figura.



2 Obter a equação reduzida da hipérbole, sabendo que os focos são $F_1(5; 0)$ e $F_2(-5; 0)$ e os pólos são $B_1(0; 3)$ e $B_2(0; -3)$.

3 Obter a equação reduzida da hipérbole de focos $(-\sqrt{13}; 0)$ e $(\sqrt{13}; 0)$ sabendo que a medida do eixo transverso é 6.

4 Obter a equação reduzida da hipérbole com eixos contidos nos eixos coordenados, focos no eixo Oy, distância focal 12 e excentricidade 1,5.

5 Determine a equação da hipérbole, dados:

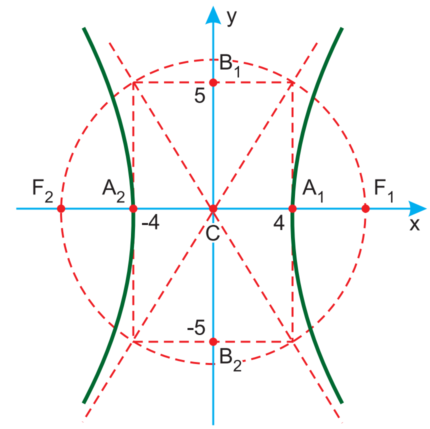
a) os focos $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$ e os vértices $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$;

b) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a distância entre os focos iguais a 8;

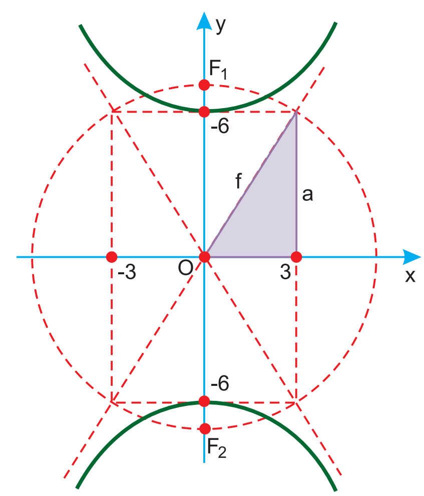
c) os vértices $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e a excentricidade igual a 3;

d) os focos $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$ e a excentricidade a $\frac{5}{3}$.

6 Determinar a equação reduzida da hipérbole da figura.



7 A equação reduzida da hipérbole da figura é:



a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$ d) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 1$

e) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{6} = 1$

Módulo 54 – Hipérbole

1 Chama-se hipérbole equilátera aquela em que a = b. Determinar a equação reduzida da hipérbole eqüilátera cujos focos são (4; 0) e (– 4; 0). Determine, também, a excentricidade.

2 Escreva uma equação da hipérbole, cujos eixos estão contidos nos eixos coordenados, os focos no eixo Oy, o eixo transverso mede 10 e o eixo conjugado mede 14.

3 Escreva uma equação da hipérbole com os eixos contidos nos eixos coordenados, os focos no eixo Ox, o eixo transverso medindo 30 e excentricidade igual a $\frac{6}{5}$.

4 Para a hipérbole de equação $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$, determinar:
a) o centro
b) os focos
c) os vértices

5 **(USF)** – Se os lados de um retângulo têm medidas iguais às medidas do eixo transverso e do eixo conjugado da hipérbole de equação $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$, a área desse retângulo, em unidades de área, é igual a:
a) 90 b) 120 c) 50 d) 44 e) 60

6 **(CESGRANRIO)** – Determinar os focos e esboçar o gráfico da curva de equação $y^2 - 16x^2 = 16$.

7 A distância focal da cônica de equação $x^2 - y^2 = 25$ é:
a) $5\sqrt{2}$ b) $2 . \sqrt{5}$ c) $10 . \sqrt{2}$
d) $4\sqrt{5}$ e) 25

8 **(UNESP-adaptado)** – A partir da equação da hipérbole: $4(x-3)^2 - \frac{4y^2}{15} = 1$, encontre as coordenadas do centro C, e dos focos F_1 e F_2 da hipérbole.

9 Determinar a distância focal, a medida do eixo transverso, a medida do eixo conjugado e a excentricidade da hipérbole de equação $9x^2 - 4y^2 = 36$.

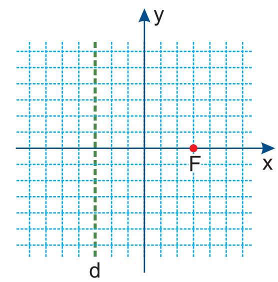
10 Determinar a equação da hipérbole cujos focos estão situados no eixo das abscissas, simetricamente situados em relação à origem, sabendo que as suas assíntotas têm equação $y = \pm \frac{4}{3}x$ e que a distância entre os focos é $2f = 20$.

11 Determinar a equação da hipérbole cujos focos estão situados simetricamente em relação à origem e no eixo das ordenadas, sabendo que sua excentricidade vale $\frac{13}{12}$ e que a distância entre seus vértices vale 48 unidades.

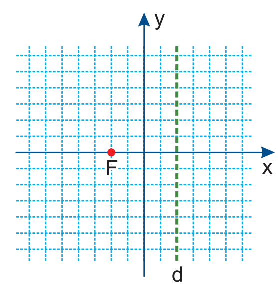
Módulo 55 – Parábola

Questões de **1** a **4**
Dados o foco (F) e a diretriz (d) de uma parábola, pede-se:
a) o vértice
b) a equação da diretriz
c) a equação reduzida da parábola
d) traçar a parábola

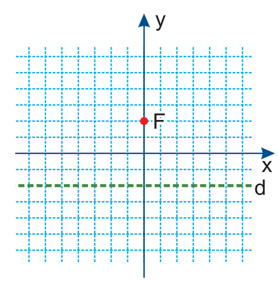
1



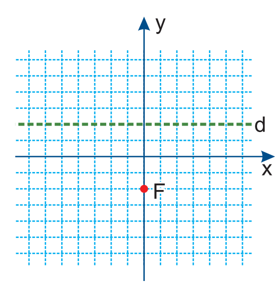
2



3



4



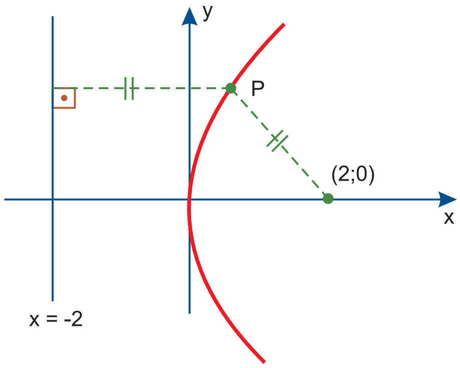
5 Determinar as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 + 8x = 0$.

6 Uma parábola, cujo vértice é a origem e cujo eixo de simetria é coincidente com o eixo "x", passa pelo ponto P(– 2; 4). Determinar a equação da parábola, o seu foco e a sua diretriz.

7 Determinar o vértice, o foco e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 = 8x$.

8 Determinar o vértice, o foco e a diretriz da parábola de equação $x^2 = -3y$.

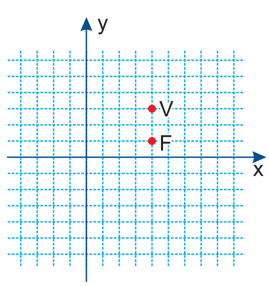
9 A equação da parábola representada a seguir é:



a) $y^2 = 8x$
b) $y^2 = -8x$
c) $y^2 = 4x$
d) $y^2 = -4x$
e) $y^2 = 2x$

Módulo 56 – Parábola

1 Os pontos V e F são, respectivamente, o vértice e o foco de uma parábola. Determinar a equação da parábola e a equação da diretriz.



2 O foco e a equação da diretriz da parábola de equação $x^2 = -20 . y$ são, respectivamente:

a) $F(0; 5)$ e $y = -5$
b) $F(5; 0)$ e $x = -5$
c) $F(0; -5)$ e $y = 5$
d) $F(-5; 0)$ e $x = 5$
e) $F(0; -10)$ e $y = 10$

3 A equação da parábola, com vértice na origem, eixo de simetria no eixo das ordenadas e que passa pelo ponto P(10; 5), é:

a) $y^2 = 20 . x$
b) $x^2 = 20 . y$
c) $x^2 = -20 . y$
d) $y^2 = -20 . x$
e) $x^2 = 10 . y$

4 O vértice de uma parábola está no ponto V(3; 2) e o seu foco no ponto F(5; 2). A equação dessa parábola é:

a) $(y - 3)^2 = 8 . (x - 2)$
b) $(y - 3)^2 = 4 . (x - 2)$
c) $(y - 2)^2 = 8 . (x - 3)$
d) $(y - 2)^2 = 4 . (x - 3)$
d) $(y - 2)^2 = -8 . (x - 3)$

5 A equação da parábola, cujo vértice é a origem e cujo foco é o ponto F(0; 3), é:

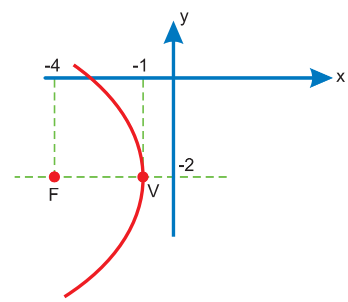
a) $x^2 = -12 . y$
b) $y^2 = 12 . x$
c) $y^2 = -12 . x$
d) $x^2 = 8 . y$
e) $x^2 = 12 . y$

6 **(MACKENZIE)** – A equação da parábola que tem vértice no ponto V(4; 1) e foco F(2; 1) é:

a) $(y - 1)^2 = -16 . (x - 4)$
b) $(y - 4)^2 = 8 . (x - 1)$
c) $(y - 1)^2 = 2 . (x - 4)$
d) $(y - 2)^2 = -4 . (x - 1)$
e) $(y - 1)^2 = -8 . (x - 4)$

7 No gráfico abaixo, F é o foco e V é o vértice da parábola. Obter:

a) o parâmetro
b) a equação da diretriz
c) a equação da parábola



8 **(USF)** – Um triângulo, que tem como vértices os focos das parábolas $x^2 = -12y$; $y^2 = 16x$ e $y^2 = -12x$, tem área, igual a:

a) 21 b) 13 c) 11 d) 12 e) $\dfrac{21}{2}$

FRENTE 2

Módulo 45 – Tronco de pirâmide de bases paralelas

Questões de **1** a **4**

As arestas das bases de um tronco de pirâmide regular quadrangular medem 6 m e 16 m e o apótema mede 13 m.

1 Calcular a área lateral do tronco.

2 Calcular a área total do tronco.

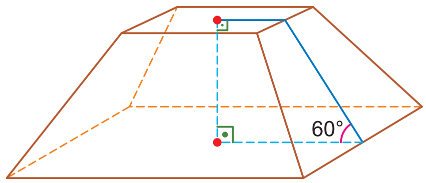
3 Calcular a altura do tronco.

4 Calcular o volume do tronco.

5 **(ITA)** – A base de uma pirâmide tem área igual a 225 cm^2. A $\dfrac{2}{3}$ do vértice, corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. A área da secção é igual a:

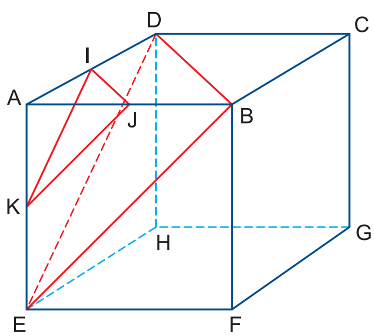
a) 4 cm^2
b) 9 cm^2
c) 25 cm^2
d) 100 cm^2
e) 125 cm^2

6 Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas representado na figura a seguir.



Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é:
a) 168 b) 186 c) 258 d) 266 e) 284

7 **(VUNESP)** – Secciona-se o cubo ABCDEFGH, cuja aresta mede 1 m, pelo plano BDE, passando por vértices do cubo e pelo plano IJK, passando por pontos médios de lados do cubo, como na figura. Calcule o volume do tronco de pirâmide IJKDBE, assim formado.



8 Uma pirâmide pentagonal regular de volume V e altura D é seccionada por um plano paralelo ao plano da base a uma distância $d = \dfrac{1}{2}D$ do vértice, resultando uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. A diferença entre os volumes da pirâmide maior e da menor vale:

a) $\dfrac{7}{8}V$ b) $\dfrac{2}{3}V$ c) $\dfrac{3}{8}V$ d) $\dfrac{5}{8}V$ e) $\dfrac{1}{2}V$

9 **(ITA)** – Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\dfrac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?
a) 2 m b) 4 m c) 5 m d) 6 m e) 8 m

10 Num tronco de pirâmide quadrangular regular cujo apótema mede 13 cm, os raios das circunferências inscritas nas bases medem 3 cm e 8 cm. O volume do tronco de pirâmide, em centímetros cúbicos, é igual a:
a) 1551 b) 1552 c) 1553 d) 1554 e) 1555

Módulo 46 – Tronco de cone de bases paralelas

1 Os raios das bases de um tronco de cone circular reto são 5 cm e 8 cm. Sabendo que a geratriz é 5 cm, determine a altura.

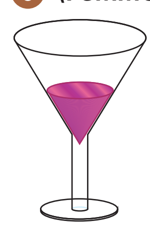
2 A geratriz de um tronco de cone de bases paralelas mede 5 cm. Os raios das bases desse tronco medem 4 cm e 1 cm. Calcule o volume do tronco.

3 Os raios das bases de um tronco de cone de revolução medem 1 cm e 6 cm. Sabendo-se que a medida da altura é 12 cm, calcular a área total do tronco.

4 Determine a altura de um tronco de cone circular reto, sabendo que os raios das bases medem 1 cm e 5 cm e que seu volume é 31π cm^3.

5 As áreas das bases paralelas de um tronco de cone circular reto são respectivamente iguais a 4π cm^2 e 49π cm^2. A geratriz desse tronco de cone mede 13 cm. A área lateral e o volume desse tronco são, respectivamente, iguais a:
a) 53π cm^2 e 117π cm^3 b) 117π cm^2 e 170π cm^3
c) 170π cm^2 e 268π cm^3 d) 117π cm^2 e 268π cm^3
e) 268π cm^2 e 170π cm^3

6 **(FCMMG)** – Observe a figura.



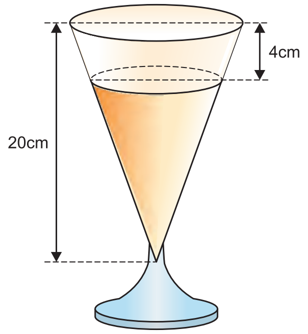
Essa taça, cujo interior tem a forma de um cone, contém suco até a metade da altura do cone interno. Se o volume do cone interno é igual a V, então o volume do suco nele contido é:

a) $\dfrac{V}{16}$ b) $\dfrac{V}{9}$ c) $\dfrac{V}{8}$ d) $\dfrac{V}{4}$ e) $\dfrac{V}{3}$

7 **(UNIMES)** – Um balde tem a forma de um tronco cone circular reto com as seguintes medidas internas: 18 cm e 28 cm de diâmetro nas bases e 45 cm de altura. O volume máximo que este balde pode conter é
a) $5642\ \pi$ cm^3 b) $6045\ \pi$ cm^3 c) $4560\ \pi$ cm^3
d) $3828\ \pi$ cm^3 e) $1938\ \pi$ cm^3

8 **(FAAP)** – Um copo de chope é um cone(oco), cuja altura é o dobro do diâmetro da base. Se uma pessoa bebe desde que o copo está cheio até o nível da bebida ficar extamente na metade da altura do copo, a fração do volume total que deixou de ser consumida é:
a) 3/4 b) 1/2 c) 2/3 d) 3/8 e) 1/8

9 **(MACKENZIE)** – Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura. Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4 cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está mais bem aproximada na alternativa:



a) 65%
b) 60%
c) 50%
d) 45%
e) 70%

Módulo 47 – Inscrição e circunscrição de sólidos I

1 Calcule o volume de um cubo circunscrito a uma esfera de raio 5 cm.

2 Calcule a área total da superfície esférica circunscrita a um cubo de 5 cm de aresta.

3 Determinar o volume de um cilindro eqüilátero circunscrito a uma esfera cujo raio mede 2 cm.

4 A razão entre a área de uma superfície esférica e a do cubo inscrito é:

a) π b) 2 c) $\dfrac{\pi}{2}$ d) $\dfrac{3}{2}$ e) $\dfrac{4}{\pi}$

5 **(UFMG)** – A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é:

a) $\dfrac{2}{\pi}$ b) $\dfrac{3}{\pi}$ c) $\dfrac{4}{\pi}$ d) $\dfrac{5}{\pi}$ e) $\dfrac{6}{\pi}$

6 **(MACKENZIE)** – A razão entre o volume de uma esfera e o volume de um cilindro circular reto circunscrito a esta esfera é igual a

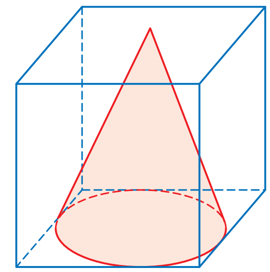
a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7 **(MACKENZIE)** – Um cubo está inscrito numa esfera. Se a área total do cubo é 8, o volume da esfera é

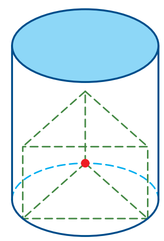
a) $\dfrac{8\pi}{3}$ b) $\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\dfrac{16\pi}{3}$ d) 12π e) 8π

8 **(MACKENZIE)** – Na figura, o cone reto está inscrito no cubo. Se a diferença entre os volumes do cubo e do cone é $1 - \dfrac{\pi}{12}$ então a diagonal da face do cubo mede:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$



9 **(MACKENZIE)** – Num cilindro reto de altura $6\sqrt{3}$, completamente cheio de água, foi imerso um prisma triangular regular de altura 2π, conforme a figura. A razão entre o volume de água que transbordou e o volume do cilindro é:



a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{6}$

Módulo 48 – Inscrição e circunscrição de sólidos II

1 Calcular o volume de um cone eqüilátero circunscrito a uma esfera cujo raio mede $\sqrt{3}$ cm.

2 Calcular a área da superfície de uma esfera circunscrita a um cone eqüilátero cujo raio mede 2 cm.

3 Cada uma das seis arestas de um tetraedro regular mede $2\sqrt{6}$.

a) Calcule a altura desse tetraedro.
b) Calcule o raio da esfera inscrita nesse tetraedro.
c) Calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro.

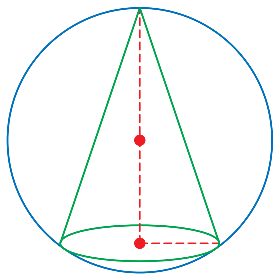
4 Um cone circular reto tem 10 cm de geratriz e 6 cm de raio da base. O volume, em cm^3, da esfera inscrita nesse cone é igual a:

a) 36π b) 48π c) 72π d) 144π e) 288π

5 **(MACKENZIE)** – A altura de um cone reto é igual ao raio da esfera a ele circunscrita. Então o volume da esfera é:

a) $\dfrac{8}{3}$ do volume do cone.
b) o quádruplo do volume do cone.
c) o triplo do volume do cone.
d) o dobro do volume do cone.
e) $\dfrac{4}{3}$ do volume do cone.

6 **(PUC-SP)** – Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir.



O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

a) 26,4%
b) 21,4%
c) 19,5%
d) 18,6%
e) 16,2%

7 **(FGV)** – Uma pirâmide reta de base quadrada e altura de 4 m está inscrista numa esfera de raio 4 m. Adotando $\pi = 3$, pode-se afirmar que

a) $V_{esfera} = 6 \,.\, V_{pirâmide}$ b) $V_{esfera} = 5 \,.\, V_{pirâmide}$
c) $V_{esfera} = 4 \,.\, V_{pirâmide}$ d) $V_{esfera} = 3 \,.\, V_{pirâmide}$
e) $V_{esfera} = 2 \,.\, V_{pirâmide}$

8 O volume da esfera inscrita num cone equilatero cujo raio mede $2\sqrt{3}$ cm é:

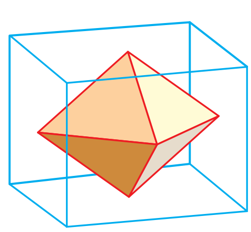
a) $\dfrac{8\pi}{3}$ cm^3 b) $\dfrac{16\pi}{3}$ cm^3 c) $\dfrac{32\pi}{3}$ cm^3

d) $\dfrac{64\pi}{3}$ cm^3 e) $\dfrac{128\pi}{3}$ cm^3

9 **(ITA)** – Um prismal hexagonal regular tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:

a) $(6\sqrt{2})/\pi$ b) $(9\sqrt{2})/\pi$ c) $(3\sqrt{6})/\pi$
d) $(6\sqrt{3})/\pi$ e) $(9\sqrt{3})/\pi$

10 **(FGV-SP)** – Um octaedro regular está inscristo num cubo de aresta com 4 cm de comprimento, isto é, seus vértices coincidem com o centro de cada face do cubo, como mostra a figura. O volume do octaedro é:



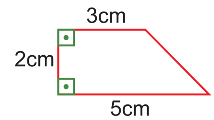
a) $\dfrac{64}{3}$ cm^3 b) $\dfrac{32}{3}$ cm^3 c) $\dfrac{16}{3}$ cm^3

d) $\dfrac{8}{3}$ cm^3 e) $\dfrac{4}{3}$ cm^3

Módulo 49 – Sólidos de revolução

1 Seja ABC um triângulo retângulo em A, com AB = 4 cm e AC = 3 cm. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução (de 360°) do triângulo ABC em torno do maior cateto.

2 Calcular o volume do sólido gerado pela revolução (de 360°) do trapézio retângulo da figura, em torno da base maior.



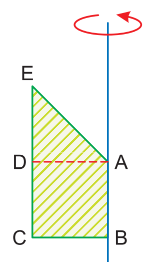
3 Um cilindro é obtido rotacionando-se um quadrado em torno da reta que intercepta dois de seus lados paralelos pelos respectivos pontos médios. Se o lado do quadrado mede 1 cm, a área lateral do cilindro, em cm^2, vale:

a) 4π b) π^2 c) 2π d) $\sqrt{\pi^3}$ e) π

4 Um triângulo retângulo tem 6 cm^2 de área e um de seus catetos mede 2 cm. Pela rotação de 360° desse triângulo, em torno do outro cateto, obtém-se um sólido de volume:

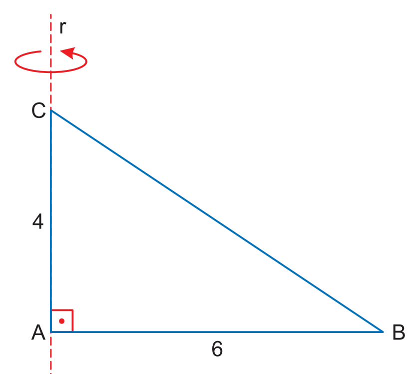
a) 8π cm^3 b) 12π cm^3 c) 16π cm^3
d) 18π cm^3 e) 24π cm^3

5 **(UNIP)** – ABCD é um quadrado de lado 6 cm e ADE é um triângulo retângulo isósceles. A rotação de 360°, da região poligonal ABCDE, em torno da reta $\overleftrightarrow{AB}$ gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é:



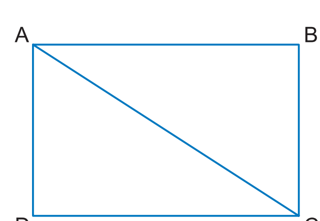
a) 360 π
b) 320 π
c) 216 π
d) 124 π
e) 72 π

6 **(MACKENZIE)** – Na rotação do triângulo ABC da figura seguinte em torno da reta r, o lado AB descreve um ângulo de 270°. Desta forma, o sólido obtido tem volume:



a) 48 π
b) 144π
c) 108 π
d) 72 π
e) 36 π

7 **(MACKENZIE)** – O retângulo ABCD da figura faz uma rotação completa em torno de $\overline{BC}$. A razão entre os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos ABC e ADC é



a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{5}$

c) $\dfrac{1}{4}$ d) 1

e) $\dfrac{1}{2}$

Módulo 50 – Geometria de posição – entes primitivos e postulados

1 Complete:

a) Os principais entes primitivos da Geometria são:_____ ___________________

b) Numa reta ou fora dela existem ____________ pontos.

c) Num plano ou fora dele existem ____________ pontos.

d) Dois pontos distintos determinam ________________.

e) Três pontos distintos não colineares determinam ____________.

2 Classifique cada afirmação seguinte em VERDADEIRA ou FALSA.

a) ( ) Os entes primitivos não têm definição.

b) ( ) Reta, por definição, é um conjunto de pontos colineares.

c) ( ) Entre dois pontos distintos sempre existe mais um.

d) ( ) Dois pontos distintos determinam uma reta.

e) ( ) Três pontos quaisquer determinam um plano.

3 Se dois pontos distintos de uma reta r pertencem a um plano α, então a reta r está contida em α?

4 Três pontos distintos determinam um plano?

5 Quatro pontos são sempre coplanares?

6 Dados 10 pontos de tal forma que não existam 4 deles num mesmo plano, calcular o número de planos determinados por estes pontos.

7 Assinale a alternativa falsa:

a) O ponto não tem dimensão

b) A reta é infinita

c) Existem proposições que não podem ser demonstradas.

d) Reta por definição é um conjunto com infinitos pontos.

e) Entre dois pontos distintos sempre existirá um terceiro ponto.

8 Dadas as proposições,

I) Numa reta bem como fora dela existem infinitos pontos.

II) Num plano bem como fora dele existem infinitos pontos.

III) Três pontos não colineares são sempre distintos.

É correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras.

b) todas são falsas.

c) apenas (I) e (II) são falsas.

d) apenas (I) e (III) são falsas.

e) apenas (II) e (III) são falsas.

9 Assinale a alternativa falsa:

a) Os postulados são proposições aceitas sem demonstração.

b) Os teoremas são proposições que podem ser demonstradas.

c) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.

d) Três pontos não alinhados determinam um único plano que os contém.

e) Se dois pontos A e B estão em semi-espaços opostos em relação a um plano α, então, $\overline{AB} \cap \alpha = \varnothing$.

Módulo 51 – Retas e planos no espaço

1 Assinale a afirmação falsa:

a) Dois pontos distintos determinam uma reta.

b) Três pontos distintos determinam um plano.

c) Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um plano.

d) Duas retas concorrentes determinam um plano.

e) Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

2 Assinale a afirmação verdadeira:

a) Duas retas que não têm pontos comuns são paralelas.

b) Duas retas que não têm pontos comuns são reversas.

c) Duas retas paralelas podem ser não coplanares.

d) Duas retas concorrentes podem ser não coplanares.

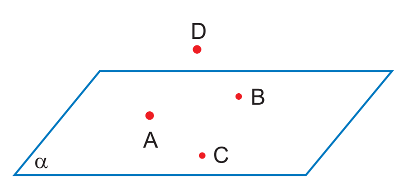
e) Duas retas não coplanares são reversas.

3 Seja um plano α e um ponto P não pertencente a α. Quantas retas paralelas a α podem ser traçadas, no máximo, pelo ponto P?

a) nenhuma b) uma c) duas

d) três e) infinitas

4 Quantos são os planos determinados pelos pontos A, B, C e D na figura?



a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 1

5 A reta r é paralela ao plano α. Então:

a) todas as retas de α são paralelas a r.

b) a reta r não pode ser coplanar com nenhuma reta de α.

c) existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.

d) existem em α retas paralelas a r e também retas perpendiculares a r.

e) todo plano que contém r é paralelo a α.

6 **(FAAP)** – Duas retas são reversas quando

a) não existe plano que contém ambas.

b) existe um único plano que as contém.

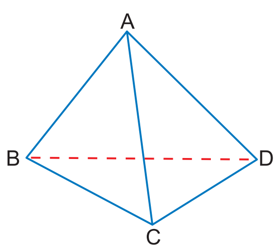
c) não se interceptam.

d) não são paralelas.

e) são paralelas, mas estão contidas em planos distintos.

7 **(VUNESP)** – Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s reversas.
Seja t a perpendicular comum a r e a s. Então,
a) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
b) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.
e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus centros.

8 **(UNIFESP)** – Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é:



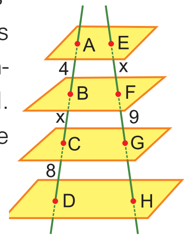
a) 6
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Módulo 52 – Paralelismo

1 Coloque (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas
a) ( ) Duas retas que têm ponto em comum são concorrentes.
b) ( ) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas distintas.
c) ( ) Duas retas não coplanares são sempre reversas.
d) ( ) Se uma reta não tem ponto em comum com um plano, ela é paralela a ele.
e) ( ) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro determinam neste último intersecções paralelas.

2 Coloque (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas.
a) ( ) Se três retas são duas a duas paralelas distintas ou elas determinam um plano ou determinam três planos.
b) ( ) Dois planos sendo paralelos toda reta que fura um, fura o outro.
c) ( ) Dois planos sendo paralelos todo plano que intercepta um intercepta o outro.
d) ( ) Dois planos sendo paralelos se um terceiro os interceptar, o fará em retas paralelas.
e) ( ) Para se obter a intersecção de dois planos secantes é suficiente obter dois pontos distintos da intersecção, ou seja, dois pontos distintos comuns aos planos.

3 São dados: um feixe de quatro planos paralelos, uma reta incidente a eles nos pontos A, B, C e D e uma outra reta incidente a eles nos pontos E, F, G e H. Sabendo-se que AB = 4, CD = 8, FG = 9 e BC = EF, o valor de EH é:



a) 22 b) 27 c) 29
d) 30 e) 32

4 Assinale a alternativa falsa:
a) se dois planos são paralelos distintos, então toda reta de um deles é paralela ou reversa a qualquer reta do outro.
b) se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
c) se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
d) se duas retas concorrentes de um plano são paralelas a um outro plano, então os dois planos são paralelos.
e) se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

5 São dados: um feixe de quatro planos paralelos, uma reta incidente nos pontos A, B, C e D e uma outra reta incidente nos pontos P, Q, R e S. Sabendo-se que AB = 2 cm, BC = 5 cm, CD = 6 cm, PQ = 1 cm, QR = x cm e RS = y cm, determine (y – x) em cm.

6 **(ESPCEX)** – Se a reta r é paralela ao plano α, então
a) todas as retas de α são paralelas a r.
b) existem em α retas paralelas a r e retas reversas a r.
c) existem em α retas paralelas a r e retas perpendiculares a r.
d) todo plano que contém r intercepta α, segundo uma reta paralela a r.

Módulo 53 – Perpendicularismo

1 Complete:
a) Se duas retas são paralelas a uma terceira, então são ____________ entre si.
b) Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à sua ________________.
c) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro determinam intersecções ________________.
d) Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos correspondentes __________.
e) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são ________________ entre si.

2 Complete:
a) Se dois planos são paralelos distintos, então toda reta de um é __________________ às retas do outro.
b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é _____________ ______________ às retas do plano.
c) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir ____________ plano paralelo a esse plano.

d) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir ____________ retas paralelas a esse plano.

e) Por um ponto não pertencente a uma reta, podemos conduzir ______________ reta paralela a essa reta.

3 Complete:

a) Se uma reta é ortogonal a duas concorrentes de um plano, ela é _______________ ao plano.

b) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas distintas de um plano, então ela ______________.

c) Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano que a contém é ___________ a esse plano.

d) Por um ponto existe ___________ reta perpendicular a um plano.

e) Se uma reta forma um ângulo de 20° com uma reta perpendicular a um plano, então ela forma _________ com o plano.

4 Assinale a correta:

a) se dois planos são perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles é paralelo ao outro.

b) se dois planos são perpendiculares, toda reta paralela a um deles é perpendicular ao outro.

c) se duas retas são paralelas a um mesmo plano, então são paralelas entre si.

d) se duas retas são ortogonais, toda reta paralela a uma delas é perpendicular ou ortogonal à outra.

e) se duas retas são ortogonais, toda reta ortogonal a uma delas é paralela à outra.

5 **(ESCOLA NAVAL)** – Se α é um plano e P é um ponto não-pertencente a α, quantos planos e quantas retas, respectivamente, contém P e são perpendiculares a α?

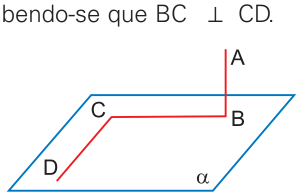
a) 1 e 1.
b) infinitos e zero.
c) infinitos e 1.
d) zero e 1.
e) infinitos e infinitas.

Módulo 54 – Projeções ortogonais

1 A projeção ortogonal de um cilindro circular reto sobre um plano perpendicular ao plano da base do cilindro é um quadrado de lado a. O volume deste cilindro é:

a) $\dfrac{\pi\,a^3}{2}$ b) $\dfrac{\pi\,a^3}{6}$ c) $\dfrac{\pi\,a^3}{5}$ d) $\dfrac{\pi\,a^3}{4}$ e) $\dfrac{\pi\,a^3}{8}$

2 Na figura abaixo, $\overline{AB} \perp \alpha$, $\overline{CD} \subset \alpha$, $\overline{BC} \subset \alpha$, AB = 3, BC = 5 e CD = 4. Calcule a distância entre os pontos A e D sabendo-se que $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.



3 Assinalar a certa:

a) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.

b) Dois planos paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si.

c) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

e) Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.

4 Considere as afirmações abaixo:

I. Duas retas paralelas a uma terceira são perpendiculares entre si.

II. Se duas retas são paralelas, toda reta que encontre a primeira encontra a segunda.

III. Se dois planos são paralelos, toda reta perpendicular ao primeiro é perpendicular ao segundo.

IV. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a toda as retas desse plano.

Em relação a elas, podemos dizer que:

a) todas são verdadeiras.
b) somente a IV é falsa.
c) somente a III é verdadeira.
d) somente a I e a II são falsas.
e) somente a II e a III são verdadeiras.

5 **(UFSCar)** – Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.

Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar num semi-reta.

b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

6 **(PUC)** – Dois planos β e γ cortam-se na reta r e são perpendiculares a um plano α. Então,

a) β e γ são perpendiculares.
b) r é perpendicular a α.
c) r é paralela a α.
d) todo plano perpendicular a α encontra r.
e) existe uma reta paralela a α e a r.

Módulo 55 – Diedros, triedros e poliedros

1 Num triedro duas faces medem, respectivamente, 148° e 110°. A medida da terceira face é com certeza um número do intervalo:

a) $45° < x \leq 100°$ b) $30° \leq x < 90°$
c) $38° < x < 102°$ d) $100° < x \leq 258°$
e) $30° \leq x \leq 60°$

2 Se um poliedro convexo possui 16 faces triangulares, o seu número de vértices é:

a) 24 b) 20 c) 16 d) 12 e) 10

3 Um poliedro convexo apresenta 8 faces quadrangulares e 6 faces triangulares. O número de vértices desse poliedro é:

a) 27 b) 25 c) 18 d) 15 e) 13

4 Um poliedro convexo possui somente uma face triangular, 3 faces quadrangulares e 3 faces pentagonais. Este poliedro possui:

a) 30 vértices b) 10 arestas c) 30 arestas
d) 15 vértices e) 10 vértices

5 Quantas faces tem um poliedro convexo com 6 vértices e 9 arestas? Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

6 **(UNICENTRO)** – Segundo o matemático suíço Leonhard Euler, em todo poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces, vale a relação:

a) $V + F + A = 2$ b) $V + 2 = A + F$
c) $V - F + A = 2$ d) $V = F + A + 2$
e) $V - A + F = 2$

7 **(CESGRANRIO)** – O poliedro da figura (uma invenção de Leonardo da Vinci utilizada modernamente na fabricação de bolas de futebol) tem como faces 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. O número de vértices do poliedro é:

a) 64 b) 90 c) 60 d) 72 e) 56

8 Um poliedro convexo possui ao todo 18 faces, das quais 12 são triângulos e as demais são quadriláteros. Esse poliedro possui exatamente:

a) 14 vértices b) 28 arestas c) 30 vértices
d) 60 arestas e) 60 diagonais

9 **(UNIRIO)** – Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35 b) 34 c) 33 d) 32 e) 31

10 **(FUVEST)** – O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas. b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas. d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

Módulo 56 – Poliedros de Platão e regulares

1 **(PUC)** – O poliedro regular que possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces denomina-se:

a) tetraedro b) icosaedro
c) hexaedro d) dodecaedro
e) octaedro

2 Calcular o número de vértices de um icosaedro regular.

3 Calcular o número de diagonais e o número de vértices de um octaedro regular.

4 Calcular a soma dos ângulos das faces de um dodecaedro regular.

5 Calcular a soma dos ângulos das faces de um icosaedro regular.

6 Quantas classes de poliedros regulares existem?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 14 e) infinitas

7 O número de vértices de um dodecaedro regular é:

a) 10 b) 12 c) 16 d) 20 e) 24

8 O poliedro regular cujas faces são pentágonos, chama-se:

a) tetraedro regular b) hexaedro regular
c) octaedro regular d) dodecaedro regular
e) icosaedro regular

9 O número de vértices do icosaedro regular é:

a) 10 b) 12 c) 18 d) 26 e) 54

FRENTE 1

Módulo 45 – Equação da circunferência

1 C(0; 0) e r = 5

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

2 C(– 5; 1) e r = 3

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-5)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$

3 I) O centro é o ponto médio de $\overline{AB}$, assim:

$$C\left(\frac{-5+7}{2}; \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow C(1;3)$$

II) O raio é a distância do ponto C ao ponto B, assim:

$$r = d_{CB} = \sqrt{(7-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

III) Utilizando a equação reduzida, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{37})^2 \Rightarrow$$

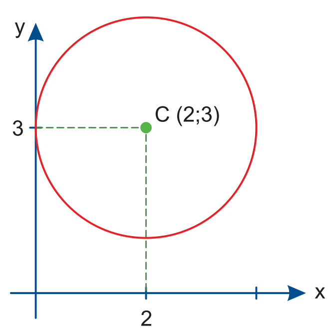
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$$

4 O centro da circunferência é C(2; 3) e o raio é r = 2, assim, sua equação é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$



5 I) O raio da circunferência é a distância de P(3; 0) a C(– 2; 1). Assim:

$$r = d_{PC} = \sqrt{(3+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

II) A equação da circunferência de centro C(– 2; 1) e raio $r = \sqrt{26}$ é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 26$

6 I) Fazendo-se x = 0 na equação 3x – 2y – 6 = 0, obtém-se $3.0 - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

Fazendo-se y = 0 na equação 3x – 2y – 6 = 0, obtém-se $3.x - 2.0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Assim, os pontos de intersecção da reta com os eixos são A(2;0) e B(0; – 3).

II) O centro da circunferência é o ponto médio do segmento AB:

$$M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{-3+0}{2}\right) = M\left(1; \frac{-3}{2}\right)$$

III) O raio da circunferência é a distância de A até M:

$$AM = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

IV)A equação da circunferência de centro $\left(1; \frac{-3}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\frac{13}{4}}$ é:

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

7 A partir da equação

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ temos:

$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$

8 $[x - (-1)]^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

9 Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, o centro da circunferência será ponto médio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} A(5; -1) \\ B(-3; 7) \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{5-3}{2}; \frac{-1+7}{2}\right) \Leftrightarrow C(1; 3)$$

e o raio da circunferência pode ser obtido calculando-se a distância AC:

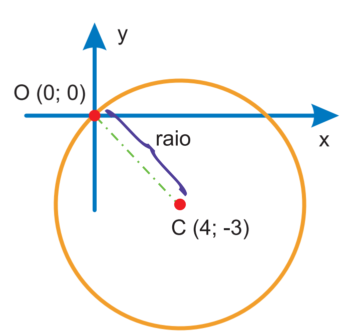
$$r = AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{32}$$

A equação da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$

10



a) O raio da circunferência procurada é a distância do centro à origem.

$$r = d_{CO} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

b) A equação da circunferência de centro C(a; b) e raio r é: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Como C(4; – 3) e r = 5, teremos:

$(x - 4)^2 + [y - (-3)]^2 = (5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

11 A circunferência de centro (2;1) e raio 3 tem equação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ e intercepta o eixo das abscissas nos pontos tais que y = 0.

Assim: $(x - 2)^2 + (0 - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

As abscissas desses pontos são: $2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$.

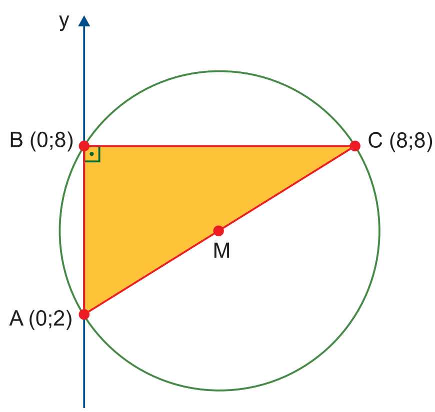
Resposta: B

12 A circunferência tem centro C (2; –1) e raio r = 3. A equação dessa circunferência é: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Resposta: A

13



Como o triângulo ABC é retângulo, com hipotenusa $\overline{AC}$, conclui-se que o centro da circunferência é o ponto M, médio de $\overline{AC}$, assim:

$$M\left(\frac{0 + 8}{2} ; \frac{2 + 8}{2}\right) \Leftrightarrow M(4,5)$$

O raio da circunferência é a distância

$AM = \sqrt{(4 - 0)^2 + (5 - 2)^2} = 5$

A circunferência de centro (4,5) e raio 5, tem equação:

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

Resposta: E

14 O raio r da circunferência é a distância entre os pontos P e C. Assim:

$r = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8}$

A equação da circunferência de centro C(2; 1) e raio $r = \sqrt{8}$, é: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$

Resposta: C

15 A circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ tem centro C(3; 4) e a circunferência concêntrica a esta, que passa pelo ponto P(1; 3), tem raio

$r = PC = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{5}$

Portanto, a circunferência procurada tem equação:

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$

Resposta: C

Módulo 46 – Equação da circunferência

1 I) $(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 25$

II) $(x - (-5))^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + y^2 = 25$

2 I) $r = d = \dfrac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 + 16|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} =$

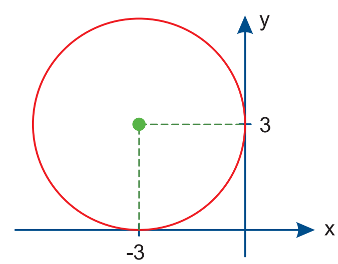
$= \dfrac{|-12 - 8 + 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

II) Utilizando a equação reduzida, temos:

$(x - (-4))^2 + (y - 2)^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{16}{25}$

3 I) O centro da circunferência é o ponto C(– 3; 3) e o raio é r = 3



II) Utilizando a equação reduzida, temos:

$(x - (-3))^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

4 I) A circunferência tem centro no eixo das ordenadas, seu centro é da forma C(0; a), e o ponto C equidista de A e de B, assim:

$AC = BC \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - a)^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (7 - a)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow C(0; 4)$

II) O raio da circunferência é a distância de B a C e, portanto, é igual a 3.

III) A equação da circunferência é

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 9$

5 O raio da circunferência é a distância do ponto C à reta t, então:

$$r = d_{C,t} = \frac{|4 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uma equação para a circunferência (λ) é:

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$

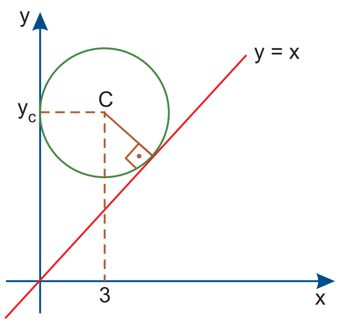
6 a) O raio da circunferência é $r = \left|5 - \left(5 + 2\sqrt{2}\right)\right| = 2\sqrt{2}$

Comparando o raio $r = 2\sqrt{2} \cong 2,82$ com a coordenada do centro da circunferência ($y_C = 4$), conclui-se que a circunferência não intercepta o eixo das abscissas.

b) A circunferência de centro C(5,4) e raio $r = 2\sqrt{2}$, tem equação
$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 8$

c) O ponto P(3,2) satisfaz à equação da circunferência, $(3 - 5)^2 + (2 \;\; - 4)^2 = 8$, portanto, P pertence à circunferência.

7



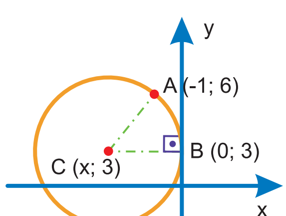
A distância do ponto C $(3; y_c)$ à reta
y = x ou seja x – y = 0 é 3. Assim:

$$\frac{|3 - y_c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |3 - y_c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow y_c = 3\sqrt{2} + 3, \text{ pois}$$

C pertence ao 1º quadrante.

Resposta: D

8 A partir do enunciado, temos C(x; 3) como centro da circunferência.



Como o ponto **C** é equidistante de **A** e **B**, temos:

$CA = CB \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (3 - 3)^2}$

Elevando ao quadrado e simplificando, vem:

$(x + 1)^2 + 9 = x^2 \Leftrightarrow x = -5$

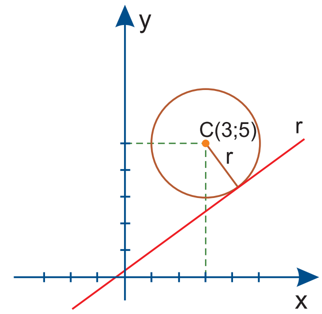
O centro é o ponto C(– 5; 3) e o raio r = 5 (r = BC).

A equação da circunferência é:

$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$

9 $r = \dfrac{|3 \,.\, 3 - 4 \,.\, 5 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|9 - 20 + 1|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|-10|}{5} \Rightarrow r = 2$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$



10 $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow P(-1; 2)$

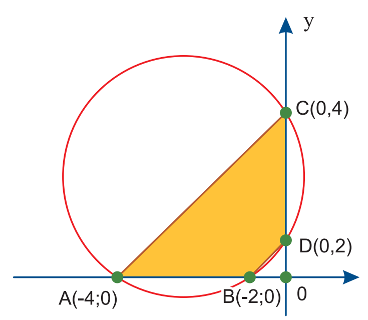
A circunferência de centro P(–1; 2) e tangente ao eixo das abscissas tem raio 2 e equação: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = -1$

Resposta: A

11 1) Intersecção com o eixo Ox (y = 0):
$(x + 3)^2 + (-3)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -2$
Os pontos de intersecção são:
A(– 4;0) e B(– 2;0)

2) Intersecção com o eixo Oy (x = 0):
$3^2 + (y - 3)^2 = 10 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow y = 4$ ou $y = 2$
Os pontos de intersecção são: C(0;4) e D(0;2)

3) A representação gráfica resulta



Assim, a área do quadrilátero será a área do ΔOAC menos a área do ΔOBD:

$$A = \frac{4 \,.\, 4}{2} - \frac{2 \,.\, 2}{2} = 8 - 2 = 6$$

Resposta: B

Módulo 47 – Determinação do centro e do raio

1 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ r^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ r = 5 \end{cases}$

C(0; 0) e r = 5

2 $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = -3 \\ -b = 2 \\ r^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ r = 4 \end{cases}$

C(3; – 2) e r = 4

3 $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 5 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ b = 0 \\ r^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$

$C(-1; 0)$ e $r = \sqrt{5}$

4 $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+3)^2 = 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = -5 \\ -b = 3 \\ r^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ r = \sqrt{13} \end{cases}$

$C(5; -3)$ e $r = \sqrt{13}$

5 $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - \dfrac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \dfrac{5}{4} + 1 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{25}{4}$

Assim sendo: $C(-1; 2)$ e $r = \dfrac{5}{2}$

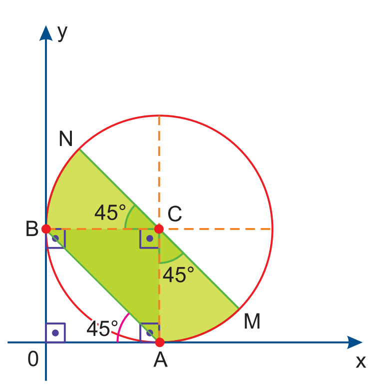
6 I) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + y^2 + 6y = 24 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 24 + 16 + 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$

II) Na equação, tem-se $r^2 = 49$. Portanto, a área do círculo correspondente é $A = \pi \cdot r^2 = 49\pi$

7 Como $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $r > 0$, representa a equação geral de uma circunferência de centro C (a, b) e raio r, vem:

a) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 1$; $C(5, 4)$ e $r = 1$
b) $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 5$; $C(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$
c) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; $C(2, 0)$ e $r = 2$
d) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$; $C(-3, 1)$ e $r = 4$
e) $x^2 + (y-4)^2 = 1$; $C(0, 4)$ e $r = 1$
f) $x^2 + y^2 = 10$; $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{10}$

8



A circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ tem centro C(2;2) e raio r = 2. Os triângulos OAB e ABC são retângulos e isósceles.

Sendo A(2;0) e B(0;2), pode-se concluir que a área sombreada é a soma das áreas de dois setores circulares, de ângulo central 45°, e do triângulo ABC. Portanto, a área é:

$A = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 2^2}{8} + \dfrac{2.2}{2} = \pi + 2$

Resposta: B

9 Em todos os casos, vamos completar os quadrados perfeitos.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y = -16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -16 + 4 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4.$
Logo, o centro é C(2, 4) e o raio é r = 2.

b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 12x + y^2 - 4y = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 9 + 36 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+6)^2 + (y-2)^2 = 49$
Logo, o centro é C(– 6, 2) e o raio é r = 7.

c) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + y^2 = -11 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = -11 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x+4)^2 + (y-0)^2 = 5$
Logo o centro é C(– 4, 0) e o raio é $r = \sqrt{5}$.

d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -5 + 9 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 20$
Logo, o centro é C(3, –4) e o raio é $r = \sqrt{20}$.

e) $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 4.$
Logo, o centro é C(0, 2) e o raio é r = 2.

f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$
Logo, o centro é C(1, 1) e o raio é $r = \sqrt{2}$.

10 A equação $(x-3)^2 + y^2 = 5$ representa uma circunferência de centro C(3; 0) e raio $r = \sqrt{5}$.

a) Para y = 2, resulta:
$(x-3)^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$
Para x > 3, o ponto procurado é P(4; 2).

b) A reta r que passa pelos pontos P(4; 2) e C(3; 0) tem equação:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 6$

O coeficiente angular de r é $m_r = 2$.

Respostas: a) P(4; 2)
b) $y = 2 \cdot x - 6$ e $m_r = 2$

11 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - x - 4y + \dfrac{9}{4} = 0$

tem centro $C\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$

A reta perpendicular à reta vertical x = k e que passa pelo centro $C\left(\frac{1}{2};2\right)$ é a reta horizontal, de equação y = 2.

Resposta: A

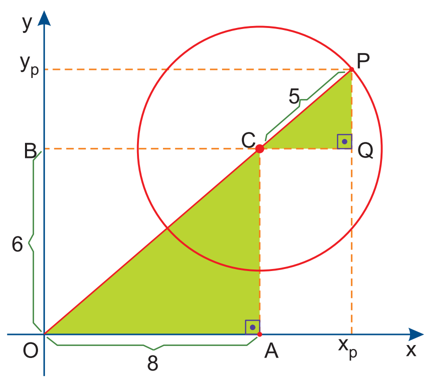
12 I) A circunferência λ de equação
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ possui centro C(3; – 1) e raio r = 2.

II) A reta s, paralela à reta r, tem equação
$3x + 7y + k = 0$ e, como contém o centro de λ, $3.3 + 7.(-1) + k = 0 \Rightarrow k = -2$

Logo, a equação de s é $3x + 7y - 2 = 0$

Resposta: A

13 A circunferência $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 25$ tem centro C(8; 6) e raio r = 5.



A partir da figura, conclui-se que:

1) ΔAOC: OA = 8, OB = AC = 6 e OC = 10

2) $\Delta OAC \sim \Delta CQP \Rightarrow \frac{CQ}{8} = \frac{QP}{6} = \frac{5}{10} \Rightarrow$

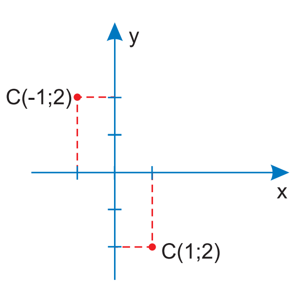
$\Rightarrow CQ = 4$ e $QP = 3$.

O ponto da circunferência, que fica mais afastado da origem, é o ponto P, cujas coordenadas são:

$$\left.\begin{array}{l} x_P = OA + CQ = 8 + 4 = 12 \\ y_P = OB + QP = 6 + 3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow P(12;9)$$

Resposta: E

14



$3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3y^2 + 12y = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

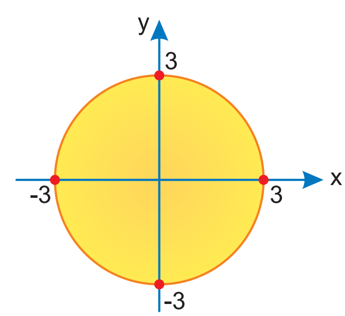
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{2}{3} + 1 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{17}{3} \Rightarrow C(1; -2)$

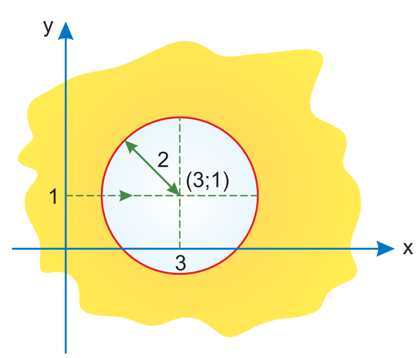
Portanto, o ponto simétrico é C'(–1; 2).

Módulo 48 – Posição relativa de um ponto e uma circunferência

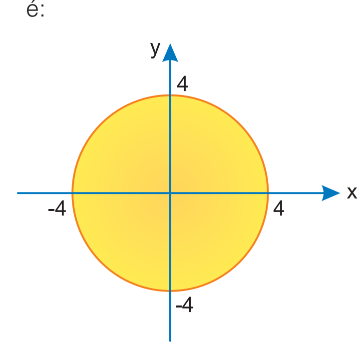
1 A equação dada é equivalente a $(x-0)^2 + (y-0)^2 < 3^2$, cuja representação gráfica é o conjunto dos pontos do plano tais que sua distância até a origem é menor que 3.
$x^2 + y^2 < 9$ tem como representação gráfica:



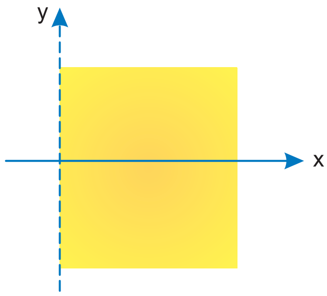
2 A equação $(x-3)^2 + (y-1)^2 > 2^2$ representa o conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto C (3; 1) é maior ou igual a 2. Sua representação gráfica é:



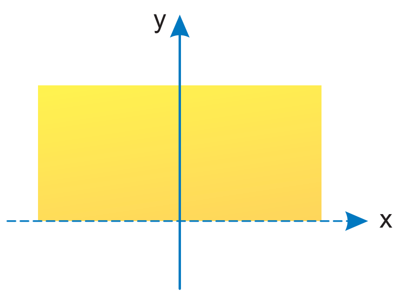
3 I) A representação gráfica da equação $x^2 + y^2 \leq 4^2$ é o conjunto dos pontos do plano cuja distância até a origem é menor ou igual a 4. Sua representação gráfica é:



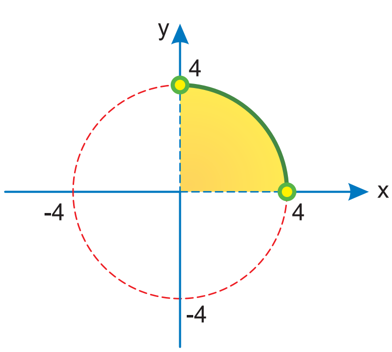
II) A representação gráfica da equação $x > 0$ é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à direita do eixo y.



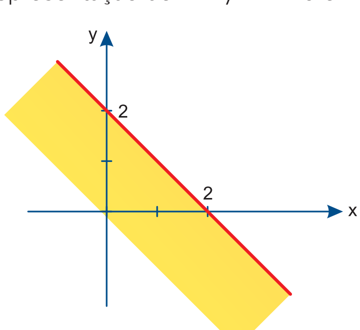
III) A representação gráfica da equação $y > 0$ é o conjunto de todos os pontos do plano que estão acima do eixo x.



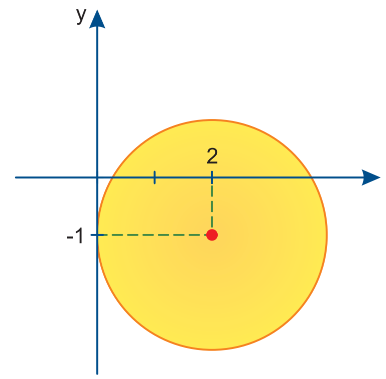
IV) A intersecção das três regiões resulta na figura abaixo representada:



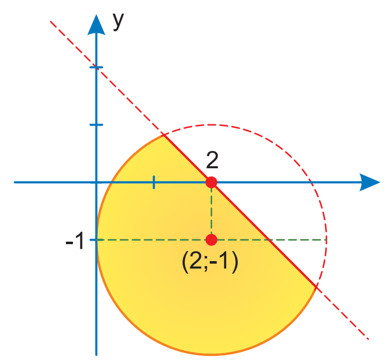
4 I) A representação de $x + y - 2 \leq 0$ é:



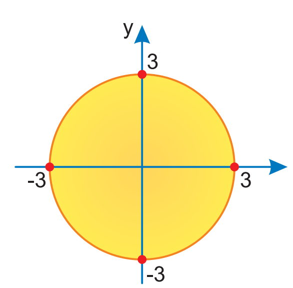
II) A representação de
$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$ é:



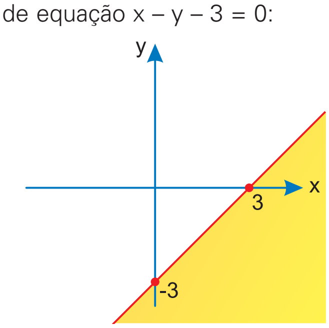
III) A intersecção das duas regiões resulta na figura abaixo:



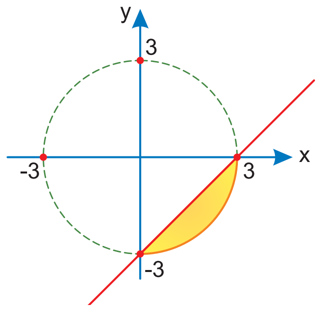
5 I) Os pontos (x; y) que satisfazem a inequação $x^2 + y^2 \leq 9$ pertencem a um círculo limitado pela circunferência de centro C(0; 0) e raio 3:



II) Os pontos (x; y) que satisfazem a inequação $x - y - 3 \geq 0$ estão no semiplano positivo em relação à reta de equação $x - y - 3 = 0$:



III) De (I) e (II) temos:



Resposta: B

6 A circunferência destacada possui centro (–3; 3) e raio r = 3. Sua equação é $(x + 3)^2 + (y – 3)^2 = 9$ e os pontos (x; y) destacados são tais que $(x + 3)^2 + (y – 3)^2 \leq 9$.
Resposta: B

7 centro: C(2, 1)

raio: $r = \sqrt{(2 – 2)^2 + (1 + 2)^2} = 3$

A equação da circunferência é:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

Os pontos internos da circunferência são representados por: $x^2 + y^2 – 4x – 2y – 4 < 0$
Resposta: C

Módulo 49 – Posição relativa de reta e circunferência

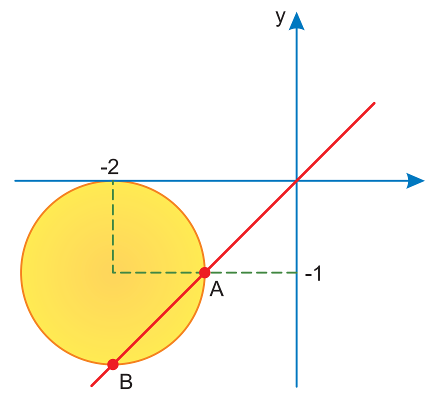
1 Substituindo y = x + 3 na equação da circunferência, temos:
$(x – 3)^2 + (x + 3 – 4)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 – 6x + 9 + x^2 – 2x + 1 – 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 – 8x – 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 – 4x – 3 = 0$
Como a equação $x^2 – 4x – 3 = 0$ apresenta $\Delta > 0$, então o sistema possui duas soluções e a reta é secante à circunferência.

2 Substituindo y = – 3x + 10 na equação da circunferência, temos:
$(x – 1)^2 + (– 3x + 10 + 3)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x – 1)^2 + (– 3x + 13)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 – 2x + 1 + 9x^2 – 78x + 169 – 10 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10x^2 – 80x + 160 = 0 \Leftrightarrow x^2 – 8x + 16 = 0$
Como a equação $x^2 – 8x + 16 = 0$ possui $\Delta = 0$, então o sistema admite uma única solução e a reta é tangente à circunferência.

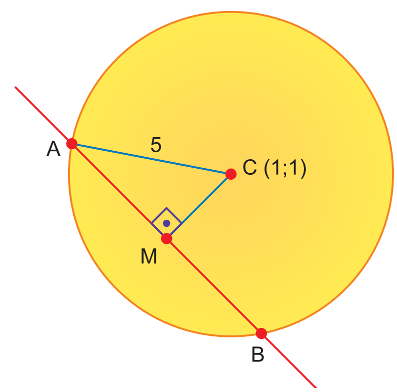
3 Fazendo x igual a zero na equação dada, temos:
$0^2 + y^2 + 4 . 0 – 2y – 3 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 – 2y – 3 = 0 \Leftrightarrow y = – 1 \text{ e } y = 3$
Logo, os pontos são (0; 3) e (0; – 1), cuja distância é 4.

4 Substituindo x por y na equação da circunferência, temos:
$(y + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 + 2y + 1 – 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2y^2 + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = – 1 \text{ ou } y = – 2$
Como x = y, então os pontos são (–1; –1) e (– 2; – 2)

Sendo d a distância entre os pontos, temos:
$d = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (– 1 + 2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



5 I) A circunferência $(x – 1)^2 + (y – 1)^2 = 25$ tem centro C(1; 1) e raio R = 5



II) $CM = \dfrac{|3 . x_c + 4 . y_c + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|3 + 4 + 8|}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$

III) Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo MCA, temos:
$(AC)^2 = (AM)^2 + (CM)^2 \Leftrightarrow 5^2 = (AM)^2 + 3^2 \Leftrightarrow AM = 4$

IV) Como M é o ponto médio da corda AB, então:
AB = 2.AM = 8

6 A circunferência $x^2 + y^2 – 6x + 4y + p = 0$ possui apenas um ponto em comum com a reta y = x – 1 se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 – 6x + 4y + p = 0 \\ y = x – 1 \end{cases}$$

admite solução única.
Desta forma, a equação
$x^2 + (x – 1)^2 – 6x + 4 . (x – 1) + p = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 – 4x + p – 3 = 0$ deve ter raíz dupla e, portanto,
$\Delta = (–4)^2 – 4 . 2(p – 3) = 0 \Leftrightarrow p = 5$.
Resposta: E

7 A circunferência tem centro

$$C\left(\frac{-2}{-2};\frac{-2}{-2}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow C(1;1)$ e raio $r = \sqrt{1^2 + 1^2 - 1} = 1$

A reta $x + y - k = 0$ é tangente à circunferência, então:

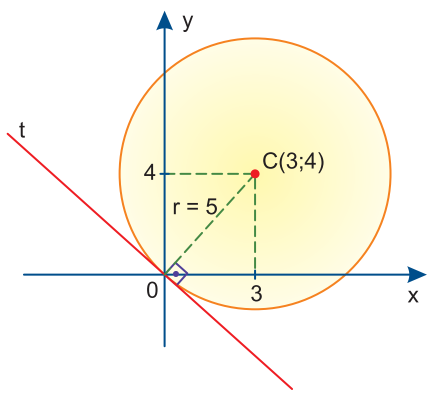
$$\frac{|1 + 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow |2 - k| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 - k = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow k = 2 \pm \sqrt{2}$

A soma dos possíveis valores de k é 4.

Resposta: A

8 A circunferência $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ tem centro C(3; 4), raio r = 5 e passa pela origem.



Sendo $m_{OC} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$, temos $m_t = \frac{-3}{4}$ e a reta tangente à circunferência, passando pela origem, tem equação $y = \frac{-3}{4} \cdot x \Leftrightarrow 3x + 4y = 0$

Portanto, as afirmativas (I) e (II) são falsas. A afirmativa (III) é verdadeira, pois $4x - 3y = 0$ e $3x + 4y = 0$ são perpendiculares, visto que, o coeficiente angular de uma das retas é o oposto do inverso da outra reta.

Resposta: C

9 1) $\begin{cases} x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (-x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8.$ Como $\Delta > 0$ a reta (**s**) é secante à circunferência (λ).

2) $\begin{cases} x - y - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = x - \sqrt{2} & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$ Como $\Delta = 0$ a reta (**s**) é tangente à circunferência (λ).

3) $\begin{cases} x - y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = x - 9 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (x - 9)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 40 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = -79.$ Como $\Delta < 0$ a reta (**s**) é exterior à circunferência (λ).

10 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ tem centro C (1; 2) e raio $r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 3} = \sqrt{2}$.

1) Como a distância da reta $2x - y = 5$ ao centro C (1; 2) é

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$$

que é maior que o raio, conclui-se que a reta não passa pelo centro da circunferência nem é tangente à circunferência.

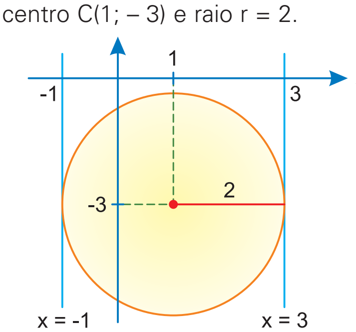
2) A área do círculo determinado pela circunferência é $A = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$.

3) A circunferência intercepta o eixo y em dois pontos, tais que $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 3$, cuja distância é 2.

4) A circunferência não intercepta o eixo x, pois a distância do centro C (1; 2) ao eixo x (d = 2) é maior que o raio ($r = \sqrt{2}$).

Resposta: C

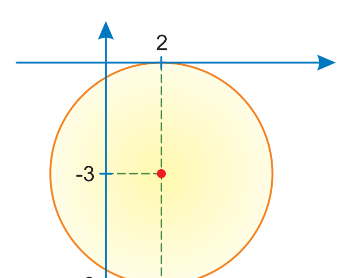
11 A circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ tem centro C(1; – 3) e raio r = 2.



A reta x = m intercepta a circunferência se e somente se $-1 \leq m \leq 3$.

Resposta: D

12 A circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ tem centro C(2; – 3) e raio r = 3.

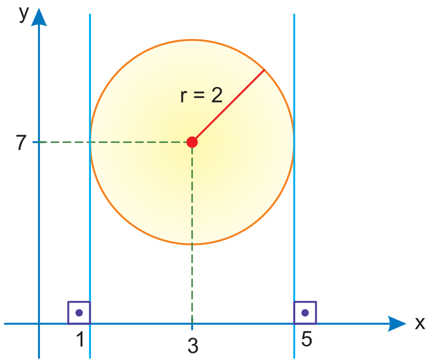


A reta y = k intercepta a circunferência se e somente se $-6 \leq k \leq 0$.

Resposta: A

Módulo 50 – Tangentes a uma circunferência

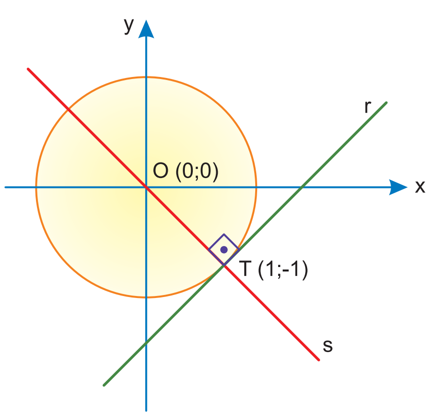
1 A circunferência $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 4$ tem centro C (3; 7) e raio r = 2



Logo, os valores de k são 5 ou 1.

2 I) A circunferência $x^2 + y^2 = 2$ tem centro C(0; 0) e raio $r = \sqrt{2}$.

II) A reta que passa por C(0; 0) e T(1; – 1) é perpendicular à reta tangente procurada.



III) $r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

IV) $m_s = \dfrac{-1-0}{1-0} = -1 \Leftrightarrow m_r = 1$

V) A equação da reta r que passa pelo ponto T(1; – 1) e tem $m_r = 1$ é:

$y - y_T = m_r \cdot (x - x_T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y + 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$

3 O raio da circunferência é a distância entre o centro C(– 4; 2) e a reta $3x + 4y - 16 = 0$, assim:

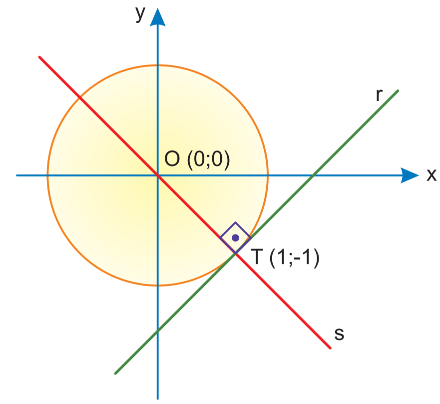
$$r = d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-12 + 8 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} =$$

$$= \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Logo, a equação da circunferência é:

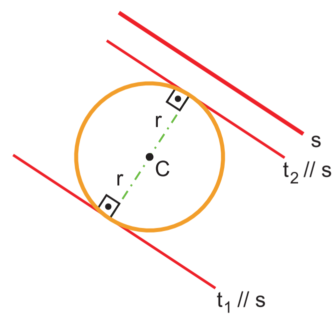
$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

4 A circunferência $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ tem centro C(2; – 3) e raio R = 4



Logo, os valores de k são tais que $-7 \leq k \leq 1$

5



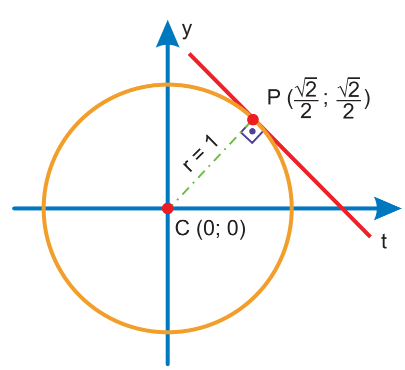
A equação do feixe de retas paralelas à reta s é
$3x + 4y + k = 0$ (I)

As retas procuradas pertencem a esse feixe e são tais que a distância do centro a elas é igual ao raio.
Como $x^2 + y^2 = 1$ tem centro C(0; 0) e raio r = 1

resulta: $1 = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow |k| = 5 \Leftrightarrow k = \pm 5$

Retornando em (I), obtemos as retas tangentes:
se k = 5, resulta: $3x + 4y + 5 = 0$ (t_1)
se k = – 5, resulta: $3x + 4y - 5 = 0$ (t_2).

6



a) Na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ temos: C(0; 0) e r = 1

b) O coeficiente angular da reta que contém o raio $\overline{CP}$ é dado por:

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} \Leftrightarrow m = 1$$

c) A reta t, tangente à circunferência e que passa por P, é perpendicular ao raio $\overline{CP}$. Portanto,

$$m_t = -\frac{1}{m} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{1} \Rightarrow m_t = -1$$

d) A equação da reta t será:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = m_t \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x + y - \sqrt{2} = 0$$

7 A equação da família de retas paralelas a s é $x - y + k = 0$ (I), onde k é um parâmetro real, cujo valor deve ser determinado. A circunferência tem centro C(5; – 1) e raio $r = \sqrt{8}$. Para que a reta paralela a **s** seja tangente à circunferência, a sua distância ao centro deve ser igual ao raio. Portanto,

$$\frac{|5 - (-1) + k|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow |k + 6| = 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k + 6 = \pm 4 \Rightarrow k = -10$ ou $k = -2$

Substituindo esses valores de k em (I), obtemos as equações das retas tangentes $x - y - 2 = 0$ ou $x - y - 10 = 0$

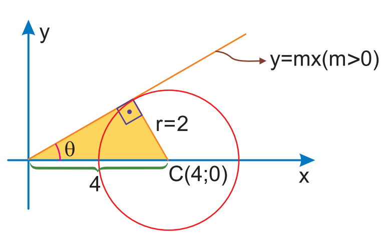
8 O raio da circunferência é a distância do ponto C à reta t, então:

$$r = d_{C,t} = \frac{|4 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uma equação para a circunferência (λ), é:

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$

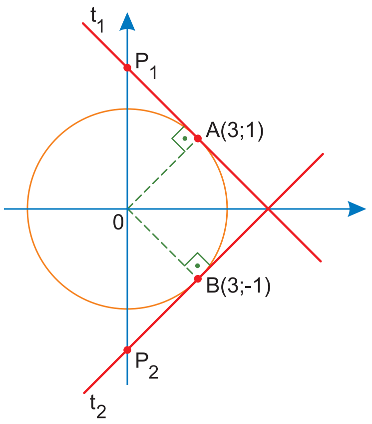
9 A circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ tem centro C(4; 0) e raio r = 2. A partir do enunciado, temos a seguinte figura:



$$\text{sen } \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: B

10 A curva de equação $x^2 + y^2 = 10$, é uma circunferência de centro C(0; 0) e raio $r = \sqrt{10}$. Para $x = 3$, resulta pela equação $3^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow y = \pm 1$, e, portanto, temos os pontos A(3; 1) e B(3; –1), como sendo os pontos de tangencia para as retas procuradas.



Sendo $OP_1 = OP_2$, pode-se considerar para efeito de cálculos, qualquer uma das tangentes (t_1 ou t_2).
Vamos considerar a reta tangente (t_1), que passa pelo ponto A(3; 1) e tem coeficiente angular

$$m = \frac{-1}{m_{OA}} = \frac{-1}{1/3} = -3.$$

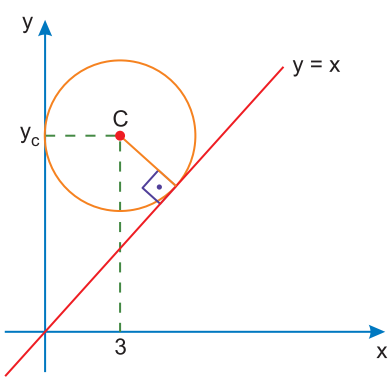
A equação da reta (t_1) é:

$y - 1 = -3 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -3x + 10$, que encontra o eixo das ordenadas no ponto $P_1(0; 10)$.

A distância da origem a esse ponto é 10.

Resposta: D

11



A distância do ponto C (3; y_c) à reta y = x ou seja $x - y = 0$ é 3. Assim:

$$\frac{|3 - y_c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |3 - y_c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow y_c = 3\sqrt{2} + 3,$$

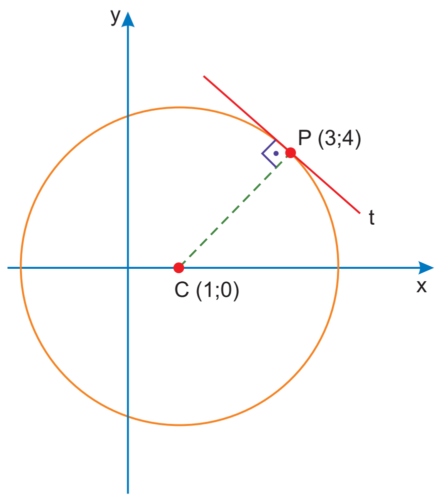
pois C pertence ao 1º quadrante.

Resposta: D

12 A circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 20$ tem centro C(1; 0) e raio $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

O ponto P(3; 4) pertence à circunferência, pois:
$(3 - 1)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

A reta tangente é tal que:



1) $m_{PC} = \dfrac{4 - 0}{3 - 1} = 2 \Leftrightarrow m_t = \dfrac{-1}{2}$ $(t \perp PC)$

2) $y - 4 = \dfrac{-1}{2} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$

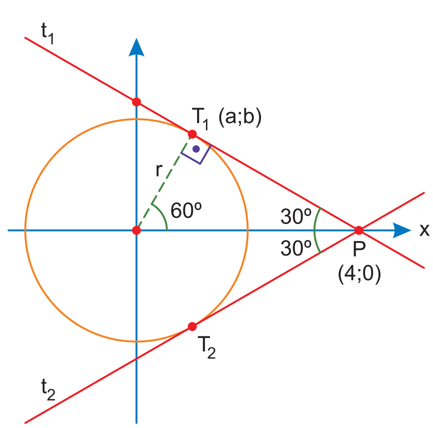
Resposta: E

13 A circunferência tem centro (4; 3) e raio $r = \sqrt{3}$. A reta é tangente à circunferência, quando a distância do centro à reta é igual ao raio, assim:

$$\frac{|-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + k|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |k| = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow k = \pm 5\sqrt{3}$$

Resposta: E

14 A partir do enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo OT_1P_1, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{r}{4} \Rightarrow r = 2$

Sendo O ponto de tangência T_1 de coordenadas (a; b), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 60° = \dfrac{a}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ \text{sen } 60° = \dfrac{b}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow T_1(1;\sqrt{3})$$

Resposta: B

Módulo 51 – Elipse

1 I) Pela figura, temos a = 5, b = 4 e C(0; 0).

II) A equação da elipse é do tipo

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e, portanto, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + f^2 \Leftrightarrow f = 3 \Rightarrow 2f = 6$

IV) A excentricidade da elipse é $e = \dfrac{f}{a} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

2 I) Pela figura, temos a = 4, f = 3 e C(0; 0)

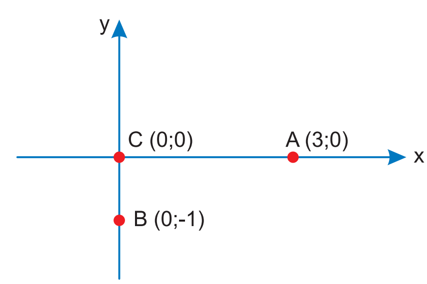
II) A excentricidade é $e = \dfrac{f}{a} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$

IV) A equação da elipse é do tipo

$\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ e, portanto, $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{x^2}{7} = 1$

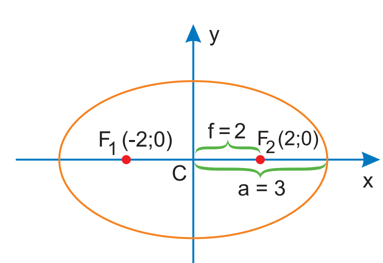
3 I) Pela figura, temos a = 3 e b = 1



II) A equação da elipse é do tipo

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e, portanto, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

4



A elipse de focos $F_1(-2;0)$ e $F_2(2;0)$ e eixo maior igual a 6, é tal que:

$$\left.\begin{array}{l} f = 2 \\ a = 3 \\ a^2 = b^2 + f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

A equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Resposta: B

5 A elipse da figura tem centro C(– 5;7) e semi-eixos a = 4 e b = 3. A equação reduzida da elipse, representada na figura, com centro C(g;h) e semi-eixos a e b, é:

$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

Resposta: B

6 A elipse: $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ tem:

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$

$b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6}$

eixo maior: $2a = 2\sqrt{10} = \sqrt{40}$

eixo menor: $2b = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$

O retângulo de lados $\sqrt{40}$ e $\sqrt{24}$ tem diagonal

$d^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{24})^2 = 64 \Rightarrow d = 8.$

Resposta: A

Módulo 52 – Elipse

1 I) O centro da elipse é C(0; 0) e f = 2

II) $e = \dfrac{f}{a} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow a = 3$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 9 = b^2 + 4 \Leftrightarrow b^2 = 5$

IV) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto, } \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$$

2 I) $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \dfrac{9x^2}{225} + \dfrac{25y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

II) $a^2 = 25$ e $b^2 = 9 \Leftrightarrow a = 5$ e $b = 3$

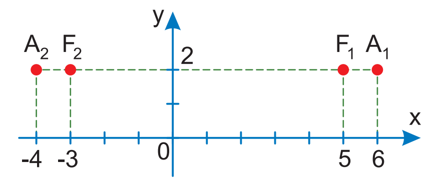
III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + f^2 \Leftrightarrow f^2 = 16 \Leftrightarrow f = 4$

IV) A excentricidade da elipse é:

$$e = \frac{f}{a} = \frac{4}{5}$$

Resposta: B

3



I) O centro é $\left(\dfrac{6-4}{2} ; \dfrac{2+2}{2}\right) = (1;2)$, a = 5 e f = 4

II) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Leftrightarrow b^2 = 9$

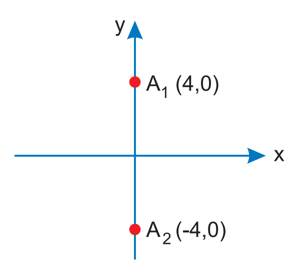
IV) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Resposta: A

4



I) $16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{x^2}{9} = 1$

II) a = 4 e b = 3, pois a > b

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 16 = 9 + f^2 \Rightarrow f = \sqrt{7}$

IV) O eixo maior da elipse está contido no eixo das ordenadas e, portanto, os focos são $(0; \sqrt{7})$ e $(0; -\sqrt{7})$

Resposta: B

5 1) Os pontos A e B são $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ e $\left(-\dfrac{7}{6}, -\dfrac{4}{3}\right)$

pois:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{7}{6} \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) O ponto médio de $\overline{AB}$ é

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Resposta: D

6 O ponto P, representado na figura, é a intersecção da curva $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$(elipse) com a reta y = x.

Como o ponto P, pertecente ao primeiro quadrante, tem suas coordenadas obtidas a partir do sistema

$$\begin{cases} y = x \\ \frac{y^2}{100} + \frac{9}{25} = 1 \end{cases}, \text{ temos: } x = y = 2\sqrt{5}$$

A distância, em milhões de km, do planeta P $(2\sqrt{5}\,;\,2\sqrt{5})$ à estrela O(0,0), no instante representado na figura, é:

$$OP = \sqrt{(2\sqrt{5}-0)^2 + (2\sqrt{5}-0)^2} = 2\sqrt{10}$$

Resposta: B

Módulo 53 – Hipérbole

1 I) A hipérbole tem centro C(0; 0), a = 2 e b = 3

II) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto, } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

2 I) A hipérbole tem centro C(0; 0), b = 3 e f = 5

II) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 9 \Rightarrow a = 4$

III) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto, } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

3 I) A hipérbole tem centro C(0; 0) e $f = \sqrt{13}$

II) $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

III) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 13 = 9 + b^2 \Rightarrow b = 2$

IV) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto, } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

4 I) $2f = 12 \Leftrightarrow f = 6$

II) $e = \Rightarrow 1,5 = \frac{6}{a} \Leftrightarrow a = 4$

III) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{20}$

IV) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto, } \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

5 a) $F_1(8, 0)$, $F_2(-8, 0)$, $A_1(5, 0)$, $A_2(-5, 0)$, O(0, 0).

Pelos dados do problema, temos que os focos estão no eixo x, f = 8 e a = 5.

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 25 + b^2 \Rightarrow b^2 = 39$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$

b) $A_1(3; 0)$, $A_2(-3; 0)$, 2f = 8, O(0; 0).

Pelos dados do problema, temos que o eixo real está contido no eixo x, a = 3 e f = 4.

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 9 \Rightarrow b^2 = 7$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

c) $A_1(3; 0)$, $A_2(-3; 0)$, e $= \frac{f}{a} = 2$, O(0, 0).

Pelos dados do problema, temos que o eixo real está contido no eixo x e a = 3. Então:

$\frac{f}{a} = 2 \Rightarrow \frac{f}{3} = 2 \Rightarrow f = 6$

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

d) $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$, e $= \frac{f}{a} = \frac{5}{3}$, O(0, 0)

Pelos dados do problemam, temos que os focos estão no eixo y e f = 5. Então:

$\frac{f}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 3$

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16.$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

6 A hipérbole possui centro C(0; 0), eixo transverso horizontal a = 4 e b = 5.

Sua equação é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

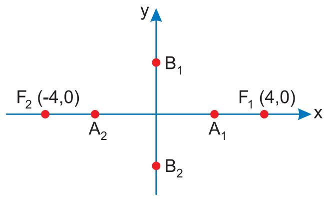
7 A hipérbole da figura possui centro O(0; 0), eixo transverso vertical, a = 6 e b = 3.

Sua equação é $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$

Resposta: C

Módulo 54 – Hipérbole

1 I) $f = 4$, $a = b$, $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 = 8$



II) A equação da hipérbole é, pois,

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

III) A excentricidade vale:

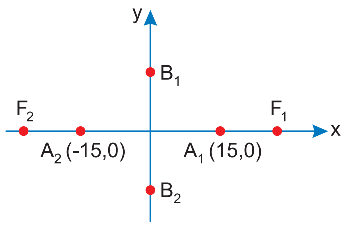
$$e = \frac{f}{a} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2 I) $A_1A_2 = 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

II) $B_1B_2 = 2b = 14 \Leftrightarrow b = 7$

III) A equação é $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{49} = 1$

3



I) $2a = 30 \Leftrightarrow a = 15$

II) $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{f}{15} \Leftrightarrow f = 18$

III) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 18^2 = 15^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 99 \Rightarrow b = \sqrt{99}$

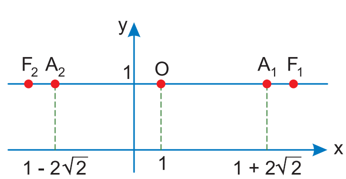
IV) A equação da hipérbole é $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{99} = 1$

4 I) $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - y^2 + 2y = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

II) É uma hipérbole equilátera ($a = b = \sqrt{8}$) com eixo transverso paralelo ao eixo das abscissas e centro O(1;1).



III) $a = 2\sqrt{2}$; $O(1;1) \Rightarrow A_1(1 + 2\sqrt{2};\ 1)$ e $A_2(1 - 2\sqrt{2};\ 1)$

IV) $f^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow f^2 = 8 + 8 \Rightarrow f = 4$

V) $f = 4$; $O(1;\ 1) \Rightarrow F_1(5;\ 1)$ e $F_2(-4;\ 1)$

a) O(1; 1)

b) $F_1(5;\ 1)$ e $F_2(-3;\ 1)$

c) $A_1(1 + 2\sqrt{2};\ 1)$ e $A_2(1 - 2\sqrt{2};\ 1)$

5 A hipérbole $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ tem:

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ (eixo transverso)

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow 2b = 10$ (eixo conjugado)

A área do retângulo é igual a:

$A = 12 \,.\, 10 = 120$

Resposta: B

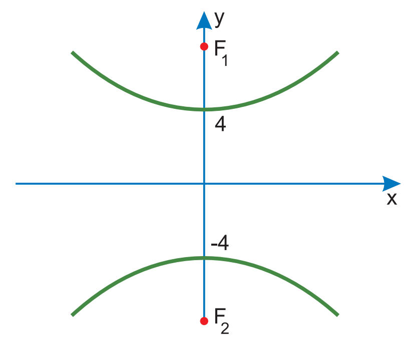
6 $y^2 - 16x^2 = 16 \Rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$ representa uma hipérbole

com focos no eixo x, sendo:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

O gráfico é do tipo:



Então $f^2 = a^2 + b^2 = 16 + 1 = 17 \Rightarrow f = \sqrt{17}$ e os focos têm coordenadas:

$F_1(0;\ \sqrt{17})$ e $F_2(0;\ -\sqrt{17})$

7 $x^2 - y^2 = 25 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ é uma hipérbole equilátera,

com $a^2 = b^2 = 25$.

Dessa forma:

$f^2 = a^2 + b^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow f = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ e, portanto,

$2 \,.\, f = 10\sqrt{2}$.

Resposta: C

8 I) $4(x-3)^2 - \dfrac{4y^2}{15} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{(y-0)^2}{\frac{15}{4}} = 1$, que é

a equação de uma hipérbole de centro C(3 ,0), com

$a^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ e $b^2 = \dfrac{15}{4} \Leftrightarrow b = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

II) Sendo 2f a distância focal, temos:

$$f^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow f^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f^2 = 4 \Leftrightarrow f = 2$, pois $f > 0$

Portanto, o centro é C(3;0) e os focos são $F_1(5;0)$ e $F_2(1;0)$.

9 I) $9x^2 - 4y^2 = 36$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

II) $f^2 = a^2 + b^2$

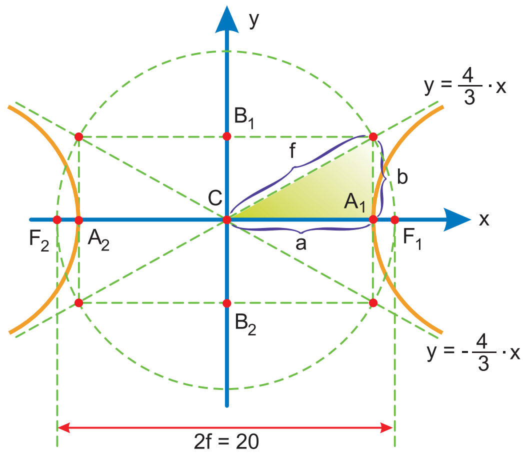
$f^2 = 4 + 9 \Rightarrow f = \sqrt{13}$ e $2f = 2\sqrt{13}$

III) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ e $2a = 4$

IV) $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ e $2b = 6$

V) $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

10



A partir do enunciado, temos:

- Centro: C(0; 0)
- Distância focal: $2 \,.\, f = 20 \Leftrightarrow f = 10$
- Assíntotas:

$$y = \pm \frac{4}{3} \,.\, x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad ①$$

Como $f^2 = a^2 + b^2$, então:

$10^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100 \quad ②$

Seja o sistema formado pelas equações ① e ②:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 & ① \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{4a}{3} & ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, vem:

$$a^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 16a^2 = 900 \Leftrightarrow 25a^2 = 900 \Leftrightarrow a = 6$$

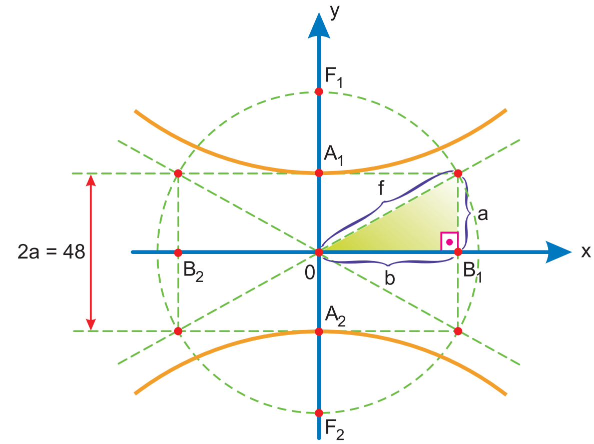
Em ②, resulta $b = \dfrac{4 \,.\, 6}{3} \Leftrightarrow b = 8$

A equação da hipérbole, nas condições do problema, é

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que resulta:

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

11



A partir do enunciado, temos:

- Centro: C(0; 0)
- Eixo transverso: $2a = 48 \Leftrightarrow a = 24$
- Excentricidade: $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow \dfrac{13}{12} = \dfrac{f}{24} \Leftrightarrow f = 26$

Como $f^2 = a^2 + b^2$, então:

$26^2 = 24^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 \Leftrightarrow b = 10$

A equação da hipérbole, nas condições do problema, é

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, que resulta:

$$\frac{y^2}{24^2} - \frac{x^2}{10^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{576} - \frac{x^2}{100} = 1$$

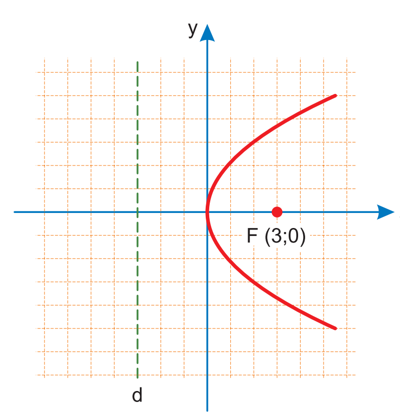
Módulo 55 – Párabola

1 a) o vértice é o ponto (0; 0)

b) a equação da diretriz é $x = -3$

c) Sendo $f = 3$, a equação da parábola será $y^2 = 12x$

d) ver imagem

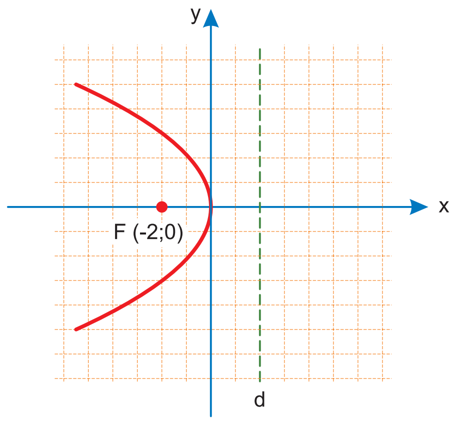


2 a) o vértice é o ponto (0; 0)

b) a equação da diretriz é $x = 2$

c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $y^2 = -8x$

d) ver imagem

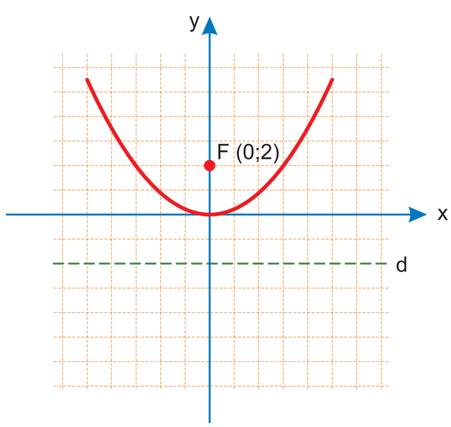


3 a) o vértice é o ponto (0; 0)

b) a equação da diretriz é $y = -2$

c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $x^2 = 8y$

d) ver imagem

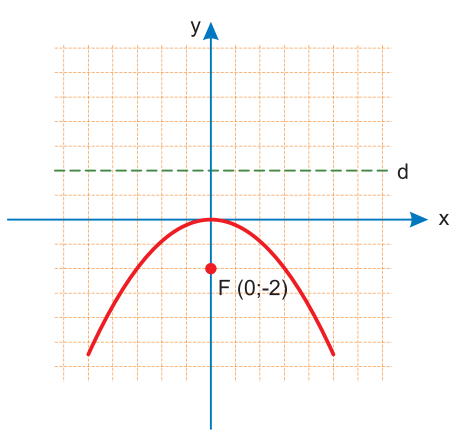


4 a) o vértice é o ponto (0; 0)

b) a equação da diretriz é $y = 2$

c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $x^2 = -8y$

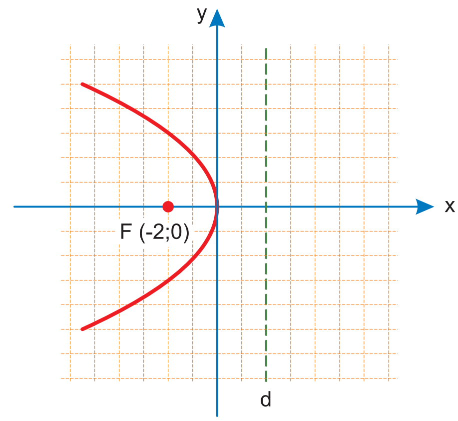
d) ver imagem



5 I) $y^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -8x$

II) O vértice é o ponto (0; 0).

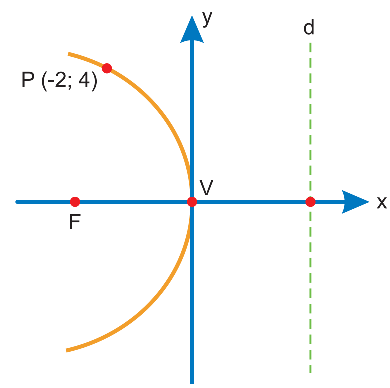
III) $4f = 8 \Leftrightarrow f = 2$



IV) A equação da diretriz é $x = 2$

V) O foco é $F(-2; 0)$

6



Pelo enunciado, a parábola tem o aspecto da figura acima, portanto sua equação é do tipo: $y^2 = -4 \cdot f \cdot x$.

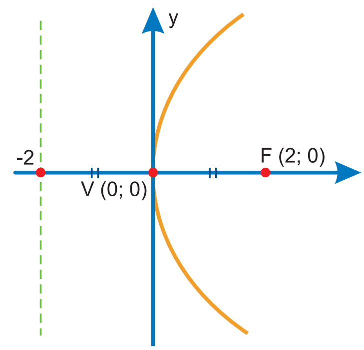
Então: $P(-2; 4) \in y^2 = -4 \cdot f \cdot x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^2 = -4f \cdot (-2) \Leftrightarrow f = 2$

Para $f = 2$, nas condições do problema, temos:

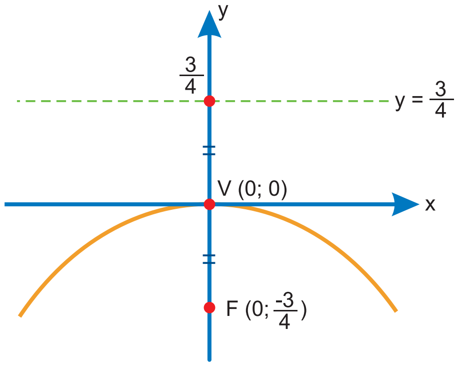
- equação reduzida: $y^2 = -8 \cdot x$
- foco: $F(-2; 0)$
- diretriz: $x = 2$

7 A equação $y^2 = 8 \cdot x$ representa uma parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas, vértice na origem e voltada para a direita.



Comparando a equação $y^2 = 4 \, . \, f \, . \, x$ com a equação $y^2 = 8 \, . \, x$, teremos:
$4 \, . \, f = 8 \Leftrightarrow f = 2$. Dessa forma, o foco é F(2; 0) e a diretriz tem equação $x = -2$.

8 A equação $x^2 = -3 \, . \, y$ representa uma parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, com vértice na origem e voltada para baixo.



Comparando a equação $x^2 = -4 \, . \, f \, . \, y$ com a equação $x^2 = -3 \, . \, y$, teremos:

$4 \, . \, f = 3 \Leftrightarrow f = \dfrac{3}{4}$. Dessa forma, o vértice é V(0; 0), o foco é $F\left(0; -\dfrac{3}{4}\right)$ e a diretriz tem equação $y = \dfrac{3}{4}$.

9 A parábola possui centro C(0; 0), reta diretriz de equação $x = -2$ e eixo de simetria na horizontal. Assim, sua equação é $y^2 = 4 \, . \, 2x \Leftrightarrow y^2 = 8x$.
Resposta: A

Módulo 56 – Parábola

1 I) V(4; 3)
II) FV = Vd = f = 2
III) A equação é do tipo
$(x - g)^2 = -4f(y - h)$ e, portanto, $(x - 4)^2 = -8(y - 3)$
IV) A equação da diretriz é $y = 5$

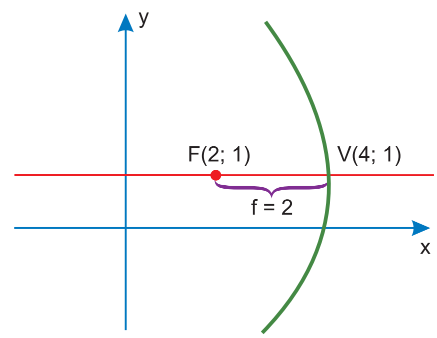
2 I) $x^2 = -4fy$ e $x^2 = -20y \Leftrightarrow f = 5$
II) O vértice é a origem do sistema cartesiano, a parábola está "voltada para baixo" e f = 5
III) O foco da parábola é o ponto (0; – 5) e a equação da diretriz é $y = 5$
Resposta: C

3 Se P(10; 5) é um dos pontos da parábola de equação $x^2 = 4fy$, então: $10^2 = 4 \, . \, f \, . \, 5 \Leftrightarrow f = 5$
A equação da parábola, portanto, é:
$x^2 = 4 \, . \, 5 \, . \, y \Leftrightarrow x^2 = 20y$
Resposta: B

4 I) A equação da parábola é do tipo $(y - h)^2 = 4f(x - g)$
II) O vértice é V(3; 2) e, portanto, g = 3 e h = 2
III) VF = f = 2
IV) A equação é $(y - 2)^2 = 4 \, . \, 2 \, . \, (x - 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 3)$
Resposta: C

5 A equação da parábola é do tipo $x^2 = 4fy$, e f = 3. Logo, a equação é $x^2 = 12y$
Resposta: E

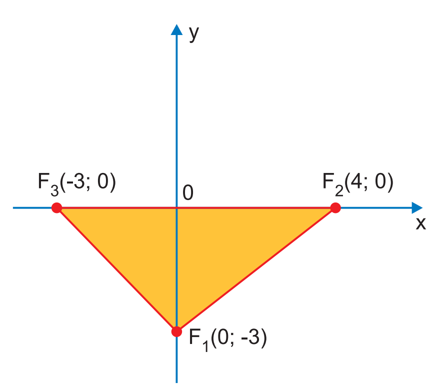
6



A partir da figura, temos:
$(y - 1)^2 = -4 \, . \, 2 \, . \, (x - 4)$
$(y - 1)^2 = -8 \, . \, (x - 4)$
Resposta: E

7 a) $V_F = f = 3 \Rightarrow p = 2 \, . \, f = 6$ é o parâmetro.
b) A diretriz é a reta vertical, tal que Vd = VF = f = 3, e está localizada para a direita da parábola; assim, sua equação é $x = 2$.
c) Sendo V(–1; – 2), f = 3, a equação da parábola indicada é:
$(y - h)^2 = -4 \, . \, f \, . \, (x - g) \Rightarrow (y + 2)^2 = -12 \, . \, (x + 1)$.

8 1) Focos das parábolas
$x^2 = -12 \, . \, y \to F_1 \; (0; -3)$
$y^2 = 16 \, . \, x \to F_2 \; (4; 0)$
$y^2 = -12 \, . \, x \to F_3 \; (-3; 0)$
2) Área do $\Delta \, F_1F_2F_3$



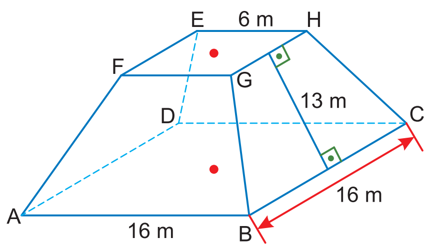
$$A = \frac{F_2F_3 \cdot 0F_1}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

Resposta: E

FRENTE 2

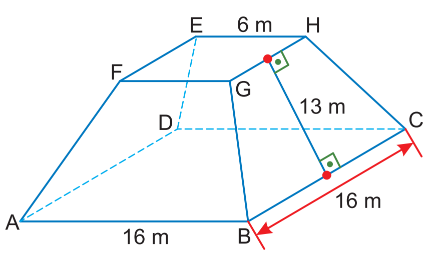
Módulo 45 – Tronco de pirâmide de bases paralelas

1



$$A_L = 4 \cdot A_{BCHG} = 4 \cdot \frac{(16 + 6) \cdot 13}{2} \Rightarrow A_L = 572\ m^2$$

2



I) $A_B = 16^2 \Rightarrow A_B = 256\ m^2$

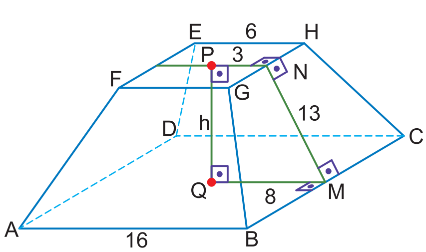
II) $A_b = 6^2 \Rightarrow A_b = 36\ m^2$

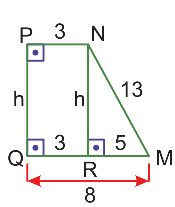
III) $A_L = 4 \cdot \dfrac{(16 + 6) \cdot 13}{2} \Rightarrow A_L = 572\ m^2$

IV) $A_T = A_B + A_b + A_L \Leftrightarrow A_T = 256 + 36 + 572 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 864\ m^2$

3





No triângulo MNR, temos: $13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$ m

4 $V = \dfrac{h}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\,) =$

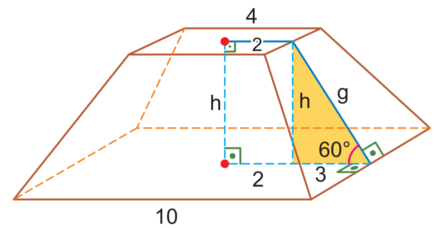
$= \dfrac{12}{3} \cdot (256 + 36 + \sqrt{256 \cdot 36}\,) \Rightarrow V = 1552\ m^3$

5 Sendo S a área da secção, temos:

$$\frac{S}{225} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S = 100$$

Resposta: D

6



1) $\cos 60° = \dfrac{3}{g} \Leftrightarrow g = 6$

2) $A_B = 10^2 = 100$

3) $A_b = 4^2 = 16$

4) $A_\ell = 4 \cdot \dfrac{(10 + 4) \cdot 6}{2} = 168$

5) $A_t = A_\ell + A_B + A_b$

Assim: $A_t = 168 + 100 + 16 \Leftrightarrow A_t = 284$

Resposta: E

7 O volume V do tronco de pirâmide, em metros cúbicos, é igual à diferença entre os volumes das pirâmides ABDE e AIJK. Assim,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}$$

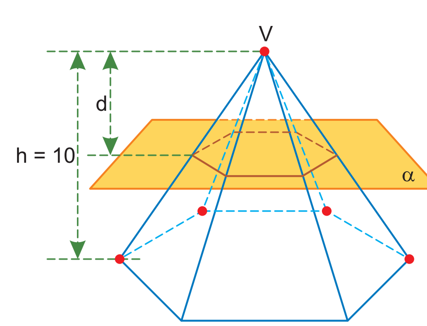
8 Sendo v o volume da pirâmide menor, temos:

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{\frac{1}{2}D}{D}\right)^3 \Rightarrow v = \frac{1}{8} \cdot V$$

Assim, $V - v = V - \dfrac{1}{8}V = \dfrac{7}{8}V$

Resposta: A

9



Se V_1 o volume da pirâmide de altura "d" e V o volume da pirâmide de altura h = 10 m, tem-se

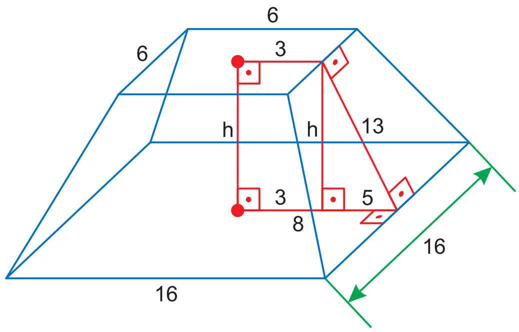
$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{8} \text{ e } \frac{V_1}{V} = \left(\frac{d}{h}\right)^3$$

Assim,

$$\left(\frac{d}{10\text{ m}}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{d}{10\text{ m}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = 5\text{ m}$$

Resposta: C

10



Sendo h a medida da altura do tronco de pirâmide, temos:

$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h = 12$

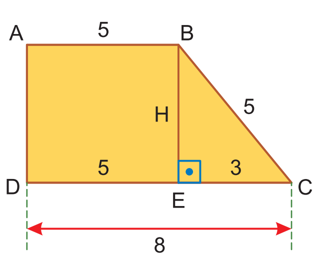
O volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = \frac{12}{3} \cdot (16^2 + 6^2 + \sqrt{16^2 \cdot 6^2}) = 1552$$

Resposta: B

Módulo 46 – Tronco de cone de bases paralelas

1 Separando o trapézio e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos:



$5^2 = H^2 + 3^2 \Rightarrow H = 4$ cm

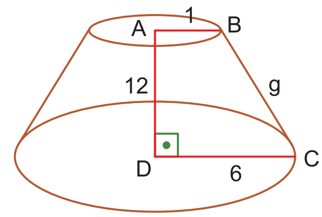
2 I) Altura do tronco: $5^2 = H^2 + 3^2 \Rightarrow H = 4$ cm

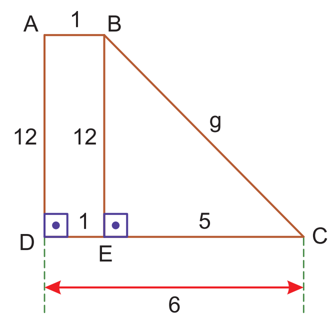
II) Área da base maior: $A_B = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ cm^2

III) Área da base menor: $A_b = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2

IV) Volume: $V = \frac{4}{3} (\pi + 16\pi + \sqrt{\pi . 16\pi}) \Rightarrow V = 28\pi$ cm^3

3 Considere o tronco de cone da figura abaixo e o trapézio ABCD.





I) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos: $g^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow g = 13$ cm

II) Área da base maior: $A_B = \pi \cdot 6^2 = 36\,\pi$ cm^2

III) Área da base menor: $A_b = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2

IV) Área lateral: $A_L = \pi(R + r)\,g = \pi(6 + 1).13 = 91\pi$ cm^2

V) Área total: $A_T = A_B + A_b + A_L =$

$= 36\pi + \pi + 91\pi = 128\pi$ cm^2

4 I) Área da base maior: $A_B = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

II) Área da base menor: $A_b = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2

III) Volume:

$$31\pi = \frac{H}{3} (\pi + 25\pi + \sqrt{\pi . 25\pi}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow H = 3$ cm

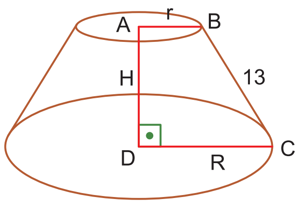
5 I) Área da base maior:

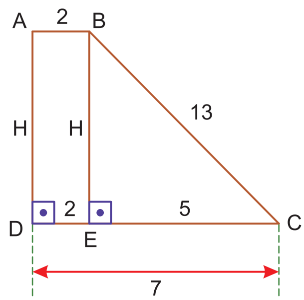
$A_B = \pi \cdot R^2 = 49\pi$ cm$^2 \Leftrightarrow R = 7$ cm

II) Área da base menor:

$A_b = \pi \cdot r^2 = 4\pi$ cm$^2 \Leftrightarrow r = 2$ cm

III) Considere o tronco de cone da figura a seguir e o trapézio ABCD. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos:





$H^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow H = 12$ cm

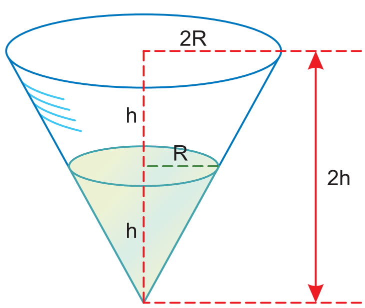
IV) Área lateral: $A_L = \pi(R + r)g = \pi(7 + 2) \,.\, 13 = 117\pi$ cm^2

V) Volume:

$$V = \frac{12}{3}\left(4\pi + 49\pi + \sqrt{4\pi.49\pi}\right) = 268\pi \text{ cm}^3$$

Resposta: D

6



1) $V = \frac{1}{3}\pi\,(2R)^2 \,.\, 2h \Leftrightarrow \pi\,R^2\,h = \frac{3V}{8}$

2) $V_{suco} = \frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, R^2 \,.\, h$

Assim: $V_{suco} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3V}{8} \Leftrightarrow V_{suco} = \frac{V}{8}$

Resposta: C

7 $V_{balde} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_{balde} = \frac{\pi \,.\, 45}{3}(196 + 81 + 126) \Leftrightarrow$

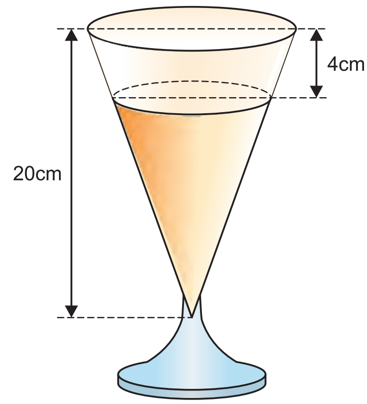
$\Leftrightarrow V_{balde} = 6045\,\pi$

Resposta: B

8 $\frac{V_f}{V_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{V_f}{V_i} = \frac{1}{8}$

Resposta: E

9 Sejam V_E, V_S e V_C, respectivamente, os volumes da espuma, da parte consistente de sorvete e do copo.
Da semelhança dos sólidos VAB e VCD, conforme a figura, temos:



$$\frac{V_S}{V_C} = \left(\frac{16}{20}\right)^3 \Leftrightarrow V_S = \frac{64}{125} \,.\, V_C$$

Como

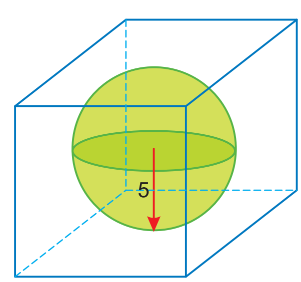
$$V_E = V_C - V_S = V_C - \frac{64}{125} \,.\, V_C = \frac{61}{125} \,.\, V_C = 0{,}488 \,.\, V_C$$

tem-se: $V_E = 48{,}8\% \,.\, V_C \cong 50\% \,.\, V_C$

Resposta: C

Módulo 47 – Inscrição e circunscrição de sólidos I

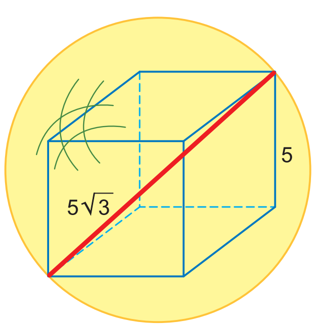
1



I) A aresta do cubo mede $a = 2r = 10$ cm.

II) O volume do cubo é $V = a^3 = 10^3 = 1000$ cm^3

2



I) A diagonal do cubo e o diâmetro da superfície esférica são iguais a $5\sqrt{3}$ cm.

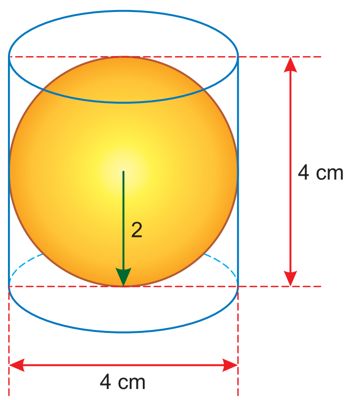
II) O raio da superfície esférica é $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

III) A área da superfície esférica é:

$$A = 4.\pi.R^2 = 4\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 75\pi \text{ cm}^2$$

3 I) Sendo de 2 cm o raio da esfera, e, portanto, 4 cm o seu diâmetro, o raio do cilindro equilátero circunscrito é de 2 cm e a sua altura, 4 cm.

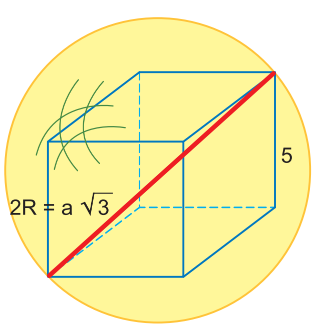
Veja imagem.



II) A área da base do cilindro é $A_B = \pi R^2 = \pi\, 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

III) O volume é $V = A_B \,.\, H = 4\pi \,.\, 4 = 16\pi \text{ cm}^3$

4



I) Sendo **R** o raio da superfície esférica e **a** a aresta do cubo, tem-se:

$$2R = a\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Área da superfície esférica: $A_{sup.esf.} = 4\pi R^2$

III) Área total do cubo: $A_{totalcubo} = 6 \,.\, a^2$

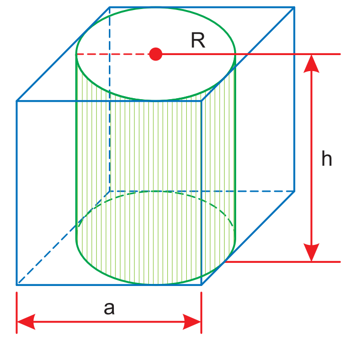
IV) A razão entre a área da superfície esférica e a área total do cubo nela inscrito é:

$$\frac{A_{sup.esf.}}{A_{totalcubo}} = \frac{4\pi R^2}{6a^2} = \frac{4 \,.\, \pi}{6} \,.\left(\frac{R}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: C

5



Sendo "a" a medida da aresta do cubo, "R" e "h", respectivamente, as medidas do raio e da altura do cilindro, temos: a = h = 2R.

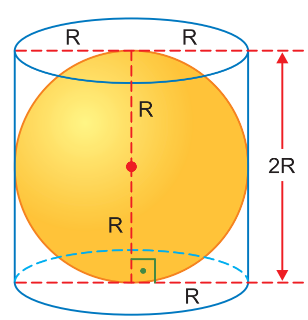
Assim, sendo A_{cubo} e $A_{cilindro}$ as áreas totais do cubo e do cilindro, temos:

$$\frac{A_{cubo}}{A_{clindro}} = \frac{6a^2}{2\pi R^2 + 2\pi R \,.\, h} =$$

$$= \frac{6 \,.\, (2R)^2}{2\pi R^2 + 2\pi R \,.\, 2R} = \frac{24R^2}{6\pi R^2} = \frac{4}{\pi}$$

Resposta: C

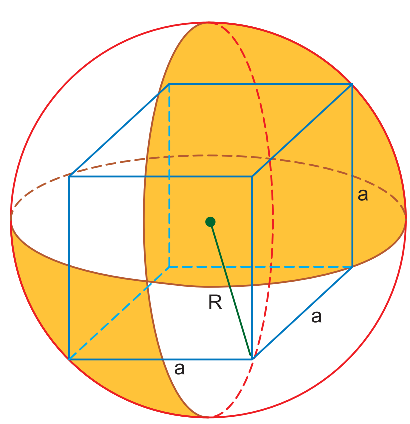
6



$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2(2R)} = \frac{4\pi R^3}{6\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

Resposta: B

7



Sendo a a medida da aresta do cubo, d a medida da diagonal do cubo e R o raio da esfera, temos:

I) $6a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

II) $2R = d \Leftrightarrow R = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = 1$

Assim, o volume V da esfera é dado por:

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \Leftrightarrow V = \dfrac{4\pi}{3}$

Resposta: B

8 Sendo R a medida do raio da base do cone e d a medida da diagonal da face do cubo tem -se:

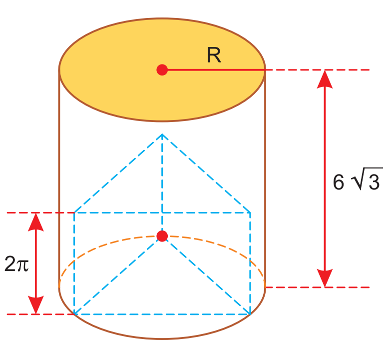
1) $V_{cubo} - V_{cone} = 1 - \dfrac{\pi}{12} \Leftrightarrow 8R^3 - \dfrac{2\pi R^3}{3} = 1 - \dfrac{\pi}{12} \Leftrightarrow$

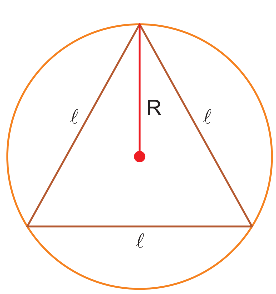
$\Leftrightarrow 8R^3\left(1 - \dfrac{\pi}{12}\right) = 1 - \dfrac{\pi}{12} \Leftrightarrow 8R^3 = 1 \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{2}$

2) $d = 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow d = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$

Resposta: A

9





Sendo ℓ a aresta da base do prisma e R o raio da base do cilindro, temos:

1) $V_{prisma} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi = \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3} \cdot 2\pi}{4} = \dfrac{3\sqrt{3} \cdot \pi}{2} \cdot R^2$

2) $V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot 6\sqrt{3}$

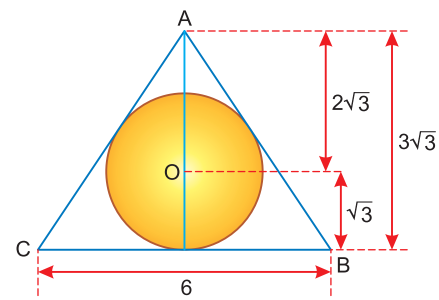
3) A razão entre o volume de água que transbordou e o volume do cilindro é:

$$\frac{V_{prisma}}{V_{cilindro}} = \frac{\dfrac{3\sqrt{3} \cdot \pi}{2} \cdot R^2}{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: C

Módulo 48 – Inscrição e circunscrição de sólidos II

1



I) A distância do centro O à base é o raio da esfera $\sqrt{3}$. A distância do centro O ao vértice A é $2\sqrt{3}$ e, portanto, a altura H é $3\sqrt{3}$. Lembrando que $H = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}$, tem-se:

$\dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow BC = 6.$

Assim, o raio da base do cone é R = 3.

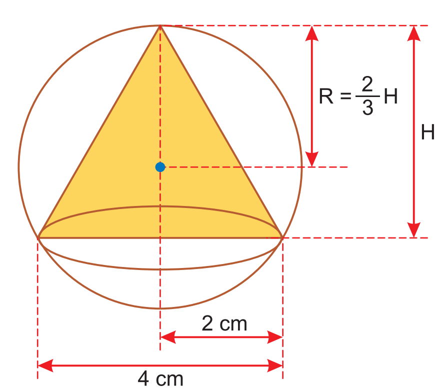
II) A área da base do cone é:

$A_B = \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

III) O volume do cone é:

$V = \dfrac{1}{3} A_B \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

2



I) A altura H do triângulo equilátero é

$H = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

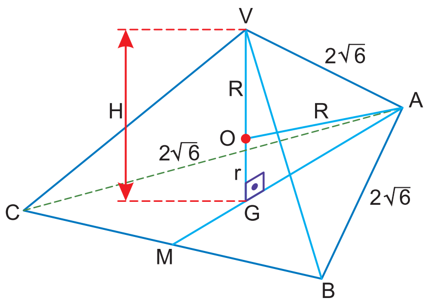
II) Pela propriedade do baricentro, a distância do centro ao vértice é

$$R = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

III) A área da superfície esférica é

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{64\pi}{3} \text{ cm}^2$$

3



I) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \frac{2.\sqrt{6}.\sqrt{6}}{3} = 4$

II) AM é a altura do triângulo equilátero ABC cujo lado é $\ell = 2\sqrt{6}$, assim:

$$AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM = \frac{2.\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$$

III) G é o baricentro do triângulo ABC, assim:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

IV) Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOG, temos:

$$R^2 = (4 - R)^2 + (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow R^2 = 16 - 8R + R^2 + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8R = 24 \Leftrightarrow R = 3$$

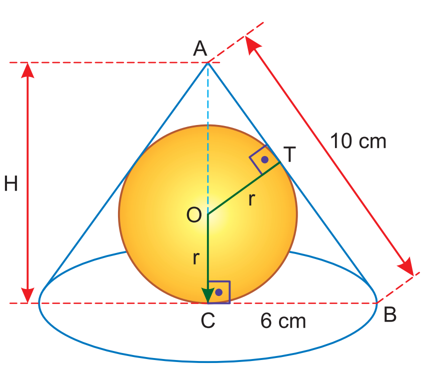
V) Como $r = 4 - R$, então, $r = 4 - 3 = 1$

Portanto, temos: a) $H = 4$

b) $r = 1$

c) $R = 3$

4



I) No triângulo ABC, retângulo em C, temos:

$H^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow H = 8$

II) Da semelhança dos triângulos ABC e AOT, temos:

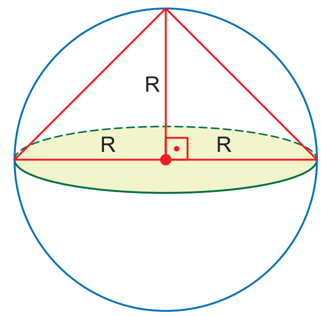
$$\frac{AO}{AB} = \frac{OT}{BC} \Leftrightarrow \frac{8 - r}{10} = \frac{r}{6} \Leftrightarrow r = 3$$

III) O volume V da esfera inscrita é:

$$V = \frac{4\pi\, 3^3}{3} \Leftrightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$$

Resposta: A

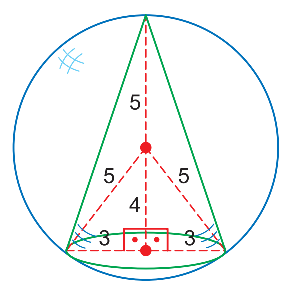
5



$$\frac{V_{esf.}}{V_{cone}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R} = 4 \Rightarrow V_{esf.} = 4 \cdot V_{cone}$$

Resposta: B

6



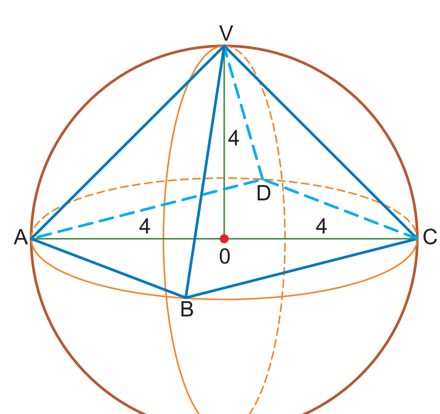
$$\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^2 h}{4R^3}$$

Assim:

$$\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{3^2(5 + 4)}{4 \cdot 5^3} = \frac{81}{500} = 16{,}2\%$$

Resposta: E

7



O volume da esfera, em metros cúbicos, é:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \, . \, 4^3 = \frac{4}{3} \, . \, 3 \, . \, 4^3 = 256$$

O volume da pirâmide, em metros cúbicos, é:

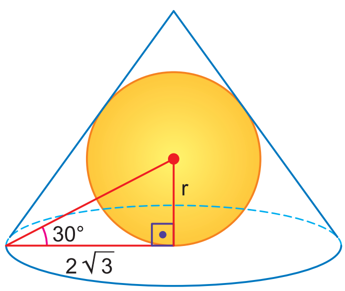
$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \, . \, \frac{8^2}{2} \, . \, 4 = \frac{128}{3}$$

Assim:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{pirâmide}} = \frac{256}{\frac{128}{3}} \Leftrightarrow V_{esfera} = 6 \, . \, V_{pirâmide}$$

Resposta: A

8



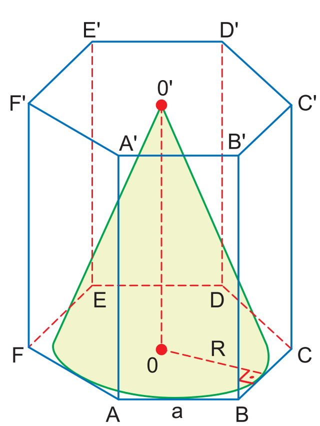
Sendo r o raio da esfera, temos:

I) $\text{tg } 30° = \frac{r}{2\sqrt{3}} \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$

II) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \, . \, 2^3 = \frac{32\pi}{3}$

Resposta: C

9



Sendo a; 2a e R, respectivamente, as medidas da aresta da base, altura e do raio da base do cone reto inscrito no prisma temos:

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ pois o triângulo OAB é equilátero.

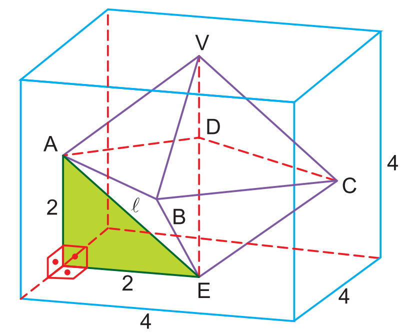
$$V_{prisma} = 6 \, . \, A_{\Delta OAB} \, . \, 2a = 6 \, . \, \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \, . \, 2a = 3a^3\sqrt{3}$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \, . \, R^2 \, . \, 2a = \frac{1}{3} \, . \, \pi \, . \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \, 2a = \frac{\pi \, a^3}{2}$$

$$\frac{V_{prisma}}{V_{cone}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{\frac{\pi \, a^3}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

Resposta: D

10



Sendo ℓ a medida, em centímetros, da aresta do octaedro regular, temos: $\ell^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

O volume do octaedro regular é o dobro do volume da pirâmide regular VABCD de aresta da base $\sqrt{2}$ cm e altura 2 cm.

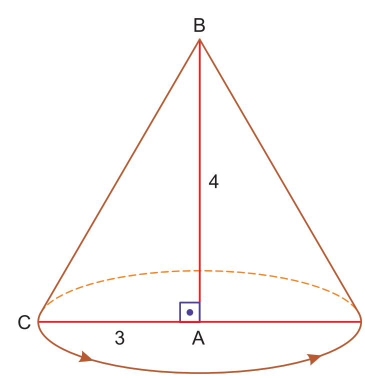
Assim, sendo V o volume do octaedro, em centímetros cúbicos, temos:

$$V = 2 \, . \, \frac{1}{3} \, . \, (2\sqrt{2})^2 \, . \, 2 = \frac{32}{3}$$

Resposta: B

Módulo 49 – Sólidos de revolução

1

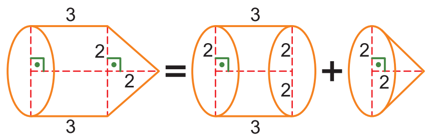


I) O sólido gerado é um cone de raio da base 3 cm e altura 4 cm.

II) A área da base é: $AB = \pi R^2 = \pi . 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

III) O volume é: $V = \frac{1}{3} \, . \, A_B \, . \, H = \frac{1}{3} \, . \, 9\pi \, . \, 4 = 12\pi \text{ cm}^3$

2 I) O sólido gerado é uma composição de dois outros sólidos básicos: um cilindro de raio da base 2 cm e altura 3 cm e um cone de raio da base 2 cm e altura 2 cm, ambos com eixo em posição horizontal.



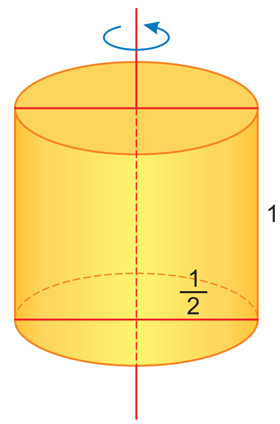
II) Volume do cilindro: $V_{cilindro} = \pi.2^2.3 = 12\pi\ cm^3$

III) Volume do cone: $V_{cone} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \dfrac{8\pi}{3}\ cm^3$

IV) Volume do sólido:

$V_{sólido} = V_{cilindro} + V_{cone} = 12\pi + \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{44\pi}{3}\ cm^3$

3 O sólido gerado é um cilindro equilátero de raio $\dfrac{1}{2}$ cm e altura 1 cm.

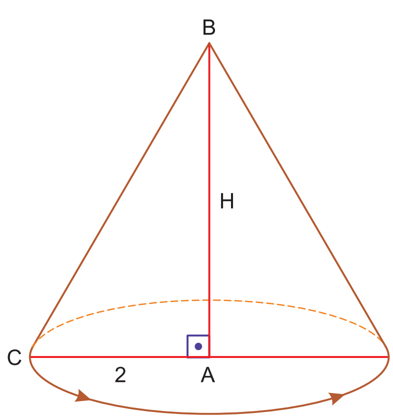


A área lateral do cilindro é:

$A = 2\pi Rh = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \pi\ cm^2$

Resposta: E

4



I) A área do triângulo retângulo é:

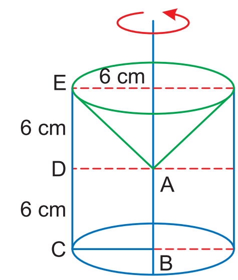
$A_\Delta = \dfrac{2.H}{2} = 6$, em que H é a medida do outro cateto, logo, H = 6 cm.

II) O sólido gerado é um cone circular reto de raio da base medindo 2 cm e altura H = 6 cm.

III) Seu volume é $V = \dfrac{1}{3}\ \pi\ 2^2.6 = 8\pi\ cm^3$

Resposta: A

5



O volume do sólido gerado é o volume de um cilindro circular reto de raio da base 6 cm e altura 12 cm menos o volume de um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 6 cm.

$V_{sólido} = V_{cilindro} - V_{cone} \Rightarrow$

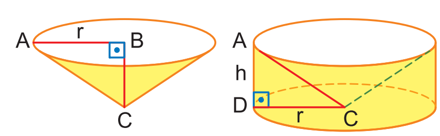
$\Rightarrow V_{sólido} = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6 \Leftrightarrow V_{sólido} = 360\ \pi cm^3$

Resposta: A

6 $V = \dfrac{270°}{360°} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 4 \Leftrightarrow V = 36\ \pi$

Resposta: E

7 Sejam r a medida de $\overline{AB}$, h a medida de $\overline{BC}$, V_{ABC} e V_{ADC} os volumes dos sólidos gerados pela rotação completa dos triângulos ABC e ADC em torno de $\overline{BC}$.



Assim,

I) $V_{ABC} = V_{cone} = \dfrac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$

II) $V_{ADC} = V_{cilindro} - V_{cone} = \pi\ r^2\ h - \dfrac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h = \dfrac{2}{3}\ \pi\ r^2\ h$

e, portanto, a razão é: $\dfrac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{2}{3}\pi r^2 h} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: E

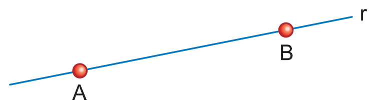
Módulo 50 – Geometria de posição – entes primitivos e postulados

1 a) O ponto, a reta e o plano.

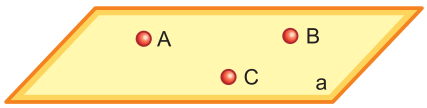
b) Infinitos.

c) Infinitos.

d) Uma única reta.



e) Um único plano.



2 a) Verdadeira. Entes primitivos são aceitos sem definição. São conhecidos por sua própria natureza e pela convivência que temos com eles.

b) Falsa. Reta não tem definição. É um ente primitivo.

c) Verdadeira. Ponto não tem dimensão e, portanto, entre dois pontos distintos sempre “cabe” mais um. Observe que o conceito “estar entre” também é um conceito primitivo.

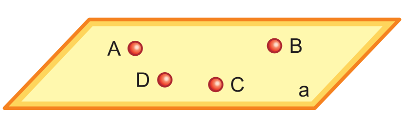
d) Verdadeira. O postulado da determinação da reta assegura que “dois pontos distintos determinam uma reta”.

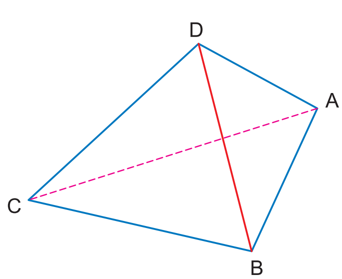
e) Falsa. Para que três pontos determinem um plano, eles precisam ser não colineares.

3 Sim. O postulado da inclusão assegura que, "se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então todos os pontos dessa reta pertencem a esse plano, isto é, a reta está contida nesse plano".

4 Não. Os pontos precisam ser não colineares (não alinhados).

5 Não. Quatro pontos podem ou não ser coplanares. Na primeira figura, os pontos A, B, C e D são coplanares, porém, na segunda figura, eles não são.



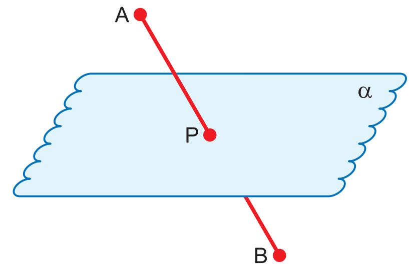


6 $C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!3!} = \dfrac{10!}{7!3!} = 120$

7 A reta é um ente primitivo e, portanto, não tem definição.
Resposta: D

8 A proposição (I) é verdadeira (postulado 1a de existênica).
A proposição (II) é verdadeira (postulado 1b de existência).
A proposição (III) é verdadeira.
Resposta: A

9



$\overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$

Resposta: E

Módulo 51 – Retas e planos no espaço

1 Três pontos distintos precisam ser não colineares (não alinhados) para determinar um plano.
Resposta: B

2 a) Falsa. As retas podem ser reversas.

b) Falsa. As retas podem ser paralelas distintas.

c) Falsa. Somente retas reversas não são coplanares.

d) Falsa. Somente retas reversas não são coplanares.

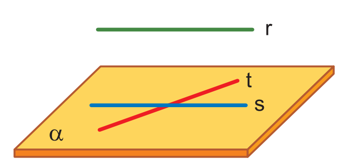
Resposta: E

3 Por um ponto fora de um plano, podem ser traçadas infinitas retas paralelas a esse plano.
Resposta: E

4 $C_{4;3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$. Os planos determinados são ABC (plano α), ABD, ACD e BCD.

Resposta: C

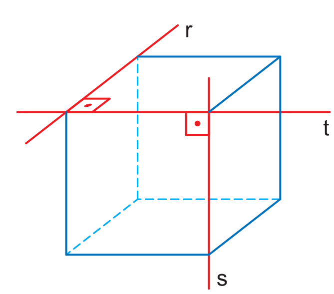
5 Existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.



Resposta: C

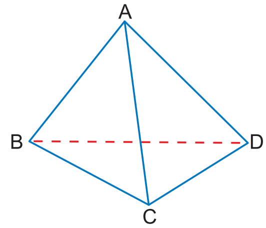
6 Duas retas são reversas quando não são coplanares, ou seja, quando não existe plano que contém ambas.
Resposta: A

7



Reposta: C

8



Considerando-se as arestas do tetraedro ABCD da figura, são reversas as dos seguintes pares: $(\overline{AB};\overline{CD})$, $(\overline{AD};\overline{BC})$ e $(\overline{AC};\overline{BD})$, num total de 3 pares.

Resposta: B

Módulo 52 – Paralelismo

1 a) Falsa. As retas podem ser coincidentes.
b) Falsa. As retas podem ser reversas.
c) Verdadeira. É a própria definição de retas reversas.
d) Verdadeira. É a definição de reta paralela a plano.
e) Verdadeira. De fato, as intersecções estão no mesmo plano e não têm pontos em comum; portanto, são paralelas.

2 a) Verdadeira. b) Verdadeira.
c) Verdadeira. d) Verdadeira.
e) Verdadeira. A intersecção de planos secantes é uma reta e, para determinar uma reta, bastam dois pontos distintos.

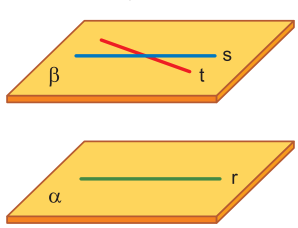
3 Se os planos são paralelos, então:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{x}{9} = \frac{8}{y} \Leftrightarrow x = 6 \text{ e } y = 12$$

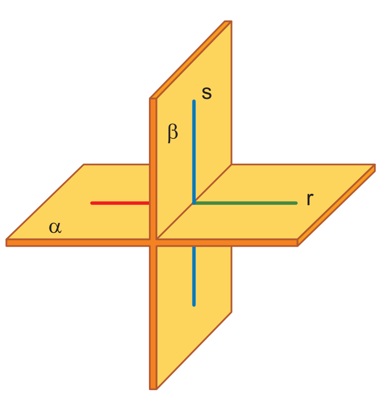
Portanto, o valor de EH é 27

Resposta: B

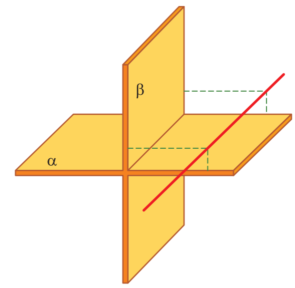
4 a) Verdadeira. r é paralela a s e reversa a t.



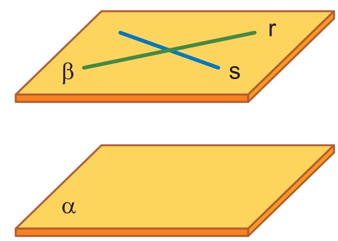
b) Verdadeira. r de α é concorrente com s de β.



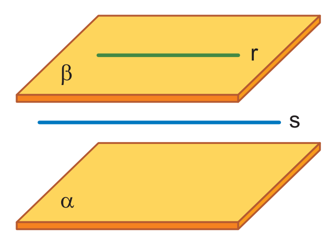
c) Falsa. Eles podem ser secantes.



d) Verdadeira. r e s de β são concorrentes entre si e paralelas a α. Os planos α e β são paralelos entre si.



e) Verdadeira. r é paralela a α e está contida em β; s é paralela a ambos.



Resposta: C

5 Se os planos são paralelos, então:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{5}{x} = \frac{6}{y} \Leftrightarrow x = 2{,}5 \text{ e } y = 3 \text{ e}$$

o valor de (y – x), em cm, é 0,5

6 Se a reta r é paralela ao plano α, então nenhuma reta de α intercepta a reta r. Portanto, existem em α retas paralelas a r e retas reversas a r.

Resposta: B

Módulo 53 – Perpendicularismo

1 a) Se duas retas são paralelas a uma terceira, então são paralelas entre si.
b) Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à sua intersecção.
c) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro determinam intersecções paralelas.
d) Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos correspondentes diretamente proporcionais.
e) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.

2 a) Se dois planos são paralalelos distintos, então toda reta de um é paralela ou reversa às retas do outro.
b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela ou reversa às retas do plano.
c) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir um único plano paralelo a esse plano.
d) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir infinitas retas paralelas a esse plano.
e) Por um ponto não pertencente a uma reta, podemos conduzir uma única reta paralela a essa reta.

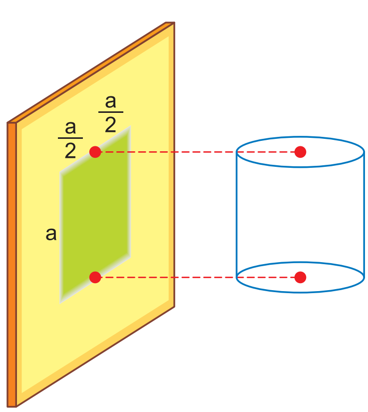
3 a) Se uma reta é ortogonal a duas concorrentes de um plano, ela é perpendicular ao plano.
b) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas distintas de um plano, então ela está contida nesse plano.
c) Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano que a contém é perpendicular a esse plano.
d) Por um ponto, existe uma única reta perpendicular a um plano.
e) Se uma reta forma um ângulo de 20º com uma reta perpendicular a um plano, então ela forma 70º com o plano.

4 a) Falsa. Podem ser secantes.
b) Falsa. Pode ser paralela ou incidente sem ser perpendicular.
c) Falsa. Podem ser concorrentes e até reversas.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Pode ser ortogonal.
Resposta: D

5 Por um ponto não pertencente a um plano, pode-se traçar uma e só um reta perpendicular a esse plano e infinitos planos perpendiculares ao referido plano.
Respostas: C

Módulo 54 – Projeções ortogonais

1



O volume do cilindro é $V = A_B \,.\, h = \pi \,.\, R^2 \,.\, h =$

$$= \pi \,.\, \left(\frac{a}{2}\right)^2 .\, a = \pi \,.\, \frac{a^2}{4} \,.\, a = \frac{\pi . a^3}{4}$$

Resposta: D

2 I) $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 5^2 + 4^2 \Leftrightarrow BD = \sqrt{41}$

II) $AD^2 = BD^2 + AB^2 \Leftrightarrow AD^2 = (\sqrt{41})^2 + 3^2 \Leftrightarrow AD = 5\sqrt{2}$

3 a) Falso. Podem ser concorrentes e até reversas.
b) Falso. Eles podem ser secantes.
c) Falso. Podem ser concorrentes e até reversas.
d) Falso. Podem ser coincidentes, secantes e até paralelos entre si.
e) Verdadeiro.
Resposta: E

4 I) Falsa. São paralelas entre si.
II) Falsa. Pode ser reversa à segunda.
III) Verdadeira.
IV) Falsa. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela ou reversa às retas do plano.
Resposta: C

5 A projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar numa circunferência, ou numa elipse ou ainda num segmento de reta.
Para que resulte num segmento de reta, basta que a circunferência esteja contida num plano perpendicular a α.
Resposta: E

6 Sendo $s = \beta \cap \alpha$ e $t = \gamma \cap \alpha$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} r \perp s,\ r \perp t \\ s \subset \alpha,\ t \subset \alpha \\ s \text{ e } t \text{ concorrentes} \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp p/(s, t) \Rightarrow r \perp \alpha$$

Resposta: B

Módulo 55 – Diedros, triedros e poliedros

1
$$\left\{\begin{array}{l} f_1 + f_2 + f_3 < 360° \\ f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 148° + 110° + f_3 < 360° \\ 148° < 110° + f_3 \\ 110° < 148° + f_3 \\ f_3 < 148° + 110° \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_3 < 102° \\ f_3 > 38° \\ f_3 > -38° \\ f_3 < 258° \end{array}\right. \Rightarrow 38° < f_3 < 102°$$

Resposta: C

2
$$\left.\begin{array}{l} F = 16 \text{ (triângulos)} \\ A = \dfrac{16.3}{2} = 24 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 10$$

Resposta: E

3
$$\left.\begin{array}{l} F = 8 + 6 = 14 \\ A = \dfrac{8.4 + 6.3}{2} = 25 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 13$$

Resposta: E

4

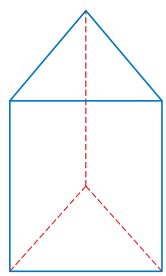
	Quantidade de faces	Tipo de face	Quantidade de lados
	1	Triangular	3
	3	Quadrangular	12
	3	Pentagonal	15
Totais	F = 7	xxxxxxxxxxxxx	2A = 30

$$\left.\begin{array}{l} 2A = 30 \Leftrightarrow A = 15 \\ F = 7 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 10$$

Resposta: E

5 Possui 5 faces.

$$\left.\begin{array}{l} V = 6 \\ A = 9 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow F = 5$$



6 Em todo poliedro convexo, de acordo com a relação de Euler, sempre se pode afirmar que: $V - A + F = 2$

Resposta: E

7 I) $F = 20 + 12 \Leftrightarrow F = 32$

II) $A = \dfrac{20 \,.\, 6 + 12 \,.\, 5}{2} = 90$

III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V + 32 = 90 + 2 \Leftrightarrow V = 60$

Resposta: C

8 Sendo V, A e F, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces desse poliedro, tem-se:

I) $F = 18$

II) $A = \dfrac{12 \,.\, 3 + 6 \,.\, 4}{2} \Leftrightarrow A = 30$

III) $V - A + F = 2$ (relação de Euler)

Assim: $V - 30 + 18 = 2 \Leftrightarrow V = 14$

Resposta: A

9 Sendo F o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices desse poliedro, tem-se:

1) $F = 60$

2) $A = \dfrac{60 \,.\, 3}{2} \Leftrightarrow A = 90$

3) $V - A + F = 2$ (relação de Euler)

Assim: $V - 90 + 60 = 2 \Leftrightarrow V = 32$

Resposta: D

10 Se uma pirâmide tem exatamente 11 faces triângulares, então a sua base é um polígono de 11 lados e assim, sendo V o número de vértices e A o número de arestas dessa pirâmide, têm-se:

1) $V = 1 + 11 \Leftrightarrow V = 12$

2) $A = \dfrac{11 \,.\, 3 + 1 \,.\, 11}{2} \Leftrightarrow A = 22$

Resposta: E

Módulo 56 – Poliedros de Platão e regulares

1 **Resposta: D**

2 No icosaedro regular, temos 20 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{20.3}{2} = 30$

Assim, $V - 30 + 20 = 2 \Leftrightarrow V = 12$

3 No octaedro regular, temos 8 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{8.3}{2} = 12$

Assim, $V - 12 + 8 = 2 \Leftrightarrow V = 6$

Não existem diagonais nas faces, então, o número de diagonais é $n = C_{6,2} - A = \dfrac{6.5}{2.1} - 12 = 3$

4 No dodecaedro regular, temos 12 faces pentagonais e, portanto, $A = \dfrac{12.5}{2} = 30$

Assim, $V - 30 + 12 = 2 \Leftrightarrow V = 20$

A soma de todos os ângulos das faces é

$S = (20 - 2) \,.\, 360° = 6480°$

5 No icosaedro regular, temos 20 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{20.3}{2} = 30$

Assim, $V - 30 + 20 = 2 \Leftrightarrow V = 12$

A soma de todos os ângulos das faces é

$S = (12 - 2) \,.\, 360° = 3600°$

6 Os poliedros regulares são os poliedros de Platão com as faces regulares e congruentes, e os ângulos poliédricos congruentes. Portanto, são cinco as classes de poliedros regulares.

Resposta: B

7 O dodecaedro tem 12 faces pentagonais. Assim,

I) $F = 12$

II) $A = \dfrac{12 \,.\, 5}{2} = 30$

III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V + 12 = 30 + 2 \Leftrightarrow V = 20$

Resposta: D

8 O dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.

Resposta: D

9 O icosaedro tem 20 faces triangulares. Assim,

I) $F = 20$

II) $A = \dfrac{20 \,.\, 3}{2} = 30$

III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V + 20 = 30 + 2 \Leftrightarrow V = 12.$

Resposta: B