

MATEMÁTICA

**FRENTE 1
MÓDULO 1
MATRIZES**

$$1) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2) A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 & 1+1 \\ 1+4 & 1+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3) A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 0+(-1) \\ 1+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$4) 2A = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.0 \\ 2.1 & 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$5) 3B = \begin{bmatrix} 3.3 & 3.(-1) \\ 3.2 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$6) 2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4+9 & 0+(-3) \\ 2+6 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$$

$$7) A = \begin{bmatrix} 3.1-1 & 3.1-2 \\ 3.2-1 & 3.2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix};$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e, portanto:}$$

$$X = 2 \cdot A^t - A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 10-1 \\ 2-5 & 8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$8) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3.1-2.1 & 3.1-2.2 \\ 3.2-2.1 & 3.2-2.2 \\ 3.3-2.1 & 3.3-2.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 2^1 \\ 2^2 & 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a) 2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 4 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b) A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) B - A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) 2B^t - 3A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 12 & 6 \\ 21 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -8 & 2 \\ -17 & -7 \end{pmatrix}$$

9) Sendo m, n e p, respectivamente, os valores, em milhares de reais, arrecadados pelas barracas B₁, B₂ e B₃, temos:

$$a) \begin{cases} b_{12} = 1,8 \\ b_{13} = 3 \\ b_{23} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 1,8 \\ m + p = 3 \\ n + p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 1,8 \\ n - p = -1,2 \\ n + p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 1,8 \\ n - p = -1,2 \\ 2n = 0,8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1,4 \\ p = 1,6 \\ n = 0,4 \end{cases}$$

O valor arrecadado a mais pela barraca B₃ em relação à barraca B₂ é p - n = 1,2 milhares de reais, ou seja, R\$ 1200,00.

b) m + n + p = 3,4 milhares de reais, ou seja, R\$ 3400,00.

$$c) \begin{cases} x = b_{11} = m + m = 2,8 \\ y = b_{22} = n + n = 0,8 \\ z = b_{33} = p + p = 3,2 \end{cases} \quad x + y + z =$$

= 6800,00 reais

$$d) d + c + z = p + m + p + n + 2p =$$

$$= 4p + m + n = 8200,00 \text{ reais}$$

Respostas: a) R\$ 1200,00

b) R\$ 3400,00

c) R\$ 6800,00

d) R\$ 8200,00

10) Observando que a₁₂, a₂₂, a₃₂ e a₄₂ são, respectivamente, as quantidades de peças do material 2 empregadas para fabricar os aparelhos dos tipos 1, 2, 3 e 4, temos:

$$8 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + a_{32} + 5 \cdot a_{42} =$$

$$= 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 5 \cdot 7 = 50$$

Resposta: E

**MÓDULO 2
MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES**

$$1) A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1 + 0.0 + 2.3 & 1.2 + 0.1 + 2.0 \\ 2.1 + 0.0 + 1.3 & 2.2 + 0.1 + 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 & 1.0 + 2.0 & 1.2 + 2.1 \\ 0.1 + 1.2 & 0.0 + 1.0 & 0.2 + 1.1 \\ 3.1 + 0.2 & 3.0 + 0.0 & 3.2 + 0.1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2) A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.1 + 3.4 & 2.2 + 3.0 \\ 1.1 + 0.4 & 1.2 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3) a) B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 0+2 \\ 2+4 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + 3.6 & 2.2 + 3.1 \\ 1.2 + 0.6 & 1.2 + 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que A(B + C) = AB + AC.

$$4) AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1.x + 2.y \\ 0.x + 1.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 5) A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

$$\begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{bmatrix}$$

Resposta: E

- 6) Efetuando o produto matricial apresentado, temos:

$$\begin{cases} p_1 = 0,80p_0 + k \\ m_1 = 0,2p_0 + 0,9m_0 \\ g_1 = 0,1m_0 + 0,95g_0 \end{cases}$$

Somando as equações, membro a membro, resulta

$$p_1 + m_1 + g_1 = p_0 + m_0 + 0,95g_0 + k$$

Como $p_1 + m_1 + g_1 = p_0 + m_0 + g_0$, temos:

$$p_0 + m_0 + g_0 = p_0 + m_0 + 0,95g_0 + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0,05g_0 \Leftrightarrow k = 5\%g_0.$$

Resposta: A

MÓDULO 3 PROPRIEDADES

$$1) A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2) A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0,5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-0,5) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-0,5) & 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Portanto: $AB = AC$. Observe que $B \neq C$.

$$3) A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot x & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot x & 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot x & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 3x & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ x \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & x \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 0 & x \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ x & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 3x & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ x & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = x \Rightarrow x = 0$$

Resposta: E

$$4) a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -12 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -2 \\ -16 & 5 & 12 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5) a) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 6x \\ 27 + 3x \end{pmatrix}$$

$$b) 12 + 6x = 27 + 3x \Leftrightarrow x = 5$$

$$6) \begin{bmatrix} 18 & 10 \\ 26 & 33 \\ 23 & 12 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{queijo: } 18 \cdot 6 + 10 \cdot 10 \\ \text{salada: } 26 \cdot 6 + 33 \cdot 10 \\ \text{rosbife: } 23 \cdot 6 + 12 \cdot 10 \\ \text{atum: } 0 \cdot 6 + 16 \cdot 10 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 208 \\ 486 \\ 258 \\ 160 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

$$\text{Resposta: } \begin{bmatrix} 208 \\ 486 \\ 258 \\ 160 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

MÓDULO 4 DETERMINANTES

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 3 = 2 + (-6) + 0 = -4$$

$$2) \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = x^2 + 12x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot (-9)}}{2} = \frac{-12 \pm 12}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -9$$

$$3x^2 + 4 + 9x - x^2 - 12x - 9 = -3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow V = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 15 = x + 15 + 12 = x + 27$$

$$= x + 15 + 12 - 10 - 9 - 2x = -x + 8$$

$$\text{Assim sendo, } x - 2 = -x + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x = 8 + 2 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Resposta: E

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 15 + 2 = 17$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{Assim sendo, } 17 + (-6) = 11$$

Resposta: B

$$5) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1 + 3.1 & 2.1 + 3.2 \\ 2.2 + 3.1 & 2.2 + 3.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 10 - 8 \cdot 7 = 50 - 56 = -6$$

Resposta: C

$$6) a) \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 3 + (-7) \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - (-7) \cdot 4 \cdot 3 = 105$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$7) \begin{vmatrix} x & x+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = x$$

$$3x - 4(x+2) = x = -4$$

8) O determinante da matriz A será nulo, por exemplo, se todos os elementos da coluna 1 forem iguais aos correspondentes elementos da coluna 3. Dessa forma, $x - 7 = 6 \Leftrightarrow x = 13$.

9) De $A^t = A$, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ c & 1 & b \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & c & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0, b = -1 \text{ e } c = 2.$$

Vamos construir a matriz $A - A^2 + I_3^2$. Temos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } I_3^2 = I_3, \text{ vem: } A - A^2 + I_3^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \text{ cujo}$$

determinante é igual a -76 .

10) a) $BC + 2A$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (5 - 1) + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CB = (5 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (7)$$

b) $A - \lambda =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Então, $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ equivale a

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2$$

MÓDULO 5 DETERMINANTE NULO

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a 3ª linha é nula.}$$

$$2) \begin{vmatrix} a & 2 & a \\ b & 5 & b \\ c & 7 & c \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a 1ª coluna é igual à 3ª coluna.}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 3 & n & 9 \\ 4 & p & 12 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a 3ª coluna é o triplo da 1ª coluna, sendo então colunas proporcionais.}$$

$$4) \text{ Para } x = 6, \text{ a 3ª coluna será igual à soma das duas anteriores, o que implica o anulamento do determinante. Resposta: E}$$

$$5) \begin{vmatrix} x & y & 4x + y \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a 3ª coluna é igual à soma da 1ª coluna multiplicada por 4 com a 2ª coluna, isto é, a 3ª coluna é uma combinação linear das demais colunas.}$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a 1ª coluna é igual à soma da 2ª coluna com o dobro da 3ª coluna, isto é, a 1ª coluna é uma combinação linear das demais colunas. Resposta: D}$$

7) Como:

$$1) a) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 0,$$

pois a primeira e a terceira linha são proporcionais.

$$b) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix} = 0,$$

pois a soma das duas primeiras linhas resulta igual à terceira linha.

$$c) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 0, \text{ pois}$$

as colunas são iguais.

$$d) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$x(-1) \xrightarrow{+} \quad \quad \quad x(-1) \xrightarrow{+}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 11 & 1 \\ 13 & 1 & 15 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

pois a 2ª e a 4ª coluna são iguais.

Todas essas quatro matrizes possuem determinante nulo.

$$2) \det \begin{bmatrix} -6 & 7 & 8 \\ 10 & -11 & 12 \\ 14 & 15 & -16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 22 & 28 \\ 9 & 28 & 16 & 48 \\ 13 & 40 & 54 & 36 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 22 & 28 \\ 28 & 16 & 48 \\ 40 & 54 & 36 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 7 \\ 7 & 8 & 12 \\ 10 & 27 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -32 \cdot (72 + 1320 + 1323 - 560 - 693 - 324) = -36416 \neq 0$$

Resposta: E

MÓDULO 6

DETERMINANTE SE ALTERA

1) Verdadeira, pois:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \text{ permutando as linhas e}$$

$$- \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}, \text{ permutando as colunas.}$$

2) Verdadeira, pois:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ colocando o 2 "em evidência" na 1ª linha.}$$

3) Verdadeira, pois:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}, \text{ colocando o 2 "em} \\ \text{evidência" na 1ª linha.}$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

colocando o 3 "em evidência" na 2ª linha.

4) Verdadeira, pois

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ colocando o 4} \\ \text{"em evidência" nas duas primeiras linhas,}$$

$$\text{ou } \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{vmatrix} = 4^2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ pois a matriz}$$

$$\begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 2a & 3m & 5x \\ 2b & 3n & 5y \\ 2c & 3p & 5z \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix}}_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Resposta: B

6) $A_{3 \times 3}$, $B_{3 \times 3}$ e $B = kA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det B = \det(kA) \text{ e } A_{3 \times 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = k^3 \cdot \det A$$

Para $\det A = 1,5$ e $\det B = 96$, obtém-se:

$$96 = k^3 \cdot 1,5 \Leftrightarrow k^3 = \frac{96}{1,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^3 = 64 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: $k = 4$

$$7) a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-10) = -60$$

$$b) \begin{vmatrix} b & a & 4c \\ e & d & 4f \\ h & g & 4i \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4 \cdot (-10) = 40$$

$$8) \det(3A) = 3^2 \cdot \det(A) = 9 \cdot 5 = 45$$

$$9) \det(2P) = 2x + 6 \Leftrightarrow 2^3 \cdot \det(P) = 2x + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8 \cdot 7 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = 25$$

10) Seja B a matriz obtida a partir de A como no enunciado. Temos:

$$\det B = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \det A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = \det A = x$$

$$11) a) \det(m \cdot A) = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m}_{\text{pois são 4 colunas}} \cdot \det A,$$

$$\text{ou seja, } \det(m \cdot A) = m^4 \cdot \det A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 243 = m^4 \cdot 3 \Rightarrow m^4 = 81 \Rightarrow m = 3$$

$$m > 0$$

b) Seja B a matriz construída conforme o enunciado;

$$\det B = 2m \cdot 2m \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} \cdot \det A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = 4 \det A = 4 \cdot 3 = 12$$

MÓDULO 7

DETERMINANTE NÃO SE ALTERA

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = 1 \cdot a \cdot b = a \cdot b,$$

fazendo a 2ª linha menos a 1ª linha e a 3ª linha menos a 1ª linha.

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix},$$

fazendo a 2ª linha menos a 1ª linha e a 3ª linha menos a 1ª linha. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (2-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \Leftrightarrow V = \{0; 2\}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & x & 2x+b \\ 1 & y & 2y+b \\ 1 & z & 2z+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 0 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

fazendo a 3ª coluna menos a 1ª coluna multiplicada por b e, em seguida, a 3ª coluna menos a 2ª coluna multiplicada por 2.

Resposta: C

$$4) \begin{vmatrix} 2 & a_1+1 & b_1+1 & c_1+1 \\ 2 & a_2+1 & b_2+1 & c_2+1 \\ 2 & a_3+1 & b_3+1 & c_3+1 \\ 2 & a_4+1 & b_4+1 & c_4+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1+1 & b_1+1 & c_1+1 \\ 1 & a_2+1 & b_2+1 & c_2+1 \\ 1 & a_3+1 & b_3+1 & c_3+1 \\ 1 & a_4+1 & b_4+1 & c_4+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \text{ fazendo a 2ª coluna}$$

menos a 1ª coluna, a 3ª coluna menos a 1ª coluna e a 4ª coluna menos a 1ª coluna.

Resposta: D

$$5) \begin{vmatrix} 53 & 53 & 53 \\ 53 & 54 & 53 \\ 53 & 53 & 55 \end{vmatrix} = A \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 53 & 0 & 0 \\ 53 & 1 & 0 \\ 53 & 0 & 2 \end{vmatrix} = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 53 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = A \Leftrightarrow A = 106$$

Resposta: C

$$6) B = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -6 \end{vmatrix} = -5A$$

Portanto, $B = -5A \Leftrightarrow B + A = -4A$.

Resposta: D.

$$7) \begin{vmatrix} a+6 & b+6 & c+6 & 7 & e+6 & f+6 \\ b+6 & a+6 & d+6 & 7 & a+6 & -a+6 \\ c+6 & c+6 & e+6 & 7 & b+6 & -a+6 \\ d+6 & e+6 & e+6 & 7 & b+6 & -b+6 \\ e+6 & b+6 & e+6 & 7 & c+6 & -c+6 \\ f+6 & a+6 & f+6 & 7 & d+6 & -d+6 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} a+6 & b+6 & c+6 & 1 & e+6 & f+6 \\ b+6 & a+6 & d+6 & 1 & a+6 & -a+6 \\ c+6 & c+6 & e+6 & 1 & b+6 & -a+6 \\ d+6 & e+6 & e+6 & 1 & b+6 & -b+6 \\ e+6 & b+6 & e+6 & 1 & c+6 & -c+6 \\ f+6 & a+6 & f+6 & 1 & d+6 & -d+6 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & 1 & e & f \\ b & a & d & 1 & a & -a \\ c & c & e & 1 & b & -a \\ d & e & e & 1 & b & -b \\ e & d & e & 1 & c & -c \\ f & a & f & 1 & d & -d \end{vmatrix}$$

Fica multiplicado por 7.

Resposta: E

$$8) \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan^2 \alpha & \tan^2 \beta & \tan^2 \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan^2 \beta & \tan^2 \beta & \tan^2 \gamma \\ \sec^2 \beta & \sec^2 \beta & \sec^2 \gamma \end{vmatrix}}{\sec^2 \beta \sec^2 \gamma} = 0$$

Observando que $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, para qualquer x real que satisfaça as condições de existência das funções secante e tangente, conclui-se que a terceira linha do determinante é igual à primeira mais a segunda e, portanto, o determinante é nulo.

Resposta: E

MÓDULO 8

ABAIXAMENTO DA ORDEM

1) O cofator do elemento a_{33} é:

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 8 - 2 - 18 = -9$$

- 2) Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da 1ª coluna (apenas o 2 é diferente de zero), resulta:

$$\det M = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (8 + 3 - 6) = 2 \cdot 3 = 6$$

- 3) Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da sua 1ª linha, temos:

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 8 \\ 0 & 8 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ e } x > 0$$

(existência do logaritmo)

$$\text{Logo: } 2 \cdot x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 8 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ e}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x^2 - 64) = 0 \text{ e } x > 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 64 = 0 \text{ e } x > 0 \Rightarrow x = 8$$

Resposta: D

$$4) A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 + 2 + 0 - 0 - 2 - 8) = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4 + 0 + 0 - 14 - 0 - 0) = 10$$

Resposta: $A_{11} = -3$ e $A_{32} = 10$.

- 5) Trabalhando com os elementos não nulos da segunda linha, temos:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-67) = -67$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 32 = -32$$

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{32} = (-1) \cdot (-67) + 2 \cdot (-32) = 3$$

Resposta: B

- 6) Desenvolvendo pelos elementos da 1ª linha, obtemos:

$$D = x \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{14} = x \cdot (-1)^2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = x \cdot (-2x^2 + x) - 3 \cdot (-1)$$

Devemos ter $D = 3$, isto é,

$$x(-2x^2 + x) + 3 =$$

$$= 3 \Rightarrow x(-2x^2 + x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

- 7) Escolhemos a 3ª linha da matriz dada:

$$D = (-1) \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{34} = (-1) \cdot (-1)^6 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 2^x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (-1) \cdot (-2 + 12 - 3 \cdot 2^x) - 1 \cdot$$

$$(4 \cdot 2^x - 1 + 6 + 2^x).$$

Como $D = -79$, temos:

$$-(10 - 3 \cdot 2^x) - (5 \cdot 2^x + 5) = -79 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 2^x - 15 = -79 \Rightarrow 2 \cdot 2^x = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5$$

- 8) Usando a primeira coluna, temos:

$$D = 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 D' (*)$$

• Calculemos agora $D' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, usando a primeira linha:

$$D' = 1 \cdot A'_{11} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ isto é, } D' = -5 - 20 = -25.$$

- Por fim, em (*), encontramos $D = 2(-25) = -50$

MÓDULO 9 REGRA DE CHIÓ E TEOREMA DE BINET

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-2 \cdot 2 & 6-2 \cdot 2 & 9-4 \cdot 2 \\ 4-2 \cdot 1 & 4-2 \cdot 1 & 3-4 \cdot 1 \\ 8-2 \cdot 3 & 7-2 \cdot 3 & 9-4 \cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 2 - 4 + 1 + 12 = 1$$

$$2) \text{ I) } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$\text{ II) } \det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$\text{ III) } \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

De (1), (2) e (3), resulta:

$$\det(A \cdot B) = 5 \cdot 7 = 35$$

Resposta: D

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-1 & 1 & 3-1 & 1 \\ 2-1 & 1 & 3-1 & 1 \\ 2-1 & 1 & 3-1 & 1 \\ 2-1 & 1 & 3-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois as duas primeiras colunas são proporcionais.}$$

- 4) I) $\det(A \cdot B) = 4 \Leftrightarrow \det A \cdot \det B = 4$

$$\text{ II) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3a$$

$$\text{ III) } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

De (I), (II) e (III), resulta:

$$(7 - 3a) \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow -3a = -3 \Leftrightarrow a = 1$$

Resposta: A

- 5) I) $\det A = 4$

$$\text{ II) } B = 2A \Rightarrow \det B = \det(2A) = 2^3 \det A$$

$$\text{ III) } \det(A^2 \cdot B) = \det(A^2) \cdot \det B = (\det A \cdot \det A) \cdot \det B = (\det A)^2 \cdot \det B$$

De (I), (II) e (III), resulta:

$$\det(A^2 \cdot B) = (\det A)^2 \cdot \det B = (\det A)^2 \cdot (2^3 \cdot \det A) = 8 \cdot (\det A)^3 = 8 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$$

- 6) a) Trocando a posição da 1ª e da 2ª coluna, temos:

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Usando a Regra de Chió, temos:

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 2 & -13 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 28$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [-1] (3 - 1) = -2$$

d) Trocando a posição da 1ª e da 2ª coluna, temos:

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = (-3) (-32 + 7) =$$

$$= (-3) (-25) = 75$$

e) Trocando a posição da 1ª e da 2ª linha, temos:

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & b & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c - 2b & 2 & -3 \\ d & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Trocando a posição da 1ª e da 2ª coluna, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & c - 2b & -3 \\ 1 & d & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c - 2b - 2a & -3 \\ d - a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$3(d - a) = 3d - 3a$$

f) Trocando a posição da 1ª e da 2ª linha, temos:

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - x & x^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 - x & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 - x & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - x & 0 \\ x^2 - x & 1 \end{vmatrix} = 1 - x$$

$$7) D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Vamos multiplicar por $\frac{1}{a}$ os elementos

da 1ª coluna:

$$\frac{1}{a} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot D = \begin{vmatrix} b - a & b - a & b - a \\ b - a & c - a & c - a \\ b - a & c - a & d - a \end{vmatrix}$$

Dividindo por $b - a$ os elementos da 1ª coluna, vem:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b - a} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & b - a & b - a \\ 1 & c - a & c - a \\ 1 & c - a & d - a \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b - a} \cdot D = \begin{vmatrix} c - b & c - b \\ c - b & d - b \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b - a} \cdot \frac{1}{c - b} \cdot D =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & c - b \\ 1 & d - b \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b - a} \cdot \frac{1}{c - b} \cdot D =$$

$$= d - c \Rightarrow D = a \cdot (b - a) \cdot (c - b) \cdot (d - c)$$

$$8) a) \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 5 \cdot 3 = 15$$

$$b) \det(B^t \cdot A^t) = \det(B^t) \cdot \det(A^t) =$$

$$= \det A \cdot \det B = 5 \cdot 3 = 15$$

$$c) \det(2 \cdot A^t) = 2^3 \cdot \det(A^t) =$$

$$= 8 \cdot \det A = 8 \cdot 5 = 40$$

MÓDULO 10 INVERSÃO DE MATRIZES, CÁLCULO DE UM ELEMENTO DA INVERSA E PROPRIEDADES

$$1) \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 + 3m - 12 = 3m - 10$$

Devemos ter: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3m - 10 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{10}{3}$$

Resposta: C

2) Pela definição:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 5c & 3b + 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 5c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = -1 \end{cases}$$

Portanto:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pela regra prática:

$$I) \det M = 5 - 6 = -1$$

$$II) M' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$III) \overline{M} = (M')^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$IV) M^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3) \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\text{II) } M' = \begin{pmatrix} (4-3) & 0 & 0 \\ -(4-9) & (2-0) & (3-0) \\ (2-6) & (1-0) & (2-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{III) } \bar{M} = (M')^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{IV) } M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \bar{M} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Se a matriz é não inversível, então o $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & x \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - x - 4x - 6 = 0 \Rightarrow -5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

Resposta: C

5) Pela definição:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pela regra prática:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a+2c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 5b+2d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-2 \\ d=5 \end{cases}$$

Portanto:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Pela regra prática:

$$\text{I) } \det B = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$\text{II) } B' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{III) } \bar{B} = (B')^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{IV) } B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

6) Pela regra prática, temos:

$$\text{I) } \det M = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{II) } M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{III) } \bar{M} = (M')^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{IV) } M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Resposta: A

7) Uma matriz M é inversível se e somente se $\det(M) \neq 0$. Dessa forma, se A e B são matrizes inversas, necessariamente $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$.

Resposta: E

MÓDULO 11 INVERSÃO DE MATRIZES, CÁLCULO DE UM ELEMENTO DA INVERSA E PROPRIEDADES

$$\text{1) } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

Resposta: A

$$\text{2) } A \cdot X \cdot B = A \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot A \Leftrightarrow X \cdot B = I \Leftrightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1}$$

$$\text{3) } (X \cdot A)^t = B \Leftrightarrow ((X \cdot A)^t)^t = B^t \Leftrightarrow X \cdot A = B^t \Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B^t \cdot A^{-1}$$

Resposta: B

$$\text{4) I) } \det C = \frac{1}{32} \Leftrightarrow \det C^{-1} = 32$$

$$\text{II) } B = 2A \Rightarrow \det B = \det(2A) \Leftrightarrow \det B = 2^3 \cdot \det A \Leftrightarrow \det B = 8 \cdot \det A$$

$$\text{III) } A \cdot B = C^{-1} \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det C^{-1} \Leftrightarrow \det A \cdot \det B = \det C^{-1} \Rightarrow \det A \cdot 8 \cdot \det A = 32 \Leftrightarrow (\det A)^2 = 4 \Leftrightarrow \det A = \pm 2 \Leftrightarrow |\det A| = 2$$

Resposta: D

5) Lembrando que, se A e B são matrizes inversas, então $A \cdot B = I$ (I é a matriz identidade), temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, B é a inversa de A.

6) Sendo b_{32} o elemento da terceira linha e segunda coluna da inversa de M e A_{23} o

cofator do elemento da segunda linha e terceira coluna de M, temos:

$$\text{I) } \det M = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 6 + 0 + 1 + 4 - 0 - 3 = 8$$

$$\text{II) } b_{32} = \frac{A_{23}}{\det M} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8}$$

Resposta: D

7) Sendo b_{21} o elemento da segunda linha e primeira coluna de M e A_{12} o cofator do elemento da primeira linha e segunda coluna de P, temos:

$$b_{21} = \frac{A_{12}}{\det P} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = 0$$

Resposta: C

$$\text{8) I) } \det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 0 - 10 + 0 + 0 = -16$$

$$\text{II) } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{16}$$

Resposta: E

$$\text{9) } (A \cdot X)^t = B \Leftrightarrow A \cdot X = B^t \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$$

Resposta: B

$$\text{10) } X \cdot A = B^{-1} \cdot A \Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta: E

MÓDULO 12 SISTEMAS LINEARES – REGRAS DE CRAMER

$$\text{1) I) } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 + 15 - 24 - 9 - 10 = -2$$

$$\text{II) } D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 - 3 - 4 - 9 + 2 = -3$$

$$\text{III) } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + 18 + 5 + 6 - 3 - 10 = 14$$

$$\text{IV) } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 - 6 + 15 - 24 + 3 - 5 = -13$$

$$\text{V) } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{VI) } y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{-2} = -7$$

$$\text{V) } z = \frac{D_z}{D} = \frac{-13}{-2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Portanto, } V = \left\{ \left(\frac{3}{2}; -7; \frac{13}{2} \right) \right\}$$

$$2) \text{ I) } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 3 + 4 - 2 + 9 + 4 = 24$$

$$\text{II) } D_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 13 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 21 + 39 + 0 - 26 + 0 + 14 = 48$$

$$\text{III) } D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 13 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 7 + 26 + 0 - 21 + 26 = 24$$

$$\text{IV) } D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 + 14 + 0 - 7 + 39 + 0 = 72$$

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{48}{24} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{24}{24} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{72}{24} = 3$$

$$\text{Logo, } V = \{(2; 1; 3)\}$$

$$3) \text{ I) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 6 = 1$$

$$\text{II) } D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 42 - 36 - 10 = 2$$

$$\text{III) } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 18 - 21 = 2$$

$$\text{IV) } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 + 10 - 6 - 10 = 1$$

$$\text{V) } x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{VI) } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{V) } z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Portanto, } V = \{(2; 2; 1)\}$$

$$4) \text{ a) } D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 36 = 39$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 1 = 26$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2$$

$$S = \{(3, 2)\}$$

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 1 = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$S = \{(1, 2)\}$$

$$\text{c) } D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -28 & -3 \end{vmatrix} = -42 + 28 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 2 & -28 \end{vmatrix} = -112 - 28 = -140$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-140}{-14} = 10$$

$$S = \{(1, 10)\}$$

$$\text{d) } D = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -20 & 5 \\ 19 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 95 = -55$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & -20 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = -38 + 60 = 22$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-55}{-11} = 5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{22}{-12} = -2$$

$$S = \{(5, -2)\}$$

$$5) \text{ a) } D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - \cancel{4} - \cancel{2} - 4 - 1 + \cancel{6} = -8$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - \cancel{2} + \cancel{4} - \cancel{2} + 1 - 12 = -8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 - 2 - \cancel{2} - 8 - \cancel{1} + \cancel{3} = -16$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cancel{1} + 8 - \cancel{1} - \cancel{2} + \cancel{2} + \cancel{2} = 8$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{-8} = -1$$

$$S = \{(1, 2, -1)\}$$

$$b) D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 75 +$$

$$+ 36 - 30 - 18 - 40 = 31$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 18 & 3 & 3 \\ 23 & 2 & 5 \\ 27 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 72 + 276 + 405 - 162 - 138 - 360 = 93$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 3 \\ 3 & 23 & 5 \\ 5 & 27 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 92 + 450 + 243 - 345 - 108 - 270 = 62$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 23 \\ 5 & 4 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= 108 + 345 + 216 - 180 - 243 - 184 = 62$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{93}{31} = 3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{62}{31} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{62}{31} = 2$$

$$S = \{(3, 2, 2)\}$$

$$c) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 - 6 + 8 + 9 + 2 + 8 = 24$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$21 + 16 + 2 - 3 + 4 + 56 = 96$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 - 42 - 2 - 12 + 14 - 7 = -48$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 + 56 + 63 + 2 - 16 = 120$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{96}{24} = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-48}{24} = -2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{120}{24} = 5$$

$$S = \{(4, -2, 5)\}$$

$$d) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 - 2 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -16 + 14 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 16 = -2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 + 24 - 14 = -4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$S = \{(2, 2, 4)\}$$

$$e) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{3} - \cancel{3} + 2 = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{3} - \cancel{3} - 2 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - \cancel{3} + 2 + \cancel{3} = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{3} + 2 - \cancel{3} + 2 = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

$$S = \{(-1, 2, 2)\}$$

6) Considere que:

$$\begin{cases} x \text{ é o preço unitário do churrasco;} \\ y \text{ é o preço unitário do quentão;} \\ z \text{ é o preço unitário do pastel;} \end{cases}$$

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102 \\ 23x + 50y + 45z = 95 \\ 30x + 45y + 60z = 117 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 28 & 42 & 48 \\ 23 & 50 & 45 \\ 30 & 45 & 60 \end{vmatrix} = 3720$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 102 & 42 & 48 \\ 95 & 50 & 45 \\ 117 & 45 & 60 \end{vmatrix} = 5580; x = \frac{5580}{3720} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ (O preço unitário do churrasco é R\$ 1,50.)}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 28 & 102 & 48 \\ 23 & 95 & 45 \\ 30 & 117 & 60 \end{vmatrix} = 1488; y = \frac{1488}{3720} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0,40 \text{ (O preço unitário do quentão é R\$ 0,40.)}$$

Por substituição de x e y, concluímos que o preço unitário do pastel (z) é R\$ 0,90.

Resposta: Os preços unitários de um churrasco, um quentão e um pastel são respectivamente iguais a R\$ 1,50, R\$ 0,40 e R\$ 0,90.

MÓDULO 13 ESCALONAMENTO

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5 \cdot 3 = 23 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$V = \{(1; 2; 3)\}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 7 \\ 2x + 5y + 9z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 2z = 4 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 2z = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$V = \{(-4; 2; 1)\}$$

$$3) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

Na terceira equação, $z = -3$.

Substituindo z por -3 na segunda equação, resulta $y = -1$.

Por fim, substituindo z por -3 e y por -1 na primeira equação, resulta $x = 4$.

Resposta: $\{(4; -1; -3)\}$.

$$4) \quad a) \quad \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-2) e adicionando-a à segunda e multiplicando a primeira equação por 3 e adicionando-a à terceira, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 5 e adicionando-a à terceira, resulta:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ 16y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$V = \{(-1; 3; 2)\}$$

$$b) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-1) e adicionando-a à segunda e multiplicando a primeira equação por 1 e adicionando-a à terceira, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Adicionando a segunda equação à terceira, resulta:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$V = \{(1; 1; -2)\}$$

Respostas: a) $V = \{(-1; 3; 2)\}$

b) $V = \{(1; 1; -2)\}$

5) Desenvolvendo o produto matricial, obtemos o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \cdot (-2) \cdot (-5) \\ 2x + 3y + 6z = 2 \cdot (-5) \\ 5x + y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ -5y - 8z = -2 \\ -19y - 36z = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 5y + 8z = 2 \quad (.19) \\ -19y - 36z = -2 \quad (.5) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 95y + 152z = 38 \\ -28z = 28 \end{cases}$$

$$-28z = 28 \Rightarrow z = -1$$

$$5y + 8z = 2 \Rightarrow 5y - 8 = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 4y + 7z = 2 \Rightarrow x + 8 - 7 = 2 \Rightarrow x = 1$$

A matriz procurada é $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Resposta: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6) Sendo x , y e z , respectivamente, os preços de um hambúrguer, um refrigerante e uma porção de fritas, temos:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 18 \\ 6x + 8y + 3z = 30 \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por 2 , resulta:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 6x + 8y + 3z = 30 \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-3) e adicionando-a à segunda, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 5y = 3 \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = \frac{42}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ 2x + 3y + z = ? \end{cases}$$

Assim, o preço unitário do refrigerante é

$$y = \frac{3}{5} = 0,60.$$

O valor da terceira conta é

$$2x + 3y + z = 2x + z + 3 \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{42}{5} + \frac{9}{5} = \frac{51}{5} = 10,20$$

Resposta: A

$$7) \quad \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + w = 5 \\ y + z + w = 7 \\ x + y + w = 4 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -y + w = 6 \\ y + z + w = 7 \\ -z + w = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + z + w = 7 \\ -y + w = 6 \\ -z + w = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + z + w = 7 \\ z + 2w = 13 \\ -z + w = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + z + w = 7 \\ z + 2w = 13 \\ 3w = 18 \end{cases}$$

$$3w = 18 \Rightarrow w = 6$$

$$z + 2w = 13 \Rightarrow z + 12 = 13 \Rightarrow z = 1$$

$$y + z + w = 7 \Rightarrow y + 1 + 6 = 7 \Rightarrow y = 0$$

$$x + y + z = -1 \Rightarrow x + 0 + 1 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$S = \{(-2, 0, 1, 6)\}$$

MÓDULO 14 ESCALONAMENTO

$$1) \quad \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \cdot (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ -3y + 4z = -7 \\ -3y + z = -4 \end{cases} \begin{matrix} (-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ -3y + 4z = -7 \\ -3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ -3y + 4(-1) = -7 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 1 - (-1) = 6 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$V = \{(3; 1; -1)\}$$

2) Sendo a , b e c os preços unitários dos artigos A, B e C, respectivamente, de acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} a + b = 70 \\ 2a + c = 105 \\ b - c = 5 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 70 \\ -2b + c = -35 \\ b - c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 70 \\ b - c = 5 \\ -2b + c = -35 \end{matrix} \begin{matrix} (2) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 70 \\ b - c = 5 \\ -c = -25 \end{cases}$$

Portanto, pela terceira equação do último sistema, obtemos $c = 25$.

Resposta: B

- 3) Sendo x , y e z o número de crianças, senhores e senhoras, respectivamente, de acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ 8x + 5y + 6z = 230 \\ 4x + 3y + 3z = 120 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (-4) \cdot (-2) \\ \leftarrow \downarrow_+ \\ \leftarrow \downarrow_+ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 3z = 90 \\ -7y - 6z = -130 \\ -3y - 3z = -60 \end{array} \right. \xrightarrow{(-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ y + z = 20 \\ -7y - 6z = -130 \end{cases} \quad (7) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ y + z = 20 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ y + 10 = 20 \Leftrightarrow \\ z = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 90 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3.10 + 3.10 = 90 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{cases}$$

Portanto, o total de convidados deverá ser

$$x + y + z = 15 + 10 + 10 = 35$$

Resposta: B

$$4) \quad \begin{cases} x + 3y + \frac{4}{z} = 7 \\ x + 4y + \frac{2}{z} = 8 \\ x + 2y - \frac{2}{z} = 4 \end{cases}$$

Fazendo $\frac{1}{z} = w$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 4w = 7 \\ x + 4y + 2w = 8 \\ x + 2y - 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (-1) \cdot (-1) \\ \leftarrow \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4w = 7 \\ y - 2w = 1 \\ -y - 6w = -3 \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4w = 7 \\ y - 2w = 1 \\ -8w = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4w = 7 \\ y - 2w = 1 \\ w = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 4w = 7 \\ w = \frac{3}{2} \\ w = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 7 \\ w = \frac{3}{2} \\ w = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ w = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Como $\frac{1}{z} = w = \frac{1}{4}$, então $z = 4$ e o sistema inicial apresenta como solução $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ e $z = 4$.

Portanto, $(x + y)^z = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^4 = 3^4 = 81$

Resposta: D

5) a)
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 & \text{---} (-2) \\ 2x + 3y - z = 0 & \text{---} (-1) \\ x - 14z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -y - 9z = 0 \\ -2y - 18z = 0 \end{cases}$$

Notamos que a 2ª e a 3ª equação são equivalentes, o que significa que temos duas equações e três incógnitas. Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Fazendo $z = k$, temos:

$$-y - 9k = 0 \Rightarrow y = -9k$$
$$x - 18k + 4k = 0 \Rightarrow x - 14k = 0 \Rightarrow x = 14k$$

As soluções são do tipo $(14k, -9k, k)$.

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -15y - z = 13 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{15} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -15y - z = 13 \\ 13z = 26 \Rightarrow z = 2 \end{cases}$$

Substituindo na 2.^a equação, temos:
 $-15y - 2 = 13 \Rightarrow -15y = 15 \Rightarrow y = -1$
 Substituindo na 1.^a equação, temos:
 $2x - 3 + 2 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Logo, o sistema é possível e determinado
e $S = \{(1, -1, 2)\}$

c) Observamos que a 1.^a e a 2.^a equação são equivalentes; podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 8 \end{cases} \xrightarrow{-3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível:
 $S = \emptyset$

d)
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \xrightarrow{-2} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

Como temos mais incógnitas que equações, o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo $z = k$, temos:

$$\begin{aligned} y + 4k &= 1 \Rightarrow y = 1 - 4k \\ x + 1 - 4k - k &= 2 \Rightarrow x = 1 + 5k \end{aligned}$$

As soluções são da forma $(1 + 5k, 1 - 4k, k)$.

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = -6 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Considerando $z = k$, temos:

$$\begin{aligned} y - k &= -6 \Rightarrow y = k - 6 \\ x + k - 6 + k &= 3 \Rightarrow x = -2k + 9 \end{aligned}$$

As soluções são da forma

$$(9 - 2k, k - 6, k)$$

f)
$$\begin{cases} 3x + 15y + 6z = 3 & \textcircled{-2} \\ 2x + 10y + 4z = 10 & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 15y + 6z = 3 \\ 0 = 24 \end{cases}$$

O sistema é impossível: $S = \emptyset$

g) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 2 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ -5y + 10z = 0 \end{cases} \rightleftharpoons$

O sistema é possível e indeterminado.

Fazendo $z = k$, temos:

$$-5y + 10k = 0 \Rightarrow -5y = -10k \Rightarrow y = 2k$$

As soluções são da forma $(1 + k, 2k, k)$.

$$6) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (-4) \cdot (-3) \\ + \\ \end{matrix}} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y + z = 1 \\ -5y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo $z = \alpha$, vem:

$$5y + \alpha = 1 \Rightarrow -5y = 1 - \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha - 1}{5}$$

$$x + 2y + z = 1 \Rightarrow x + \frac{2\alpha - 2}{5} + \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{2\alpha - 2}{5} - \alpha = \frac{5 - 2\alpha + 2 - 5\alpha}{5} =$$

$$= \frac{7 - 7\alpha}{5}$$

As infinitas soluções do sistema são da forma $\left(\frac{7 - 7\alpha}{5}; \frac{\alpha - 1}{5}; \alpha\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Resposta:

$$V = \left\{\left(\frac{7 - 7\alpha}{5}; \frac{\alpha - 1}{5}; \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

MÓDULO 15

SUBSTITUIÇÃO, ELIMINAÇÃO

$$1) \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 2x + 3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \cdot 2 + 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$V = \{(2; 7)\}$$

$$2) I) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 + z = 6 \Rightarrow z = 3$$

$$II) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 + y = 6 \Rightarrow y = 2$$

$$III) \begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

Portanto

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y = 3 \\ x + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$V = \{(1; 2; 3)\}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 \cdot 1 + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$V = \{(1; 2)\}$$

$$4) I) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$II) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$III) \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1$$

Portanto:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$V = \{(1; 1; 1)\}$$

5) Se o termo ordenado (a; b; c) é a única

$$\text{solução do sistema } \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + 6y + 3z = 12 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = -1 \\ 2a - b - c = 5 \\ a + 6b + 3c = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + 2a + a) + (-b - b + 6b) +$$

$$+ (2c - c + 3c) = (-1 + 5 + 12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a + 4b + 4c = 16 \Rightarrow a + b + c = 4$$

Resposta: D

6) Sendo:

a = número de pílulas de A

b = número de pílulas de B

c = número de pílulas de C

temos

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ 5a + 10b + 12c = 1830 \\ 2a = b \end{cases}$$

Substituindo b por 2a, vem:

$$\begin{cases} 3a + c = 180 \\ 25a + 12c = 1830 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos a = 30 e c = 90. Assim, b = 60.

Resposta: D

$$7) a) \begin{cases} x = 3z \\ 3y = 2w \\ y = 2z \Rightarrow \\ 4y = 8z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 3y - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \Rightarrow \\ 4y - 8z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 6z - 2w = 0 \text{ SPI} \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Se $z = \alpha$, temos $y = 2\alpha$, $w = 3\alpha$ e $x = 3\alpha$. Portanto,

$$S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

b) Para $\alpha = 1$, temos $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ e $w = 3$. Logo, o menor número inteiro de átomos de cálcio: 3, hidrogênio: 6, fósforo: 2 e oxigênio: 8.

8) x = quantidade de leite desnatado
 y = quantidade de farinha de soja

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 30 \\ 5x + 3y + z = 40 \Rightarrow \\ y + 7z = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 30 \\ y + 7z = 30 \Rightarrow \\ 5x + 3y + z = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 30 \\ y + 7z = 30 \Rightarrow \\ 105z = 450 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$x = 7,1$; $y = 0$ e $z = 4,2$. Logo, as quantidades diárias necessárias são 7,1 g de leite desnatado, 0 g de farinha de soja e 4,2 g de soro de leite.

MÓDULO 16

CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

1) Os possíveis determinantes de ordem 2 que podem ser obtidos da matriz são:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como pelo menos um deles é diferente de zero, concluímos que a característica da matriz é igual a 2.

A **máxima ordem** para um **determinante não nulo** que pode ser obtido da matriz é 2.

2) A característica da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ é igual à da matriz}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, concluímos que a ca-

racterística da matriz é igual a 2. A **máxima ordem** para um **determinante não nulo** que pode ser obtido da matriz é 2.

3) A característica da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ é igual à da matriz } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, concluímos que a ca-

racterística da matriz é igual a 2. A **máxima ordem** para um **determinante não nulo** que pode ser obtido da matriz é 2.

$$4) \text{ Na matriz } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ temos } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, a característica dela é maior ou igual a 2.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 18 - 9 - 20 - 3 = -3 \neq 0$, concluímos que a característica da matriz é igual a 3. A **máxima ordem** para um **determinante não nulo** que pode ser obtido da matriz é 3.

5) I) Na matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, temos

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Logo, a característica dela é maior ou igual a 2.

II) Como a característica é 2, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 + 8 + 18a - 16a - 6 - 18 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: B

6) I) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 + 16 + 9a - 4a - 6 - 30 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

II) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4 + 24 + 9b - 4b - 9 - 24 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

III) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

IV) Para $a = 3$ e $b = 1$, a característica é 2.
V) Para $a \neq 3$ ou $b \neq 1$, a característica é 3.
Resposta: E

7) A matriz incompleta é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz completa é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A característica p da matriz incompleta é

$$3, \text{ pois } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

A característica q da matriz completa é 3, pois entre as submatrizes de ordem 3 obtidas a partir da matriz completa, pelo menos uma possui determinante diferente

de zero. Com efeito

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

8) A característica p da matriz incompleta do sistema é 2, pois todos determinantes de ordem 3 obtidos a partir dessa matriz são nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{e } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Resposta: E

9) Observando que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0, \text{ conclui-se que}$$

a característica da matriz incompleta do sistema é igual a 4

FRENTE 2 MÓDULO 1 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA GEOMETRIA

1) a) $\begin{matrix} 130^\circ 12' 24'' \\ 108^\circ 42' 35'' \\ \hline 238^\circ 54' 59'' \end{matrix} +$

b) $\begin{matrix} 08^\circ 09' 10'' \\ 20^\circ 50' 50'' \\ \hline 28^\circ 59' 60'' = 28^\circ 59' 1'' = 28^\circ 60' = 29^\circ \end{matrix}$

2) a) $\begin{matrix} 22^\circ 37' 38'' \\ 11^\circ 24' 23'' \\ \hline 11^\circ 13' 15'' \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} 8^\circ & | & 5 \\ 3^\circ & 1^\circ 36' & \\ \hline & \times 60 & \\ 180' & & \\ 30 & & \\ 0 & & \end{matrix} \quad \text{c) } \begin{matrix} 44^\circ & | & 5 \\ 14^\circ & 14^\circ 40' & \\ \hline & 2^\circ & \\ & \times 60 & \\ & 120' & \\ & 00 & \end{matrix}$

3) Sendo $\hat{a}$ e $\hat{b}$ as medidas dos ângulos,
 $\hat{a} + \hat{b} = 33^\circ 22' 41''$ e $\hat{a} = 21^\circ 10' 12''$
Assim:
 $21^\circ 10' 12'' + \hat{b} = 33^\circ 22' 41'' \Leftrightarrow$
 $\hat{b} = 33^\circ 22' 41'' - 21^\circ 10' 12'' \Leftrightarrow$
 $\hat{b} = 12^\circ 12' 29''$

4) $\begin{matrix} 29^\circ 59' 60'' \\ 20^\circ 10' 42'' \\ \hline 9^\circ 49' 18'' \end{matrix}$

5) $33^\circ 15' 17'' - (41^\circ 12' - 25^\circ 10' 23'') + 55^\circ 22' 33'' = 33^\circ 15' 17'' - 41^\circ 12' + 25^\circ 10' 23'' + 55^\circ 22' 33'' =$

$$= 33^\circ 15' 17'' + 25^\circ 10' 23'' + 55^\circ 22' 33'' - 41^\circ 12' = 72^\circ 35' 73'' = 72^\circ 36' 13''$$

Pois

I) $\begin{matrix} 33^\circ 15' 17'' \\ 25^\circ 10' 23'' \\ 55^\circ 22' 33'' \\ \hline 113^\circ 47' 73'' \end{matrix}$

II) $\begin{matrix} 113^\circ 47' 73'' \\ - 41^\circ 12' \\ \hline 72^\circ 35' 73'' \end{matrix}$

III) $72^\circ 35' 73'' = 72^\circ 35' 60'' + 13'' = 72^\circ 36' 13''$

6) Como pode ser observado no gráfico, a alternativa (e) é correta.

Resposta: E

7) $\frac{100}{360^\circ} = \frac{26}{x} \Rightarrow x = \frac{26 \cdot 360}{100} = 93,6^\circ$

Resposta: D

MÓDULO 2 ÂNGULOS

1) a) $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
b) $90^\circ - 40^\circ 30' = 89^\circ 60' - 40^\circ 30' = 49^\circ 30'$
 $\begin{matrix} 89^\circ 60' \\ 40^\circ 30' \\ \hline 49^\circ 30' \end{matrix}$

c) $90^\circ - 40^\circ 30' 30'' = 89^\circ 59' 60'' - 40^\circ 30' 30'' = 49^\circ 29' 30''$
 $\begin{matrix} 89^\circ 59' 60'' \\ 40^\circ 30' 30'' \\ \hline 49^\circ 29' 30'' \end{matrix}$

2) a) $180^\circ - 130^\circ 12' 24'' = 179^\circ 59' 60'' - 130^\circ 12' 24'' = 49^\circ 47' 36''$
 $\begin{matrix} 179^\circ 59' 60'' \\ 130^\circ 12' 24'' \\ \hline 49^\circ 47' 36'' \end{matrix}$

b) $180^\circ - 32^\circ 18' = 179^\circ 60' - 32^\circ 18' = 147^\circ 42'$
 $\begin{matrix} 179^\circ 60' \\ 32^\circ 18' \\ \hline 147^\circ 42' \end{matrix}$

3) Sendo x a medida do ângulo, de acordo com o enunciado temos:

$$\frac{180^\circ - x}{x} = 7^\circ 42' 53'' \Leftrightarrow$$

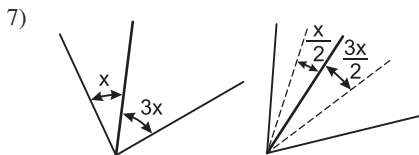
$$\Leftrightarrow 180^\circ - x = 14^\circ 84' 106'' \Leftrightarrow x = 180^\circ - 14^\circ 84' 106'' \Leftrightarrow x = 179^\circ 59' 60'' - 15^\circ 25' 46'' \Leftrightarrow x = 164^\circ 34' 14''$$

 $\begin{matrix} 179^\circ 59' 60'' \\ 15^\circ 25' 46'' \\ \hline 164^\circ 34' 14'' \end{matrix}$

- 4) Medida do ângulo: x .
 Medida do complemento do ângulo:
 $90^\circ - x$.
 Medida do suplemento do ângulo:
 $180^\circ - x$.
 De acordo com o enunciado, temos:
 $2 \cdot (90^\circ - x) + 40^\circ = 180^\circ - x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 180^\circ - 2x + 40^\circ = 180^\circ - x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x + x = -40^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x = -40^\circ \Leftrightarrow x = 40^\circ$

5) $2x + 10^\circ = x + 90^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x - x = 90^\circ - 10^\circ \Leftrightarrow x = 80^\circ$

- 6) Medida do ângulo: x .
 Medida do complemento do ângulo:
 $90^\circ - x$.
 Medida do suplemento do ângulo:
 $180^\circ - x$.
 De acordo com o enunciado, temos:
 $3 \cdot (90^\circ - x) + 30^\circ = 180^\circ - x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 270^\circ - 3x + 30^\circ = 180^\circ - x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3x + x = 180^\circ - 270^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x = -120^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$



ângulo entre as bissetrizes:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = 2x.$$

De acordo com o enunciado, temos:
 $90^\circ - 2x = 50^\circ \Leftrightarrow -2x = 50^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x = -40^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ$

Os ângulos medem $x = 20^\circ$ e $3x = 60^\circ$. A soma desses valores é $20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$.

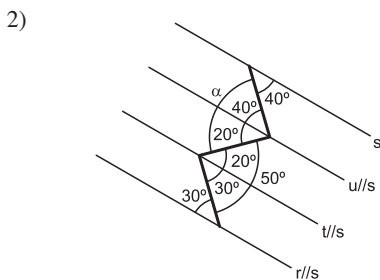
O complemento de 80° é $90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

- 8) Devemos ter:
 $5x - 20^\circ = 2x + 50^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x = 70^\circ \Rightarrow x = 23^\circ 20'$
 Resposta: C

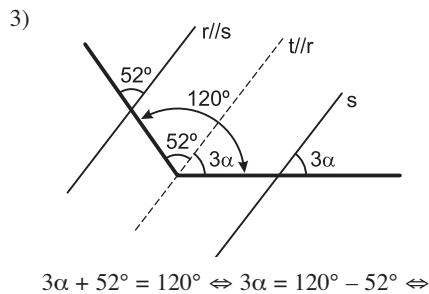
- 9) $180^\circ - \alpha = 30^\circ 20' \Rightarrow$
 $\Rightarrow 180^\circ - 30^\circ 20' = \alpha \Rightarrow \alpha = 149^\circ 40'$
 Resposta: E

MÓDULO 3 PARALELISMO

- 1) $\alpha + 30^\circ = 70^\circ \Leftrightarrow \alpha = 40^\circ$
 Resposta: A



$$\alpha = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$$

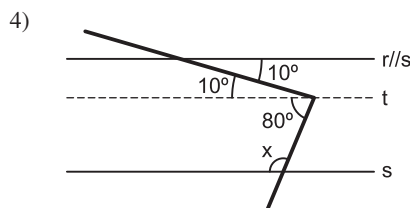


$$3\alpha + 52^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow 3\alpha = 120^\circ - 52^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = 68^\circ \Leftrightarrow \alpha = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \alpha = 22^\circ 40'$$

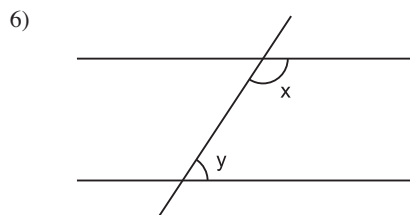
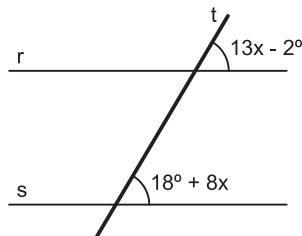
$$\begin{array}{r} 68^\circ \\ 2^\circ \\ \times 60 \\ \hline 120^\circ \\ 0 \end{array}$$

Resposta: E

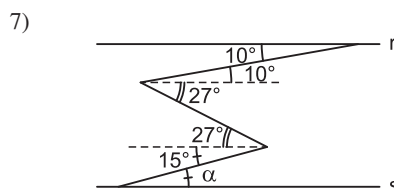


Resposta: B

- 5) Para que r e s sejam paralelas devemos ter:
 $13x - 2^\circ = 18^\circ + 8x \Leftrightarrow 13x - 8x = 18^\circ + 2^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 5x = 20^\circ \Leftrightarrow x = 4^\circ$



- 1) $x = y + 30^\circ \Leftrightarrow y = x - 30^\circ$
 2) $x + y = 180^\circ$
 Assim: $x + (x - 30^\circ) = 180^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x = 210^\circ \Leftrightarrow x = 105^\circ$
 Resposta: A

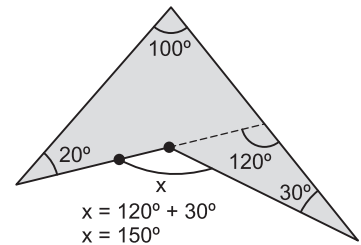


Logo, $\alpha = 15^\circ$

Resposta: B

MÓDULO 4 TRIÂNGULOS

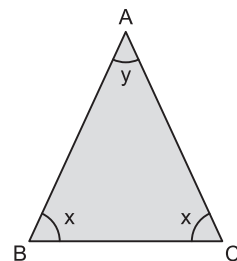
- 1) a) $x = 20^\circ + 45^\circ \Rightarrow x = 65^\circ$
 b) $120^\circ = 50^\circ + x \Rightarrow x = 70^\circ$
 2) $x = 20^\circ + 100^\circ + 30^\circ \Rightarrow x = 150^\circ$



$$x = 120^\circ + 30^\circ$$

$$x = 150^\circ$$

3)



Sejam x a medida dos ângulos da base e y a medida do ângulo do vértice do triângulo.

De acordo com o enunciado, temos
 $x + x = 8y$ e, além disso, $x + x + y = 180^\circ$.

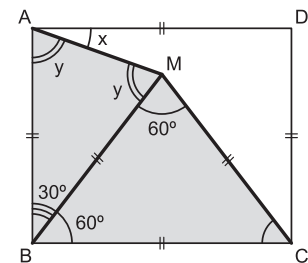
Portanto:

$$\begin{cases} 2x = 8y \\ 2x + y = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 8y + y = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 9y = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80^\circ \\ y = 20^\circ \end{cases}$$

Assim sendo, as medidas dos ângulos são 80° , 80° e 20° .

4)



No triângulo isósceles ABM temos:

$\hat{A}BM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ e $\hat{B}AM = \hat{B}MA = y$
 Assim,

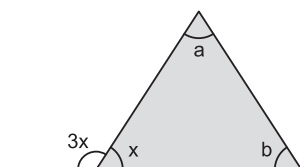
$$30^\circ + y + y = 180^\circ \Leftrightarrow 2y = 150^\circ \Leftrightarrow y = 75^\circ$$

Como $x + y = 90^\circ$, temos:

$$x + 75^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$

Resposta: A

5)

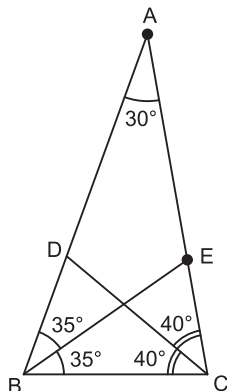


$$\begin{aligned} \text{I)} \quad 3x + x &= 180^\circ \Rightarrow 4x = 180^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 45^\circ \text{ e } 3x = 135^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad \begin{cases} a - b = 35^\circ \\ a + b = 3x = 135^\circ \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a - b = 35^\circ \\ a + b = 135^\circ \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a - b = 35^\circ \\ 2a = 170^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 85^\circ \\ b = 50^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Os ângulos internos do triângulo medem 45° , 85° e 50° .

6)



I) No triângulo $\triangle ABC$, temos:
 $30^\circ + 70^\circ + \hat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \hat{ACB} = 80^\circ$

II) No triângulo $\triangle ADC$, temos:
 $30^\circ + \hat{ADC} + 40^\circ \Rightarrow \hat{ADC} = 110^\circ$

III) No triângulo $\triangle AEB$, temos:
 $30^\circ + \hat{AEB} + 35^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{AEB} = 115^\circ$

Logo, $\hat{AEB} + \hat{ADC} = 115^\circ + 110^\circ = 225^\circ$

Resposta: D

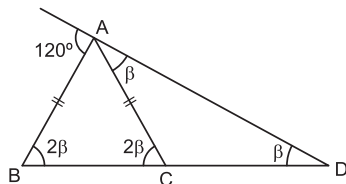
7) Sendo x a medida do ângulo $\hat{BCA}$, temos:
 $x + 2x + 69^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 37^\circ$

Assim, $\hat{BAC} = 2x = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$

Resposta: C

MÓDULO 5 SEGMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

1)



I) No triângulo $\triangle ACD$ temos:

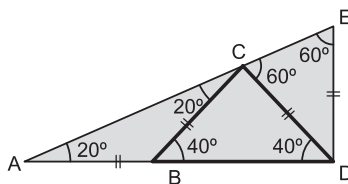
$$\hat{ACB} = \beta + \beta \Leftrightarrow \hat{ACB} = 2\beta$$

II) Como o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, temos: $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 2\beta$

III) No triângulo $\triangle ABD$, temos:

$$120^\circ = 2\beta + \beta \Leftrightarrow 3\beta = 120^\circ \Leftrightarrow \beta = 40^\circ$$

2)



1) $\hat{BCA} = \hat{BAC} = 20^\circ$ ($\triangle ABC$ é isósceles)

2) $\hat{DBC} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ (ângulo externo do $\triangle ABC$)

3) $\hat{BDC} = \hat{DBC} = 40^\circ$ ($\triangle CBD$ é isósceles)

4) $\hat{DCE} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ (ângulo externo do $\triangle ACD$)

5) $\hat{CED} = \hat{DCE} = 60^\circ$ ($\triangle DCE$ é isósceles)

O triângulo $\triangle DCE$ é equilátero, pois os dois ângulos de sua base medem 60° . Portanto, $CE = CD = DE = 7$ cm.

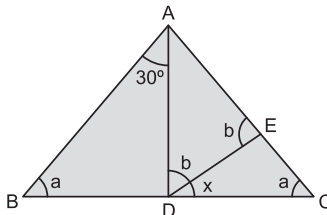
3) $3x + 4x + 5x = 180^\circ$

$$12x = 180^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Resposta: E

4)



1) $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ é isósceles $\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{ACB} = a$

2) $AE = AD \Rightarrow \triangle ADE$ é isósceles $\Rightarrow \hat{ADE} = \hat{AED} = b$

3) $\hat{AED}$ é um ângulo externo do $\triangle CDE \Rightarrow b = x + a$

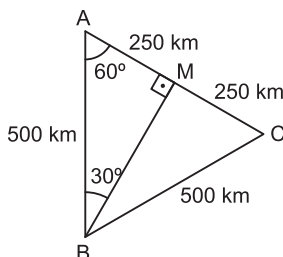
4) $\hat{ADC}$ é um ângulo externo do $\triangle ABD \Rightarrow b + x = a + 30^\circ$

De (3) e (4) temos:

$$\begin{cases} b - a = x \\ b - a = 30^\circ - x \end{cases} \Rightarrow x = 30^\circ - x \Rightarrow x + x = 30^\circ \Rightarrow 2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

5) No triângulo retângulo $\triangle AMB$, temos:

$AB = 2 \cdot AM$ e, portanto, $\hat{BAM} = 60^\circ$ e $\hat{ABM} = 30^\circ$



Logo, o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero e

$BC = 500$ km

Resposta: D

6) Pela descrição, é a figura da alternativa D.

Resposta: D

MÓDULO 6 TRIÂNGULO RETÂNGULO E CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

1) $a = 5$, $b = 8$ e $c = x$

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 8 + x \\ 8 < 5 + x \\ x < 5 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 < x < 13$$

O menor inteiro positivo para x é 4.

Resposta: D

2)

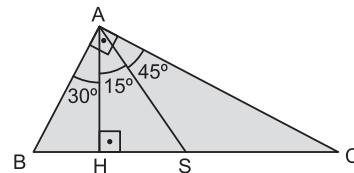
$$\begin{cases} x < x - 1 + 10 \\ x - 1 < x + 10 \\ 10 < x + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 < 2x \\ 10 < 2x \end{cases} \Rightarrow x > \frac{11}{2}$$

Como $x \in \mathbb{N}$ e $x > \frac{11}{2}$, os possíveis

valores de x são 6; 7; 8; ...

Resposta: E

3)



I) Como $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo reto, temos: $\hat{BAS} = \hat{CAS} = 45^\circ$

II) No triângulo $\triangle AHC$ temos:

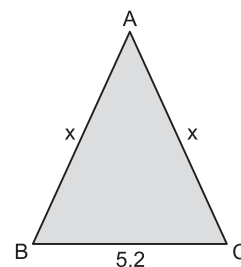
$$\begin{aligned} 45^\circ + 15^\circ + 90^\circ + \hat{C} &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ \hat{C} &= 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \\ \hat{C} &= 30^\circ \end{aligned}$$

III) No triângulo $\triangle ABC$ temos:

$$\begin{aligned} 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ &= 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ \end{aligned}$$

Assim sendo, os ângulos agudos do triângulo $\triangle ABC$ medem 30° e 60° .

4)

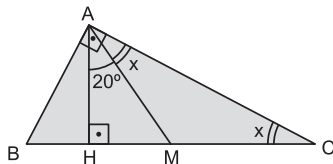


Se $\overline{BC}$ a base do triângulo e $AB = AC = x$ temos:

$$\frac{5,2 + x + x}{2} = 19,6 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x + 5,2 = 39,2 \Rightarrow 2x = 34 \Rightarrow x = 17$
Assim sendo, a medida dos lados congruentes é 17 m.

5)



I) Como M é o ponto médio da hipotenusa, temos: $AM = BM = CM$ e, portanto, o triângulo AMC é isósceles.

II) Fazendo $\hat{MAC} = \hat{MCA} = x$, no triângulo AHC temos: $x + 90^\circ + 20^\circ + x = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ$ e, portanto, $\hat{C} = 35^\circ$.

III) No triângulo ABC, temos:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Leftrightarrow B + 35^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 55^\circ$$

Resposta: B

6) Os lados de um triângulo não podem medir 2, 4 e 6, pois $2 + 4 = 6$.

Resposta: A

7) I) $x + 3 < 2x - 5 + 9 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow x > -1$

II) $2x - 5 < x + 3 + 9 \Rightarrow x < 17$

III) $9 < x + 3 + 2x - 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 11 < 3x \Rightarrow \frac{11}{3} < x$$

$$\text{Logo, } \frac{11}{3} < x < 17$$

Resposta: B

8) I) $|3 - 7| < BD < 3 + 7 \Rightarrow 4 < BD < 10$

II) $|4 - 5| < BD < 4 + 5 \Rightarrow 1 < BD < 9$

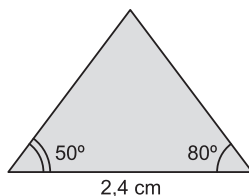
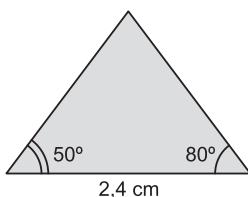
De (I) e (II), temos: $4 < BD < 9$ e, portanto, o número de valores inteiros possíveis para $\overline{BD}$ é 4.

Resposta: A

MÓDULO 7

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1) Como os triângulos possuem dois ângulos e o lado entre eles respectivamente congruentes, podemos concluir que eles são congruentes pelo critério ALA.



Resposta: C

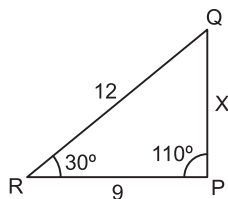
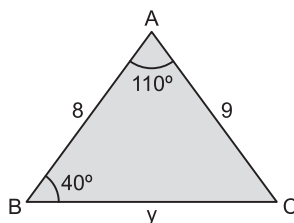
2) Como os elementos fornecidos nos permitem concluir apenas a congruência de dois lados, eles não permitem concluir que os triângulos são congruentes.

Resposta: A

3) Como os elementos fornecidos nos permitem concluir apenas a congruência dos três ângulos, eles não permitem concluir a congruência dos triângulos, pois AAA não é critério de congruência.

Resposta: A

4)



$$\text{I) } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 110^\circ + 40^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\text{II) } \hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

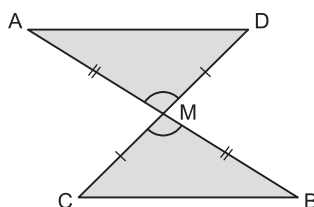
$$\Leftrightarrow 110^\circ + \hat{Q} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Q} = 40^\circ$$

$$\text{III) } \begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{C} \cong \hat{R} \end{cases}$$

Assim,

$$\overline{BC} \cong \overline{QR} \Rightarrow y = 12 \text{ e } \overline{AB} \cong \overline{PQ} \Rightarrow x = 8$$

5)



$$\text{I) } M \text{ é ponto médio de } \overline{AB} \Rightarrow \overline{AM} \cong \overline{MB}$$

$$\text{II) } M \text{ é ponto médio de } \overline{CD} \Rightarrow \overline{CM} \cong \overline{MD}$$

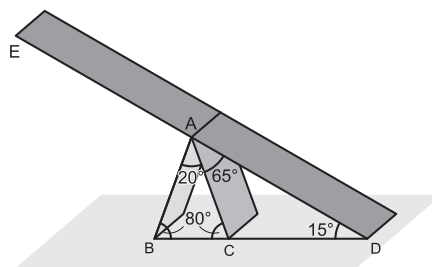
$$\text{III) } \hat{AMD} \cong \hat{BMC} \text{ pois são opostos pelo vértice}$$

De (I), (II) e (III) podemos concluir que:

$$\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{B} \\ \hat{C} \cong \hat{D} \\ \overline{AM} \cong \overline{BM} \\ \overline{CM} \cong \overline{MD} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \end{cases}$$

Resposta: E

6)



I) No triângulo ABC, temos:

$$\hat{ABC} = \hat{ACB} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

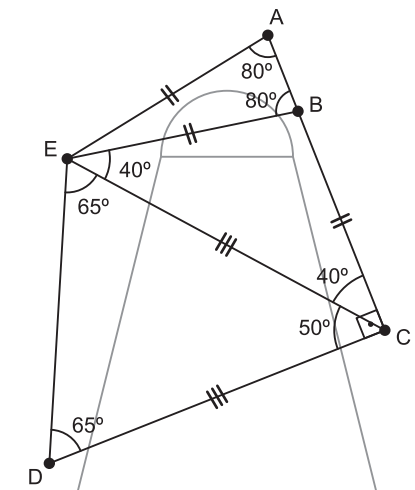
II) No triângulo ACD, temos:

$$\hat{CAD} = 80^\circ - 15^\circ = 65^\circ$$

$$\text{III) } \hat{BAE} + 20^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{BAE} = 95^\circ$$

Resposta: E

7)



I) $\hat{CED} = \hat{CDE} = 65^\circ$ e, portanto,
 $\hat{DCE} = 50^\circ$, pois o triângulo DCE é isósceles.

Assim, $\hat{BCE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

II) Como $\hat{BCE} = \hat{BEC} = 40^\circ$,

temos: $\hat{ABE} = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$

III) $\hat{ABE} = \hat{BAE} = 80^\circ$ e, portanto,

$\hat{AEB} + 80^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{AEB} = 20^\circ$

Resposta: E

MÓDULO 8 POLÍGONOS

1) Sendo S_i a soma dos ângulos internos do polígono e n o número de lados, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \text{ e } n = 10$$

$$\text{Assim: } S_i = (10 - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow S_i = 1440^\circ$$

Resposta: A

2) Sendo a_e a medida do ângulo externo, Se a soma das medidas dos ângulos externos e n o número de lados, temos:

$$\hat{a}_e = \frac{S_e}{n}, \hat{a}_e = 18^\circ \text{ e } S_e = 360^\circ$$

Assim:

$$\hat{a}_e = \frac{S_e}{n} \Leftrightarrow 18^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n = 20^\circ$$

Resposta: C

3) Como o número de lados é igual à sexta parte do número de diagonais, temos:

$$d = \frac{d}{6} = d = 6n \Leftrightarrow \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 6n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n = 12n \Leftrightarrow n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n = 15$$

Assim sendo, a razão é:

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{a}_e} = \frac{\frac{S_i}{n}}{\frac{S_e}{n}} = \frac{S_i}{S_e} =$$

$$= \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{15 - 2}{2} = \frac{13}{2}$$

4) $d = n \neq 0$

$$\text{Assim, } \frac{n(n - 3)}{2} = n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n - 3}{2} = 1 \Leftrightarrow n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$$

Resposta: C

5) As medidas dos ângulos internos desses polígonos regulares são dadas respectivamente por:

$$\hat{T} = \frac{180^\circ}{3} \Leftrightarrow \hat{T} = 60^\circ$$

$$\hat{Q} = \frac{360^\circ}{4} \Leftrightarrow \hat{Q} = 90^\circ$$

$$\hat{P} = \frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} \Leftrightarrow \hat{P} = 108^\circ$$

$$\hat{H} = \frac{(6 - 2) \cdot 180^\circ}{6} \Leftrightarrow \hat{H} = 120^\circ$$

Assim:

$$\text{I) } 3\hat{T} + 1\hat{H} = 300^\circ \neq 360^\circ$$

$$\text{II) } 3\hat{T} + 2\hat{Q} = 360^\circ$$

$$\text{III) } \hat{T} + \hat{P} + \hat{H} = 288^\circ \neq 360^\circ$$

$$\text{IV) } \hat{T} + 2\hat{Q} + \hat{H} = 360^\circ$$

Resposta: D

MÓDULO 9 POLÍGONOS

1) Como a medida de um ângulo interno de um polígono regular é igual a 8 vezes a medida de um ângulo externo, temos:

$$\hat{a}_i = 8 \cdot \hat{a}_e \Leftrightarrow \frac{S_i}{n} = 8 \cdot \frac{S_e}{n} \Leftrightarrow$$

$$2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 2 = 16 \Leftrightarrow n = 18$$

O polígono tem 18 lados.

2) Como a soma dos ângulos internos é igual a três vezes dos ângulos externos, temos:

$$S_i = 3 \cdot S_e \Leftrightarrow (n - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 2 = 6 \Leftrightarrow n = 8$$

O polígono é o octógono.

3) Vamos considerar dois polígonos P_1 , com $n_1 = n$ lados, e P_2 , com $n_2 = n + 1$ lados.

Como a soma dos ângulos internos dos dois polígonos é igual a 1260° , temos:

$$(n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n - 2) \cdot 180^\circ + (n + 1 - 2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 2 + n - 1 = 7 \Leftrightarrow n = 5$$

Assim, P_1 e P_2 têm, respectivamente, 5 e 6 lados.

Sendo d_1 e d_2 , respectivamente, o número de diagonais de P_1 e P_2 , temos:

$$d_1 = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5 \text{ e } d_2 = \frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$$

Os polígonos têm 5 e 9 diagonais.

4) Da afirmação “o número de lados é igual à terça parte do número de diagonais”, temos:

$$n = \frac{d}{3} \Leftrightarrow d = 3n \Leftrightarrow \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = 3n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 3 = 6 \Leftrightarrow n = 9$$

$$\text{Assim: } S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_i = (9 - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow S_i = 1260^\circ$$

5) Sendo d_1 , d_2 e d_3 os números de diagonais dos polígonos com n , $n + 1$ e $n + 2$ lados, respectivamente, temos:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n - 3)}{2} + \frac{(n + 3) \cdot (n + 1 - 3)}{2} +$$

$$+ \frac{(n + 2) \cdot (n + 2 - 3)}{2} = 28$$

$$n^2 - 3n + n^2 - n - 2 + n^2 + n - 2 = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow n = 5 \text{ ou } n = -4$$

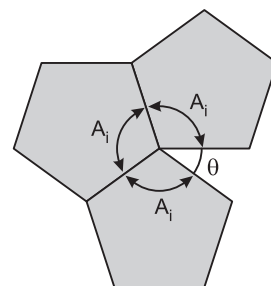
Como $n \geq 3$, temos $n = 5$.

O polígono (do exercício) com menor número de diagonais é o pentágono e, portanto, a medida $\hat{a}_i$ do seu ângulo interno é:

$$\hat{a}_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} =$$

$$= \frac{(5 - 2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

6)



Seja A_i a medida do ângulo interno do pentágono regular.

Tem-se que:

$$A_i = \frac{180^\circ (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

e, conforme a figura,

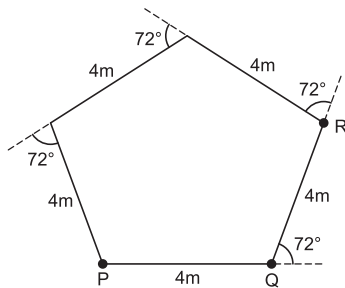
$$3 A_i + \theta = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 108^\circ + \theta = 360^\circ \Leftrightarrow \theta = 36^\circ$$

Resposta: D

7) A medida de cada ângulo externo $\hat{a}_e$ do pentágono regular é $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Assim, partindo-se do ponto P, após realizar a instrução I, chega-se ao ponto Q. Após as instruções II e III, chega-se ao ponto R. Repetindo-se as instruções II e III, 3 vezes, como mostra a figura a seguir, obtém-se o pentágono regular pela primeira vez.



Logo $x = 72$ e $y = 3$ e portanto

$$x \cdot y = 72 \cdot 3 = 216$$

Resposta: C

- 8) Aplicando o teorema do ângulo externo a cada um dos sete triângulos da figura, conclui-se que a soma S dos ângulos assinalados é igual à diferença entre a soma dos ângulos internos do heptágono da figura e a soma dos ângulos externos desse mesmo polígono.

Assim:

$$S = (7 - 2) \cdot 180^\circ - 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = (7 - 2 - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow S = 540^\circ$$

Resposta: D

- 9) Lembrando que o número de diagonais, em cada vértice de um polígono regular de n lados, é $n - 3$, tem-se

$$n - 3 = 15 \Leftrightarrow n = 18$$

O ângulo interno do polígono regular de 18 lados mede, em radianos,

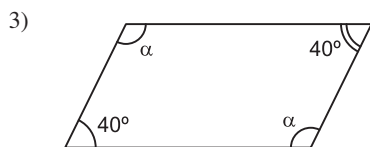
$$A_i = \frac{\pi \cdot (8 - 2)}{18} = \frac{8\pi}{9}$$

Resposta: E

MÓDULO 10 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

- 1) Resposta: C

- 2) Resposta: D



Como no paralelogramo os ângulos opostos são congruentes, temos:

$$\alpha + 40^\circ + \alpha + 40^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow$$

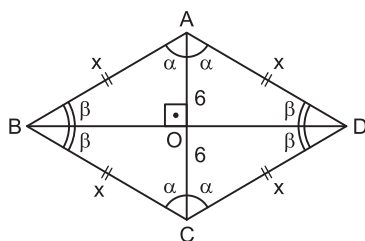
$$\Leftrightarrow 2\alpha + 80^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = 140^\circ$$

Resposta: E

4)

a	b	c	d	e	f	g	h	i
F	V	V	F	F	F	V	V	V

5)



Seja x a medida do lado do losango, 2α a medida do ângulo interno obtuso e 2β a medida do ângulo interno agudo. Como as diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos internos e também são perpendiculares, temos: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Do enunciado temos que o ângulo interno obtuso é o dobro do ângulo interno agudo e, portanto:

$$2\alpha = 2.2\beta \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$$

Assim:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha = 2\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ e } \beta = 30^\circ$$

No $\triangle AOB$ temos:

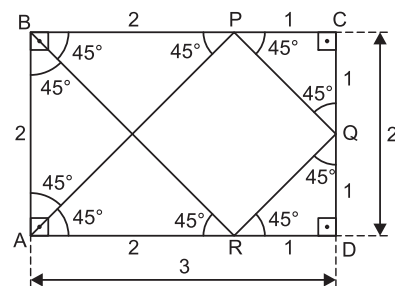
$$\text{sen } \beta = \frac{6}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Sendo $2p$ o perímetro do losango temos:

$$2p = 4x = 4 \cdot 12 \Rightarrow 2p = 48 \text{ cm}$$

Resposta: D

6)



Os triângulos retângulos ABP, PCQ, QDR e RAB são isósceles.

Assim, $AB = BP = AR = 2$ e

$PC = CQ = QD = DR = 1$.

Logo, a bola cairá na caçapa B.

Resposta: B

- 7) Todo quadrado é paralelogramo, todo losango é paralelogramo e todo retângulo também é paralelogramo.

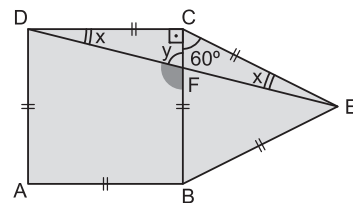
Assim:

Se a opção (e) é incorreta e o teste possui uma única opção correta, esta só pode ser (a).

Resposta: A

MÓDULO 11 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

1)



Como o triângulo DCE é isósceles, temos

$$\hat{CDE} = \hat{CED} = x \text{ e, portanto:}$$

$$x + 90^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$

Fazendo $\hat{CFD} = y$, no triângulo CFD temos:

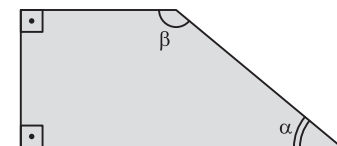
$$x + y + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$

$$\Leftrightarrow 15^\circ + y + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow y = 75^\circ$$

Assim: $y + \hat{BFD} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 75^\circ + \hat{BFD} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BFD} = 105^\circ$$

2)



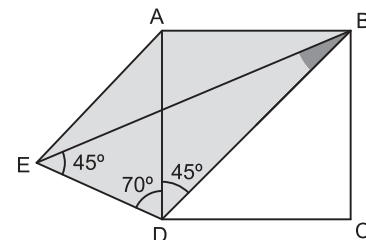
Como a medida do maior ângulo interno é o quádruplo da medida do menor e num trapézio os ângulos adjacentes a um mesmo lado transversal são suplementares, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha = 4\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 4\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ$$

Assim: $\alpha = 36^\circ$ e $\beta = 144^\circ$ e, portanto, a medida do menor ângulo interno é 36° .

Resposta: B

3)



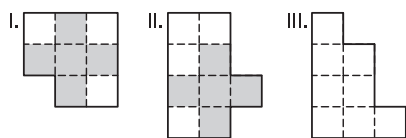
Como $\overline{BD}$ é diagonal do quadrado ABCD, temos $\hat{ADE} = 45^\circ$.

No $\triangle DBE$ temos:

$$\hat{DBE} + 45^\circ + 70^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{DBE} + 160^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{DBE} = 20^\circ$$

- 4) A única peça que pode ser construída é a II, como mostram as figuras a seguir.



Num quadrado de 10 pastilhas $\times$ 10 pastilhas no padrão representado na figura, temos: 20 pastilhas pretas e 80 pastilhas brancas.

Assim, a razão entre o número de pastilhas pretas e o número de pastilhas brancas, respectivamente, é 1:4.

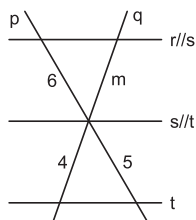
Logo, o custo por metro quadrado revestido será:

$$\frac{1 \cdot \text{R\$ } 10,00 + 4 \cdot \text{R\$ } 8,00}{5} = \text{R\$ } 8,40$$

Resposta: B

MÓDULO 12 LINHAS PROPORCIONAIS

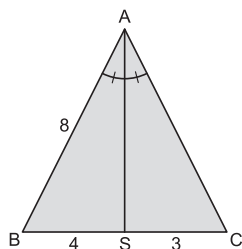
1)



Do teorema de Tales, temos:

$$\frac{m}{4} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow m = \frac{24}{5}$$

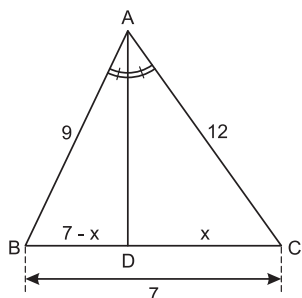
2)



Como $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo interno do triângulo, temos:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS} \Leftrightarrow \frac{8}{4} = \frac{AC}{3} \Rightarrow AC = 6 \text{ cm}$$

3)



I) Sendo x a medida de $\overline{CD}$, temos $BD = 7 - x$.

II) Do teorema da bissetriz do ângulo interno do triângulo, temos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{9}{7-x} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 84 - 12x \Leftrightarrow 21x = 84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ cm e, portanto, } CD = 4 \text{ cm}$$

4) Do Teorema de Tales, temos:

$$\text{I) } \frac{x}{180} = \frac{50}{120} \Rightarrow x = 75 \text{ m}$$

$$\text{II) } \frac{y}{180} = \frac{40}{120} \Rightarrow y = 60 \text{ m}$$

$$\text{III) } \frac{z}{180} = \frac{30}{120} \Rightarrow z = 45 \text{ m}$$

Resposta: D

5) Sendo x o comprimento, em metros, da barreira, de acordo com o Teorema Linear de Tales, tem-se:

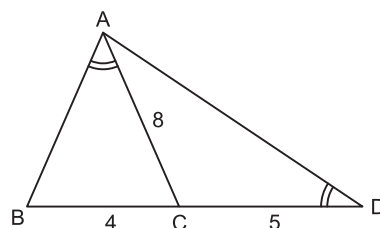
$$\frac{30}{x+2} = \frac{24}{56-24} \Leftrightarrow \frac{5}{x+2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 40 \Leftrightarrow x = 38$$

Resposta: B

MÓDULO 13 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1)



Como o ângulo $\hat{A}$ é comum aos triângulos CBA e ABD, temos:

$\triangle CAB \sim \triangle ADB$ pelo critério (AA~), pois:

$$\begin{cases} \hat{BAC} \cong \hat{CDA} \\ \text{e } \hat{ABD} \text{ é comum} \end{cases}$$

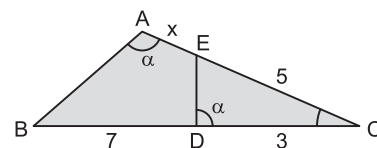
Assim:

$$\frac{CA}{AD} = \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{AD} = \frac{AB}{9} = \frac{4}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{9} = \frac{4}{AB} \Leftrightarrow AB = 6 \\ \frac{8}{AD} = \frac{AB}{9} \Leftrightarrow \frac{8}{AD} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow AD = 12 \end{cases}$$

2)



Como o ângulo $\hat{ACD}$ é comum aos triângulos ABC e DEC são semelhantes e, portanto,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{10}{5} = \frac{x+5}{3}$$

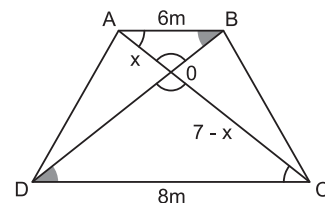
Logo:

$$\frac{10}{5} = \frac{x+5}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+5 = 6 \Leftrightarrow x = 1$$

Resposta: D

3)



I) Admitindo que a diagonal $\overline{AC}$ mede 7 m e sendo x a medida de $\overline{AO}$, temos:

II) $\triangle AOB \sim \triangle COD$ pelo critério (AA~), pois:

$$\begin{cases} \hat{BAO} \cong \hat{DCO} \text{ (alternos internos)} \\ \hat{ABO} \cong \hat{CDO} \text{ (alternos internos)} \end{cases}$$

III) Assim:

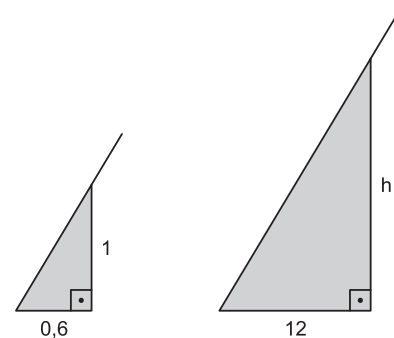
$$\frac{AO}{CO} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{7-x} = \frac{OB}{OD} = \frac{6}{8} \text{ e, portanto:}$$

$$\frac{x}{7-x} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow 4x = 21 - 3x \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

IV) Como $x = 3$ m, temos $AO = 3$ m e $CO = 4$ m

4)



Seendo h a altura em metros do poste, de acordo com a semelhança dos triângulos da figura, tem-se:

$$\frac{1}{h} = \frac{0,6}{12} \Leftrightarrow h = 20$$

Resposta: D

- 5) Sendo R o raio, em metros, do objeto voador não identificado, tem-se:

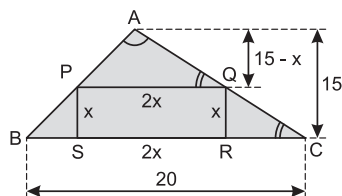
$$\frac{30}{30 + 50} = \frac{2R}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{R}{8} \Leftrightarrow R = 3$$

Resposta: A

MÓDULO 14 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1)



- I) Sendo x a medida do lado $\overline{QR}$ temos:

$$PQ = 2x.$$

- II) $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ pelo critério (AA~), pois

$$\begin{cases} \hat{BAC} \text{ é ângulo comum} \\ \hat{AQP} \cong \hat{ACB} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

Assim:

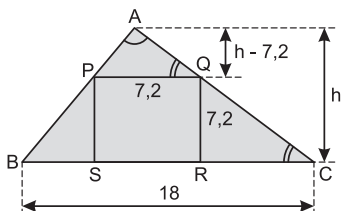
$$\frac{2x}{20} = \frac{15 - x}{15} \Leftrightarrow 6x = 60 - 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

Sendo $2p$ o perímetro do retângulo, temos:

$$2p = 6x = 6 \cdot 6 \Rightarrow 2p = 36 \text{ cm}$$

2)



- I) No $\triangle APQ$ a altura relativa ao vértice A mede $h - 7,2$.

- II) $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ pelo critério (AA~) pois

$$\begin{cases} \hat{BAC} \text{ é ângulo comum} \\ \hat{AQP} \cong \hat{ACB} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

$$\text{III) Assim: } \frac{h - 7,2}{h} = \frac{7,2}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18h - 18 \cdot 7,2 = 7,2h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10,8h = 129,6 \Leftrightarrow h = 12 \text{ cm}$$

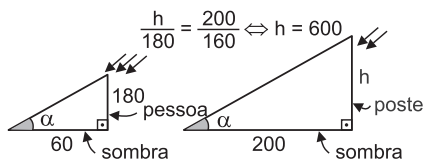
Resposta: B

- 3) Os retângulos devem ser semelhantes e, portanto,

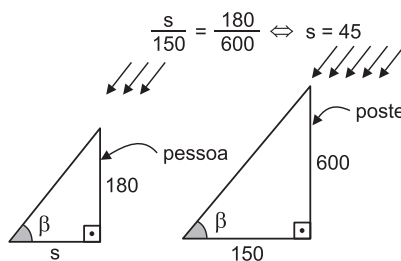
$$\frac{6}{x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$$

- 4) No instante em que a sombra de uma pessoa (que tem 180 cm de altura) mede 60 cm, a sombra de um poste (que tem h cm de altura) mede 200 cm.

Assim sendo:



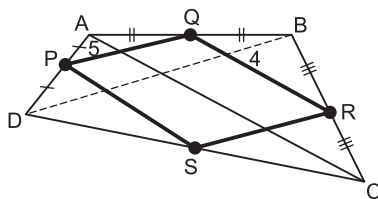
Se, mais tarde, a sombra do poste (que tem 600 cm de altura) passou a medir 150 cm (pois diminuiu 50 cm), então, sendo s cm a medida da nova sombra da mesma pessoa, teremos:



Resposta: B

MÓDULO 15 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1)



Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle QBR$ são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2, pois Q é ponto médio de AB e R é ponto médio de BC.

Logo:

$$\frac{AB}{QB} = \frac{BC}{BR} = \frac{AC}{QR} = \frac{1}{2}$$

Como $QR = 4 \Rightarrow AC = 8$

Analogamente: $\triangle ADB \sim \triangle APQ$

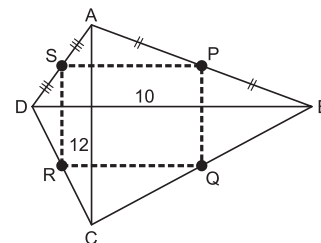
Logo:

$$\frac{AD}{AP} = \frac{AB}{AQ} = \frac{BD}{PQ} = \frac{2}{1}$$

Como $PQ = 5 \Rightarrow BD = 10$

Portanto: $AC + BD = 8 + 10 = 18$

2)



Os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle APS$ são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2, pois P é ponto médio de AB e S é ponto médio de AD.

Logo:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AD}{AS} = \frac{BD}{PS} = \frac{2}{1}$$

Como $BD = 10 \Rightarrow PS = 5$

Analogamente:

$$\triangle ABC \sim \triangle PBQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{PQ} = 2 \\ AC = 12 \end{cases} \Rightarrow PQ = 6$$

$$\triangle ABC \sim \triangle QCR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{BD}{QR} = 2 \\ BD = 10 \end{cases} \Rightarrow QR = 5$$

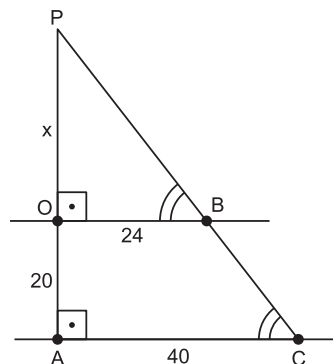
$$\triangle ACD \sim \triangle SRD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{SR} = 2 \\ AC = 12 \end{cases} \Rightarrow SR = 6$$

Portanto, o perímetro do quadrilátero PQRS é

$$PS + PQ + QR + SR = 5 + 6 + 5 + 6 = 22.$$

3)



Seja x a medida, em metros, da largura $\overline{OP}$ do rio. Da semelhança dos triângulos retângulos OBP e ACP , tem-se:

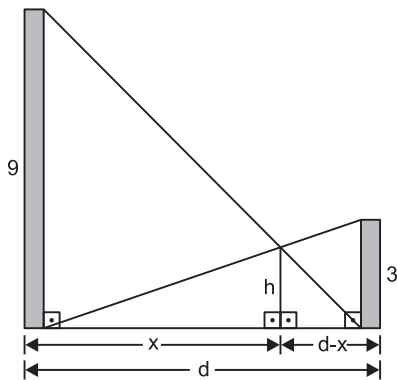
$$\frac{OP}{AP} = \frac{OB}{AC}$$

Assim,

$$\frac{x}{x+20} = \frac{24}{40} \Leftrightarrow 5x = 3x + 60 \Leftrightarrow x = 30$$

Resposta: B

- 4) Seja d a distância, em metros, entre os muros e h a altura, em metros, do ponto de intersecção das barras.



Das semelhanças entre os triângulos retângulos da figura, tem-se

$$\frac{h}{3} = \frac{x}{d} \text{ e } \frac{h}{9} = \frac{d-x}{d}$$

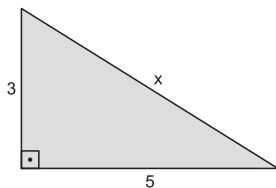
$$\text{Assim, } \frac{h}{3} + \frac{h}{9} = \frac{x}{d} + \frac{d-x}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{3} + \frac{h}{9} = 1 \Leftrightarrow h = \frac{9}{4} \Leftrightarrow h = 2,25$$

Resposta: D

MÓDULO 16 RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS (PITÁGORAS)

1)



Pelo teorema de Pitágoras:

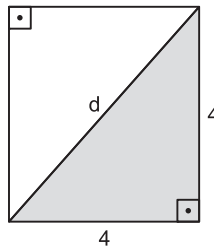
$$x^2 = 3^2 + 5^2$$

$$x^2 = 9 + 25$$

$$x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$$

Resposta: E

2)



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado:

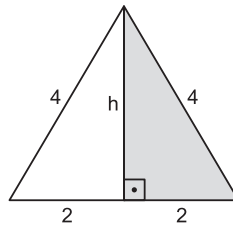
$$d^2 = 4^2 + 4^2$$

$$d^2 = 16 + 16 \Rightarrow d^2 = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{32} \Rightarrow d = 4\sqrt{2}$$

Resposta: C

3)



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado:

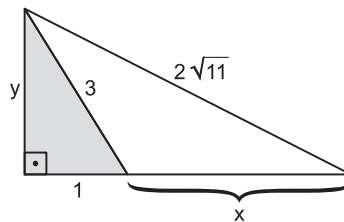
$$h^2 + 2^2 = 4^2$$

$$h^2 + 4 = 16 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{12} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Resposta: D

4)



I) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado:

$$y^2 + 1^2 = 3^2$$

$$y^2 + 1 = 9$$

$$y^2 = 8$$

II) Aplicando novamente o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa $2\sqrt{11}$ e catetos y e $(x+1)$:

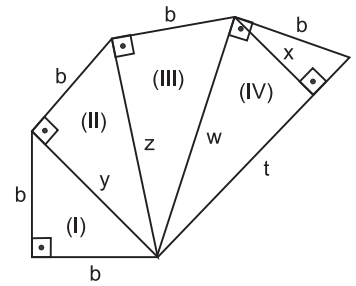
$$(x+1)^2 + y^2 = (2\sqrt{11})^2$$

$$(x+1)^2 + 8 = 44$$

$$(x+1)^2 = 36 \quad \begin{cases} x+1 = 6 \\ x+1 = -6 \text{ (não convém!)} \end{cases}$$

$$\text{Logo: } x+1 = 6 \Rightarrow x = 5$$

5)



No triângulo (I), aplicando o teorema de Pitágoras: $y^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow y^2 = 2b^2$

No triângulo (II), aplicando o teorema de Pitágoras: $z^2 = b^2 + y^2 = b^2 + 2b^2 \Rightarrow z^2 = 3b^2$

No triângulo (III), aplicando o teorema de Pitágoras: $w^2 = b^2 + z^2 = b^2 + 3b^2 \Rightarrow w^2 = 4b^2 \Rightarrow w = 2b$

No triângulo (IV), aplicando o teorema de Pitágoras: $t^2 = b^2 + w^2 = b^2 + 4b^2 \Rightarrow t^2 = 5b^2 \Rightarrow t = b\sqrt{5}$

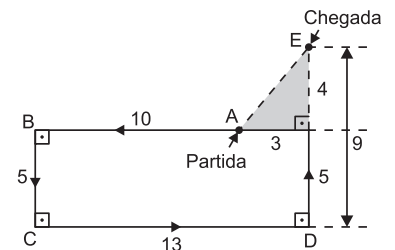
Ainda no triângulo (IV), pelas relações métricas do triângulo retângulo:

$$x \cdot t = b \cdot w \Rightarrow x \cdot b\sqrt{5} = b \cdot 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2b}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{2b\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: A

6)



$$(AE)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AE = 5$$

Portanto, E fica a 5 milhas a nordeste de A.

Resposta: E

