

MATEMÁTICA

FRENTE 1

AULA 17

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

1) I) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ é } p = 2$$

II) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ é } q = 2$$

III) O número de incógnitas é $n = 2$

Do teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$p = q = n \Leftrightarrow \text{SPD}$$

Resolvendo o sistema obtém-se:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 2x = 4 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\text{SPD e } V = \left\{ \left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5} \right) \right\}$$

2) I) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ é } p = 2$$

II) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \text{ é } q = 2$$

III) O número de incógnitas é $n = 2$

Do teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$p = q = n \Leftrightarrow \text{SPD}$$

Observe que, somando-se, membro a membro, as duas primeiras equações, obtemos a terceira. Para resolver, consideramos $p = q = 2$ equações independentes. Abandonamos a terceira.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{SPD e } V = \{(3; 1)\}$$

3) I) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ é } p = 2$$

II) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ é } q = 2$$

III) O número de incógnitas é $n = 3$

Do teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$p = q < n \Leftrightarrow \text{SPI}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \cdot (-3) \\ 3x + 2y + 7z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ -4y - 2z = -17 \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 - 3\alpha \\ 4y = 17 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3\alpha - 2 \left(\frac{17 - 2\alpha}{4} \right) \\ y = \frac{17 - 2\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3\alpha - 2 \left(\frac{17 - 2\alpha}{4} \right) \\ y = \frac{17 - 2\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14 - 6\alpha - 17 + 2\alpha}{2} \\ y = \frac{17 - 2\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3 + 4\alpha}{2} \\ y = \frac{17 - 2\alpha}{4} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\text{S.P.I. e } V = \left\{ \left(-\frac{3 + 4\alpha}{2}; \frac{17 - 2\alpha}{4}; \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

4) I) A característica de

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ é } p = 2$$

II) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 11 \end{pmatrix} \text{ é } q = 3$$

Do teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$p \neq q \Leftrightarrow \text{SI}$$

$$\text{SI e } V = \emptyset$$

$$5) \text{ MI} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ tem característica}$$

$$p = 2, \text{ pois } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ e,}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{MC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ tem caracte-}$$

terística $q = 3$ pois

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -99 \neq 0$$

Como $p \neq q$, o sistema é impossível

$$6) \text{ I) A característica da MI} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$p = 2, \text{ pois } \det(\text{MI}) \neq 0.$$

II) A característica da

$$\text{MC} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ é } q = 2.$$

III) O número de incógnitas do sistema é $n = 2$.

IV) De (I), (II) e (III), conclui-se que o sistema é SPD, pois $p = q = n$.
Entretanto, resolvendo-se o sistema chega-se a $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$, números que não satisfazem o problema, já que de acordo com o mesmo, x e y são números inteiros. Dessa forma, embora o sistema tenha solução, o problema não a possui.
Resposta: A

7) I) A característica da

$$MI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ é } p = 2, \text{ pois}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

II) A característica da

$$MC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ é } q = 2, \text{ pois}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

III) o número de incógnitas é $n = 3$.

IV) De (I), (II) e (III), conclui-se que o sistema é SPI, pois $p = q < n$.

Resposta: E

8) Seja x o número de meses com pontuação positiva e y o número de meses com pontuação negativa.
A partir do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 3x - 5y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 150 \text{ (I)} \\ 3x - 5y = 50 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), resulta: $8x = 200 \Leftrightarrow x = 25$.
Portanto, a quantidade de meses em que ele foi pontual (acumulou pontos positivos) foi igual a 25.

Resposta: C

AULA 18 DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

1) I) $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 3$

II) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ é: } \begin{cases} p = 2, \text{ se } m \neq 3 \\ p = 1, \text{ se } m = 3 \end{cases}$$

III) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

$$\begin{cases} q = 2, \text{ se } m \neq 3 \\ q = 1, \text{ se } m = 3 \end{cases}$$

IV) O número de incógnitas é $n = 2$

Assim:

$$\text{Para } m \neq 3 \Rightarrow p = q = n = 2$$

$$\text{Para } m = 3 \Rightarrow p = q = 1 < n = 2$$

Portanto, pelo teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$\begin{cases} m \neq 3 \Rightarrow \text{SPD} \\ m = 3 \Rightarrow \text{SPI} \end{cases}$$

2) I) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$

$$\begin{aligned} &= (3 - m) \cdot (5 - 3) \cdot (5 - m) \\ &= 2 \cdot (3 - m) \cdot (5 - m) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m = 3 \text{ ou } m = 5 \end{aligned}$$

II) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{é: } \begin{cases} p = 3, \text{ se } m \neq 3 \text{ e } m \neq 5 \\ p = 2, \text{ se } m = 3 \text{ ou } m = 5 \end{cases}$$

III) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ m & 3 & 5 & 0 \\ m^2 & 9 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{é: } \begin{cases} q = 3, \text{ se } m \neq 3 \text{ e } m \neq 5 \\ q = 2, \text{ se } m = 3 \text{ ou } m = 5 \end{cases}$$

IV) O número de incógnitas é $n = 3$

Assim:

$$\text{Para } m \neq 3 \text{ e } m \neq 5 \Rightarrow p = q = n = 3$$

$$\text{Para } m = 3 \text{ ou } m = 5 \Rightarrow p = q = 1 < n = 3$$

Portanto, pelo teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$\begin{cases} m \neq 3 \text{ e } m \neq 5 \Rightarrow \text{S.P.D.} \\ m = 3 \text{ ou } m = 5 \Rightarrow \text{S.P.I.} \end{cases}$$

3) I) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$

II) A característica da

$$M.I. = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \text{ é: } \begin{cases} p = 2, \text{ se } a \neq -2 \\ p = 1, \text{ se } a = -2 \end{cases}$$

III) A característica da

$$M.C. = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\text{é: } \begin{cases} q = 2, \text{ se } a \neq -2 \text{ ou } b \neq 4 \\ q = 1, \text{ se } a = -2 \text{ e } b = 4 \end{cases},$$

$$\text{pois } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 4$$

IV) O número de incógnitas é $n = 2$

Assim:

$$\text{Para } a \neq -2 \Rightarrow p = q = n = 2$$

$$\text{Para } a = -2 \text{ e } b = 4 \Rightarrow p = q = 1 < n = 2$$

$$\text{Para } a = -2 \text{ e } b \neq 4 \Rightarrow p = 1 \neq q = 2$$

Portanto, pelo teorema de Rouché-Capelli, temos:

$$\begin{cases} a \neq -2 \Rightarrow \text{SPD} \\ a = -2 \text{ e } b = 4 \Rightarrow \text{SPI} \\ a = -2 \text{ e } b \neq 4 \Rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

4) $MI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & k \end{bmatrix}$$

A MI tem característica $p = 2$, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Para que o sistema tenha solução a MC deverá ter característica 2.

Assim

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 7$$

5) $MI = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

A matriz incompleta tem característica 2,

$$\text{pois } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para que o sistema admita solução devemos ter

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Para este valor de a temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = 5 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$ e substituindo na 1ª e na 3ª equações temos

$$\begin{cases} x - y + \alpha = 1 \\ x + y - \alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \alpha \end{cases}$$

Assim, as soluções do sistema são $(2; 1 + \alpha; \alpha)$, $\forall \alpha$.

Respostas: $a = 3$

$$V = \{(2; 1 + \alpha; \alpha), \forall \alpha\}$$

- 6) Sejam p e q , respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa do sistema. Sendo ainda $n = 2$ o número de incógnitas do sistema, podemos afirmar que a condição necessária e suficiente para que a representação gráfica no plano cartesiano das equações do sistema seja um par de retas coincidentes (sistema SPI) é que ocorra $p = q < n$.

Dessa forma, devemos ter $p = q = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ e } n = -3$$

Resposta: E

7) Seja o sistema
$$\begin{cases} x + y + z = k \\ kx + y + z = 1 \\ x + y - z = k \end{cases}$$

Pelo teorema de Rouché-Cappelli, temos:

$$\text{I) M.I.} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem característica $p = 3$ para $k \neq 1$ e característica $p = 2$ para $k = 1$

$$\text{II) M.C.} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & k \end{bmatrix}$$

tem característica $q = 3$ para $k \neq 1$ e característica $q = 2$ para $k = 1$

- III) Como o número de incógnitas é $n = 3$, concluímos que:

Para $k \neq 1$, o sistema será possível e determinado, pois $p = q = n$.

Por outro lado, se $k = 1$, o sistema será possível e indeterminado, pois $p = q < n$.

Resposta: D

$$8) \begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

- I) Sendo D o determinante dos coeficientes das incógnitas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = -1, \text{ pois } b \in \mathbb{R}.$$

- II) Observemos que para $b = -1$ a matriz incompleta

$$MI = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ tem}$$

característica $p = 2$ e a matriz completa

$$MC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica $q = 3$.

- III) Se $p = 2 \neq q = 3$, pelo teorema de Rouché-Capelli, o sistema é impossível.

Resposta: A

- 9) Sendo p a característica da matriz incompleta e q a característica da matriz completa, associadas ao sistema, temos:

$$\text{I) } MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \Rightarrow p = 2$$

para $a = 6$ e $p = 3$ para $a \neq 6$

- II) O sistema é incompatível quando $p \neq q$ e, portanto, devemos ter: $p = 2$ e $q = 3$.

Assim, para $a = 6$, teremos:

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & b \end{bmatrix} \text{ e}$$

$q = 3$ para $b \neq 4$

Logo, $a - b \neq 2$.

Resposta: A

AULA 19 SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ a única solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \text{ é } (0; 0)$$

$$V = \{(0; 0)\}$$

$$2) \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ o sistema}$$

tem infinitas soluções. Para obtê-las, basta fazermos $z = \alpha$ e com o uso de duas das equações, calcular x e y em função de α :

$$\begin{cases} x + 2y + \alpha = 0 \\ x + y + 3\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5\alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}$$

e, portanto, a solução é $(-5\alpha, 2\alpha, \alpha)$, $\forall \alpha$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + 5y \\ 2x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 5y = 0 \\ 2x - (1 + \lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\text{O sistema } \begin{cases} (1 - \lambda)x + 5y = 0 \\ 2x - (1 + \lambda)y = 0 \end{cases} \text{ admite}$$

mais de uma solução se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 5 \\ 2 & -(1 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{E, portanto, } \lambda = \pm \sqrt{11}$$

Resposta: E

- 4) O sistema admite solução não trivial se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

Resposta: A

- 5) Para que o sistema admita uma infinidade de soluções, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -k \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \text{ ou } k = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

A soma dos valores de k é

$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} = -1$$

Resposta: B

AULA 20
FATORIAL E NÚMERO BINOMIAL

- 6) Para que o sistema tenha uma única solução devemos ter

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$$

Resposta: B

- 7) O sistema admite solução não trivial se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix} = (2-1) \cdot (k-1) \cdot (k-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \text{ ou } k = 2$$

Resposta: A

- 8) Para que o sistema seja possível e indeterminado devemos ter:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 5 & 4 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab + 5a + 6b - 26 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(b+5) = 26 - 6b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{26-6b}{b+5}. \text{ Como } b+5 > 0, \text{ pois}$$

$b \in \mathbb{N}^*$, o maior valor de a ocorre com o menor valor de b , portanto:

$$\text{para } b = 1 \text{ temos } a = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{para } b = 2 \text{ temos } a = 2$$

$$\text{para } b = 3 \text{ temos } a = 1$$

$$\text{para } b = 4 \text{ temos } a = \frac{2}{9} \notin \mathbb{N}$$

$$\text{para } b \geq 5 \text{ temos } a < 0$$

Resposta: C

- 9) O sistema será possível e determinado se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k^2 - 6k + 7 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -7 \text{ e } k \neq 1$$

Esse mesmo sistema será possível e indeterminado se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -7 \text{ ou } k = 1$$

O sistema linear dado, por ser homogêneo, nunca será impossível.

Respostas: Possível e determinado para $k \neq -7$ e $k \neq 1$.

Possível e indeterminado para $k = -7$ ou $k = 1$.

Impossível, nunca.

$$1) \frac{10! - 8!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8! - 8!}{8!} =$$

$$= \frac{(10 \cdot 9 - 1) \cdot 8!}{8!} = 90 - 1 = 89$$

2)

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow \frac{n(n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 6 \text{ ou } n = \cancel{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 6, \text{ pois } n \in \mathbb{N}$$

$$V = \{6\}$$

$$3) \binom{x}{x-3} \cdot 3! = 24 \cdot \binom{x-2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{x}{3} \cdot 3! = 24 \cdot \binom{x-2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x!}{3! \cdot (x-3)!} \cdot 3! = 24 \cdot \frac{(x-2)!}{2! \cdot (x-4)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3!} \cdot 3! =$$

$$= 24 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{2!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot (x-2) =$$

$$= 12 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

Como $x-2 \neq 0$, pois $x > 3$, dividindo ambos os membros por $(x-2)$, obtemos:

$$x \cdot (x-1) = 12 \cdot (x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 12x - 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 9$$

$$V = \{4; 9\}$$

$$4) \frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Resposta: D

$$5) a) \frac{7! \cdot 9!}{6! \cdot 8!} = \frac{7 \cdot 6! \cdot 9 \cdot 8!}{6! \cdot 8!} = 7 \cdot 9 = 63$$

$$b) \frac{(2n+2)!}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{(2n)!} =$$

$$= (2n+2) \cdot (2n+1) = 4n^2 + 6n + 2$$

- 6) Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 5$, então o algoritmo das unidades de $n!$ é zero.

Resposta: A

$$7) \frac{2! \cdot 8! \cdot 13!}{4!} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 13!}{4!} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 13! =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13! =$$

$$= 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13! = 16!$$

Resposta: E

$$8) \log_2 \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{n!} \right) =$$

$$= \log_2 \left(\frac{2^n \cdot n!}{n!} \right) = \log_2 2^n = n$$

Resposta: C

$$9. a) \binom{12}{5} = \frac{12!}{5! 7!} =$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 792$$

$$b) \binom{12}{7} = \frac{12!}{7! 5!} = \binom{12}{5} = 792$$

$$c) \binom{5}{0} = \frac{5!}{0! 5!} = 1$$

$$d) \binom{5}{5} = \frac{5!}{5! 0!} = 1$$

10. Sendo $n \geq 2$, temos

$$\frac{\binom{n-1}{3}}{\binom{n-2}{2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{3! (n-1-3)!} = 2 \cdot \frac{(n-2)!}{2! (n-2-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)!}{6} = (n-2)! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7 \in [7; 10]$$

Resposta: B

AULA 21
PROPRIEDADES DOS
NÚMEROS BINOMIAIS

1 a) $\binom{100}{2} = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = 4950$

b) $\binom{100}{98} = \frac{100!}{98! \cdot 2!} = 4950$

c) $\binom{60}{0} = \frac{60!}{0! \cdot 60!} = 1$

d) $\binom{60}{60} = \frac{60!}{60! \cdot 0!} = 1$

e) $\binom{60}{1} = \frac{60!}{1! \cdot 59!} = 60$

2) Se $\binom{13}{x-1} = \binom{13}{2x-4}$, então:

$$\begin{cases} x-1 = 2x-4 \\ \text{ou} \\ x-1+2x-4 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3 \\ \text{ou} \\ 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 6 \end{cases}$$

$V = \{3; 6\}$

3) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} +$

$+ \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$$

$$= 2^5 - \binom{5}{0} - \binom{5}{5} = 32 - 1 - 1 = 30$$

Resposta: A

4) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} +$

$+ \binom{7}{4} = \binom{7+1}{4} = \binom{8}{4}$

Resposta: A

5) $\sum_{p=0}^4 \binom{p+4}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} +$

$+ \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} =$

$$= \binom{8+1}{4+1} = \binom{9}{5}$$

Resposta: B

6) Da relação de Stifel, temos

$$\binom{60}{30} + \binom{60}{31} = \binom{61}{31}$$

Resposta: E

7) $\binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \dots + \binom{11}{11} =$

$$= 2^{11} = 2048$$

Resposta: E

8) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{10}{3} =$

$$= \binom{11}{4} = 330$$

9) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{10}{7} =$

$$= \binom{11}{7} = 330$$

10) $\sum_{k=1}^8 \binom{9}{k} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} +$

$$+ \dots + \binom{9}{8} = 2^9 - \binom{9}{0} - \binom{9}{9} =$$

$$= 512 - 1 - 1 = 510$$

Resposta: B

AULA 22
BINÔMIO DE NEWTON –
DESENVOLVIMENTO DE $(x + y)^n$

1) $(x + y)^0 = (x + y)^0 = 1$

2) $(x + y)^1 = (x + y)^1 = x + y$

3) $(x + y)^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

4) $(x + y)^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

5) $(x + y)^4 = (x + y)^4 =$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

6) $(x - y)^4 = (x - y)^4 =$

$$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

7) $(x + y)^5 = 1 \cdot x^5 \cdot y^0 + 5 \cdot x^4 \cdot y^1 +$

$$+ 10 \cdot x^3 \cdot y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1 \cdot x^0y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 +$$

$$+ 5xy^4 + y^5$$

8) $(x - 2)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 2^0 - 4 \cdot x^3 \cdot 2^1 +$

$$+ 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 - 4x^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot x^0 \cdot 2^4$$

$$(x - 2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

$$\begin{aligned} 9) (2x + 1)^6 &= 1 \cdot (2x)^6 \cdot 1^0 + 6 \cdot (2x)^5 \cdot 1^1 + \\ &+ 15 \cdot (2x)^4 \cdot 1^2 + 20 \cdot (2x)^3 \cdot 1^3 + \\ &+ 15 \cdot (2x)^2 \cdot 1^4 + 6 \cdot (2x)^1 \cdot 1^5 + 1 \cdot (2x)^0 \cdot 1^6 \\ (2x + 1)^6 &= 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + \\ &+ 60x^2 + 12x + 1 \end{aligned}$$

10) $(2x - 3y)^4 = 1(2x)^4(-3y)^0 +$

$$+ 4(2x)^3(-3y)^1 + 6(2x)^2(-3y)^2 +$$

$$+ 4(2x)^1(-3y)^3 + 1(2x)^0(-3y)^4 =$$

$$= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

$$(2x - 3y)^4 = \binom{4}{0} (2x)^4 (-3y)^0 +$$

$$+ \binom{4}{1} (2x)^3 (-3y)^1 + \binom{4}{2} (2x)^2 (-3y)^2 =$$

$$= \binom{4}{3} (2x)^1 (-3y)^3 + \binom{4}{4} (2x)^0 (-3y)^4 =$$

$$= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

11) $(x + 2)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 2^0 + 4 \cdot x^3 \cdot 2^1 +$
 $+ 6 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot x^0 \cdot 2^4 =$
 $= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

12) $(2x - 1)^4 = 1 \cdot (2x)^4 \cdot 1^0 - 4 \cdot (2x)^3 \cdot 1^1 +$
 $+ 6 \cdot (2x)^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot (2x)^1 \cdot 1^3 + 1(2x)^0 \cdot 1^4 =$
 $= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

13) $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

Resposta: E

14) $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

Resposta: B

15) $16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625$

Resposta: E

16) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

Resposta: A

AULA 23
BINÔMIO DE NEWTON –
DESENVOLVIMENTO DE $(x + y)^n$

1) $(x + 2)^9 = \underbrace{1 \cdot x^9 \cdot 2^0}_{T_0} + \underbrace{9 \cdot x^8 \cdot 2^1}_{T_1} +$
 $+ \underbrace{36 \cdot x^7 \cdot 2^2}_{T_2} + \underbrace{84 \cdot x^6 \cdot 2^3}_{T_3} + \underbrace{126 \cdot x^5 \cdot 2^4}_{T_4} + \dots$

O quinto termo do desenvolvimento de $(x + 2)^9$, feito segundo os expoentes decrescentes de x, é:

$$T_5 = 126 \cdot x^5 \cdot 2^4 \Rightarrow T_5 = 126 \cdot 16 \cdot x^5 \Rightarrow T_5 = 2016x^5$$

$$2) T_{k+1} = \binom{20}{k} \cdot (x^2)^{20-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_{k+1} = \binom{20}{k} \cdot x^{40-2k} \cdot x^{-k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_{k+1} = \binom{20}{k} \cdot x^{40-3k}$$

Para obter o termo em x^{31} , devemos ter $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow 3k = 9 \Leftrightarrow k = 3$

Para $k = 3$, temos:

$$T_{3+1} = \binom{20}{3} \cdot x^{40-3 \cdot 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_4 = \frac{20!}{3! 17!} \cdot x^{31} \Leftrightarrow T_4 = 1140x^{31}$$

- 3) O desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ tem 101 parcelas.

Resposta: D

$$4) (x + 2)^6 = 1 \cdot x^6 \cdot 2^0 + 6 \cdot x^5 \cdot 2^1 +$$

$$+ 15 \cdot x^4 \cdot 2^2 + \dots$$

O termo em x^4 é, $T_3 = 15 \cdot x^4 \cdot 2^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T_3 = 60x^4$$

Resposta: B

- 5) Como $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ para $(x + y)^n$ temos:

$$T_4 = \binom{8}{3} (2x)^5 \cdot y^3 = 56 \cdot 32x^5y^3 = 1792x^5y^3$$

Resposta: C

$$6) T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} \cdot (x^2)^{12-k} \cdot (x^{-1})^k =$$

$$= \binom{12}{k} \cdot x^{24-2k} \cdot x^{-k} = \binom{12}{k} \cdot x^{24-3k}$$

Para o termo independente de x devemos ter $24 - 3k = 0$ e, portanto, $k = 8$.

Esse termo é igual a

$$\binom{12}{8} x^0 = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

Resposta: B

- 7) a) Como o desenvolvimento tem $10 + 1 = 11$ termos, o termo médio é o sexto.

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

$$T_6 = \binom{10}{5} (x^2)^{10-5} \cdot (-x^{-3})^5 =$$

$$= -252 \cdot x^{-5} = -\frac{252}{x^5}$$

$$b) T_{k+1} = \binom{10}{k} (x^2)^{10-k} \cdot (-x^{-3})^k =$$

$$= \binom{10}{k} \cdot x^{20-2k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-3k} =$$

$$= (-1)^k \cdot \binom{10}{k} x^{20-5k}$$

$$20 - 5k = 0 \Rightarrow k = 4$$

O termo independente de x é

$$(-1)^4 \cdot \binom{10}{4} x^0 = 210.$$

$$8) n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$$

Para $(x + y)^n$, temos

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k, \text{ então}$$

$$T_4 = \binom{9}{3} (2x^2)^{9-3} \cdot y^3 =$$

$$= \frac{9!}{3! 6!} \cdot 2^6 \cdot x^{12} y^3 = 5376x^{12}y^3$$

Resposta: B

- 9) Para $x = y = 1$, resulta a soma dos coeficientes $S = (7 + 5)^2 = 144$

Resposta: E

- 10) Para $x = 1$ e $y = 1$, resulta para a soma dos coeficientes $(7 - 2)^m = 5^m$

$$5^m = 3125 \Leftrightarrow 5^m = 5^5 \Leftrightarrow m = 5$$

Resposta: A

AULA 24 ANÁLISE COMBINATÓRIA – PRINCÍPIO DA CONTAGEM E ARRANJOS

$$1) A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$$2) \boxed{3 \quad \square \quad \square \quad \square} \Rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

- 3) I) Existem 4 maneiras para escolher o algarismo das unidades (2, 4, 6 ou 8).

II) Escolhido o algarismo das unidades, existem $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras para escolher os outros 3 algarismos.

III) Assim, o número total de números pares, de quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos dados é $4 \times 60 = 240$

Resposta: D

- 4) O número total de jogos a serem realizados é $A_{14,2} = 14 \cdot 13 = 182$

Resposta: A

- 5) De acordo com o enunciado, temos as seguintes variações que podem ser obtidas para a paisagem:

Fundo	Casa	Palmeira
azul	verde	cinza
azul	verde	verde
azul	amarela	cinza
azul	amarela	verde
cinza	azul	verde
cinza	verde	verde
cinza	amarela	verde

Elas totalizam sete.

Resposta: B

- 6) O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse tipo de código é

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$$

Resposta: B

$$7) \underbrace{\square \quad \square \quad \square}_{\text{Algarismos}}$$

$$\underbrace{\square \quad \square \quad \square \quad \square}_{\text{Letras}}$$

Letras

As três letras poderão ser escolhidas de $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ maneiras.

Os quatro algarismos poderão ser escolhidos de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ maneiras.

O número total de senhas distintas, portanto, é igual a $125 \cdot 120 = 15\,000$.

Resposta: C

- 8) Existem 2 formas de escolher um elemento do grupo dos Cetáceos, 20 formas de escolher um Primata e 33 formas de escolher um Roedor.

Sendo assim, existem $2 \cdot 20 \cdot 33 = 1320$ formas de escolher uma de cada uma das três espécies de mamíferos.

Resposta: A

AULA 25 PERMUTAÇÕES

- 1) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
 2) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
 3) $3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$

- 4) I) O número de cartões feitos por Cláudia foi

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

- II) O número de cartões esperados por João era

$$P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Assim, a diferença obtida foi

$$2520 - 840 = 1680$$

Resposta: B

- 5) O número de composições distintas que podem ser formadas na distribuição das cinco cores entre os cinco pássaros é dado por: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Resposta: D

- 6) Existem 3 formas de escolher o banco em que a família Souza irá sentar e P_3 formas de posicioná-la nesse banco.

Existem 2 formas de escolher, entre os bancos que sobraram, aquele em que o casal Lúcia e Mauro senta. Para cada um desses bancos existem duas formas de posicionar o casal (à esquerda ou à direita do banco, por exemplo) e, para cada uma dessas formas, P_2 maneiras de o casal trocar de lugar entre si.

Existem P_4 formas de posicionar as quatro outras pessoas.

Assim, no total, temos:

$$3 \cdot P_3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot P_2 \cdot P_4 = 12 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4! = 3456 \text{ maneiras distintas de dispor os passageiros no lotação.}$$

Resposta: E

- 7) a) O número total de permutações da palavra economia é P_8^2 .

- b) O número de permutações que começam com O é P_7 . O número das que terminam em O também é P_7 .

- c) O número de permutações que começam e terminam com O é P_6 .

- d) O número de permutações pedidas é $P_8^2 - 2 \cdot P_7 + P_6 = 10800$

Resposta: E

- 8) Se as permutações das letras da palavra PROVA forem listadas em ordem alfabética, então teremos:

$$P_4 = 24 \text{ que começam por A}$$

$$P_4 = 24 \text{ que começam por O}$$

$$P_4 = 24 \text{ que começam por P}$$

A 73ª palavra nessa lista é a primeira permutação que começa por R. Ela é RAOPV.

Resposta: E

- 9) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- a) A quantidade total de números de seis algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos de A é $P_6 = 6! = 720$.

Os números do item anterior, que começam com o algarismo 1 são os que se obtém permutando-se os algarismos $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ e, portanto, a quantidade total é $P_5 = 5! = 120$.

1					
---	--	--	--	--	--

- b) I) A quantidade de números de 5 algarismos do item anterior, cujo primeiro algarismo é 1 ou 2 ou 3 ou 4, é $4 \cdot 4! = 480$.

- II) Esses 480 números são todos menores que o número 512346.

- III) O menor número de 6 algarismos do item (a) que começa com o algarismo 5 é o próprio 512346.

- IV) Escrevendo-se os números do item (a) em ordem crescente, a posição ocupada pelo número 512346 é a 481ª.

- V) Existem 240 números cujo primeiro algarismo é 1 ou 2.

- VI) Os dois menores números cujo primeiro algarismo é 3 são 312456 e 312465.

- VII) Escrevendo-se todos os números de 6 algarismos do item (a) em ordem crescente, o número que ocupa a 242ª posição é 312465.

Respostas: a) 720; 120

b) 481ª; 312465

AULA 26 COMBINAÇÕES SIMPLES

$$1) C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

$$2) C_{7,5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

- 3) Se, do total de 10 diretores, 6 estão sob suspeita de corrupção, 4 não estão. Assim, para formar uma comissão de 5 diretores na qual os suspeitos não sejam maioria, podem ser escolhidos, no máximo, 2 suspeitos. Portanto, o número de possíveis

comissões é

$$C_{6,1} \cdot C_{4,4} + C_{6,2} \cdot C_{4,3} =$$

$$= \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{4} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} =$$

$$= 6 \cdot 1 + 15 \cdot 4 = 6 + 60 = 66$$

Resposta: A

$$4) C_{n,2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = 78 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = 78 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 156 \Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 25}{2} \Leftrightarrow n = 13 \text{ ou } n = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 13, \text{ pois } n \in \mathbb{N}$$

Resposta: D

- 5) A partir do enunciado, conclui-se que o número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

$$C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$$

$$= 2^6 - 1 = 63$$

Obs.: Note que nos 63 caracteres possíveis de serem obtidos está incluído aquele em que os seis pontos estão "em destaque". Neste caso não existe pelo menos 1 que se destaque dos demais; todos, porém, destacam-se em relação ao plano do papel.

Resposta: D

$$6) C_{5,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,3} = 10 \cdot 6 \cdot 4 = 240$$

Resposta: C

$$7) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P & V & & \\ \hline \end{array} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{C_{8,2}}$$

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

Resposta: A

- 8) Supondo que quaisquer dois dos seis pontos, não pertencentes à reta, não estejam alinhados com nenhum dos pontos A, B, C e D, o número total de triângulos com vértices em três dos dez pontos dados é:

$$C_{10,3} - C_{4,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 116$$

Resposta: C

AULA 27

ARRANJOS, PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES: EXERCÍCIOS

- 1) I) Existem 5 enfermeiros disponíveis: 2 mais experientes e outros 3.
 II) Para formar grupos com 3 enfermeiros, conforme o enunciado, devemos escolher 1 entre os 2 mais experientes e 2 entre os 3 restantes.
 III) O número de possibilidades para se escolher 1 entre os 2 mais experientes é

$$C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$$

- IV) O número de possibilidades para se escolher 2 entre 3 restantes é

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3$$

- V) Assim, o número total de grupos que podem ser formados é $2 \cdot 3 = 6$
 Resposta: A

- 2) I) Sendo A e B as duas substâncias que não podem ser misturadas, conforme o enunciado, existem 10 substâncias disponíveis: A, B e outras 8.
 II) Escolhendo apenas uma substância entre A e B, e cinco entre as 8 restantes, podemos formar $C_{2,1} \cdot C_{8,5}$ misturas.
 III) Sem escolher A ou B, escolhendo 6 entre as 8 substâncias restantes, podemos formar $C_{8,6}$ misturas.
 IV) Assim, o número total de modos possíveis de se fazer a mistura é dado por:

$$\begin{aligned} C_{2,1} \cdot C_{8,5} + C_{8,6} &= \\ &= \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \\ &= 2 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} + \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \\ &= 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= 2 \cdot 56 + 28 = 112 + 28 = 140 \end{aligned}$$

- 3) Existem 15 garotas, de modo que não se encontram 3 em uma linha reta, exceto as 8 garotas que trazem as letras da palavra AERÓBICA. Assim, o número de retas determinadas pelas posições das 15 garotas é

$$\begin{aligned} C_{15,2} - C_{8,2} + 1 &= \binom{15}{2} - \binom{8}{2} + 1 = \\ &= 105 - 28 + 1 = 78 \end{aligned}$$

- 4) I) Existem $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$ seqüências possíveis dessas músicas. Como cada seqüência será tocada num dia, serão necessários 3 628 800 dias.
 II) 3 628 800 dias: 365 dias $\approx$ 9942 anos.
 III) 9942 anos: 100 anos =
 $= 99,42$ séculos $\approx$ 100 séculos.

Resposta: E

5)

escolha dos
dois primei-
ros números
↓
escolha dos
dois núme-
ros seguintes
↓

$$\begin{aligned} &\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \\ &= \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{10!}{2^5} \end{aligned}$$

Resposta: A

$$6) \frac{C_{6,3}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Resposta: A

- 7) Existem 3 possibilidades:

I) A comissão é formada por 1 especialista e 2 outros profissionais. Assim, tem-se: $C_{3,1} \cdot C_{9,2} = 3 \cdot 36 = 108$

II) A comissão é formada por 2 especialistas e 1 outro profissional. Assim, tem-se: $C_{3,2} \cdot C_{9,1} = 3 \cdot 9 = 27$

III) A comissão é formada por 3 especialistas. Assim, tem-se: $C_{3,3} = 1$
 O total de comissões possíveis de se formar é: $108 + 27 + 1 = 136$

Resposta: D

8)

B	S	S	B
S	S	S	S

$$2P_6 = 2 \cdot 6!$$

Resposta: E

AULA 28

ARRANJOS COMPLETOS E COMBINAÇÕES COMPLETAS

- 1) $A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
 Resposta: B

- 2) $A_{6,3}^* = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
 Resposta: C

- 3) $A_{6,3}^* - A_{6,3} = 6^3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 = 216 - 120 = 96$
 Resposta: C

- 4) $C_{5,3} + 2 \cdot C_{5,2} + C_{5,1} =$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \\ &= 10 + 2 \cdot 10 + 5 = 35 \\ &\text{ou} \\ &C_{5,3}^* = C_{5+3-1,3} = C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35 \end{aligned}$$

- 5) Supondo que os quatro dígitos sejam escolhidos entre os 10 algarismos do sistema decimal de numeração, o número de placas possíveis é:
 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175760000$
 Resposta: E

- 6) a) $9 \cdot A_{10,3}^* = 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$
 b) $8 \cdot A_{9,3}^* = 8 \cdot 9^3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$
 c) (a) – (b): $9000 - 5832 = 3168$
 d) $9 \cdot A_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$
 e) (a) – (d): $9000 - 4536 = 4464$

- 7) a) O número de seqüências é $2^5 = 32$.
 As seqüências devem, todas, começar em 1 e terminar em 22. Para cada número escolhido até o quinto termo da seqüência, há duas opções para o seguinte. Assim, o número possível de seqüências é $2^5 = 32$.
 b) O número de seqüências pedido é 12.
 Observe que, até chegar ao 13, temos: uma possibilidade passando pelo 4, uma possibilidade passando pelo 6, quatro possibilidades passando pelo 5. Para cada uma destas seis possibilidades, temos dois caminhos para chegar a 22 (um passando pelo 18 e outro passando pelo 19). Portanto, o total de seqüências possíveis é $2 \times 6 = 12$

- 8) Se pretendemos formar números naturais com três algarismos escolhidos dentre 1, 2, 3, 4 e 5, temos:
 5 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades.
 5 possibilidades para a escolha do algarismo das dezenas.
 5 possibilidades para a escolha do algarismo das centenas.
 Dessa forma $n = 5^3 = 125$.
 Resposta: D

AULA 29

PROBABILIDADE: DEFINIÇÃO

$$1) a) P(\text{dama}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$b) P(\text{copas}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$2) P(\text{branca}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Resposta: A

3) I)			1
60	2	2	
30	2	4	
15	3	3, 6, 12	
5	5	5, 10, 20, 15, 30, 60	
1			

II) Os divisores positivos de 60 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

III) O número 60 tem 12 divisores positivos; assim, o espaço amostral tem 12 elementos, dos quais 3 são primos.

$$\text{IV) } P(\text{primo}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Resposta: C

- 4) a) O número de elementos do espaço amostral é $A_{5,3} = 60$
 b) O número de elementos é $3 \cdot A_{3,2} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$, pois os números são do tipo:

2		
---	--	--

ou

	2	
--	---	--

ou

		2
--	--	---

$$\text{c) } P = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

Resposta: C

- 5) De acordo com as informações contidas no gráfico, apenas a peixaria V vende o peixe fresco na temperatura adequada (2,3°). Dessa forma, a probabilidade pedida é

$$\text{igual a } \frac{1}{5}.$$

Resposta: D

- 6) A partir da distribuição apresentada no gráfico, temos:
 8 mulheres sem filhos.
 7 mulheres com 1 filho.
 6 mulheres com 2 filhos.
 2 mulheres com 3 filhos.

Como as 23 mulheres têm um total de 25 filhos, a probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a)

$$\text{único(a) é igual a } P = \frac{7}{25}.$$

Resposta: E

AULA 30 UNIÃO DE EVENTOS

$$\begin{aligned} 1) P(\text{dama ou rei}) &= P(\text{dama}) + P(\text{rei}) = \\ &= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) P(\text{rei} \cap \text{copas}) &= \\ &= P(\text{rei}) + P(\text{copas}) - P(\text{rei} \cup \text{copas}) \\ P(\text{rei ou copas}) &= \\ &= P(\text{rei}) + P(\text{copas}) - P(\text{rei de copas}) \\ P(\text{rei ou copas}) &= \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ No lançamento de dois dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, são 36 casos possíveis. Considerando os eventos A (soma 5) e B (soma 6), a probabilidade pedida é: } \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \\ = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- 4) No lançamento de dois dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, são 36 casos possíveis. Considerando os eventos A (dois números pares) e B (dois números ímpares), a probabilidade pedida é:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) = \\ &= \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 5) No lançamento de dois dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, são 36 casos possíveis. Considerando os eventos A (dois números ímpares) e B (dois números iguais), a probabilidade pedida é:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) P(\text{soma 7 ou soma 9}) &= \\ &= \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Resposta: D

$$7) \text{ I) } P(\text{números ímpares}) = \frac{9}{36}$$

$$\text{II) } P(\text{soma maior que 7}) = \frac{15}{36}$$

$$\text{III) } P(\text{ímpares e soma maior que 7}) = \frac{3}{36}$$

$$\begin{aligned} \text{IV) } P(\text{ímpares ou soma maior que 7}) &= \\ &= \frac{9}{36} + \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Resposta: E

- 8) Sendo Ω , o conjunto espaço amostral, temos: $n(\Omega) = 500$

$$\begin{aligned} A: \text{ O número sorteado é formado por 3 algarismos; } A = \{100, 101, 102, \dots, 499, 500\}, n(A) = 401 \text{ e } p(A) = \frac{401}{500}. \end{aligned}$$

B: o número sorteado é múltiplo de 10; $B = \{10, 20, \dots, 500\}$.

Para encontrarmos $n(B)$ recorreremos à fórmula do termo geral da P.A., em que $a_1 = 10$, $a_n = 500$ e $r = 10$.

$$\text{Temos: } a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 = 10 + (n-1)10 \Rightarrow n = 50$$

$$\text{Dessa forma, } p(B) = \frac{50}{500}.$$

$A \cap B$: o número tem 3 algarismos e é múltiplo de 10; $A \cap B = \{100, 110, \dots, 500\}$.

De $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos:

$$500 = 100 + (n-1)10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 41 \text{ e } p(A \cap B) = \frac{41}{500}$$

$$\begin{aligned} \text{Por fim, } p(A \cup B) &= \frac{401}{500} + \frac{50}{500} - \frac{41}{500} = \\ &= \frac{41}{50} = 82\% \end{aligned}$$

Resposta: D

- 9) Temos $n(S) = 1000$, $n(A) = 400$, $n(B) = 300$ e $n(A \cap B) = 200$.

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5},$$

$$P(B) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} \text{ e}$$

$$P(A \cap B) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} = 50\%. \end{aligned}$$

- 10) Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 as bolas amarelas, B_1, B_2 as brancas e V_1, V_2, V_3 as vermelhas. Temos:

$$S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, V_1, V_2, V_3, B_1, B_2\}, n(S) = 9$$

A: retirada de bola amarela $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, n(A) = 4$$

B: retirada de bola branca $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \{B_1, B_2\}, n(B) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9} \cong 44,4\%$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{9} \cong 22,2\%$$

Como $A \cap B = \emptyset$, A e B são eventos mutuamente exclusivos; logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) =$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3} \cong 67,0\%$$

- 11) Sendo $p(\text{ímpar})$ e $p(\text{par})$, respectivamente, a probabilidade de ocorrer um número ímpar e um número par, numa jogada, temos:

$$\begin{cases} p(\text{ímpar}) + p(\text{par}) = 1 \\ p(\text{ímpar}) = 2p(\text{par}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(\text{ímpar}) = \frac{2}{3} \\ p(\text{par}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a) p(3) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{ímpar}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$p(4) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{par}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

- b) A probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2 é

$$p = p(2) + p(3) + p(5) + p(7) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\text{Respostas: a) } p(3) = \frac{2}{15} \text{ e } p(4) = \frac{1}{15}$$

$$b) \frac{7}{15}$$

AULA 31 INTERSECÇÃO DE EVENTOS

- 1) Se já se sabe que a carta é de ouros então o número de elementos do espaço amostral é 13. Das 13 cartas de ouros, exatamente 11 não são nem rei, nem dama. A probabilidade de obter uma carta que não é nem rei nem dama, sabendo-se que a carta que

saiu é de ouros é, portanto, $\frac{11}{13}$

- 2) Se já se sabe que a bola retirada traz um número ímpar, então o espaço amostral é $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ e, portanto, $n(S) = 6$. Dos 6 números ímpares, igualmente prováveis, exatamente 2 são menores que 5. A probabilidade de se obter um número menor que 5, sabendo-se que a bola traz

um número ímpar, é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Resposta: C

- 3) Se a soma nos dois dados é 8, então o espaço amostral é $S = \{(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)\}$ e, portanto, $n(S) = 5$.

Dos 5 elementos do espaço amostral, a **face cinco** ocorre em um dos dados exatamente 2 vezes. A probabilidade de ocorrer a **face cinco** em um dos dados, sabendo-se que a soma nas duas faces é 8,

$$\text{é } \frac{2}{5}.$$

Resposta: B

- 4) Se apenas um deve acertar o alvo, então podem ocorrer os seguintes eventos:

(A) “A” acerta e “B” erra; ou

(B) “A” erra e “B” acerta.

Assim, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 40\% \cdot 70\% + 60\% \cdot 30\%$$

$$P(A \cup B) = 0,40 \cdot 0,70 + 0,60 \cdot 0,30$$

$$P(A \cup B) = 0,28 + 0,18$$

$$P(A \cup B) = 0,46$$

$$P(A \cup B) = 46\%$$

Resposta: C

- 5) Se o piloto deve subir ao pódio, então podem ocorrer os seguintes eventos:

(A) chover durante a prova e ele subir ao pódio **ou**

(B) não chover durante a prova e ele subir ao pódio

Assim, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 75\% \cdot 60\% + 25\% \cdot 20\%$$

$$P(A \cup B) = 0,75 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 0,20$$

$$P(A \cup B) = 0,45 + 0,05$$

$$P(A \cup B) = 0,50$$

$$P(A \cup B) = 50\%$$

$$6) \text{ I) } P_1 = \frac{11}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{990}{3360}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } P_2 &= \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} + \\ &+ \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{7}{16} \cdot \\ &\cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \end{aligned}$$

$$= \frac{24 + 60 + 210}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{294}{3360}$$

$$\text{III) } P_1 + P_2 = \frac{990 + 294}{3360} \approx 0,38$$

IV) A alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é a E.

Resposta: E

- 7) Sendo A e B eventos independentes,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ e como}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,8 = 0,3 + P(B) - 0,3 \cdot P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,7 \cdot P(B) = 0,5 \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{7}$$

Resposta: B

- 8) Das $(50 + 150) = 200$ pessoas internadas com problemas respiratórios causados por queimadas, 150 delas são crianças. A probabilidade de ser criança é, portanto,

$$\frac{150}{200} = 0,75.$$

Essa probabilidade sugere, entre outras medidas, “a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado”.

Resposta: E

AULA 32 LEI BINOMIAL DE PROBABILIDADE

$$\begin{aligned} 1) P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

Resposta: A

- 2) Indicando a probabilidade pedida por $P(B_1 \cap B_2 \cap P_3 \cap P_4)$, temos:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap P_3 \cap P_4) &= \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(P_3) \cdot P(P_4) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{81} \end{aligned}$$

Resposta: C

- 3) Representando a probabilidade pedida por

$$P(P_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap B_4), \text{ temos:}$$

$$P(P_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap B_4) =$$

$$= P(P_1) \cdot P(P_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_4) =$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} =$$

$$= \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

Resposta: C

- 4) Representando por $P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4)$, a probabilidade pedida, temos:

$$P(B_1 \cap P_2 \cap B_3 \cap P_4) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(P_2) \cdot P(B_3) \cdot P(P_4) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} =$$

$$= \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

Resposta: C

- 5) A probabilidade P de se obter **só** duas bolas brancas é:

$$P = C_{4,2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{81} = \frac{24}{81}$$

Resposta: D

$$6) a) \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10$$

A probabilidade de manifestação de problemas intestinais em exatamente duas crianças é

$$p = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$$

$$= 10 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27} = \frac{40}{243}$$

A probabilidade de manifestação de problemas intestinais no máximo em uma criança é

$$p = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 +$$

$$+ \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{243} + 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{81} =$$

$$= \frac{1}{243} + \frac{10}{243} = \frac{11}{243}$$

$$\text{Respostas: a) } \binom{5}{2} = 10 \text{ e } p = \frac{40}{243}$$

$$b) \binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5 \text{ e}$$

$$p = \frac{11}{243}$$

- 7) Supondo que a lanchonete só forneça estes três tipos de sucos e que os **nove** primeiros clientes foram servidos com apenas um desses três sucos, então:

I) Como cada suco de laranja utiliza 3 laranjas, não é possível fornecer sucos de laranjas para os nove primeiros clientes, pois seriam necessárias 27 laranjas.

II) Para que não haja laranjas suficientes para o décimo cliente, é necessário que, entre os nove primeiros, oito tenham pedido sucos de laranjas e um deles tenha pedido outro suco. A probabilidade disso ocorrer é

$$C_{9,8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{3^8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^7}$$

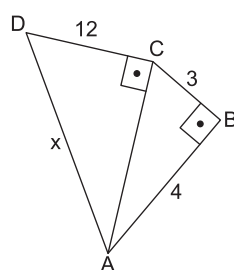
Resposta: E

FRENTE 2

AULA 17

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1) a)

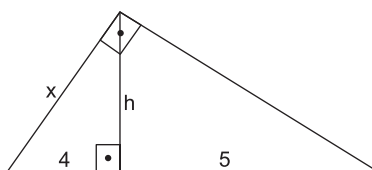


$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 25 + 12^2 = 169$$

$$AD = x = 13$$

b)

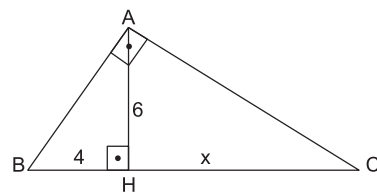


$$h^2 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$x^2 = h^2 + 4^2 = 20 + 16 = 36$$

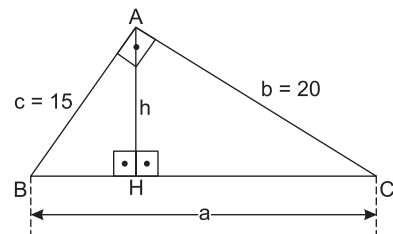
$$x = 6$$

c)



$$6^2 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 9$$

2)



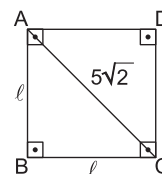
$$a^2 = b^2 + c^2 = 20^2 + 15^2$$

$$a^2 = 625 \Rightarrow a = 25$$

$$a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow 25 \cdot h = 20 \cdot 15$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

3)

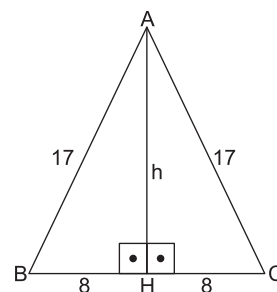


$$l^2 + l^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 25 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 25 \Rightarrow l = 5$$

$$\text{Perímetro: } 4l = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

4)

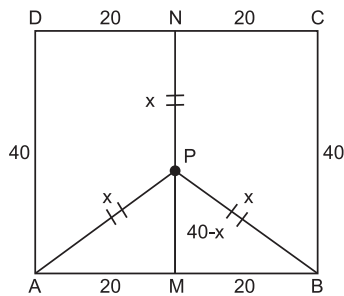


$$h^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow h^2 + 64 = 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 289 - 64 \Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = 15$$

Resposta: E

5)



De acordo com o enunciado, a estação central deve ser construída no ponto P que está na perpendicular à estrada que liga C e D, passa pelo seu ponto médio e dista x (km) de $\overleftrightarrow{CD}$, de A e de B. Assim:

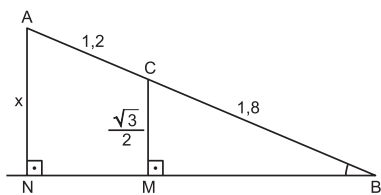
$$(40 - x)^2 + 20^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1600 + x^2 - 80x + 400 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x = 2000 \Leftrightarrow x = 25$$

Resposta: C

6)



Os triângulos NAB e MCB são semelhantes pelo critério (AA~). Assim:

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{1,8} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{30}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Resposta: D

AULA 18 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

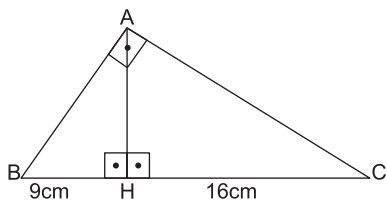
1) $d^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d = 17 \text{ cm}$$

2) $BC = 9 + 16 \Rightarrow BC = 25$

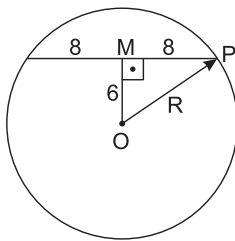
$$AB^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow AB = 15$$

$$AC^2 = 16 \cdot 25 \Rightarrow AC = 20$$



Os lados do triângulo medem 15 cm, 20 cm e 25 cm.

3)



$$R^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow R = 10$$

Resposta: E

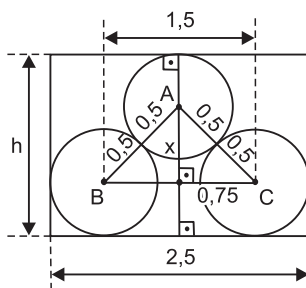
4) $CD^2 = AC^2 + AD^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

5)



Seja x a altura, em metros, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo isósceles ABC, no qual $AB = AC = 1,0 \text{ m}$ e $BC = 1,5 \text{ m}$

De acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$x^2 + (0,75)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como: $h = 0,5 + 0,5 + x$, tem-se:

$$h = 1 + x \Leftrightarrow h = 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Resposta: E

AULA 19 NATUREZA DE TRIÂNGULOS

1) $4^2 > 2^2 + 3^2 \Rightarrow$ O triângulo é obtusângulo.

2) Como os três lados do triângulo ABC pos-

suem medidas diferentes, o triângulo é escaleno.

$$(BC)^2 = 15^2 = 225$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Assim sendo, $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$, o triângulo ABC é retângulo.

Resposta: C

3) $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$y = BC - HC = 7 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

$$AB^2 = (4 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

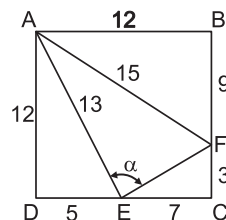
4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ (12 - x)^2 + y^2 = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 144 - 24x + x^2 + y^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 144 - 24x + 25 = 81 \Leftrightarrow 24x = 88 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$$

5) Agudo, pois:



$$(AF)^2 = 15^2 \Leftrightarrow (AF)^2 = 225$$

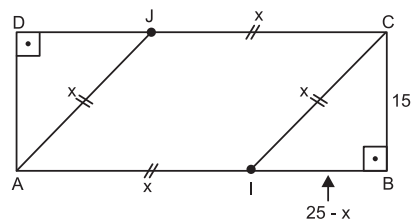
$$(AE)^2 = 13^2 \Leftrightarrow (AE)^2 = 169$$

$$(EF)^2 = 7^2 + 3^2 \Leftrightarrow (EF)^2 = 58$$

Como $225 < 169 + 58$,

então $\alpha < 90^\circ$

6)

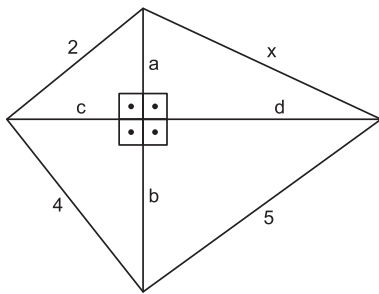


$$x^2 = 15^2 + (25 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50x = 850 \Leftrightarrow x = 17$$

Resposta: C

7)



De acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + d^2 &= x^2 \\ b^2 + c^2 &= 4^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + 16 \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 2^2 \\ b^2 + d^2 &= 5^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 29 \quad (II)$$

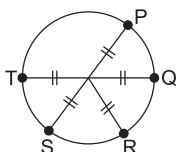
$$\text{De (I) e (II): } x^2 + 16 = 29 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$$

Resposta: C

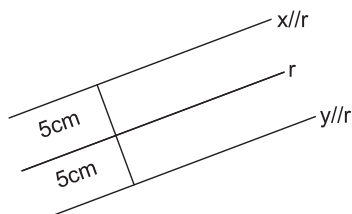
AULA 20 LUGARES GEOMÉTRICOS

1) V, V e V, pois:

a) Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo (centro) desse plano.



b) O lugar geométrico dos pontos de um plano, distantes 5 cm de uma reta desse plano, é um par de retas paralelas, distantes 5 cm da reta dada e situadas em semiplanos opostos em relação à reta.



c) O segmento de reta determinado por dois pontos de uma circunferência chama-se **corda**. A mediatriz de uma corda é o lugar geométrico dos pontos do plano da circunferência, equidistantes dos extremos da corda. O centro da circunferência equidista dos extremos desta corda; logo, pertence à mediatriz.

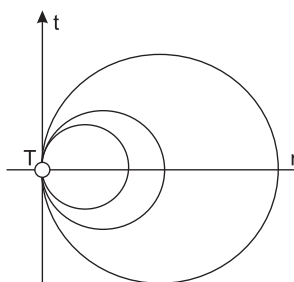
2) O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de dois pontos A e B do mesmo plano é a mediatriz do segmento de

reta AB (Reta perpendicular ao segmento no ponto médio).

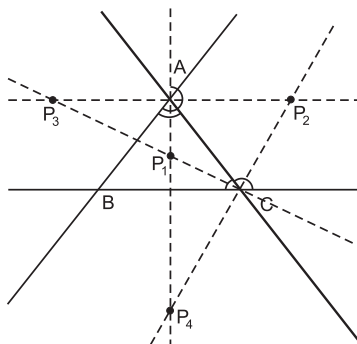
Resposta: D

3) O lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a duas retas concorrentes de um plano é o par de retas bissetrizes dos ângulos. Essas bissetrizes são perpendiculares.

4) O lugar geométrico dos pontos do plano que são centros das circunferências tangentes a uma reta t , em um ponto T pertencente à reta t é uma reta r perpendicular à reta t no ponto T , com exceção do próprio ponto T . (Não faz sentido dizer que o ponto T é centro de uma circunferência que tangencia a reta t no ponto T , a menos que se considere uma circunferência de raio nulo.)

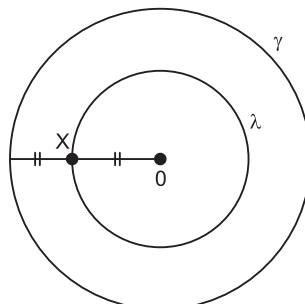


5)



Resposta: C

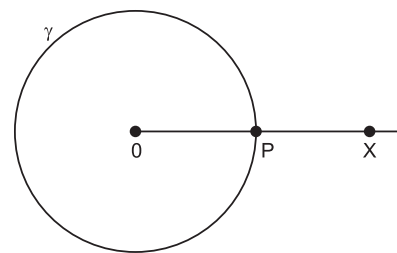
6) Como pode ser observado na figura seguinte, o lugar geométrico é a circunferência λ com centro em O e cujo raio é a metade do raio de γ .



$$\forall X \in \lambda \Rightarrow d(X; \lambda) = d(X; O)$$

Resposta: B

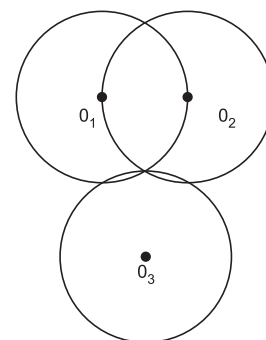
7) O lugar geométrico é a semirreta que passa por P e cuja origem é o centro de γ .



$$\forall X \in \vec{OP} \Rightarrow d(X; P) = d(X; \gamma)$$

Resposta: C

8)



Resposta: B

AULA 21 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

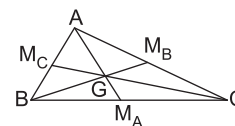
1) a) (V) Além de ser o ponto de intersecção das medianas, ele divide cada mediana na proporção de 2 para 1.

b) (V) Idem à anterior.

$$AG = 2 GM_A$$

$$BG = 2 GM_B$$

$$CG = 2 GM_C$$



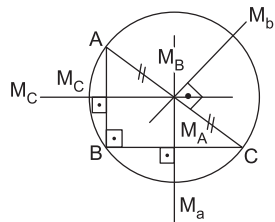
c) (V) É a própria definição de incentro.

d) (V) Por estar sobre as bissetrizes, o incentro equidista dos lados do triângulo.

e) (V) É a própria definição de circuncentro.

f) (V) Por estar sobre as mediatrizes dos lados do triângulo, o circuncentro é equidistante dos extremos dos lados (vértices) do triângulo, e assim é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices

g) (V)



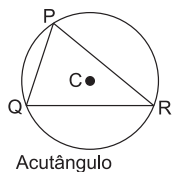
M_B é o circuncentro e também o ponto médio da hipotenusa.

h) (V) É a própria definição de ortocentro.

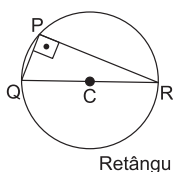
i) (V) O baricentro é o ponto de interseção das medianas de um triângulo e a mediana é sempre interna.

j) (V) O incentro é interno, pois é o centro da circunferência inscrita e esta é sempre interna ao triângulo.

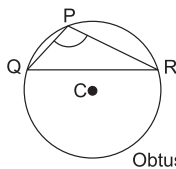
k) (F) No triângulo acutângulo o circuncentro é interno, no triângulo retângulo é um ponto da hipotenusa e no triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.



Acutângulo

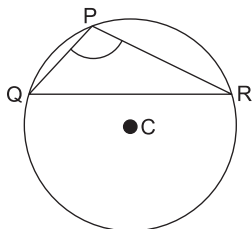


Retângulo



Obtusângulo

l) (V) Veja no desenho abaixo que o ângulo $\hat{QPR}$ é obtuso.



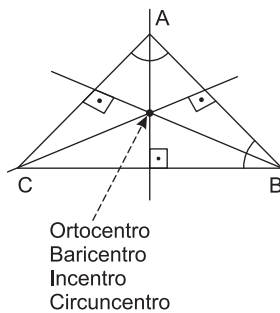
m) (F) Se o circuncentro é interno, o triângulo é acutângulo; porém, não necessariamente equilátero.

n) (V) O ortocentro é externo nos triângulos obtusângulos, está no vértice nos triângulos retângulos e é interno nos triângulos acutângulos.

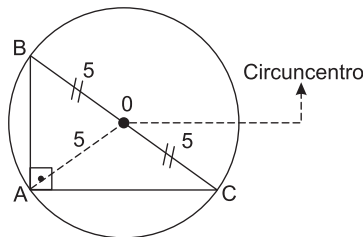
o) (V) Nos triângulos isósceles, a reta suporte da altura, em relação à base, contém a mediana, é bissetriz e mediatriz e sobre ela estão alinhados os quatro pontos notáveis.

p) (V) Nos triângulos equiláteros, a reta suporte da altura em relação a um

lado qualquer contém a mediana relativa a este lado, a bissetriz e a mediatriz. Os quatro pontos notáveis estão nestas três retas e, portanto, coincidem.



2)



O segmento $AO = 5$ cm é a mediana.

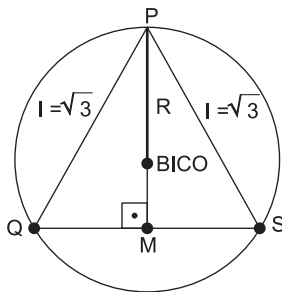
Resposta: D

$$3) h = AH = 3 \cdot OH = 3 \cdot \frac{8 \text{ cm}}{2} = 12 \text{ cm}$$

Resposta: B

AULA 22 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

1)

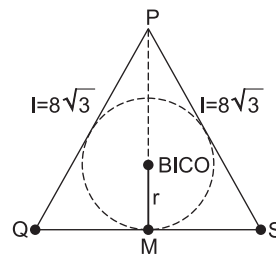


$$I) PM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \text{ cm (altura do triângulo equilátero)}$$

$$II) R = \frac{2}{3} \cdot PM \text{ (propriedade do baricentro)}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow R = 1 \text{ cm}$$

2)

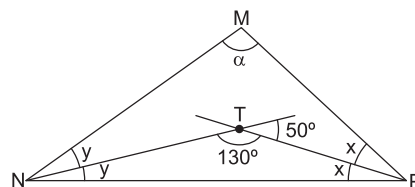


$$I) PM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12 \text{ cm (altura do triângulo equilátero)}$$

$$II) r = \frac{1}{3} \cdot PM \text{ (propriedade do baricentro)}$$

$$r = \frac{1}{3} \cdot 12 \Leftrightarrow r = 4 \text{ cm}$$

3)



I) No triângulo TNP, temos:

$$130^\circ + y + x = 180^\circ \Leftrightarrow y + x = 50^\circ$$

II) No triângulo MNP, temos:

$$\alpha + 2y + 2x = 180^\circ \Leftrightarrow$$

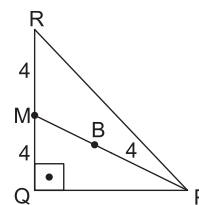
$$\Leftrightarrow \alpha + 2 \cdot (y + x) = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 80^\circ$$

Resposta: E

4)



I) B é baricentro do triângulo, então, $\overline{PM}$ é mediana (segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto).

II) M é ponto médio de $\overline{QR}$, então

$$QM = \frac{QR}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$III) PB = \frac{2}{3} \cdot PM \text{ (propriedade do baricentro)}$$

$$4 = \frac{2}{3} \cdot PM \Leftrightarrow PM = 6 \text{ cm}$$

IV) Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo PQM, temos:

$$(PM)^2 = (PQ)^2 + (QM)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6^2 = (PQ)^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36 = (PQ)^2 + 16 \Leftrightarrow (PQ)^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PQ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

5) I) $OD = OE = 2$

II) $OA = 2 \cdot OD \Leftrightarrow OA = 4$

III) $(AE)^2 = (OA)^2 - (OE)^2$

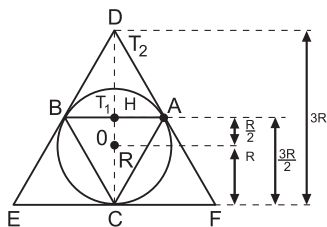
Assim: $(AE)^2 = 4^2 - 2^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (AE)^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE = \sqrt{12} \Leftrightarrow AE = 2\sqrt{3}$$

Resposta: A

6)



Sendo O, centro da circunferência simultaneamente circunscrita e inscrita nos triângulos ABC e DEF equiláteros, o baricentro desses triângulos, tem-se:

$$CH = CO + OH = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

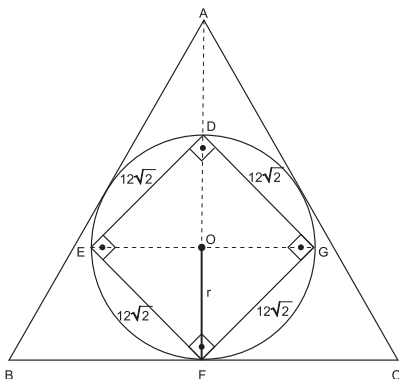
$$CD = DO + OC = 2R + R = 3R$$

A razão entre a altura de T_2 e a altura de T_1 é

$$\frac{CD}{CH} = \frac{3R}{\frac{3R}{2}} = 2$$

Resposta: E

7)



Sendo r a medida do raio do círculo e ℓ a medida do lado do triângulo equilátero, temos:

I) $DF = 2r \Leftrightarrow 12\sqrt{2} \text{ m} \cdot \sqrt{2} = 2r \Leftrightarrow r = 12 \text{ m}$

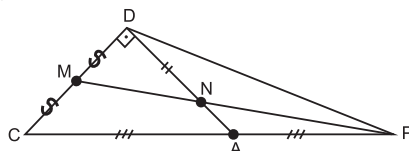
II) $AF = 3r = 3 \cdot 12 \text{ m} \Leftrightarrow AF = 36 \text{ m}$

III) $AF = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 36 \text{ m} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ell = 24\sqrt{3} \text{ m}$$

Resposta: D

8)



N é o baricentro do triângulo DCP.

Assim, $DN = \frac{2}{3} \cdot DA \Leftrightarrow DN = \frac{2}{3} \cdot 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow DN = 4$$

Resposta: DN = 4 cm

AULA 23 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

1) $\hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ$

$$\hat{ADB} = x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

2) $\widehat{AB} = \hat{AOB} = 100^\circ$

$$\hat{APB} = x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

3) $\hat{BCD} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 160^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 360^\circ - \widehat{BAD} =$$

$$= 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$$

$$\hat{BAD} = x = \frac{200^\circ}{2} = 100^\circ$$

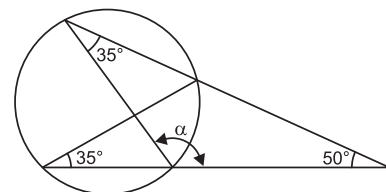
4) $\hat{BAD} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 300^\circ$

$$\widehat{BAD} = 360^\circ - \widehat{BCD} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

$$\hat{BCD} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = 180^\circ - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 50^\circ$$

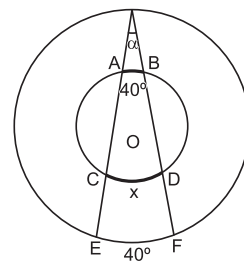
5)



$$\alpha + 50^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 95^\circ$$

Resposta: D

6)

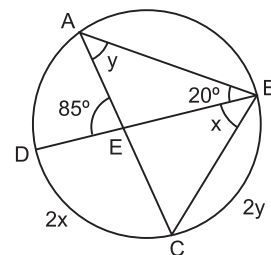


$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{40^\circ}{2} \\ \alpha &= \frac{x - 40^\circ}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - 40^\circ}{2} = \frac{40^\circ}{2} \Rightarrow x = 80^\circ$$

Resposta: E

7)



I) $y + 20^\circ = 85^\circ \Leftrightarrow y = 65^\circ$

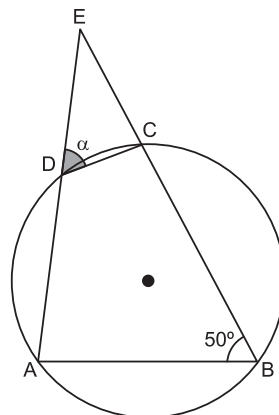
II) $2x + 2y = \widehat{BD} \Leftrightarrow 2x + 2y = 180^\circ$

Assim, $2x + 130^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = 50^\circ \Leftrightarrow x = 25^\circ$$

Resposta: A

8)



Como o quadrilátero ABCD está inscrito

na circunferência, seus ângulos opostos são suplementares e, portanto,

$$\hat{ADC} + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ADC} = 130^\circ$$

Assim,

$$\alpha = 180^\circ - \hat{ADC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 180^\circ - 130^\circ \Leftrightarrow \alpha = 50^\circ$$

Resposta: C

AULA 24 POTÊNCIA DE PONTO

1) $2 \cdot x = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow x = 18$

2) $PA \cdot PB = PM \cdot PN \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5 \cdot (5 + 4) = 6 \cdot (6 + x) \Rightarrow$$

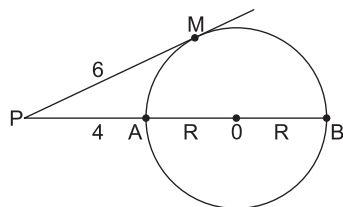
$$\Rightarrow 5 \cdot 9 = 36 + 6x \Rightarrow 45 - 36 = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

3) $PA \cdot PB = PT^2 \Rightarrow 2 \cdot (2 + 6) = x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

4)

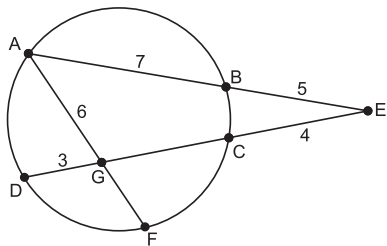


$$PA \cdot PB = PM^2 \Rightarrow 4 \cdot (4 + 2R) = 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 + 8R = 36 \Leftrightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

Resposta: B

5)



1) Pela potência do ponto E tem-se:

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot 5 = 4 \cdot (4 + 3 + GC) \Leftrightarrow GC = 8$$

2) Pela potência do ponto G tem-se:

$$GA \cdot GF = GC \cdot GD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot GF = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow GF = 4$$

Resposta: D

AULA 25 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA E POTÊNCIA DE PONTO

1) $x \cdot (x + 2,5 + 2,5) = 6^2 \Leftrightarrow$

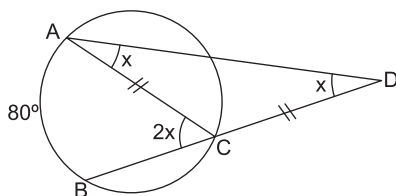
$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -9 \text{ ou } x = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4, \text{ pois } x > 0$$

Resposta: E

2)

XVI – OBJETIVO

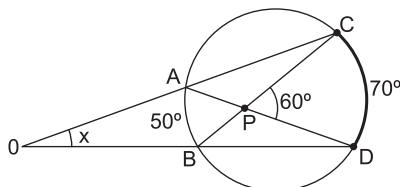


$\hat{CAD} = \hat{CDA} = x$, pois o triângulo ACD é isósceles

$$\left. \begin{array}{l} \hat{ACB} = \hat{CAD} + \hat{CDA} = 2x \\ \hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 40^\circ \Leftrightarrow x = 20^\circ$$

3)



$$\hat{APB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{50^\circ + \widehat{CD}}{2} = 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CD} = 70^\circ$$

$$x = \hat{COD} = \frac{70^\circ - 50^\circ}{2} = 10^\circ$$

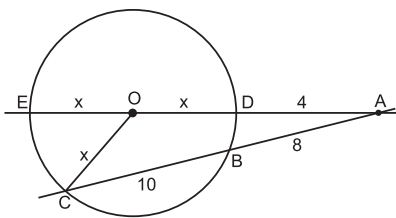
4) $PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow x \cdot 4 = x \cdot 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2, \text{ pois } x > 0$$

Resposta: E

5) Sendo x o raio, em centímetros, tem-se:



$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot 18 = 4 \cdot (4 + 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = 2 + x \Leftrightarrow x = 16$$

Assim, o perímetro $2p$, em centímetros, do triângulo AOC é dado por:

$$2p = AO + OC + CA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p = 4 + x + x + 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p = 22 + 2x \Leftrightarrow 2p = 22 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p = 54$$

Resposta: E

6) $30^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2}, x = \frac{\widehat{CB}}{2} \text{ e}$

$$\widehat{AC} + \widehat{CB} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AC} = 60^\circ, \widehat{CB} = 2x \text{ e}$$

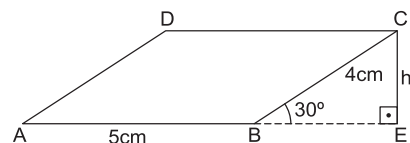
$$\widehat{AC} + \widehat{CB} = 180^\circ$$

$$\text{Assim: } 60^\circ + 2x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$$

Resposta: A

AULA 26 ÁREA DOS QUADRILÁTEROS

1)

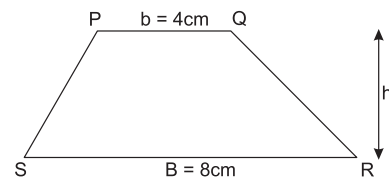


Sejam: S a área do paralelogramo ABCD, 5 cm a medida da base e h a medida da altura. No triângulo BEC, temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2$$

$$\text{Assim, } A = b \cdot h = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow A = 10 \text{ cm}^2$$

2)



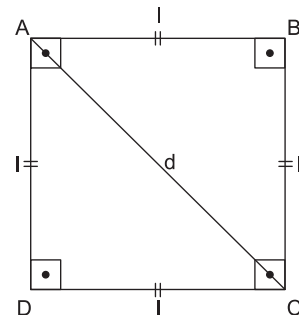
Sendo h a medida da altura e $A = 30 \text{ cm}^2$ a área do trapézio PQRS, temos:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Leftrightarrow 30 = \frac{(8 + 4) \cdot h}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 = 12 \cdot h \Rightarrow h = 5$$

Resposta: C

3)

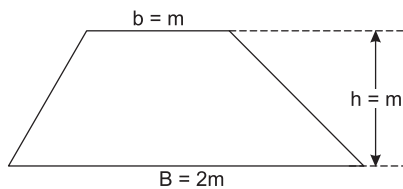


Sendo l o lado, d a diagonal e $A = 36 \text{ cm}^2$ a área do quadrado, temos:

I) $A = l^2 \Rightarrow 36 = l^2 \Rightarrow l = 6 \text{ cm}$

II) $d = l\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$

4)



Sendo A a área do trapézio, temos:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{(2m + m) \cdot m}{2} \Leftrightarrow A = \frac{3m^2}{2}$$

Resposta: C

- 5) A área disponível para o evento, em metros quadrados, é dada pela diferença entre as áreas do retângulo e do trapézio.

Assim:

$$A = 30 \cdot 18 - \left(\frac{18 + 12}{2} \right) \cdot 6 = 540 - 90 = 450$$

Como a concentração de pessoas está limitada a 5 pessoas para cada 2 m^2 de área disponível, o número máximo de pessoas que poderão participar do evento é igual a:

$$\left(\frac{450}{2} \right) \cdot 5 = 1125$$

Resposta: D

- 6) Sendo x e $3x$ as medidas dos lados de retângulo, em metros, e $2p$ o perímetro do mesmo retângulo, em metros, tem-se:

$$\text{I) } x \cdot 3x = 12 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

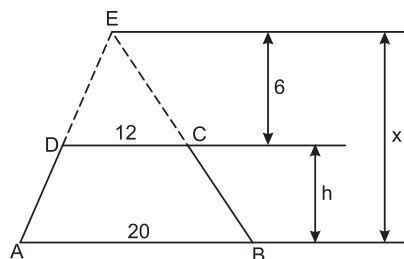
$$\text{II) } 2p = x + 3x + x + 3x \Leftrightarrow 2p = 8x$$

Assim:

$$2p = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow 2p = 16$$

Resposta: C

7)



$$\text{I) } \triangle ABE \sim \triangle DCE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{20}{12} \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

$$\text{II) } h = x - 6 \Rightarrow h = 10 - 6 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$\text{III) } A = \frac{(20 + 12) \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 64 \text{ cm}^2$$

Resposta: A

$$\text{8) a) } \begin{cases} a + b = 48 \\ \left(\frac{a}{4} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{b}{4} \right)^2 \Leftrightarrow a = 2b \end{cases}$$

$$\text{assim: } 2b + b = 48 \Leftrightarrow b = 16 \text{ e } a = 32$$

$$\text{b) } \left(\frac{a}{4} \right)^2 = \left(\frac{32}{4} \right)^2 = 64$$

$$\left(\frac{b}{4} \right)^2 = \left(\frac{16}{4} \right)^2 = 16$$

Respostas: a) 32 cm e 16 cm

b) 64 cm² e 16 cm²

- 9) Sendo x a medida, em centímetros, do lado não perpendicular às bases e S a área, em centímetros quadrados desse trapézio, temos:

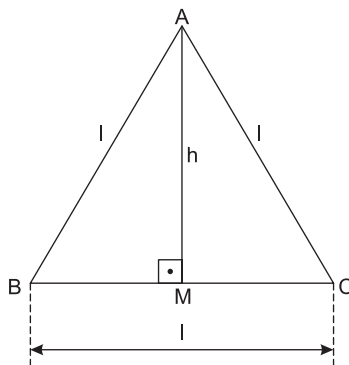
$$\text{I) } x^2 = 8^2 + (15 - 9)^2 \Leftrightarrow x = 10$$

$$\text{II) } S = \frac{(15 + 9) \cdot 8}{2} \Leftrightarrow S = 96$$

Resposta: B

AULA 27 ÁREA DOS TRIÂNGULOS

1)



Sendo l o lado, h a altura e S a área do triângulo equilátero, temos:

$$\text{I) } h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = 4 \text{ m}$$

$$\text{II) } S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

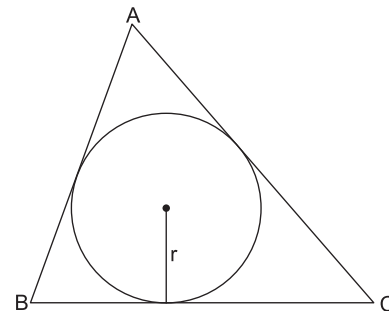
$$\Rightarrow S = 4\sqrt{3} \text{ m}^2$$

- 2) A área S do triângulo da figura é dada por:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} \Rightarrow S = 30 \text{ cm}^2$$

Resposta: C

3)



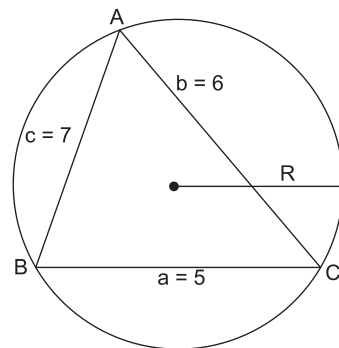
Sendo p o semiperímetro, S a área e r o raio da circunferência inscrita no triângulo, temos:

$$\text{I) } p = \frac{32}{2} \Rightarrow p = 16 \text{ cm}$$

$$\text{II) } S = p \cdot r \Leftrightarrow 32 = 16 \cdot r \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

Resposta: B

4)



Sendo p o semiperímetro, S a área e R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos:

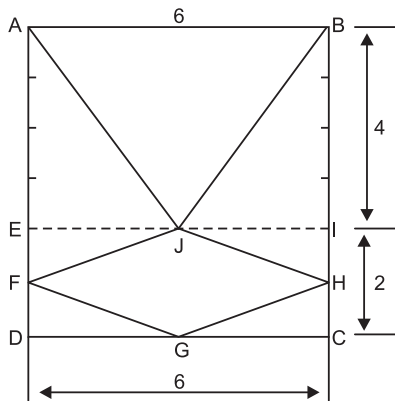
$$\text{I) } p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{5 + 6 + 7}{2} \Rightarrow p = 9 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } S &= \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \\ &= \sqrt{9 \cdot (9 - 5) \cdot (9 - 6) \cdot (9 - 7)} = \\ &= 6\sqrt{6} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{III) } S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow 6\sqrt{6} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{35}{4\sqrt{6}} \Rightarrow R = \frac{35\sqrt{6}}{24} \text{ cm}$$

5)



I) A área do losango FGHIJ, em cm^2 , é

$$\frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

II) A área do triângulo ABJ, em cm^2 , é

$$\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

Assim, a razão entre a área do losango e a área do triângulo, nessa ordem, é

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Resposta: D

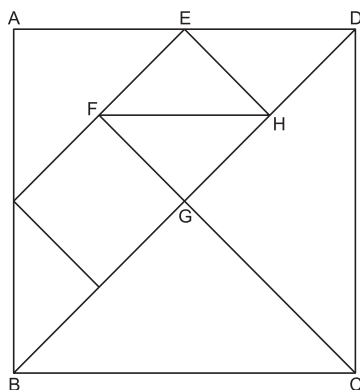
6) A área S , em centímetros quadrados, da figura hachurada é dada por:

$$S = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 - \frac{(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = 16 + 9 + 4 + 1 - 20 \Leftrightarrow S = 10$$

Resposta: A

7)



Seja ℓ a medida em centímetros do lado do quadrado ABCD, temos:

$$\ell^2 = 4 \Leftrightarrow \ell = 2$$

Assim, $ED = FH = 1 \text{ cm}$

A área do triângulo sombreado é metade da área do quadrado EFGH, cuja diagonal mede 1.

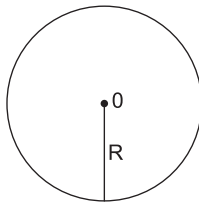
Logo, sendo S a área, em centímetros quadrados, do triângulo sombreado, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2}{2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: E

AULA 28 ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES

1)

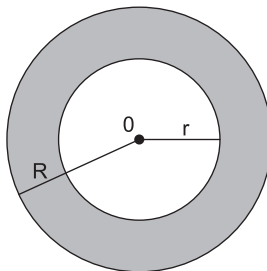


Seja R a medida do raio, C o comprimento e S a área do círculo limitado por uma circunferência, temos:

$$\text{I) } S = \pi R^2 \Leftrightarrow 16\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

$$\text{II) } C = 2\pi R \Leftrightarrow C = 2\pi \cdot 4 \Rightarrow C = 8\pi \text{ cm}$$

2)



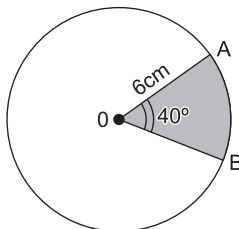
Seja r o raio da circunferência menor, R o raio da circunferência maior e S a área da coroa circular, temos:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow 16\pi = \pi R^2 - \pi \cdot 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 = R^2 - 9 \Leftrightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

Resposta: B

3)



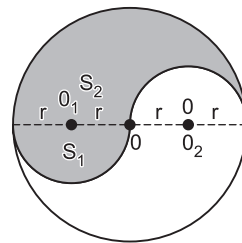
Seja S a área do setor, temos:

$$S = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot A_{\text{círculo}} \Leftrightarrow S = \frac{1}{9} \cdot \pi \cdot 6^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4\pi \text{ cm}^2$$

Resposta: D

4)



A área S da região assinalada é obtida pela soma da área S_1 (semicírculo de centro O_1 e raio r) e da região S_2 assinalada na figura. Como os semicírculos de centro O_1 e O_2 e raio r são equivalentes, podemos concluir que S é equivalente a um semicírculo de raio $2r$.

Assim,

$$S = \frac{\pi \cdot (2r)^2}{2} \Leftrightarrow S = 2\pi r^2$$

Resposta: D

5) A área de alcance de pelo menos uma das

$$\text{emissoras é } \frac{\pi 10^2}{2} = 157 \text{ km}^2.$$

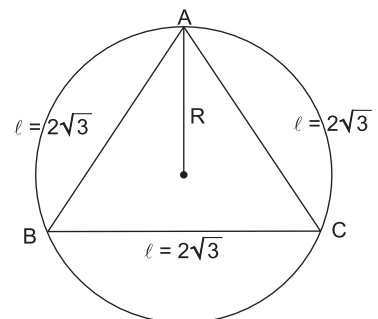
A probabilidade de um morador encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma

$$\text{das emissoras é } \frac{157}{628} = 25\%.$$

Resposta: B

AULA 29 ÁREA DOS POLÍGONOS

1)



Sejam ℓ a medida do lado e h a altura do triângulo equilátero ABC.

Seja S a área e r a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos:

$$\text{I) } h = \frac{\ell \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

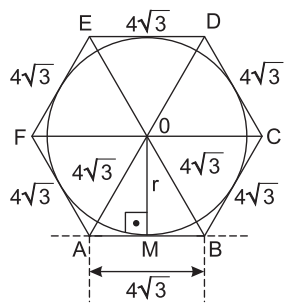
$$\Rightarrow h = 3 \text{ cm}$$

$$\text{II) } R = \frac{2}{3} \cdot h \Leftrightarrow R = \frac{2}{3} \cdot 3 \Rightarrow R = 2 \text{ cm}$$

$$\text{III) } S = \pi R^2 \Leftrightarrow S = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow S = 4\pi \text{ cm}^2$$

Resposta: E

2)



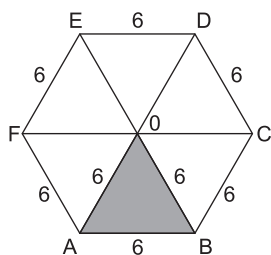
Sejam S a área e r o raio da circunferência inscrita no hexágono regular. Como r é a altura do triângulo equilátero AOB , temos:

$$I) r = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow r = 6 \text{ cm}$$

$$II) S = \pi r^2 \Leftrightarrow S = \pi 6^2 \Rightarrow S = 36\pi \text{ cm}^2$$

Resposta: A

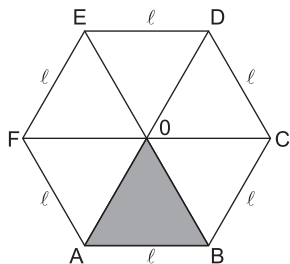
3)



A área S do hexágono regular é seis vezes a área do triângulo equilátero AOB . Assim:

$$S = 6 \cdot A_{\triangle AOB} \Leftrightarrow S = 6 \cdot \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 54 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

4)



Seja l a medida do lado do triângulo equilátero AOB . Como a área do hexágono é igual a seis vezes a área do triângulo AOB , temos:

$$6\sqrt{3} = 6 \cdot A_{\triangle AOB} \Rightarrow A_{\triangle AOB} = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

Assim,

$$A_{\triangle AOB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l^2 = 4 \Rightarrow l = 2 \text{ m}$$

Resposta: C

$$5) I) 2p = x + 2x + 2x + x + x\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

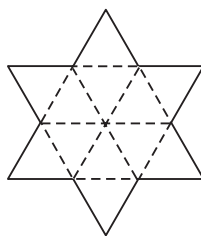
$$\Leftrightarrow 2p = 6x + x\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p = (6 + \sqrt{2})x$$

$$II) S = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow S = \frac{7x^2}{2}$$

Resposta: C

6)



A superfície da estrela pode ser dividida em 12 triângulos equiláteros congruentes, como mostra a figura acima. A área de cada um desses triângulos corresponde a $\frac{1}{9}$ da

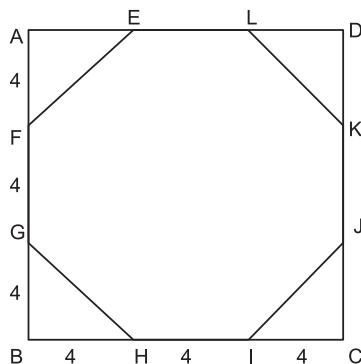
área de cada triângulo inicial utilizado para formar a estrela.

Assim, a área S da estrela, em centímetros quadrados, é:

$$S = 12 \cdot \frac{1}{9} \cdot 12 = 16$$

Resposta: A

7)



$$I) A_{\text{QUADRADO}} = 12^2 = 144$$

$$II) A_{\triangle GBH} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

III) A área A do octógono é dada por:

$$A = A_{\text{QUADRADO}} - 4 \cdot A_{\triangle GBH} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 144 - 4 \cdot 8 \Rightarrow A = 112 \text{ cm}^2$$

Resposta: D

AULA 30 ÁREA DE FIGURAS SEMELHANTES

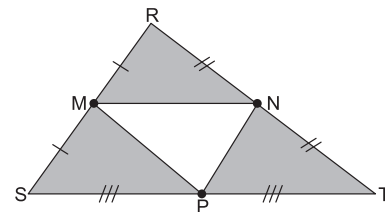
1) Como os polígonos $ABCDE$ e

$A'B'C'D'E'$ são semelhantes, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{36}{9} = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

2)



Como o M é ponto médio de RS , N ponto médio de RT e P ponto médio de ST , podemos concluir que:

I) $\triangle RST \sim \triangle PNM$ pelo critério ($AA \sim$).

II) A razão de semelhança é 2:1, pois $RS = 2 \cdot PN$

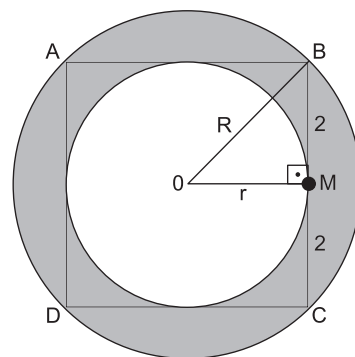
Assim,

$$\frac{A_{\triangle RST}}{A_{\triangle PNM}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{A_{\triangle PNM}} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow A_{\triangle PNM} = \frac{1}{4} A$$

Resposta: C

3)



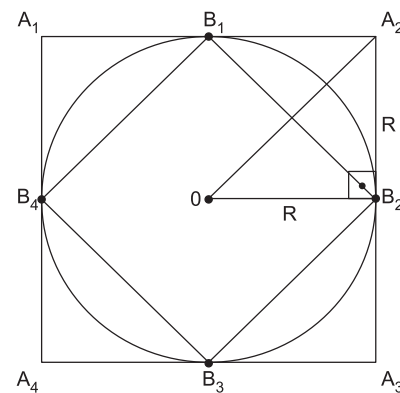
Sejam: R o raio da circunferência, r o raio da inscrita e S a área da coroa circular. No triângulo OMB , temos:

$$R^2 = r^2 + 2^2 \Leftrightarrow R^2 - r^2 = 4$$

$$\text{Assim, } S = \pi R^2 - \pi r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \pi \cdot (R^2 - r^2) \Rightarrow S = 4 \pi \text{ cm}^2$$

4)



Sendo d a diagonal do quadrado inscrito, D a diagonal do quadrado circunscrito e R a medida do raio da circunferência, temos:

I) $d = 2R$

II) $(OA_2)^2 = (OB_2)^2 + (A_2B_2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2 + R^2 \Leftrightarrow \frac{D^2}{4} = 2R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D^2 = 8R^2 \Rightarrow D = 2\sqrt{2}R$$

Como a área do quadrado $B_1B_2B_3B_4$ é A , temos:

$$\frac{A_{A_1A_2A_3A_4}}{A_{B_1B_2B_3B_4}} = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_{A_1A_2A_3A_4}}{A_{B_1B_2B_3B_4}} = \left(\frac{2\sqrt{2}R}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{A_1A_2A_3A_4} = 2A$$

Resposta: B

5) $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{A_2} = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{A_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow A_2 = 36 \text{ cm}^2$$

Resposta: C

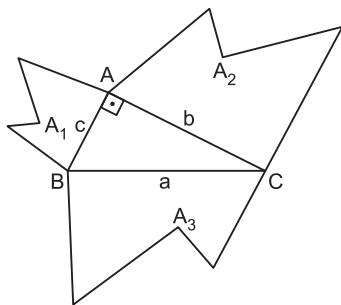
6) I) $\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k$

$$\text{II) } \frac{S}{S'} = \frac{\frac{b \cdot h}{2}}{\frac{b' \cdot h'}{2}} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'}$$

$$\text{Assim: } \frac{S}{S'} = k \cdot k \Leftrightarrow \frac{S}{S'} = k^2$$

Resposta: D

7)



Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, tem-se:

I) $\frac{A_1}{A_3} = \frac{c^2}{a^2}$

II) $\frac{A_2}{A_3} = \frac{b^2}{a^2}$

III) Somando-se (I) e (II) membro a membro, teremos:

$$\frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

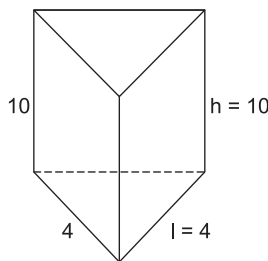
$$\Leftrightarrow \frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1 + A_2}{A_3} = 1 \Leftrightarrow A_1 + A_2 = A_3$$

Resposta: D

AULA 31 PRISMAS

1)



Sejam l a aresta da base, h a altura, A_L a área lateral, A_B a área da base e A_T a área total do prisma.

Assim,

I) $A_L = 3 \cdot l \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_L = 120 \text{ cm}^2$

II) $A_B = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_B = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

III) $A_T = 2 \cdot A_B + A_L \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A_T = 2 \cdot 4\sqrt{3} + 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 8 \cdot (\sqrt{3} + 15) \text{ cm}^2$$

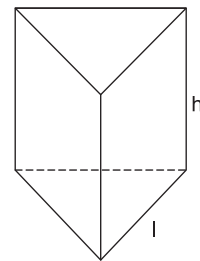
2) Sendo l a aresta da base, h a altura, A_B a área da base e V o volume do prisma, temos:

I) $A_B = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_B = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

II) $V = A_B \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 6 \Rightarrow V = 54\sqrt{3} \text{ cm}^3$

3)



Sejam l a aresta da base, h a altura e A_L a área lateral do prisma. Como o perímetro da base é 6 cm e a área lateral 72 cm², temos:

I) $3l = 6 \Rightarrow l = 2 \text{ cm}$

II) $A_L = 72 \Leftrightarrow 3 \cdot l \cdot h = 72 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 \cdot h = 72 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

Resposta: A

4) Sendo l a aresta da base, h a altura, A_B a área da base e V o volume do prisma, temos:

I) $A_B = 6 \cdot A_{\Delta \text{EQUIL}} =$

$$= 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_B = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$$

II) $V = A_B \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 2 \Rightarrow V = 12\sqrt{3} \text{ m}^3$

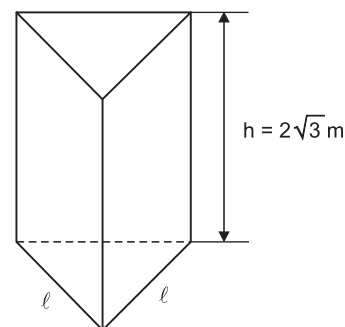
Resposta: E

5) $A_b = \frac{(8+2) \cdot 4}{2} \text{ m}^2 \Rightarrow A_b = 20 \text{ m}^2$

$$V = A_b \cdot h = 20 \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ m} = 100 \text{ m}^3$$

Resposta: D

6)



I) $A_b = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$

II) $A_\ell = 3 \cdot A_{\square} = 3 \cdot \ell \cdot 2\sqrt{3} = 6\ell\sqrt{3}$

$$\text{III) } A_\ell = 4 \cdot A_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\ell \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell = 6 \text{ m}$$

$$\text{IV) } V = A_b \cdot h = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 54 \text{ m}^3$$

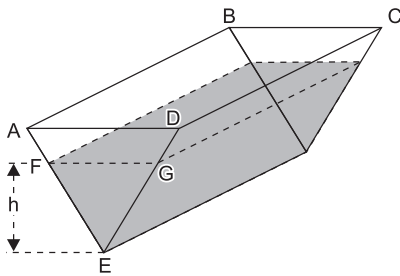
$$7) A_\ell = 75\% A_t \Leftrightarrow A_\ell = \frac{3}{4} (A_\ell + 2A_b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_\ell = 6 \cdot A_b \Leftrightarrow 6 \cdot (b \cdot \ell) = 6 \cdot \frac{6b^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24b\ell = 36b^2 \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\ell}{b} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: D

8)



O volume ocupado pela água é metade do volume do prisma, quando a área do triângulo EFG é metade da área do triângulo ADE.

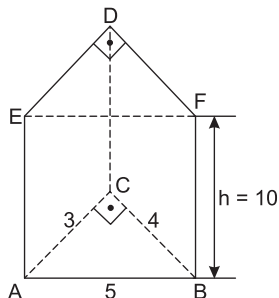
$$\text{Assim, } \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \sqrt{2}$$

Resposta: C

AULA 32 PRISMAS

1)



Sendo A_L a área lateral do prisma, temos: 4)

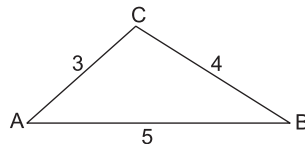
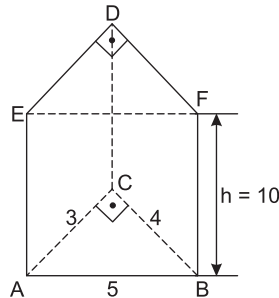
$$A_L = A_{ABFE} + A_{BCDF} + A_{ACDE} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_L = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_L = 120 \text{ cm}^2$$

Resposta: C

2)



Sendo A_B a área da base, A_L a área lateral e A_T a área total do prisma, temos:

$$\text{a) } A_B = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow A_B = 6 \text{ cm}^2$$

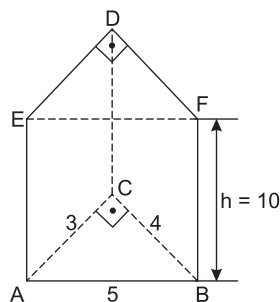
$$\text{b) } A_L = 120 \text{ cm}^2 \text{ (exercício 1)}$$

$$\text{c) } A_T = 2 \cdot A_B + A_L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_T = 2 \cdot 6 + 120 \Rightarrow A_T = 132 \text{ cm}^2$$

Resposta: E

3)

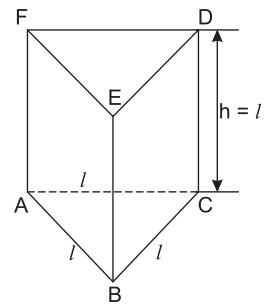


Sendo h a altura, A_B a área da base e V o volume do prisma, temos:

$$\text{a) } A_B = 6 \text{ cm}^2 \text{ (exercício 2)}$$

$$\text{b) } V = A_B \cdot h = 6 \cdot 10 \Rightarrow V = 60 \text{ cm}^3$$

Resposta: A



Sejam ℓ a aresta da base, h a altura, A_B a área da base, A_L a área lateral e A_T a área total.

Como $h = \ell$ e $A_L = 12 \text{ m}^2$, temos:

$$\text{a) } A_L = 12 \Leftrightarrow 3 \cdot A_{ABFE} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \ell \cdot \ell = 12 \Leftrightarrow \ell^2 = 4 \Rightarrow \ell = 2 \text{ m}$$

$$\text{b) } A_B = A_{\triangle ABC} = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

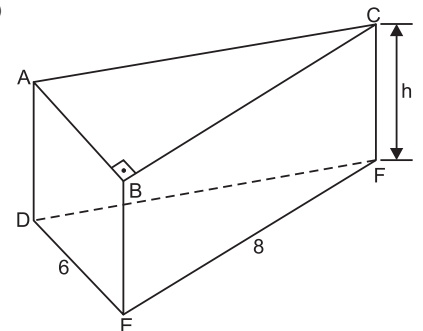
$$\Rightarrow A_B = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$\text{c) } A_T = 2 \cdot A_B + A_L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_T = 2 \cdot \sqrt{3} + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 2 \cdot (\sqrt{3} + 6) \text{ m}^2$$

5)



I) Sendo h a altura do prisma, em centímetros, temos:

$$\frac{6 \cdot 8}{2} \cdot h = 120 \Rightarrow h = 5$$

II) No triângulo DEF, temos:

$$(DF)^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow DF = 10$$

III) Assim, a área total A_t do prisma, em centímetros quadrados, é dada por:

$$A_t = 2 \cdot S_{\triangle DEF} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle ACFD} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_t = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} + 6.5 + 8.5 + 10.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 168$$

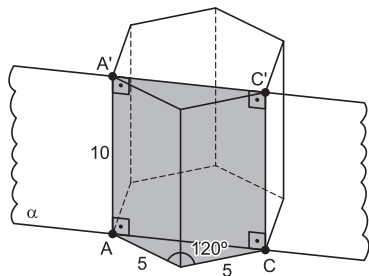
Resposta: D

- 6) a) O volume do prisma é dado pelo produto entre a área do polígono da base e a sua altura.

Assim, o seu volume V , em centímetros cúbicos, é tal que:

$$V = \left(6 \cdot \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot 10 \Leftrightarrow V = 375\sqrt{3}$$

b)



A secção desse prisma pelo plano α , que passa pelos pontos A , C e A' , é o retângulo $ACC'A'$, cuja altura AA' mede

10cm e cuja base $\overline{CA}$ tem a sua medida em centímetros dada por:

$$AC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} \Leftrightarrow AC = 5\sqrt{3}$$

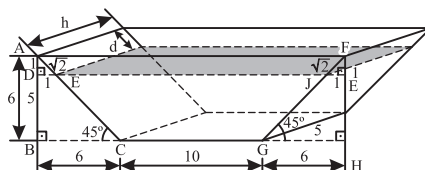
Assim, a área S , em centímetros quadrados, dessa secção é dada por:

$$S = AC \cdot AA' \Leftrightarrow S = 5\sqrt{3} \cdot 10 \Leftrightarrow S = 50\sqrt{3}$$

Respostas: a) $375\sqrt{3} \text{ cm}^3$

b) $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

7)



Como os triângulos ABC , ADE , FHG e FEJ são triângulos isósceles, temos:

$$BC = AB = FH = GH = 6 \text{ m},$$

$$AD = DE = FE = JE = 1 \text{ m e}$$

$$BD = EH = 5 \text{ m}$$

Assim, $AF = 6 \text{ m} + 10 \text{ m} + 6 \text{ m} = 22 \text{ m}$ e

$$EJ = 22 \text{ m} - 1 \text{ m} - 1 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

Logo, a razão r entre o volume de água e o volume total da caçamba é:

$$r = \frac{\frac{(20 + 10) \cdot 5}{2} \cdot h}{\frac{(22 + 10) \cdot 6}{2} \cdot h} =$$

$$= \frac{30 \cdot 5}{32 \cdot 6} = \frac{25}{32}$$

Resposta: E