OBJETIVO GABARITO DO TC 4 – 2ª Série do Ensino Médio

MATEMÁTICA

FRENTE 1
MÓDULO 45
EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

1) $C(0; 0)$ e $r = 5$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

2) $C(-5; 1)$ e $r = 3$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-5)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$

3) I) O centro é o ponto médio de $\overline{AB}$, assim:

$$C\left(\frac{-5+7}{2}; \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow C(1;3)$$

II) O raio é a distância do ponto C ao ponto B, assim:

$r = d_{CB} = \sqrt{(7-1)^2 + (4-3)^2} =$

$= \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$

III) Utilizando a equação reduzida, temos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{37})^2 \Rightarrow$

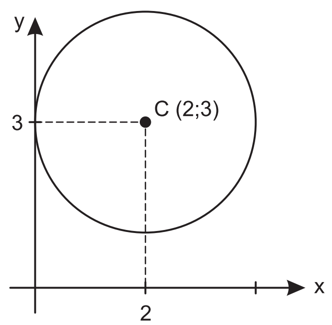
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 37$

4) O centro da circunferência é $C(2; 3)$ e o raio é $r = 2$, assim, sua equação é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$



5) I) O raio da circunferência é a distância de $P(3; 0)$ a $C(-2; 1)$. Assim:

$r = d_{PC} = \sqrt{(3+2)^2 + (0-1)^2} =$

$= \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

II) A equação da circunferência de centro $C(-2; 1)$ e raio $r = \sqrt{26}$ é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 26$

6) I) Fazendo-se $x = 0$ na equação $3x - 2y - 6 = 0$, obtém-se

$3.0 - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

Fazendo-se $y = 0$ na equação $3x - 2y - 6 = 0$, obtém-se

$3.x - 2.0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Assim, os pontos de intersecção da reta com os eixos são $A(2;0)$ e $B(0; -3)$.

II) O centro da circunferência é o ponto médio do segmento AB:

$$M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{-3+0}{2}\right) =$$

$$= M\left(1; \frac{-3}{2}\right)$$

III) O raio da circunferência é a distância de A até M:

$$AM = \sqrt{(1-2)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{4}}$$

IV) A equação da circunferência de centro $\left(1; \frac{-3}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\frac{13}{4}}$ é:

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

7) A partir da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ temos:

$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$

8) $[x - (-1)]^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

9) Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, o centro da circunferência será ponto médio de $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{matrix} A(5; -1) \\ B(-3; 7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{5-3}{2}; \frac{-1+7}{2}\right) \Leftrightarrow C(1; 3)$$

e o raio da circunferência pode ser obtido calculando-se a distância AC:

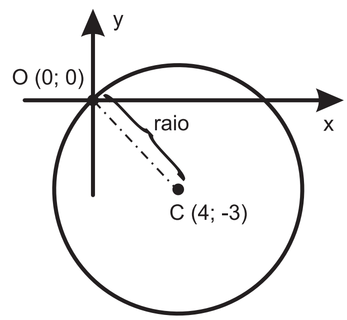
$r = AC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{32}$

A equação da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$

10)



a) O raio da circunferência procurada é a distância do centro à origem.

$r = d_{CO} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} =$

$= \sqrt{25} = 5$

b) A equação da circunferência de centro $C(a; b)$ e raio r é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Como $C(4; -3)$ e $r = 5$, teremos:

$(x - 4)^2 + [y - (-3)]^2 = (5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

11) A circunferência de centro (2;1) e raio 3 tem equação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ e intercepta o eixo das abscissas nos pontos tais que $y = 0$.

Assim: $(x - 2)^2 + (0 - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

As abscissas desses pontos são:

$2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$.

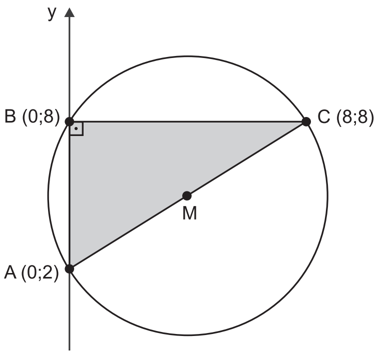
Resposta: B

12) A circunferência tem centro $C(2; -1)$ e raio $r = 3$. A equação dessa circunferência é: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Resposta: A

13)



Como o triângulo ABC é retângulo, com hipotenusa $\overline{AC}$, conclui-se que o centro da circunferência é o ponto M, médio de $\overline{AC}$, assim:

$$M\left(\frac{0+8}{2}\ ;\ \frac{2+8}{2}\right) \Leftrightarrow M(4,5)$$

O raio da circunferência é a distância

$AM = \sqrt{(4-0)^2+(5-2)^2} = 5$

A circunferência de centro (4,5) e raio 5, tem equação:

$(x-4)^2+(y-5)^2=5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x-10y+16=0$

Resposta: E

14) O raio r da circunferência é a distância entre os pontos P e C. Assim:

$r = \sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8}$

A equação da circunferência de centro C(2; 1) e raio $r=\sqrt{8}$, é: $(x-2)^2+(y-1)^2=8$

Resposta: C

15) A circunferência $x^2+y^2-6x-8y-1=0$ tem centro C(3; 4) e a circunferência concêntrica a esta, que passa pelo ponto P(1; 3), tem raio

$r = PC = \sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2} = \sqrt{5}$

Portanto, a circunferência procurada tem equação: $(x-3)^2+(y-4)^2=(\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-8y+20=0$

Resposta: C

MÓDULO 46
EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

1) I) $(x-5)^2+(y-0)^2=5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=25$

II) $(x-(-5))^2+(y-0)^2=5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5)^2+y^2=25$

2) I) $r = d = \dfrac{|3\,.\,(-4)-4\,.\,2+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} =$

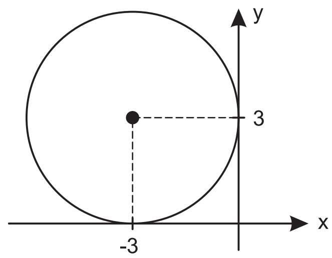
$$= \frac{|-12-8+16|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

II) Utilizando a equação reduzida, temos:

$$(x-(-4))^2+(y-2)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=\frac{16}{25}$$

3) I) O centro da circunferência é o ponto C(– 3; 3) e o raio é r = 3



II) Utilizando a equação reduzida, temos:

$(x-(-3))^2+(y-3)^2=3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=9$

4) I) A circunferência tem centro no eixo das ordenadas, seu centro é da forma C(0; a), e o ponto C equidista de A e de B, assim:

AC = BC $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(-3-0)^2+(4-a)^2} =$

$= \sqrt{(0-0)^2+(7-a)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow C(0; 4)$

II) O raio da circunferência é a distância de B a C e, portanto, é igual a 3.

III) A equação da circunferência é

$(x-0)^2+(y-4)^2=3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=9$

5) O raio da circunferência é a distância do ponto C à reta t, então:

$$r = d_{C,t} = \frac{|4\,.\,(-5)-3\,.\,1-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uma equação para a circunferência (λ) é:

$(x+5)^2+(y-1)^2=25$

6) a) O raio da circunferência é

$r = \left|5-\left(5+2\sqrt{2}\right)\right| = 2\sqrt{2}$

Comparando o raio $r = 2\sqrt{2} \cong 2{,}82$ com a coordenada do centro da circunferência ($y_C = 4$), conclui-se que a circunferência não intercepta o eixo das abscissas.

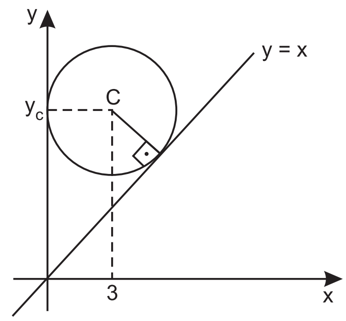
b) A circunferência de centro C(5,4) e raio $r = 2\sqrt{2}$, tem equação

$(x-5)^2+(y-4)^2 = = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=8$

c) O ponto P(3,2) satisfaz à equação da circunferência, $(3-5)^2+(2-4)^2=8$, portanto, P pertence à circunferência.

7)



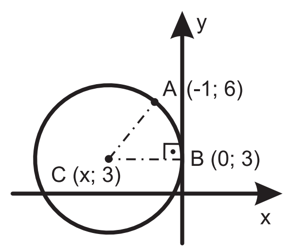
A distância do ponto C (3; y_c) à reta y = x ou seja x – y = 0 é 3. Assim:

$$\frac{|3-y_c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |3-y_c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow y_c = 3\sqrt{2}+3$, pois C pertence ao 1º quadrante.

Resposta: D

8) A partir do enunciado, temos C(x; 3) como centro da circunferência.



Como o ponto **C** é equidistante de **A** e **B**, temos:

CA = CB $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(3-3)^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando, vem:

$(x+1)^2+9=x^2 \Leftrightarrow x=-5$

O centro é o ponto C(– 5; 3) e o raio r = 5 (r = BC).

A equação da circunferência é:

$(x+5)^2+(y-3)^2=5^2 \Leftrightarrow$

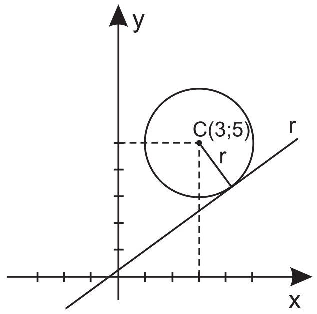
$\Leftrightarrow x^2+y^2+10x-6y+9=0$

9) $r = \dfrac{|3\,.\,3 - 4\,.\,5 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$

$r = \dfrac{|9 - 20 + 1|}{\sqrt{25}}$

$r = \dfrac{|-10|}{5} \Rightarrow r = 2$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$



10) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow P(-1;\,2)$

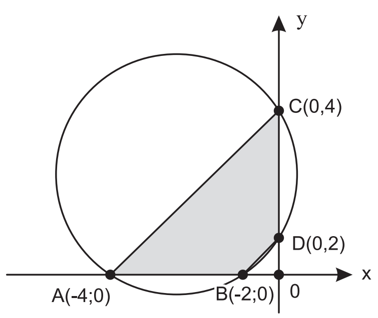
A circunferência de centro P(–1; 2) e tangente ao eixo das abscissas tem raio 2 e equação: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = -1$

Resposta: A

11) 1) Intersecção com o eixo Ox (y = 0):
$(x + 3)^2 + (-3)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 1 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -2$
Os pontos de intersecção são:
A(– 4;0) e B(– 2;0)

2) Intersecção com o eixo Oy (x = 0):
$3^2 + (y - 3)^2 = 10 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 4$ ou $y = 2$
Os pontos de intersecção são: C(0;4) e D(0;2)

3) A representação gráfica resulta



Assim, a área do quadrilátero será a área do ΔOAC menos a área do ΔOBD:

$A = \dfrac{4\,.\,4}{2} - \dfrac{2\,.\,2}{2} = 8 - 2 = 6$

Resposta: B

MÓDULO 47
DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DO RAIO

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ r^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ r = 5 \end{cases}$

C(0; 0) e r = 5

2) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -a = -3 \\ -b = 2 \\ r^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ r = 4 \end{cases}$

C(3; – 2) e r = 4

3) $\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 5 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ b = 0 \\ r^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$

C(– 1; 0) e $r = \sqrt{5}$

4) $\begin{cases} (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 13 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -a = -5 \\ -b = 3 \\ r^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ r = \sqrt{13} \end{cases}$

C(5; – 3) e $r = \sqrt{13}$

5) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 5 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - \dfrac{5}{4} = 0$

$x^2 + 2x + y^2 - 4y = \dfrac{5}{4}$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \dfrac{5}{4} + 1 + 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{25}{4}$

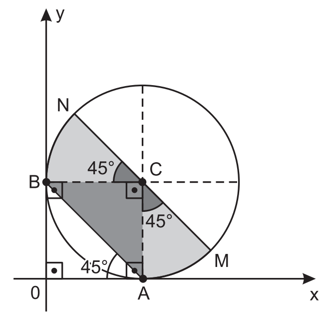
Assim sendo: C(– 1; 2) e $r = \dfrac{5}{2}$

6) I) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 + 6y = 24$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 =$
$= 24 + 16 + 9$
$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 49$

II) Na equação, tem-se $r^2 = 49$. Portanto, a área do círculo correspondente é
$A = \pi\,.\,r^2 = 49\pi$

7) Como $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, $r > 0$, representa a equação geral de uma circunferência de centro C (a, b) e raio r, vem:
a) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$; C(5, 4) e r = 1
b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 5$; C(–2, –6) e $r = \sqrt{5}$
c) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; C(2, 0) e r = 2
d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$; C(–3, 1) e r = 4
e) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$; C(0, 4) e r = 1
f) $x^2 + y^2 = 10$; C(0, 0) e $r = \sqrt{10}$

8)



A circunferência
$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ tem centro C(2;2) e raio r = 2. Os triângulos OAB e ABC são retângulos e isósceles.

Sendo A(2;0) e B(0;2), pode-se concluir que a área sombreada é a soma das áreas de dois setores circulares, de ângulo central 45°, e do triângulo ABC. Portanto, a área é:

$A = 2\,.\,\dfrac{\pi\,.\,2^2}{8} + \dfrac{2.2}{2} = \pi + 2$

Resposta: B

9) Em todos os casos, vamos completar os quadrados perfeitos.
a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y = -16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 =$
$= -16 + 4 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4.$
Logo, o centro é C(2, 4) e o raio é r = 2.
b) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 12x + y^2 - 4y = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 =$
$= 9 + 36 + 4 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$
Logo, o centro é C(–6, 2) e o raio é r = 7.
c) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + y^2 = -11 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = -11 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 5$
Logo o centro é C(–4, 0) e o raio é $r = \sqrt{5}$.
d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 =$

$= -5 + 9 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 20$

Logo, o centro é C(3, –4) e o raio é $r = \sqrt{20}$.

e) $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Logo, o centro é C(0, 2) e o raio é r = 2.

f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Logo, o centro é C(1, 1) e o raio é $r = \sqrt{2}$.

10) A equação $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ representa uma circunferência de centro C(3; 0) e raio $r = \sqrt{5}$.

a) Para y = 2, resulta:
$(x - 3)^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$
Para x > 3, o ponto procurado é P(4; 2).

b) A reta r que passa pelos pontos P(4; 2) e C(3; 0) tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y = 2x - 6$

O coeficiente angular de r é $m_r = 2$.

Respostas: a) P(4; 2)
b) $y = 2 \,.\, x - 6$ e $m_r = 2$

11) A circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - x - 4y + \frac{9}{4} = 0$$

tem centro $C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

A reta perpendicular à reta vertical x = k e que passa pelo tem centro $C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ é a reta horizontal, de equação y = 2.

Resposta: A

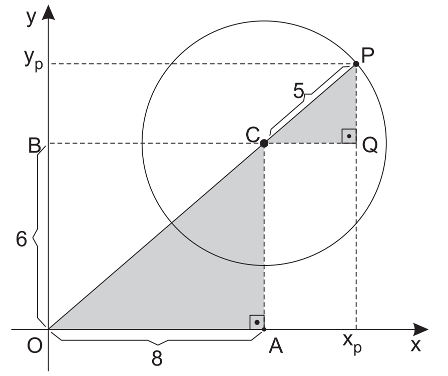
12) I) A circunferência λ de equação
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ possui centro C(3; – 1) e raio r = 2.

II) A reta s, paralela à reta r, tem equação 3x + 7y + k = 0 e, como contém o centro de λ, $3.3 + 7.(-1) + k = 0 \Rightarrow k = -2$

Logo, a equação de s é 3x + 7y – 2 = 0

Resposta: A

13) A circunferência $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = 25$ tem centro C(8; 6) e raio r = 5.



A partir da figura, conclui-se que:

1) ΔAOC: OA = 8, OB = AC = 6 e OC = 10

2) ΔOAC ~ ΔCQP ⇒

$$\Rightarrow \frac{CQ}{8} = \frac{QP}{6} = \frac{5}{10}$$

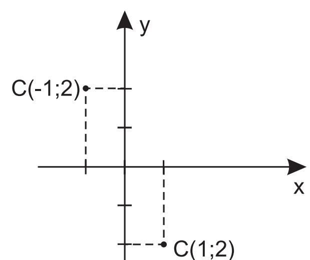
⇒ CQ = 4 e QP = 3.

O ponto da circunferência, que fica mais afastado da origem, é o ponto P, cujas coordenadas são:

$$\left.\begin{array}{l} x_P = OA + CQ = 8 + 4 = 12 \\ y_P = OB + QP = 6 + 3 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow P(12;9)$$

Resposta: E

14)



$3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2 = 0$

$3x^2 - 6x + 3y^2 + 12y = 2$

$x^2 - 2x + y^2 + 4y = \frac{2}{3}$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{2}{3} + 1 + 4$

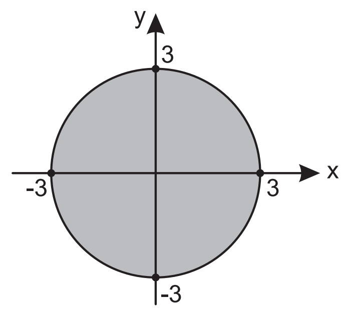
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{17}{3} \Rightarrow C(1; -2)$

Portanto, o ponto simétrico é C'(–1; 2).

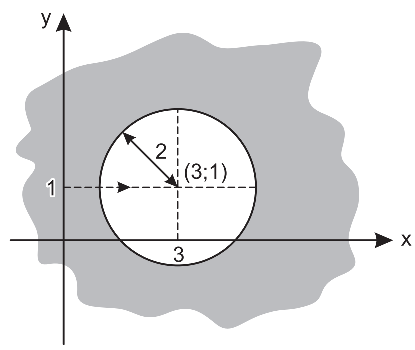
MÓDULO 48
POSIÇÃO RELATIVA DE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

1) A equação dada é equivalente a $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 < 3^2$, cuja representação gráfica é o conjunto dos pontos do plano tais que sua distância até a origem é menor que 3.

$x^2 + y^2 < 9$ tem como representação gráfica:

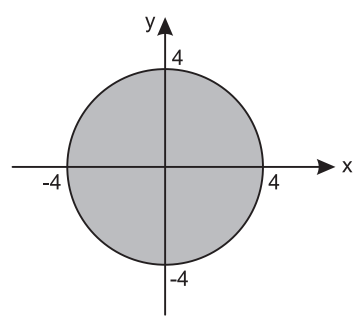


2) A equação $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 > 2^2$ representa o conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto C (3; 1) é maior ou igual a 2. Sua representação gráfica é:

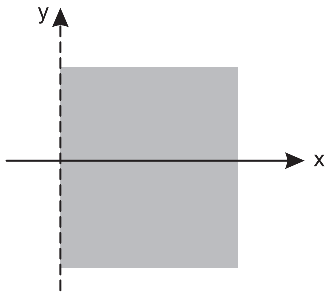


3) I) A representação gráfica da equação $x^2 + y^2 \leq 4^2$ é o conjunto dos pontos do plano cuja distância até a origem é menor ou igual a 4.

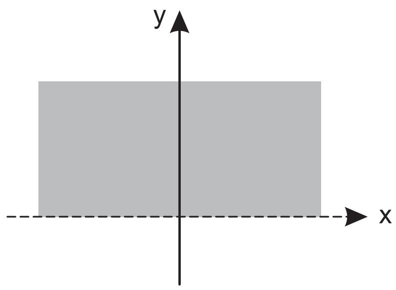
Sua representação gráfica é:



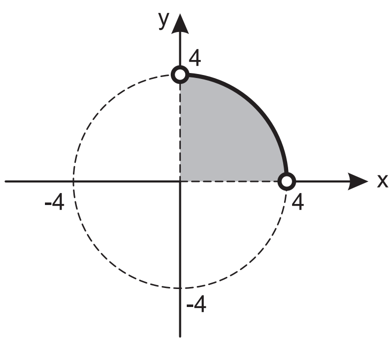
II) A representação gráfica da equação x > 0 é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à direita do eixo y.



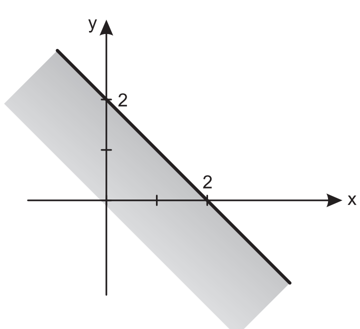
III) A representação gráfica da equação $y > 0$ é o conjunto de todos os pontos do plano que estão acima do eixo x.



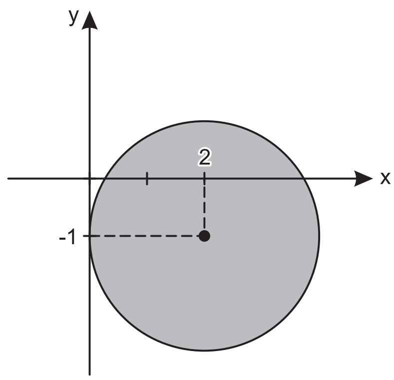
IV) A intersecção das três regiões resulta na figura abaixo representada:



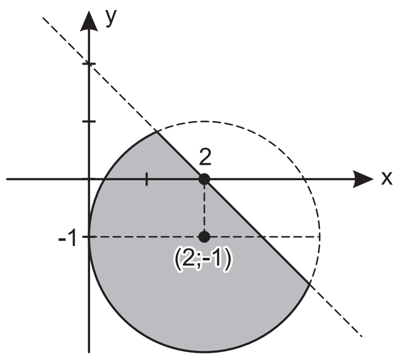
4) I) A representação de $x + y - 2 \le 0$ é:



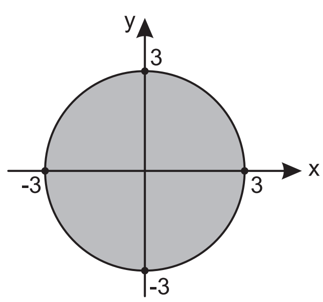
II) A representação de
$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \le 4$ é:



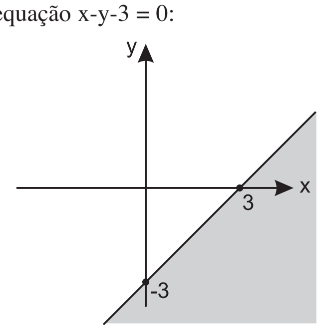
III) A intersecção das duas regiões resulta na figura abaixo:



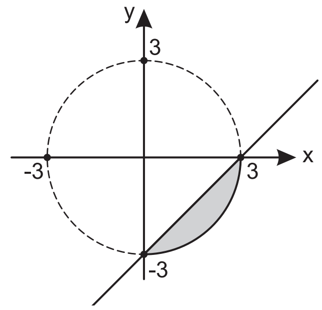
5) I) Os pontos (x; y) que satisfazem a inequação $x^2 + y^2 \le 9$ pertencem a um círculo limitado pela circunferência de centro C(0; 0) e raio 3:



II) Os pontos (x; y) que satisfazem a inequação $x - y - 3 \ge 0$ estão no semiplano positivo em relação à reta de equação x-y-3 = 0:



III) De (I) e (II) temos:



Resposta: B

6) A circunferência destacada possui centro (–3; 3) e raio r = 3. Sua equação é $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ e os pontos (x; y) destacados são tais que
$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \le 9$.
Resposta: B

7) centro: C(2, 1)
raio: $r = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 + 2)^2} = 3$
A equação da circunferência é:
$(x-2)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-4=0$
Os pontos internos da circunferência são representados por:
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 < 0$
Resposta: C

MÓDULO 49
POSIÇÃO RELATIVA DE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

1) Substituindo $y = x + 3$ na equação da circunferência, temos:
$(x - 3)^2 + (x + 3 - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 - 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$
Como a equação $x^2 - 4x - 3 = 0$ apresenta $\Delta > 0$, então o sistema possui duas soluções e a reta é secante à circunferência.

2) Substituindo $y = -3x + 10$ na equação da circunferência, temos:
$(x - 1)^2 + (-3x + 10 + 3)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (-3x + 13)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 78x + 169 - 10 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 10x^2 - 80x + 160 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$
Como a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ possui $\Delta = 0$, então o sistema admite uma única solução e a reta é tangente à circunferência.

3) Fazendo x igual a zero na equação dada, temos:
$0^2 + y^2 + 4 \,.\, 0 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ e $y = 3$
Logo, os pontos são (0; 3) e (0; – 1), cuja distância é 4.

4) Substituindo x por y na equação da circunferência, temos:

$(y+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

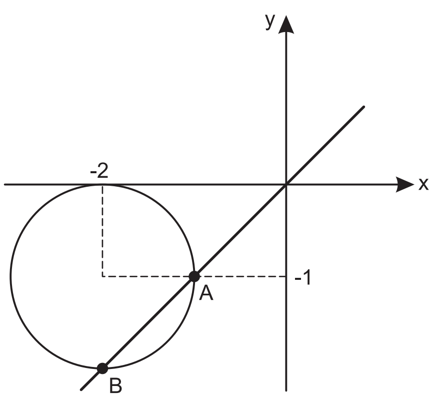
$\Leftrightarrow 2y^2 + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -1$ ou $y = -2$

Como x = y, então os pontos são (–1; –1) e (– 2; – 2)

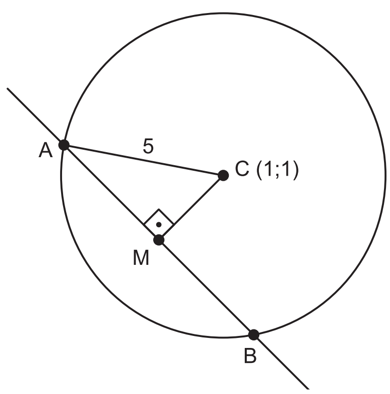
Sendo d a distância entre os pontos, temos: $d = \sqrt{(-1+2)^2 + (-1+2)^2} =$

$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



5) I) A circunferência

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ tem centro C(1; 1) e raio R = 5



II) $CM = \dfrac{|3 \cdot x_c + 4 \cdot y_c + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$

$= \dfrac{|3 + 4 + 8|}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$

III) Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo MCA, temos:

$(AC)^2 = (AM)^2 + (CM)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^2 = (AM)^2 + 3^2 \Leftrightarrow AM = 4$

IV) Como M é o ponto médio da corda AB, então: AB = 2.AM = 8

6) A circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$ possui apenas um ponto em comum com a reta y = x – 1 se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

admite solução única.

Desta forma, a equação

$x^2 + (x-1)^2 - 6x + 4 \cdot (x-1) + p = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + p - 3 = 0$ deve ter raíz dupla e, portanto, $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2(p-3) = 0 \Leftrightarrow p = 5$.

Resposta: E

7) A circunferência tem centro

$C\left(\dfrac{-2}{-2} ; \dfrac{-2}{-2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ C(1;1) e raio $r = \sqrt{1^2 + 1^2 - 1} = 1$

A reta x + y – k = 0 é tangente à circunferência, então:

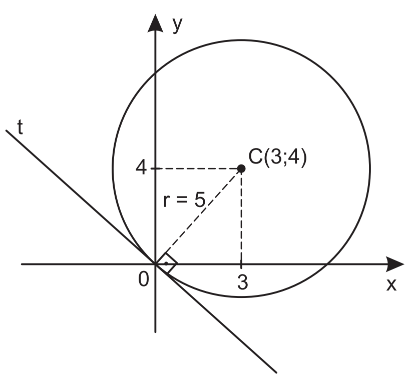
$\dfrac{|1 + 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow |2 - k| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - k = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow k = 2 \pm \sqrt{2}$

A soma dos possíveis valores de k é 4.

Resposta: A

8) A circunferência $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ tem centro C(3; 4), raio r = 5 e passa pela origem.



Sendo $m_{OC} = \dfrac{4-0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$, temos

$m_t = \dfrac{-3}{4}$ e a reta tangente à circunferência, passando pela origem, tem equação

$y = \dfrac{-3}{4} \cdot x \Leftrightarrow 3x + 4y = 0$

Portanto, as afirmativas (I) e (II) são falsas. A afirmativa (III) é verdadeira, pois 4x – 3y = 0 e 3x + 4y = 0 são perpendiculares, visto que, o coeficiente angular de uma das retas é o oposto do inverso da outra reta.

Resposta: C

9) 1) $\begin{cases} x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \quad \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (-x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 8$. Como $\Delta > 0$ a reta (**s**) é secante à circunferência (λ).

2) $\begin{cases} x - y - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = x - \sqrt{2} \quad \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$. Como $\Delta = 0$ a reta (**s**) é tangente à circunferência (λ).

3) $\begin{cases} x - y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = x - 9 \quad \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), vem:

$x^2 + (x-9)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 80 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 40 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = -79$. Como $\Delta < 0$ a reta (**s**) é exterior à circunferência (λ).

10) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ tem centro C (1; 2) e raio $r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 3} = \sqrt{2}$.

1º) Como a distância da reta 2x – y = 5 ao centro C (1; 2) é

$d = \dfrac{|2 \cdot 1 - 2 - 5|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$,

que é maior que o raio, conclui-se que a reta não passa pelo centro da circunferência nem é tangente à circunferência.

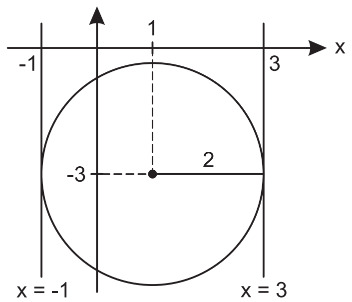
2º) A área do círculo determinado pela circunferência é $A = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$.

3º) A circunferência intercepta o eixo y em dois pontos, tais que $y^2 - 4y + 3 = 0$ $\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 3$, cuja distância é 2.

4º) A circunferência não intercepta o eixo x, pois a distância do centro C (1; 2) ao eixo x (d = 2) é maior que o raio ($r = \sqrt{2}$).

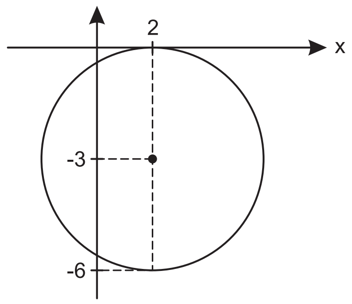
Resposta: C

11) A circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ tem centro $C(1; -3)$ e raio $r = 2$.



A reta $x = m$ intercepta a circunferência se e somente se $-1 \le m \le 3$.
Resposta: D

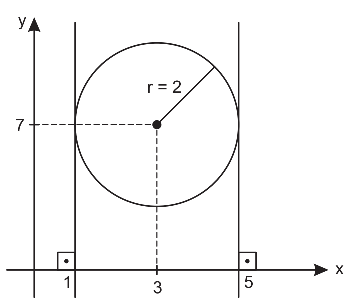
12) A circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ tem centro $C(2; -3)$ e raio $r = 3$.



A reta $y = k$ intercepta a circunferência se e somente se $-6 \le k \le 0$.
Resposta: A

MÓDULO 50
TANGENTES A UMA CIRCUNFERÊNCIA

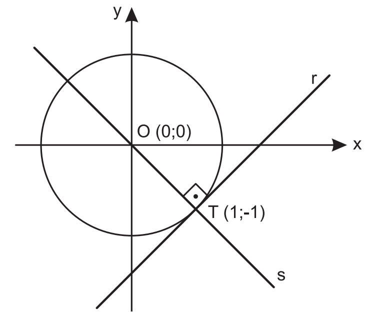
1) A circunferência $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 4$ tem centro $C\ (3; 7)$ e raio $r = 2$



Logo, os valores de k são 5 ou 1.

2) I) A circunferência $x^2 + y^2 = 2$ tem centro $C(0; 0)$ e raio $r = \sqrt{2}$.

II) A reta que passa por $C(0; 0)$ e $T(1; -1)$ é perpendicular à reta tangente procurada.



III) $r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$

IV) $m_s = \dfrac{-1 - 0}{1 - 0} = -1 \Leftrightarrow m_r = 1$

V) A equação da reta r que passa pelo ponto $T(1; -1)$ e tem $m_r = 1$ é:

$y - y_T = m_r \cdot (x - x_T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y + 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$

3) O raio da circunferência é a distância entre o centro $C(-4; 2)$ e a reta $3x + 4y - 16 = 0$, assim:

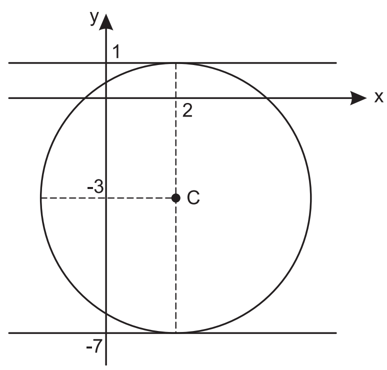
$$r = d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{|-12 + 8 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} =$$

$$= \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

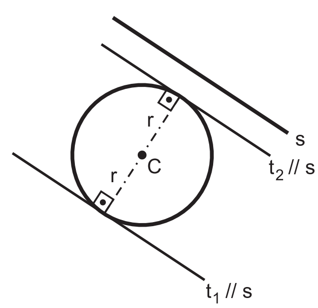
Logo, a equação da circunferência é:
$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

4) A circunferência $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ tem centro $C(2; -3)$ e raio $R = 4$



Logo, os valores de k são tais que $-7 \le k \le 1$

5)



A equação do feixe de retas paralelas à reta s é $3x + 4y + k = 0$ (I)

As retas procuradas pertencem a esse feixe e são tais que a distância do centro a elas é igual ao raio.

Como $x^2 + y^2 = 1$ tem centro $C(0; 0)$ e raio $r = 1$

resulta: $1 = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow$

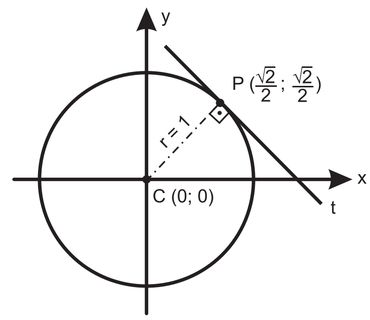
$\Leftrightarrow |k| = 5 \Leftrightarrow k = \pm 5$

Retornando em (I), obtemos as retas tangentes:

se $k = 5$, resulta: $3x + 4y + 5 = 0$ (t_1)

se $k = -5$, resulta: $3x + 4y - 5 = 0$ (t_2).

6)



a) Na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ temos: $C(0; 0)$ e $r = 1$

b) O coeficiente angular da reta que contém o raio $\overline{CP}$ é dado por:

$$m = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} \Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0} \Leftrightarrow m = 1$$

c) A reta t, tangente à circunferência e que passa por P, é perpendicular ao raio $\overline{CP}$. Portanto,

$$m_t = -\frac{1}{m} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{1} \Rightarrow m_t = -1$$

d) A equação da reta t será:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = m_t \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y - \sqrt{2} = 0$$

7) A equação da família de retas paralelas a s é $x - y + k = 0$ (I), onde k é um parâmetro real, cujo valor deve ser determinado. A circunferência tem centro $C(5; -1)$ e raio $r = \sqrt{8}$. Para que a reta paralela a **s** seja tangente à circunferência, a sua distância ao centro deve ser igual ao raio. Portanto,

$$\frac{|5 - (-1) + k|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{8} \Rightarrow |k + 6| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k + 6 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} k = -10 \\ \text{ou} \\ k = -2 \end{cases}$$

Substituindo esses valores de k em (I), obtemos as equações das

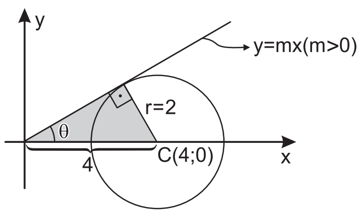
$$\text{retas tangentes} \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x - y - 10 = 0 \end{cases}$$

8) O raio da circunferência é a distância do ponto C à reta t, então:

$$r = d_{C,t} = \frac{|4 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uma equação para a circunferência (λ), é:
$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$

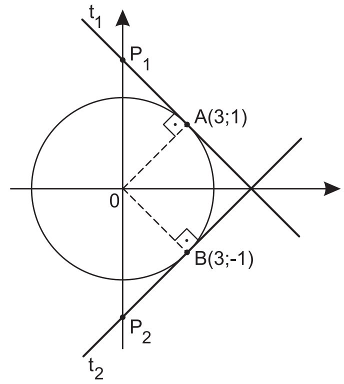
9) A circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ tem centro $C(4; 0)$ e raio $r = 2$. A partir do enunciado, temos a seguinte figura:



$$\text{sen } \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: B

10) A curva de equação $x^2 + y^2 = 10$, é uma circunferência de centro $C(0; 0)$ e raio $r = \sqrt{10}$. Para $x = 3$, resulta pela equação $3^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow y = \pm 1$, e, portanto, temos os pontos $A(3; 1)$ e $B(3; -1)$, como sendo os pontos de tangencia para as retas procuradas.

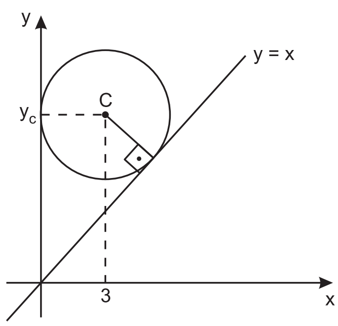


Sendo $OP_1 = OP_2$, pode-se considerar para efeito de cálculos, qualquer uma das tangentes (t_1 ou t_2).
Vamos considerar a reta tangente (t_1), que passa pelo ponto A(3; 1) e tem coeficiente angular

$$m = \frac{-1}{m_{OA}} = \frac{-1}{1/3} = -3.$$

A equação da reta (t_1) é:
$y - 1 = -3 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = -3x + 10$, que encontra o eixo das ordenadas no ponto $P_1(0; 10)$.
A distância da origem a esse ponto é 10.
Resposta: D

11)



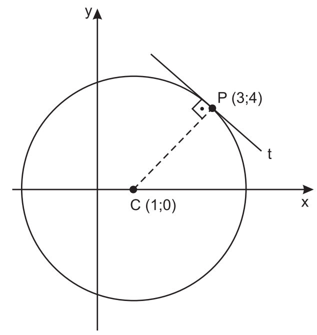
A distância do ponto C $(3; y_c)$ à reta $y = x$ ou seja $x - y = 0$ é 3. Assim:

$$\frac{|3 - y_c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |3 - y_c| = 3\sqrt{2} \Rightarrow y_c = 3\sqrt{2} + 3$,
pois C pertence ao 1º quadrante.
Resposta: D

12) A circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 20$ tem centro $C(1; 0)$ e raio $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
O ponto P(3; 4) pertence à circunferência, pois:
$(3 - 1)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

A reta tangente é tal que:



1º) $m_{PC} = \dfrac{4 - 0}{3 - 1} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_t = \dfrac{-1}{2}$ ($t \perp PC$)

2º) $y - 4 = \dfrac{-1}{2} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$

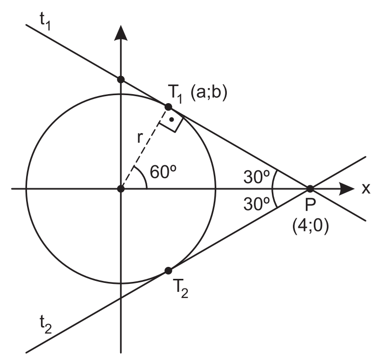
$\Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0$
Resposta: E

13) A circunferência tem centro (4; 3) e raio $r = \sqrt{3}$. A reta é tangente à circunferência, quando a distância do centro à reta é igual ao raio, assim:

$$\frac{|-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + k|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |k| = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow k = \pm 5\sqrt{3}$
Resposta: E

14) A partir do enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo OT_1P_1, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{r}{4} \Rightarrow r = 2$

Sendo O ponto de tangência T_1 de coordenadas (a; b), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 60° = \dfrac{a}{r} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 1 \\ \text{sen } 60° = \dfrac{b}{r} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow T_1(1; \sqrt{3})$
Resposta: B

MÓDULO 51
ELIPSE

1) I) Pela figura, temos a = 5, b = 4 e C(0; 0).

II) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + f^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f = 3 \Rightarrow 2f = 6$

IV) A excentricidade da elipse é

$$e = \frac{f}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

2) I) Pela figura, temos a = 4, f = 3 e C(0; 0)

II) A excentricidade é

$$e = \frac{f}{a} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow$

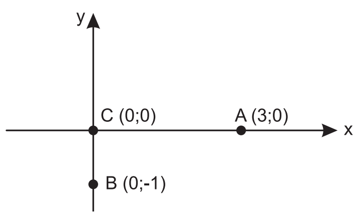
$\Rightarrow b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$

IV) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{7} = 1$$

3) I) Pela figura, temos a = 3 e b = 1

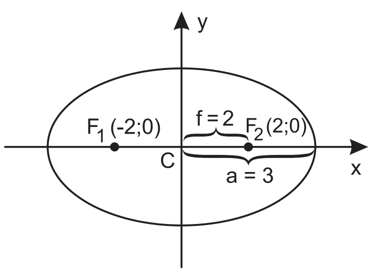


II) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

4)



A elipse de focos $F_1(-2;0)$ e $F_2(2;0)$ e eixo maior igual a 6, é tal que:

$$\left.\begin{array}{l} f = 2 \\ a = 3 \\ a^2 = b^2 + f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

A equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Resposta: B

5) A elipse da figura tem centro C(– 5;7) e semi-eixos a = 4 e b = 3.

A equação reduzida da elipse, representada na figura, com centro C(g;h) e semieixos a e b, é:

$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

Resposta: B

6) A elipse: $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ tem:

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{10}$

$b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6}$

eixo maior: $2a = 2\sqrt{10} = \sqrt{40}$

eixo menor: $2b = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$

O retângulo de lados $\sqrt{40}$ e $\sqrt{24}$ tem diagonal $d^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{24})^2 = 64 \Rightarrow d = 8$.

Resposta: A

MÓDULO 52
ELIPSE

1) I) O centro da elipse é C(0; 0) e f = 2

II) $e = \frac{f}{a} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = 3$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 9 = b^2 + 4 \Leftrightarrow b^2 = 5$

IV) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$$

2) I) $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

II) $a^2 = 25$ e $b^2 = 9 \Leftrightarrow a = 5$ e $b = 3$

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + f^2 \Leftrightarrow$

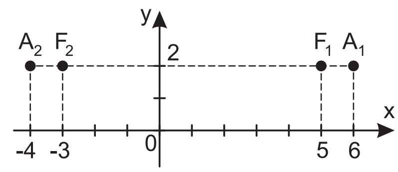
$\Leftrightarrow f^2 = 16 \Leftrightarrow f = 4$

IV) A excentricidade da elipse é:

$$e = \frac{f}{a} = \frac{4}{5}$$

Resposta: B

3)



I) O centro é $\left(\frac{6-4}{2}; \frac{2+2}{2}\right) =$

= (1;2), a = 5 e f = 4

II) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 9$

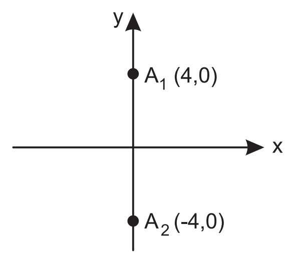
IV) A equação da elipse é do tipo

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Resposta: A

4)



I) $16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

II) a = 4 e b = 3, pois a > b

III) $a^2 = b^2 + f^2 \Rightarrow 16 = 9 + f^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f = \sqrt{7}$

IV) O eixo maior da elipse está contido no eixo das ordenadas e, portanto, os focos são $(0; \sqrt{7})$ e $(0; -\sqrt{7})$

Resposta: B

5) 1) Os pontos A e B são $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{4}{3}\right)$

pois:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{7}{6} \\ \\ y = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) O ponto médio de $\overline{AB}$ é

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Resposta: D

6) O ponto P, representado na figura, é a intersecção da curva

$\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$(elipse) com a reta $y = x$.

Como o ponto P, pertecente ao primeiro quadrante, tem suas coordenadas obtidas a partir do sistema

$$\begin{cases} y = x \\ \\ \dfrac{y^2}{100} + \dfrac{9}{25} = 1 \end{cases}, \text{ temos: } x = y = 2\sqrt{5}$$

A distância, em milhões de km, do planeta P $(2\sqrt{5}\ ;\ 2\sqrt{5}\ )$ à estrela O(0,0), no instante representado na figura, é:

$$OP = \sqrt{(2\sqrt{5} - 0)^2 + (2\sqrt{5} - 0)^2} = 2\sqrt{10}$$

Resposta: B

MÓDULO 53
HIPÉRBOLE

1) I) A hipérbole tem centro C(0; 0), $a = 2$ e $b = 3$

II) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

2) I) A hipérbole tem centro C(0; 0), $b = 3$ e $f = 5$

II) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 9 \Rightarrow a = 4$

III)A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

3) I) A hipérbole tem centro C(0; 0) e $f = \sqrt{13}$

II) $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

III)$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 13 = 9 + b^2 \Rightarrow b = 2$

IV) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

4) I) $2f = 12 \Leftrightarrow f = 6$

II) $e = \ \Rightarrow 1{,}5 = \dfrac{6}{a} \Leftrightarrow a = 4$

III)$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt{20}$

IV) A equação da hipérbole é do tipo

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

5) a) $F_1(8, 0), F_2(-8, 0), A_1(5, 0), A_2(-5, 0)$, O(0, 0).

Pelos dados do problema, temos que os focos estão no eixo x, $f = 8$ e $a = 5$.

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 25 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 39$

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$$

b) $A_1(3; 0), A_2(-3; 0), 2f = 8$, O(0; 0).

Pelos dados do problema, temos que o eixo real está contido no eixo x, $a = 3$ e $f = 4$.

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 16 - 9 \Rightarrow b^2 = 7$

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

c) $A_1(3; 0), A_2(-3; 0), e = \dfrac{f}{a} = 2$, O(0, 0).

Pelos dados do problema, temos que o eixo real está contido no eixo x e $a = 3$. Então:

$$\frac{f}{a} = 2 \Rightarrow \frac{f}{3} = 2 \Rightarrow f = 6$$

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 27$

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

d) $F_1(0, 5), F_2(0, -5), e = \dfrac{f}{a} = \dfrac{5}{3}$, O(0,0)

Pelos dados do problemam, temos que os focos estão no eixo y e $f = 5$. Então:

$$\frac{f}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 3$$

Cálculo de b:

$f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16.$

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

6) A hipérbole possui centro C(0; 0), eixo transverso horizontal $a = 4$ e $b = 5$.

Sua equação é $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

7) A hipérbole da figura possui centro O(0; 0), eixo transverso vertical, $a = 6$ e $b = 3$.

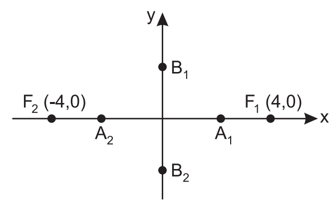
Sua equação é $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

Resposta: C

MÓDULO 54
HIPÉRBOLE

1) I) $f = 4, a = b, f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 = 8$



II) A equação da hipérbole é, pois,

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

III) A excentricidade vale:

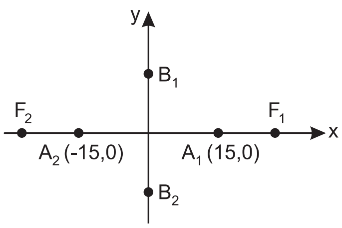
$$e = \frac{f}{a} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2) I) $A_1A_2 = 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

II) $B_1B_2 = 2b = 14 \Leftrightarrow b = 7$

III) A equação é $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{49} = 1$

3)



I) $2a = 30 \Leftrightarrow a = 15$

II) $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow \dfrac{6}{5} = \dfrac{f}{15} \Leftrightarrow f = 18$

III) $f^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 18^2 = 15^2 + b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 99 \Rightarrow b = \sqrt{99}$

IV) A equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{99} = 1$$

4) I) $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$

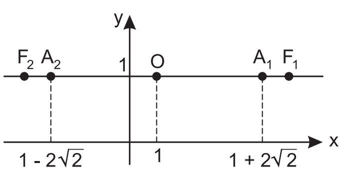
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - y^2 + 2y = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

II) É uma hipérbole equilátera ($a = b = \sqrt{8}$) com eixo transverso paralelo ao eixo das abscissas e centro O(1;1).



III) $a = 2\sqrt{2}$; $O(1;1) \Rightarrow A_1(1 + 2\sqrt{2}; 1)$ e $A_2(1 - 2\sqrt{2}; 1)$

IV) $f^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow f^2 = 8 + 8 \Rightarrow f = 4$

V) $f = 4$; $O(1; 1) \Rightarrow F_1(5; 1)$ e $F_2(-4; 1)$

a) O(1; 1)

b) $F_1(5; 1)$ e $F_2(-3; 1)$

c) $A_1(1 + 2\sqrt{2}; 1)$ e $A_2(1 - 2\sqrt{2}; 1)$

5) A hipérbole $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ tem:

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ (eixo transverso)

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow 2b = 10$ (eixo conjugado)

A área do retângulo é igual a:

$A = 12 \,.\, 10 = 120$

Resposta: B

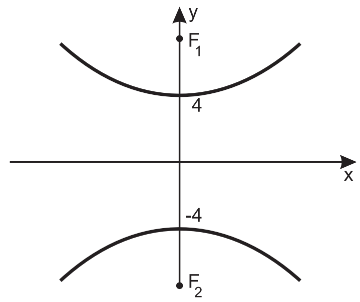
6) $y^2 - 16x^2 = 16 \Rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

representa uma hipérbole com focos no eixo x, sendo:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

O gráfico é do tipo:



Então: $f^2 = a^2 + b^2 = 16 + 1 = 17$ e $f = \sqrt{17}$, os focos têm coordenadas:

$F_1(0; \sqrt{17})$ e $F_2(0; -\sqrt{17})$

7) $x^2 - y^2 = 25 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ é uma hipérbole equilátera, com $a^2 = b^2 = 25$.

Dessa forma:

$f^2 = a^2 + b^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow f = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ e, portanto, $2 \,.\, f = 10\sqrt{2}$.

Resposta: C

8) I) $4(x-3)^2 - \dfrac{4y^2}{15} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{(y-0)^2}{\frac{15}{4}} = 1$, que é a equação de uma hipérbole de centro C(3 ,0), com

$a^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ e

$b^2 = \dfrac{15}{4} \Leftrightarrow b = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

II) Sendo 2f a distância focal, temos:

$f^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow f^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2 = 4 \Leftrightarrow f = 2$, pois $f > 0$

Portanto, o centro é C(3;0) e os focos são $F_1(5;0)$ e $F_2(1;0)$.

9) I) $9x^2 - 4y^2 = 36$

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

II) $f^2 = a^2 + b^2$

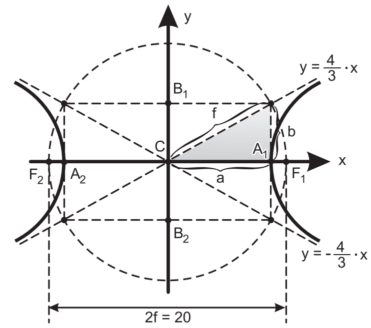
$f^2 = 4 + 9 \Rightarrow f = \sqrt{13}$ e $2f = 2\sqrt{13}$

III) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ e $2a = 4$

IV) $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ e $2b = 6$

V) $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

10)



A partir do enunciado, temos:

- Centro: C(0; 0)
- Distância focal: $2 \,.\, f = 20 \Leftrightarrow f = 10$
- Assíntotas:

$y = \pm \dfrac{4}{3} \,.\, x \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3}$ ①

Como $f^2 = a^2 + b^2$, então:

$10^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100$ ②

Seja o sistema formado pelas equações ① e ②:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 & ① \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow b = \dfrac{4a}{3} & ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, vem:

$a^2 + \left(\dfrac{4a}{3}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{16a^2}{9} = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9a^2 + 16a^2 = 900 \Leftrightarrow 25a^2 = 900 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 6$

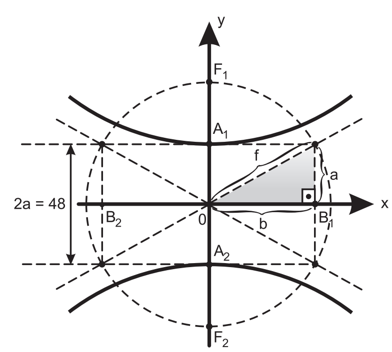
Em ②, resulta $b = \dfrac{4 \,.\, 6}{3} \Leftrightarrow b = 8$

A equação da hipérbole, nas condições do problema, é:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que resulta:

$\dfrac{x^2}{6^2} - \dfrac{y^2}{8^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

11)



A partir do enunciado, temos:

- Centro: C(0; 0)
- Eixo transverso: $2a = 48 \Leftrightarrow a = 24$
- Excentricidade: $e = \dfrac{f}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{13}{12} = \dfrac{f}{24} \Leftrightarrow f = 26$

Como $f^2 = a^2 + b^2$, então:

$26^2 = 24^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 100 \Leftrightarrow b = 10$

A equação da hipérbole, nas condições do problema, é:

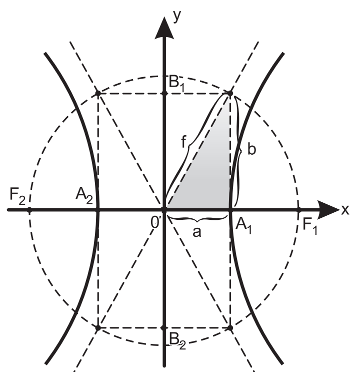
$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, que resulta:

$\dfrac{y^2}{24^2} - \dfrac{x^2}{10^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{576} - \dfrac{x^2}{100} = 1$

12) Se $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$, então:

$a = 2$, $b = 3$ e centro C(0; 0).

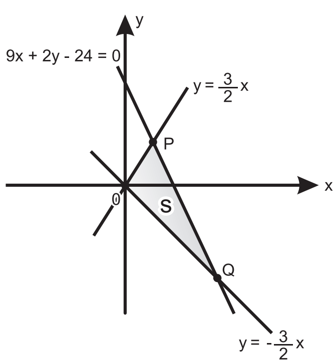
A hipérbole terá o gráfico a seguir:



As equações das assíntotas serão:

$y = \pm \dfrac{b}{a}\, x \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}\, x$ ou $y = -\dfrac{3}{2}\, x$.

As assíntotas e a reta dada constituem um triângulo cujos vértices são obtidos pelas intersecções dessas 3 retas, assim:



As coordenadas de P serão as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}\,.\,x \\ 9x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas (2; 3)

As coordenadas de Q serão as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}\,.\,x \\ 9x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$$

O ponto Q tem coordenadas (4; – 6)

A área do triângulo OPQ de vértices (0; 0), (2; 3) e (4; – 6) será:

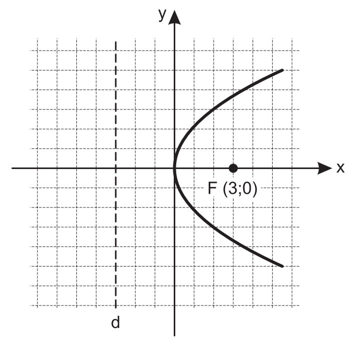
$$S = \frac{1}{2}\,|D| \text{ onde } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -24$$

Portanto:

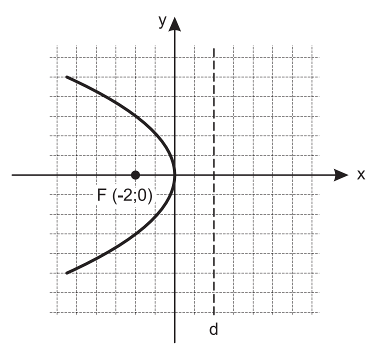
$$S = \frac{1}{2}\,|-24| \Rightarrow S = 12$$

MÓDULO 55
PÁRABOLA

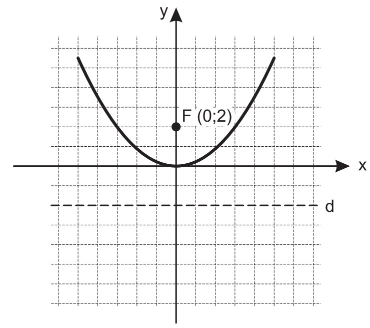
1) a) o vértice é o ponto (0; 0)
b) a equação da diretriz é $x = -3$
c) Sendo $f = 3$, a equação da parábola será $y^2 = 12x$
d) ver imagem



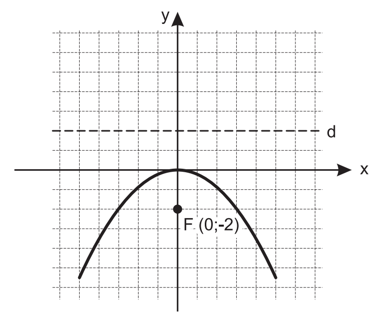
2) a) o vértice é o ponto (0; 0)
b) a equação da diretriz é $x = 2$
c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $y^2 = -8x$
d) ver imagem



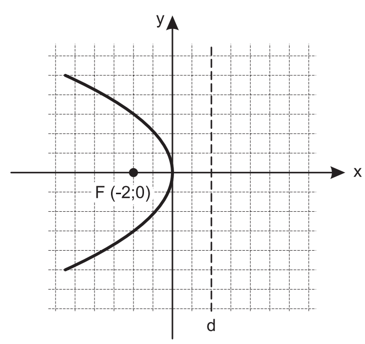
3) a) o vértice é o ponto (0; 0)
b) a equação da diretriz é $y = -2$
c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $x^2 = 8y$
d) ver imagem



4) a) o vértice é o ponto (0; 0)
b) a equação da diretriz é $y = 2$
c) Sendo $f = 2$, a equação da parábola será $x^2 = -8y$
d) ver imagem

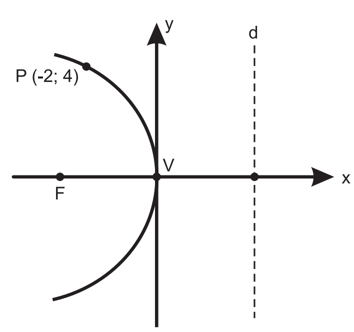


5) I) $y^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -8x$
II) O vértice é o ponto (0; 0).
III) $4f = 8 \Leftrightarrow f = 2$



IV) A equação da diretriz é $x = 2$
V) O foco é F(– 2; 0)

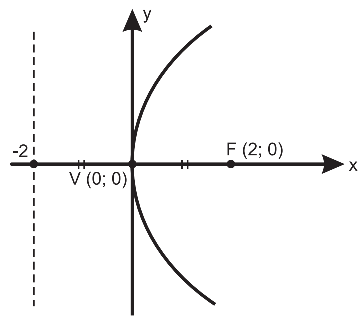
6)



Pelo enunciado, a parábola tem o aspecto da figura acima, portanto sua equação é

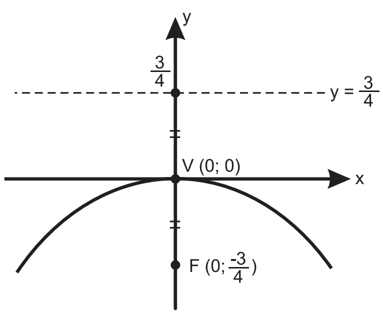
do tipo: $y^2 = -4 \cdot f \cdot x$.
Então: $P(-2; 4) \in y^2 = -4 \cdot f \cdot x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4^2 = -4f \cdot (-2) \Leftrightarrow f = 2$
Para f = 2, nas condições do problema, temos:
- equação reduzida: $y^2 = -8 \cdot x$
- foco: $F(-2; 0)$
- diretriz: $x = 2$

7) A equação $y^2 = 8 \cdot x$ representa uma parábola com diretriz paralela ao eixo das ordenadas, vértice na origem e voltada para a direita.



Comparando a equação $y^2 = 4 \cdot f \cdot x$ com a equação $y^2 = 8 \cdot x$, teremos:
$4 \cdot f = 8 \Leftrightarrow f = 2$. Dessa forma, o foco é $F(2; 0)$ e a diretriz tem equação $x = -2$.

8) A equação $x^2 = -3 \cdot y$ representa uma parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, com vértice na origem e voltada para baixo.



Comparando a equação $x^2 = -4 \cdot f \cdot y$ com a equação $x^2 = -3 \cdot y$, teremos:
$4 \cdot f = 3 \Leftrightarrow f = \dfrac{3}{4}$. Dessa forma, o vértice é $V(0; 0)$, o foco é $F\left(0; -\dfrac{3}{4}\right)$ e a diretriz tem equação $y = \dfrac{3}{4}$.

9) A parábola possui centro $C(0; 0)$, reta diretriz de equação $x = -2$ e eixo de simetria na horizontal. Assim, sua equação é $y^2 = 4 \cdot 2x \Leftrightarrow y^2 = 8x$.
Resposta: A

MÓDULO 56
PARÁBOLA

1) I) $V(4; 3)$
II) $FV = Vd = f = 2$
III) A equação é do tipo
$(x - g)^2 = -4f(y - h)$ e, portanto,
$(x - 4)^2 = -8(y - 3)$
IV) A equação da diretriz é $y = 5$

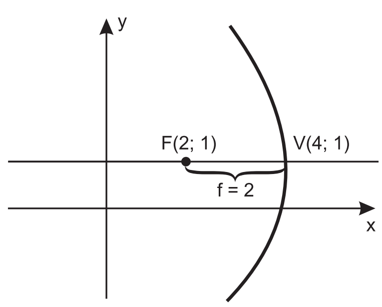
2) I) $x^2 = -4fy$ e $x^2 = -20y \Leftrightarrow f = 5$
II) O vértice é a origem do sistema cartesiano, a parábola está "voltada para baixo" e f = 5
III) O foco da parábola é o ponto $(0; -5)$ e a equação da diretriz é $y = 5$
Resposta: C

3) Se $P(10; 5)$ é um dos pontos da parábola de equação $x^2 = 4fy$, então:
$10^2 = 4 \cdot f \cdot 5 \Leftrightarrow f = 5$
A equação da parábola, portanto, é:
$x^2 = 4 \cdot 5 \cdot y \Leftrightarrow x^2 = 20y$
Resposta: B

4) I) A equação da parábola é do tipo
$(y - h)^2 = 4f(x - g)$
II) O vértice é $V(3; 2)$ e, portanto, $g = 3$ e $h = 2$
III) $VF = f = 2$
IV) A equação é $(y - 2)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 3)$
Resposta: C

5) A equação da parábola é do tipo $x^2 = 4fy$, e f = 3. Logo, a equação é $x^2 = 12y$
Resposta: E

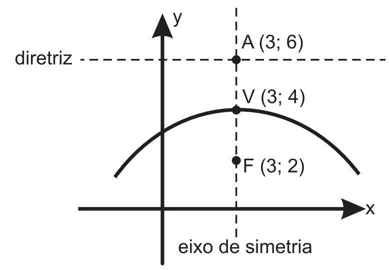
6)



A partir da figura, temos:
$(y - 1)^2 = -4 \cdot 2 \cdot (x - 4)$
$(y - 1)^2 = -8 \cdot (x - 4)$
Resposta: E

7) a) $V_F = f = 3 \Rightarrow p = 2 \cdot f = 6$ é o parâmetro.
b) A diretriz é a reta vertical, tal que $Vd = VF = f = 3$, e está localizada para a direita da parábola; assim, sua equação é $x = 2$.
c) Sendo $V(-1; -2)$, $f = 3$, a equação da parábola indicada é:
$(y - h)^2 = -4 \cdot f \cdot (x - g) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y + 2)^2 = -12 \cdot (x + 1)$.

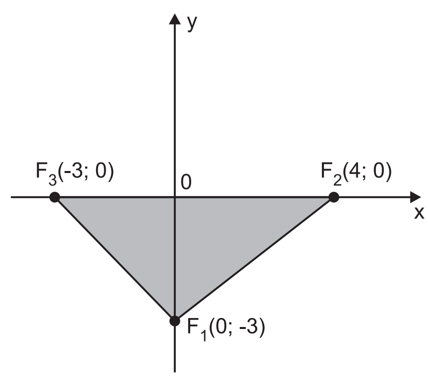
8)



Pelo enunciado conclui-se que a parábola tem eixo de simetria vertical e é voltada para baixo, portanto, sua equação é do tipo: $(x - g)^2 = -4 \cdot f \cdot (y - h)$
Como $V(3; 4)$ e $F(3; 2)$, então $f = VF = 2$, e a equação da parábola resulta:
$(x - 3)^2 = -8 \cdot (y - 4)$
A equação da mediatriz será $y = 6$, visto que se trata de uma reta horizontal que passa pelo ponto $A(3; 6)$.

9) 1º) Focos das parábolas
$x^2 = -12 \cdot y \to F_1\ (0; -3)$
$y^2 = 16 \cdot x \to F_2\ (4; 0)$
$y^2 = -12 \cdot x \to F_3\ (-3; 0)$

2º) Área do $\Delta F_1F_2F_3$

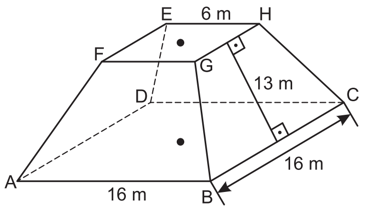


$$A = \frac{F_2F_3 \cdot 0F_1}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

Resposta: E

FRENTE 2
MÓDULO 45
TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS

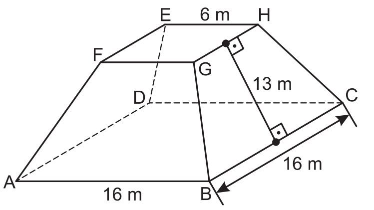
1)



$A_L = 4 \,.\, A_{BCHG} = 4 \,.\, \dfrac{(16 + 6)\,.\,13}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_L = 572\ m^2$

2)



I) $A_B = 16^2 \Rightarrow A_B = 256\ m^2$

II) $A_b = 6^2 \Rightarrow A_b = 36\ m^2$

III) $A_L = 4 \,.\, \dfrac{(16 + 6)\,.\,13}{2} \Rightarrow$

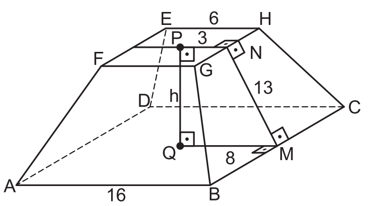
$\Rightarrow A_L = 572\ m^2$

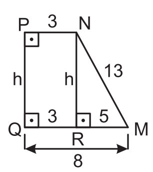
IV) $A_T = A_B + A_b + A_L \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_T = 256 + 36 + 572 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 864\ m^2$

3)





No triângulo MNR, temos:

$13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12\ m$

4) $V = \dfrac{h}{3} \,.\, (A_B + A_b + \sqrt{A_B \,.\, A_b}\,) =$

$= \dfrac{12}{3} \,.\, (256 + 36 + \sqrt{256 \,.\, 36}\,) \Rightarrow$

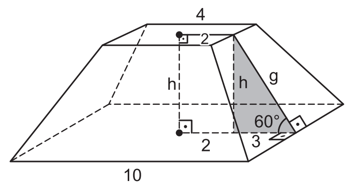
$\Rightarrow V = 1552\ m^3$

5) Sendo S a área da secção, temos:

$\dfrac{S}{225} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S = 100\ cm^2$

Resposta: D

6)



1) $\cos 60° = \dfrac{3}{g} \Leftrightarrow g = 6$

2) $A_B = 10^2 = 100$

3) $A_b = 4^2 = 16$

4) $A_\ell = 4 \,.\, \dfrac{(10 + 4)\,.\,6}{2} = 168$

5) $A_t = A_\ell + A_B + A_b$

Assim: $A_t = 168 + 100 + 16 \Leftrightarrow A_t = 284$

Resposta: E

7) O volume V do tronco de pirâmide é igual à diferença entre os volumes das pirâmides ABDE e AIJK.

Assim,

$V = \dfrac{1}{3} \,.\, \dfrac{1.\,1}{2} \,.\, 1 - \dfrac{1}{3} \,.\, \dfrac{\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2}}{2} \,.\, \dfrac{1}{2} =$

$= \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{48} = \dfrac{7}{48}\ m^3$

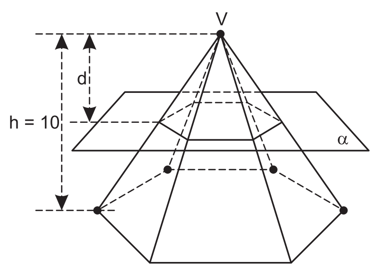
8) Sendo v o volume da pirâmide menor, temos:

$\dfrac{v}{V} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}D}{D}\right)^3 \Rightarrow v = \dfrac{1}{8} \,.\, V$

Assim, $V - v = V - \dfrac{1}{8}V = \dfrac{7}{8}V$

Resposta: A

9)



Se V_1 o volume da pirâmide de altura "d" e V o volume da pirâmide de altura h = 10 m, tem-se

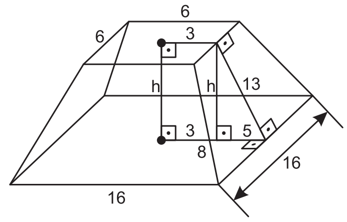
$\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{8}$ e $\dfrac{V_1}{V} = \left(\dfrac{d}{h}\right)^3$

Assim,

$\left(\dfrac{d}{10\ m}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{d}{10\ m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d = 5\ m$

Resposta: C

10)



Sendo h a medida da altura do tronco de pirâmide, temos:

$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h = 12\ cm$

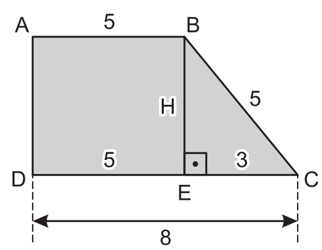
O volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \dfrac{12}{3} \,.\, (16^2 + 6^2 + \sqrt{16^2 \,.\, 6^2}\,) = 1552\ cm^3$

Resposta: B

MÓDULO 46
TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS

1) Separando o trapézio e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos:



$5^2 = H^2 + 3^2 \Rightarrow H = 4\ cm$

2) I) Altura do tronco: $5^2 = H^2 + 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H = 4\ cm$

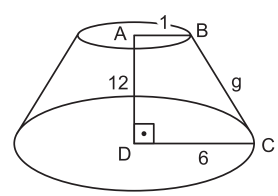
II) Área da base maior: $A_B = \pi \,.\, 4^2 = 16\pi\ cm^2$

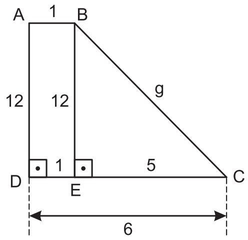
III) Área da base menor: $A_b = \pi \,.\, 1^2 = \pi\ cm^2$

IV) Volume: $V = \dfrac{4}{3}\ (\pi + 16\pi + \sqrt{\pi.16\pi}\,) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 28\pi\ cm^3$

3) Considere o tronco de cone da figura abaixo e o trapézio ABCD.





I) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos:
$g^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow g = 13$ cm

II) Área da base maior: $A_B = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ cm^2

III) Área da base menor: $A_b = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2

IV) Área lateral: $A_L = \pi(R + r)\,g =$
$= \pi(6 + 1).13 = 91\pi$ cm^2

V) Área total: $A_T = A_B + A_b + A_L =$
$= 36\pi + \pi + 91\pi = 128\pi$ cm^2

4) I) Área da base maior: $A_B = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

II) Área da base menor: $A_b = \pi \cdot 1^2 = \pi$ cm^2

III) Volume:

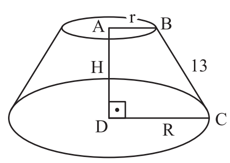
$$31\pi = \frac{H}{3}(\pi + 25\pi + \sqrt{\pi.25\pi}) \Leftrightarrow$$

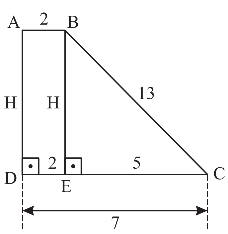
$\Leftrightarrow H = 3$ cm

5) I) Área da base maior:
$A_B = \pi \cdot R^2 = 49\pi$ cm$^2 \Leftrightarrow R = 7$ cm

II) Área da base menor:
$A_b = \pi \cdot r^2 = 4\pi$ cm$^2 \Leftrightarrow r = 2$ cm

III) Considere o tronco de cone da figura abaixo e o trapézio ABCD. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCE, temos:





$H^2 + 5^2 = 13^2 \Leftrightarrow H = 12$ cm

IV) Área lateral: $A_L = \pi(R + r)g =$
$= \pi(7 + 2) \cdot 13 = 117\pi$ cm^2

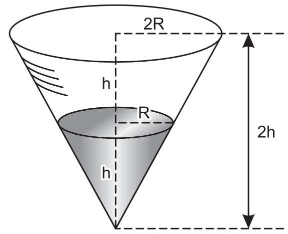
V) Volume:

$$V = \frac{12}{3}(4\pi + 49\pi + \sqrt{4\pi.49\pi}) =$$

$= 268\pi$ cm^3

Resposta: D

6)



1) $V = \dfrac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2h \Leftrightarrow \pi R^2 h = \dfrac{3V}{8}$

2) $V_{suco} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

Assim: $V_{suco} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3V}{8} \Leftrightarrow V_{suco} = \dfrac{V}{8}$

Resposta: C

7) $V_{balde} = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V_{balde} = \dfrac{\pi \cdot 45}{3}(196 + 81 + 126) \Leftrightarrow$

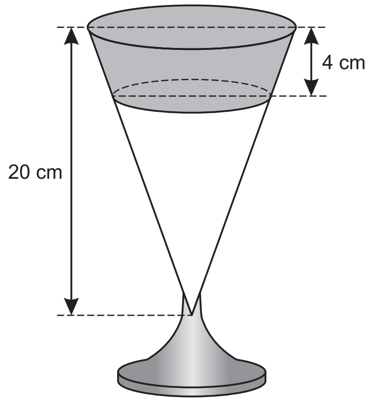
$\Leftrightarrow V_{balde} = 6045\,\pi$

Resposta: B

8) $\dfrac{V_f}{V_i} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \dfrac{V_f}{V_i} = \dfrac{1}{8}$

Resposta: E

9) Sejam V_E, V_S e V_C, respectivamente, os volumes da espuma, da parte consistente de sorvete e do copo.
Da semelhança dos sólidos VAB e VCD, conforme a figura, temos:



$$\frac{V_S}{V_C} = \left(\frac{16}{20}\right)^3 \Leftrightarrow V_S = \frac{64}{125} \cdot V_C$$

Como

$$V_E = V_C - V_S = V_C - \frac{64}{125} \cdot V_C =$$

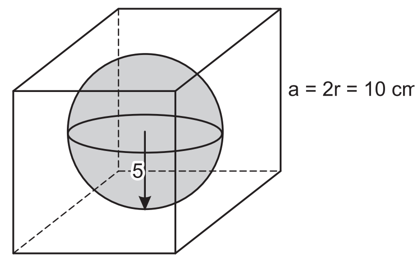
$$= \frac{61}{125} \cdot V_C = 0{,}488 \cdot V_C$$

tem-se: $V_E = 48{,}8\% \cdot V_C \cong 50\% \cdot V_C$

Resposta: C

MÓDULO 47
INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS I

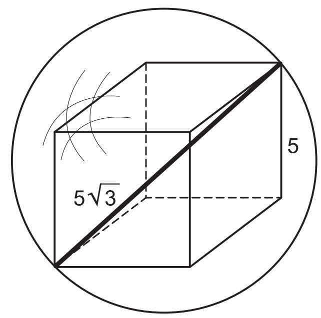
1)



I) A aresta do cubo mede a = 2r = 10 cm.

II) O volume do cubo é
$V = a^3 = 10^3 = 1000$ cm^3

2)



I) A diagonal do cubo e o diâmetro da superfície esférica são iguais a $5\sqrt{3}$ cm.

II) O raio da superfície esférica é

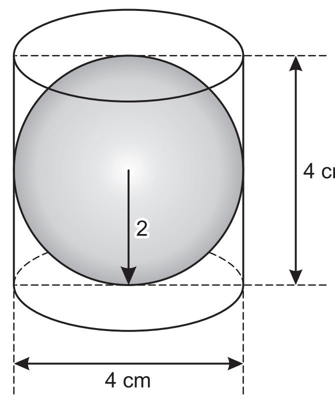
$$R = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$$

III) A área da superfície esférica é:

$$A = 4.\pi.R^2 = 4\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$= 75\pi$ cm^2

3) I) Sendo de 2 cm o raio da esfera, e, portanto, 4 cm o seu diâmetro, o raio do cilindro equilátero circunscrito é de 2 cm e a sua altura, 4 cm.
Veja imagem.



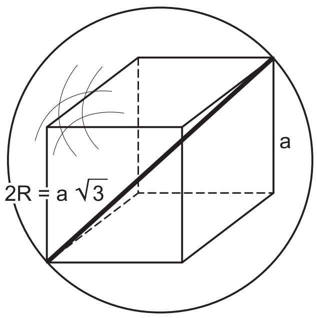
II) A área da base do cilindro é

$A_B = \pi R^2 = \pi\, 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

III) O volume é

$V = A_B \,.\, H = 4\pi \,.\, 4 = 16\pi \text{ cm}^3$

4)



I) Sendo **R** o raio da superfície esférica e **a** a aresta do cubo, tem-se

$$2R = a\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Área da superfície esférica:

$A_{sup.esf.} = 4\pi R^2$

III) Área total do cubo: $A_{totalcubo} = 6 \,.\, a^2$

IV) A razão entre a área da superfície esférica e a área total do cubo nela inscrito é

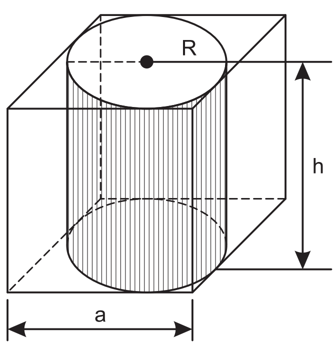
$$\frac{A_{sup.esf.}}{A_{totalcubo}} = \frac{4\pi R^2}{6a^2} =$$

$$= \frac{4 \,.\, \pi}{6} \,.\, \left(\frac{R}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \,.\, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: C

5)



Sendo "a" a medida da aresta do cubo, "R" e "h", respectivamente, as medidas do raio e da altura do cilindro, temos: $a = h = 2R$.

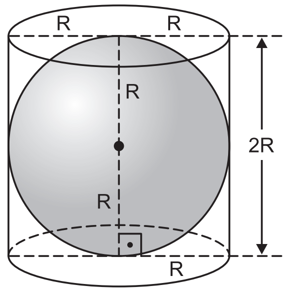
Assim, sendo A_{cubo} e $A_{cilindro}$ as áreas totais do cubo e do cilindro, temos:

$$\frac{A_{cubo}}{A_{clindro}} = \frac{6a^2}{2\pi R^2 + 2\pi R \,.\, h} =$$

$$= \frac{6 \,.\, (2R)^2}{2\pi R^2 + 2\pi R \,.\, 2R} = \frac{24R^2}{6\pi R^2} = \frac{4}{\pi}$$

Resposta: C

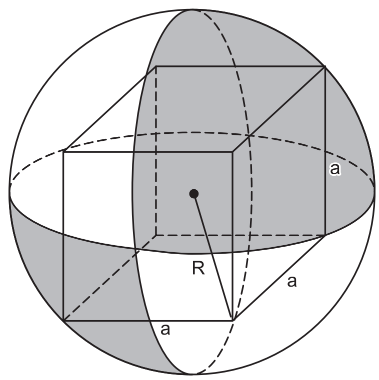
6)



$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2(2R)} = \frac{4\pi R^3}{6\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

Resposta: B

7)



Sendo a a medida da aresta do cubo, d a medida da diagonal do cubo e R o raio da esfera, temos:

I) $6a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

II) $2R = d \Leftrightarrow R = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \,.\, \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = 1$$

Assim, o volume V da esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi \,.\, 1^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{4\pi}{3}$$

Resposta: B

8) Sendo R a medida do raio da base do cone e d a medida da diagonal da face do cubo tem -se:

1) $V_{cubo} - V_{cone} = 1 - \dfrac{\pi}{12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = 1 - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8R^3\left(1 - \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$$

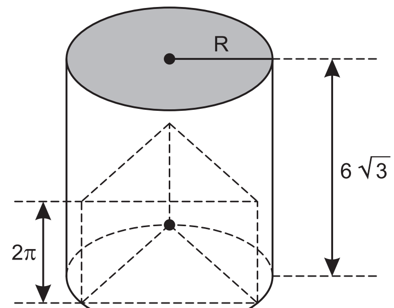
$$\Leftrightarrow 8R^3 = 1 \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}$$

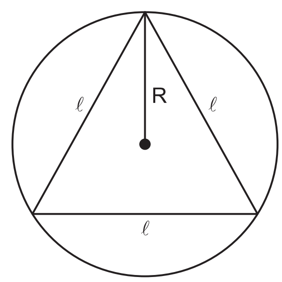
2) $d = 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow d = 2 \,.\, \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = \sqrt{2}$

Resposta: A

9)





Sendo ℓ a aresta da base do prisma e R o raio da base do cilindro, temos:

1) $V_{prisma} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \,.\, 2\pi =$

$$= \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3} \,.\, 2\pi}{4} = \frac{3\sqrt{3} \,.\, \pi}{2} \,.\, R^2$$

2) $V_{cilindro} = \pi R^2 \,.\, 6\sqrt{3}$

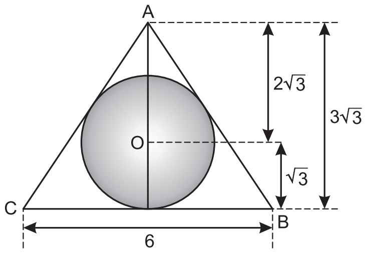
3) A razão entre o volume de água que transbordou e o volume do cilindro é

$$\frac{V_{prisma}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{3\sqrt{3} \,.\, \pi}{2} \,.\, R^2}{6 \,.\, \sqrt{3} \,.\, \pi \,.\, R^2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: C

MÓDULO 48
INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS II

1)
I)



A distância do centro O à base é o raio da esfera $\sqrt{3}$. A distância do centro O ao vértice A é $2\sqrt{3}$ e, portanto, a altura H é $3\sqrt{3}$. Lembrando que $H = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2}$,

tem-se $\dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow BC = 6$.

Assim, o raio da base do cone é R = 3.

II) A área da base do cone é:

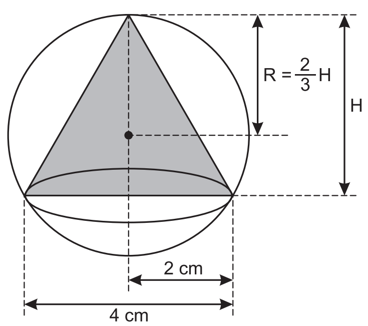
$A_B = \pi R^2 = \pi \,.\, 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

III) O volume do cone é:

$V = \dfrac{1}{3} A_B \,.\, H = \dfrac{1}{3} \,.\, 9\pi \,.\, 3\sqrt{3} =$

$= 9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

2)



I) A altura H do triângulo equilátero é

$H = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm

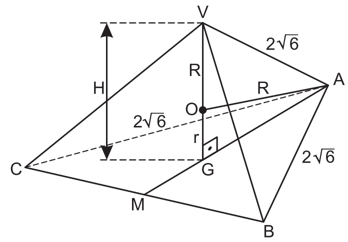
II) Pela propriedade do baricentro, a distância do centro ao vértice é

$R = \dfrac{2}{3} H = \dfrac{2}{3} \,.\, 2\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

III) A área da superfície esférica é

$A = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{64\pi}{3} \text{ cm}^2$

3)



I) $H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \dfrac{2.\sqrt{6}.\sqrt{6}}{3} = 4$

II) AM é a altura do triângulo equilátero ABC cujo lado é $\ell = 2\sqrt{6}$, assim:

$AM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \dfrac{2.\sqrt{6}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2}$

III) G é o baricentro do triângulo ABC, assim:

$AG = \dfrac{2}{3} \,.\, AM = \dfrac{2}{3} \,.\, 3 \,.\, \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

IV) Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOG, temos:

$R^2 = (4 - R)^2 + (2\sqrt{2})^2$

$R^2 = 16 - 8R + R^2 + 8$

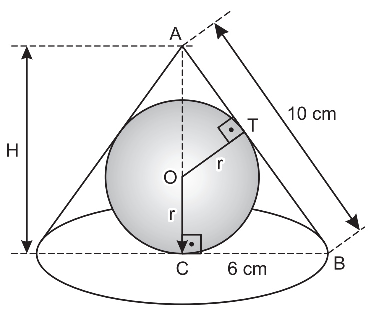
$8R = 24$

$R = 3$

V) Como $r = 4 - R$, então, $r = 4 - 3 = 1$

Portanto, temos: a) H = 4
b) r = 1
c) R = 3

4)



I) No triângulo ABC, retângulo em C, temos: $H^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow H = 8$

II) Da semelhança dos triângulos ABC e AOT, temos:

$\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{OT}{BC} \Leftrightarrow$

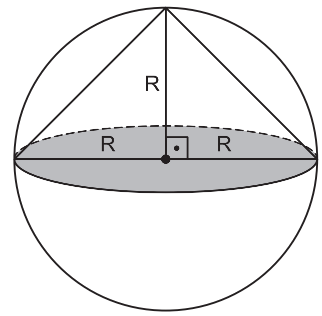
$\Leftrightarrow \dfrac{8 - r}{10} = \dfrac{r}{6} \Leftrightarrow r = 3$

III) O volume V da esfera inscrita é:

$V = \dfrac{4\pi\, 3^3}{3} \Leftrightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$

Resposta: A

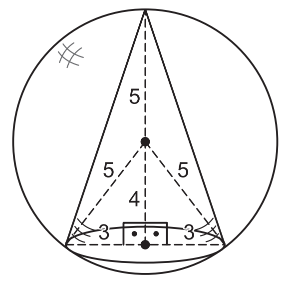
5)



$$\frac{V_{esf.}}{V_{cone}} = \frac{\frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, R^3}{\frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, R^2 \,.\, R} = 4 \Rightarrow V_{esf.} = 4 \,.\, V_{cone}$$

Resposta: B

6)



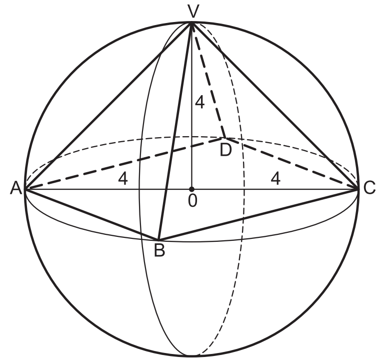
$$\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^2 h}{4R^3}$$

Assim:

$$\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{3^2(5 + 4)}{4 \,.\, 5^3} = \frac{81}{500} = 16{,}2\%$$

Resposta: E

7)



O volume da esfera, em metros cúbicos, é:

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \dfrac{4}{3} \cdot 3 \cdot 4^3 = 256$

O volume da pirâmide, em metros cúbicos, é:

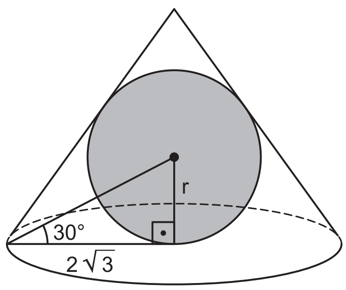
$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{8^2}{2} \cdot 4 = \dfrac{128}{3}$

Assim:

$\dfrac{V_{esfera}}{V_{pirâmide}} = \dfrac{256}{\dfrac{128}{3}} \Leftrightarrow V_{esfera} = 6 \cdot V_{pirâmide}$

Resposta: A

8)



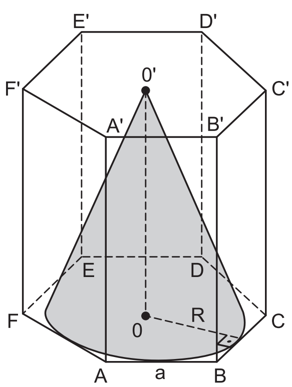
Sendo r o raio da esfera, temos:

I) $\text{tg } 30° = \dfrac{r}{2\sqrt{3}} \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$

II) $V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$

Resposta: C

9)



Sendo a; 2a e R, respectivamente, as medidas da aresta da base, altura e do raio da base do cone reto inscrito no prisma temos:

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ pois o triângulo OAB é equilátero.

$V_{prisma} = 6 \cdot A_{\Delta OAB} \cdot 2a = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a =$
$= 3a^3\sqrt{3}$

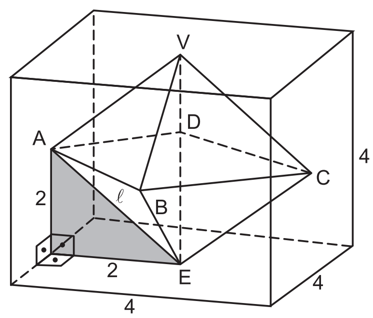
$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot 2a =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2a = \dfrac{\pi a^3}{2}$

$\dfrac{V_{prisma}}{V_{cone}} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{\dfrac{\pi a^3}{2}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$

Resposta: D

10)



Sendo ℓ a medida, em centímetros, da aresta do octaedro regular, temos:
$\ell^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

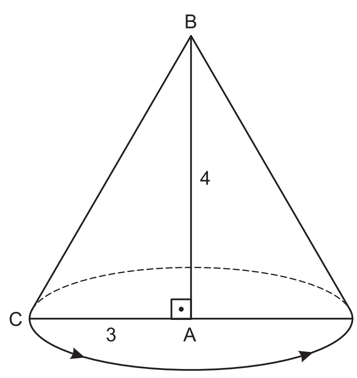
O volume do octaedro regular é o dobro do volume da pirâmide regular VABCD de aresta da base $\sqrt{2}$ cm e altura 2 cm. Assim, sendo V o volume do octaedro, em centímetros cúbicos, temos:

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 2 = \dfrac{32}{3} \text{ cm}^3$

Resposta: B

MÓDULO 49
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

1)



I) O sólido gerado é um cone de raio da base 3 cm e altura 4 cm.

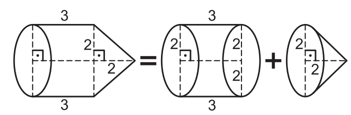
II) A área da base é:

$AB = \pi R^2 = \pi.3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

III) O volume é: $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_B \cdot H =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$

2) I) O sólido gerado é uma composição de dois outros sólidos básicos: um cilindro de raio da base 2 cm e altura 3 cm e um cone de raio da base 2 cm e altura 2 cm, ambos com eixo em posição horizontal.



II) Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi.2^2.3 = 12\pi \text{ cm}^3$

III) Volume do cone:

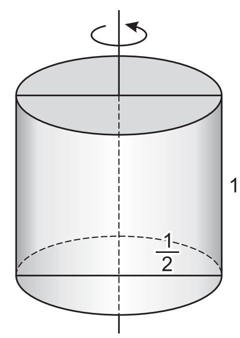
$V_{cone} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \dfrac{8\pi}{3} \text{ cm}^3$

IV) Volume do sólido:

$V_{sólido} = V_{cilindro} + V_{cone} =$

$= 12\pi + \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{44\pi}{3} \text{ cm}^3$

3) O sólido gerado é um cilindro equilátero de raio $\dfrac{1}{2}$ cm e altura 1 cm.

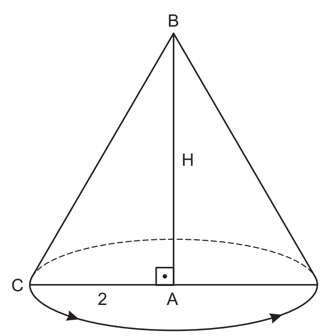


A área lateral do cilindro é:

$A = 2\pi Rh = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \pi \text{ cm}^2$

Resposta: E

4)



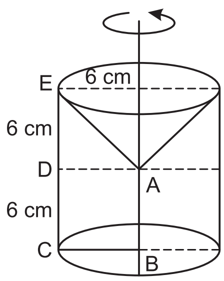
I) A área do triângulo retângulo é
$A_\Delta = \dfrac{2.H}{2} = 6$, em que H é a medida do outro cateto, logo, H = 6 cm.

II) O sólido gerado é um cone circular reto de raio da base medindo 2 cm e altura H = 6 cm.

III)Seu volume é
$V = \dfrac{1}{3}\ \pi\ 2^2.6 = 8\pi\ cm^3$

Resposta: A

5)



O volume do sólido gerado é o volume de um cilindro circular reto de raio da base 6 cm e altura 12 cm menos o volume de um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 6 cm.

$V_{sólido} = V_{cilindro} - V_{cone} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{sólido} = \pi\ .\ 6^2\ .\ 12 - \dfrac{1}{3}\ .\ \pi\ .\ 6^2\ .\ 6 \Leftrightarrow$

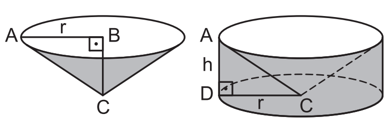
$\Leftrightarrow V_{sólido} = 360\ \pi cm^3$

Resposta: A

6) $V = \dfrac{270°}{360°}\ .\ \dfrac{1}{3}\ .\ \pi\ .\ 6^2\ .\ 4 \Leftrightarrow V = 36\ \pi$

Resposta: E

7) Sejam r a medida de $\overline{AB}$, h a medida de $\overline{BC}$, V_{ABC} e V_{ADC} os volumes dos sólidos gerados pela rotação completa dos triângulos ABC e ADC em torno de $\overline{BC}$.



Assim,

I) $V_{ABC} = V_{cone} = \dfrac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h$

II) $V_{ADC} = V_{cilindro} - V_{cone} =$

$= \pi\ r^2\ h - \dfrac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h = \dfrac{2}{3}\ \pi\ r^2\ h$

e, portanto, a razão é: $\dfrac{\dfrac{1}{3}\pi r^2 h}{\dfrac{2}{3}\pi r^2 h} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: E

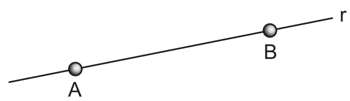
MÓDULO 50
GEOMETRIA DE POSIÇÃO – ENTES PRIMITIVOS E POSTULADOS

1) a) O ponto, a reta e o plano.

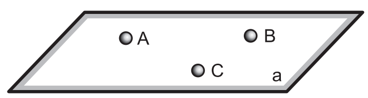
b) Infinitos.

c) Infinitos.

d) Uma única reta.



e) Um único plano.



2) a) Verdadeira. Entes primitivos são aceitos sem definição. São conhecidos por sua própria natureza e pela convivência que temos com eles.

b) Falsa. Reta não tem definição. É um ente primitivo.

c) Verdadeira. Ponto não tem dimensão e, portanto, entre dois pontos distintos sempre "cabe" mais um. Observe que o conceito "estar entre" também é um conceito primitivo.

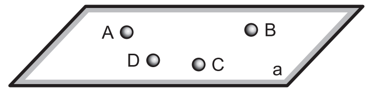
d) Verdadeira. O postulado da determinação da reta assegura que "dois pontos distintos determinam uma reta".

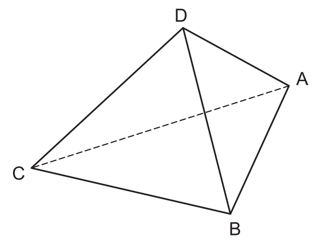
e) Falsa. Para que três pontos determinem um plano, eles precisam ser não colineares.

3) Sim. O postulado da inclusão assegura que, "se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então todos os pontos dessa reta pertencem a esse plano, isto é, a reta está contida nesse plano".

4) Não. Os pontos precisam ser não colineares (não alinhados).

5) Não. Quatro pontos podem ou não ser coplanares. Na primeira figura, os pontos A, B, C e D são coplanares, porém, na segunda figura, eles não são.



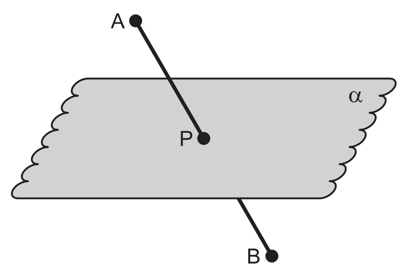


6) $C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!3!} = \dfrac{10!}{7!3!} = 120$

7) A reta é um ente primitivo e, portanto, não tem definição.
Resposta: D

8) A proposição (I) é verdadeira (postulado 1a de existência).
A proposição (II) é verdadeira (postulado 1b de existência).
A proposição (III) é verdadeira.
Resposta: A

9)



$\overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$
Resposta: E

MÓDULO 51
RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

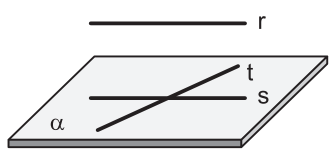
1) Três pontos distintos precisam ser não colineares (não alinhados) para determinar um plano.
Resposta: B

2) a) Falsa. As retas podem ser reversas.
b) Falsa. As retas podem ser paralelas distintas.
c) Falsa. Somente retas reversas não são coplanares.
d) Falsa. Somente retas reversas não são coplanares.
Resposta: E

3) Por um ponto fora de um plano, podem ser traçadas infinitas retas paralelas a esse plano.
Resposta: E

4) $C_{4;3} = \binom{4}{3} = 4$. Os planos determinados são ABC (plano α), ABD, ACD e BCD.
Resposta: C

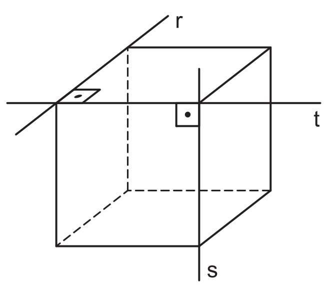
5) Existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.



Resposta: C

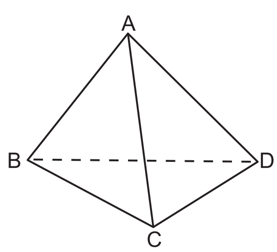
6) Duas retas são reversas quando não são coplanares, ou seja, quando não existe plano que contém ambas.
Resposta: A

7)



Reposta: C

8)



Considerando-se as arestas do tetraedro ABCD da figura, são reversas as dos seguintes pares: ($\overline{AB}$; $\overline{CD}$), ($\overline{AD}$; $\overline{BC}$) e ($\overline{AC}$; $\overline{BD}$), num total de 3 pares.
Resposta: B

MÓDULO 52
PARALELISMO

1) a) Falsa. As retas podem ser coincidentes.
b) Falsa. As retas podem ser reversas.
c) Verdadeira. É a própria definição de retas reversas.
d) Verdadeira. É a definição de reta paralela a plano.
e) Verdadeira. De fato, as intersecções estão no mesmo plano e não têm pontos em comum; portanto, são paralelas.

2) a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira. A intersecção de planos secantes é uma reta e, para determinar uma reta, bastam dois pontos distintos.

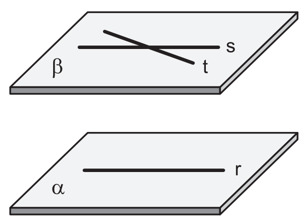
3) Se os planos são paralelos, então:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} \Leftrightarrow$$

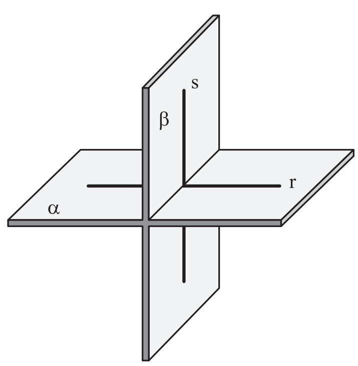
$$\Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{x}{9} = \frac{8}{y} \Leftrightarrow x = 6 \text{ e } y = 12$$

Portanto, o valor de EH é 27
Resposta: B

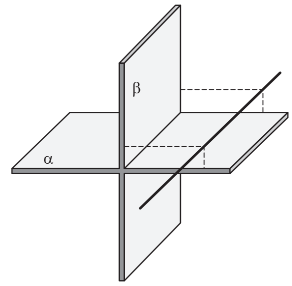
4) a) Verdadeira. r é paralela a s e reversa a t.



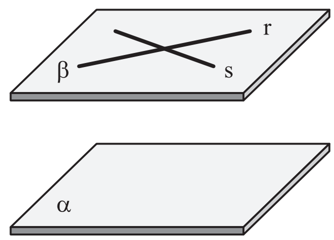
b) Verdadeira. r de α é concorrente com s de β.



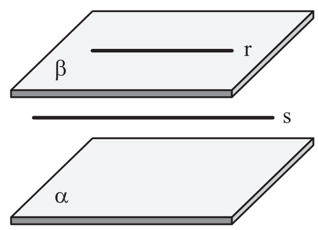
c) Falsa. Eles podem ser secantes.



d) Verdadeira. r e s de β são concorrentes entre si e paralelas a α. Os planos α e β são paralelos entre si.



e) Verdadeira. r é paralela a α e está contida em β; s é paralela a ambos.



Resposta: C

5) Se os planos são paralelos, então:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{5}{x} = \frac{6}{y} \Leftrightarrow x = 2{,}5 \text{ e } y = 3 \text{ e}$$

o valor de $(y - x)$, em cm, é 0,5

6) Se a reta r é paralela ao plano α, então nenhuma reta de α intercepta a reta r. Portanto, existem em α retas paralelas a r e retas reversas a r.
Resposta: B

MÓDULO 53
PERPENDICULARISMO

1) a) Se duas retas são paralelas a uma terceira, então são paralelas entre si.
b) Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à sua intersecção.

c) Dois planos paralelos interceptados por um terceiro determinam intersecções paralelas.
d) Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos correspondentes diretamente proporcionais.
e) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.

2) a) Se dois planos são paralalelos distintos, então toda reta de um é paralela ou reversa às retas do outro.
b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela ou reversa às retas do plano.
c) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir um único plano paralelo a esse plano.
d) Por um ponto não pertencente a um plano, podemos conduzir infinitas retas paralelas a esse plano.
e) Por um ponto não pertencente a uma reta, podemos conduzir uma única reta paralela a essa reta.

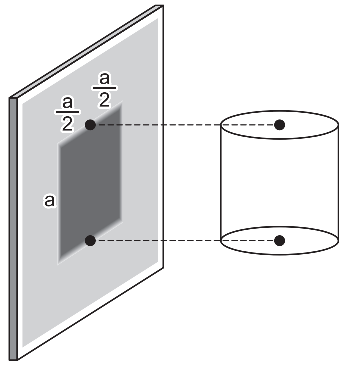
3) a) Se uma reta é ortogonal a duas concorrentes de um plano, ela é perpendicular ao plano.
b) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas distintas de um plano, então ela está contida nesse plano.
c) Se uma reta é perpendicular a um plano, então todo plano que a contém é perpendicular a esse plano.
d) Por um ponto, existe uma única reta perpendicular a um plano.
e) Se uma reta forma um ângulo de 20º com uma reta perpendicular a um plano, então ela forma 70º com o plano.

4) a) Falsa. Podem ser secantes.
b) Falsa. Pode ser paralela ou incidente sem ser perpendicular.
c) Falsa. Podem ser concorrentes e até reversas.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Pode ser ortogonal.
Resposta: D

5) Por um ponto não pertencente a um plano, pode-se traçar uma e só um reta perpendicular a esse plano e infinitos planos perpendiculares ao referido plano.
Respostas: C

MÓDULO 54
PROJEÇÕES ORTOGONAIS

1)



O volume do cilindro é

$V = A_B \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h =$

$= \pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot a = \dfrac{\pi . a^3}{4}$

Resposta: D

2) I) $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 5^2 + 4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BD = \sqrt{41}$

II) $AD^2 = BD^2 + AB^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AD^2 = (\sqrt{41})^2 + 3^2 \Leftrightarrow AD = 5\sqrt{2}$

3) a) Falso. Podem ser concorrentes e até reversas.
b) Falso. Eles podem ser secantes.
c) Falso. Podem ser concorrentes e até reversas.
d) Falso. Podem ser coincidentes, secantes e até paralelos entre si.
e) Verdadeiro.
Resposta: E

4) I) Falsa. São paralelas entre si.
II) Falsa. Pode ser reversa à segunda.
III) Verdadeira.
IV) Falsa. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela ou reversa às retas do plano.
Resposta: C

5) A projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar numa circunferência, ou numa elipse ou ainda num segmento de reta.
Para que resulte num segmento de reta, basta que a circunferência esteja contida num plano perpendicular a α.
Resposta: E

6) Sendo $s = \beta \cap \alpha$ e $t = \gamma \cap \alpha$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} r \perp s, r \perp t \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha \\ s \text{ e } t \text{ concorrentes} \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp pl(s, t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \perp \alpha$

Resposta: B

MÓDULO 55
DIEDROS, TRIEDROS E POLIEDROS

1)

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 + f_2 + f_3 < 360° \\ f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 148° + 110° + f_3 < 360° \\ 148° < 110° + f_3 \\ 110° < 148° + f_3 \\ f_3 < 148° + 110° \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_3 < 102° \\ f_3 > 38° \\ f_3 > -38° \\ f_3 < 258° \end{array}\right. \Rightarrow 38° < f_3 < 102°$$

Resposta: C

2)

$$\left.\begin{array}{l} F = 16 \text{ (triângulos)} \\ A = \dfrac{16.3}{2} = 24 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 10$$

Resposta: E

3)

$$\left.\begin{array}{l} F = 8 + 6 = 14 \\ A = \dfrac{8.4 + 6.3}{2} = 25 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 13$$

Resposta: E

4)

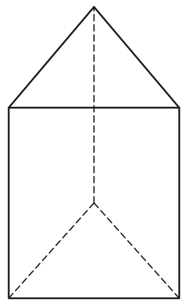
	Quant. de faces	Tipo de face	Quant. de lados
	1	Triangular	3
	3	Quadrangular	12
	3	Pentagonal	15
Totais	F = 7	xxxxxxxxxxxx	2A = 30

$$\left.\begin{array}{l} 2A = 30 \Leftrightarrow A = 15 \\ F = 7 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = 10$$

Resposta: E

5) Possui 5 faces.

$$\left.\begin{array}{l} V = 6 \\ A = 9 \\ V - A + F = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow F = 5$$



6) Em todo poliedro convexo, de acordo com a relação de Euler, sempre se pode afirmar que:
$V - A + F = 2$
Resposta: E

7) I) $F = 20 + 12 \Leftrightarrow F = 32$
II) $A = \dfrac{20 \,.\, 6 + 12 \,.\, 5}{2} = 90$
III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V + 32 = 90 + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V = 60$
Resposta: C

8) Sendo V, A e F, respectivamente, o número de vértices, o número de arestas e o número de faces desse poliedro, tem-se:
I) $F = 18$
II) $A = \dfrac{12 \,.\, 3 + 6 \,.\, 4}{2} \Leftrightarrow A = 30$
III) $V - A + F = 2$ (relação de Euler)
Assim: $V - 30 + 18 = 2 \Leftrightarrow V = 14$
Resposta: A

9) Sendo F o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices desse poliedro, tem-se:
1) $F = 60$
2) $A = \dfrac{60 \,.\, 3}{2} \Leftrightarrow A = 90$
3) $V - A + F = 2$ (relação de Euler)
Assim:
$V - 90 + 60 = 2 \Leftrightarrow V = 32$
Resposta: D

10) Se uma pirâmide tem exatamente 11 faces triângulares, então a sua base é um polígono de 11 lados e assim, sendo V o número de vértices e A o número de arestas dessa pirâmide, têm-se:
1) $V = 1 + 11 \Leftrightarrow V = 12$
2) $A = \dfrac{11 \,.\, 3 + 1 \,.\, 11}{2} \Leftrightarrow A = 22$
Resposta: E

11) $n \,.\, \pi + (n - 2) \,.\, \pi = 18\pi \Leftrightarrow 2n - 2 = 18 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2n = 20 \Leftrightarrow n = 10$
Resposta: C

12) O cubo possui exatamente 6 faces e 8 vértices. Assim sendo, o novo poliedro possui exatamente 8 faces triangulares (uma para cada vértice do cubo) e 6 faces quadradas (uma para cada face do cubo).
Resposta: B

MÓDULO 56
POLIEDROS DE PLATÃO E REGULARES

1) Resposta: D

2) No icosaedro regular, temos 20 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{20.3}{2} = 30$
Assim, $V - 30 + 20 = 2 \Leftrightarrow V = 12$

3) No octaedro regular, temos 8 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{8.3}{2} = 12$
Assim, $V - 12 + 8 = 2 \Leftrightarrow V = 6$
Não existem diagonais nas faces, então, o número de diagonais é
$n = C_{6,2} - A = \dfrac{6.5}{2.1} - 12 = 3$

4) No dodecaedro regular, temos 12 faces pentagonais e, portanto, $A = \dfrac{12.5}{2} = 30$
Assim, $V - 30 + 12 = 2 \Leftrightarrow V = 20$
A soma de todos os ângulos das faces é
$S = (20 - 2) \,.\, 360° = 6480°$

5) No icosaedro regular, temos 20 faces triangulares e, portanto, $A = \dfrac{20.3}{2} = 30$
Assim, $V - 30 + 20 = 2 \Leftrightarrow V = 12$
A soma de todos os ângulos das faces é
$S = (12 - 2) \,.\, 360° = 3600°$

6) Os poliedros regulares são os poliedros de Platão com as faces regulares e congruentes, e os ângulos poliédricos congruentes. Portanto, são cinco as classes de poliedros regulares.
Resposta: B

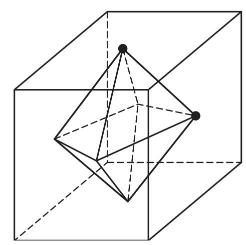
7) O dodecaedro tem 12 faces pentagonais. Assim,
I) $F = 12$
II) $A = \dfrac{12 \,.\, 5}{2} = 30$
III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V + 12 = 30 + 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow V = 20$
Resposta: D

8) O dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.
Resposta: D

9) O icosaedro tem 20 faces triangulares. Assim,
I) $F = 20$
II) $A = \dfrac{20 \,.\, 3}{2} = 30$
III) $V + F = A + 2 \Leftrightarrow V + 20 = 30 + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V = 12.$
Resposta: B

10) A intersecção de um tetraedro regular com um plano qualquer do espaço pode ser: conjunto vazio ou um só ponto (vértice) ou um segmento de reta (aresta) ou um triângulo ou ainda um quadrilátero.
Resposta: A.

11)

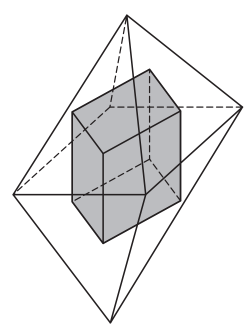


Resposta: C

12) $S = 12 \,.\, (5 - 2) \,.\, 180° = 12 \,.\, 3\pi = 36\pi$
Resposta: C

13) Num icosaedro regular, o número de faces é $F = 20$, o número de arestas é $A = \dfrac{20 \,.\, 3}{2} = 30$ e o número de vértices é $V = 30 - 20 + 2 = 12.$
Assim, sendo D o número total de diagonais desse poliedro, tem-se:
$C_{V,2} = D + A \Leftrightarrow C_{12,2} = D + 30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 66 = = D + 30 \Leftrightarrow D = 36.$
Resposta: C

14) Os centros das oito faces de um octaedro regular são vértices de um hexaedro regular.



Resposta: B