EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FRENTE 1 – ÁLGEBRA

MÓDULO 1

POTENCIAÇÃO: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

1. Se $x = \dfrac{(-3)^4 + 3^4 - 3^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^0 - 4^1\right]^2}$, então x é igual a:

a) $-\dfrac{144}{17}$ b) $-\dfrac{126}{17}$ c) -4 d) 14 e) 16

RESOLUÇÃO:

$x = \dfrac{81 + 81 - 9 - 27}{(1-4)^2} = \dfrac{126}{9} = 14$

Resposta: D

2. Assinale a afirmação **falsa**:

a) $2^{70} . 2^{60} = 2^{150} : 2^{20}$ b) $(2^4)^7 = (2^7)^4$

c) $3^{2^5} = 3^{5^2}$ d) $\dfrac{16^9}{8^9} = 2^9$

e) $7^{60} < 8^{60}$

RESOLUÇÃO:

a) *Verdadeira*, pois $2^{70} . 2^{60} = 2^{70+60} = 2^{130}$ e $2^{150} : 2^{20} = 2^{150-20} = 2^{130}$.

b) *Verdadeira*, pois $(2^4)^7 = 2^{4 \cdot 7} = 2^{28}$ e $(2^7)^4 = 2^{7 \cdot 4} = 2^{28}$.

c) *Falsa*, pois $3^{2^5} = 3^{32}$ e $3^{5^2} = 3^{25}$.

d) *Verdadeira*, pois $\dfrac{16^9}{8^9} = \left(\dfrac{16^9}{8^9}\right) = 2^9$.

e) *Verdadeira*, pois 7 < 8.

Resposta: C

3. Calcule o valor de cada expressão dada a seguir:

a) $(2^2 . 3^{-2})^2$ b) $\left(\dfrac{2^2}{3^{-2}}\right)^2$ c) $(2^2 + 3^{-2})^{-1}$

RESOLUÇÃO:

a) $(2^2 . 3^{-2})^2 = 2^4 . 3^{-4} = 16 . \dfrac{1}{81} = \dfrac{16}{81}$

b) $\left(\dfrac{2^2}{3^{-2}}\right)^2 = \dfrac{2^4}{3^{-4}} = \dfrac{16}{\dfrac{1}{81}} = 16 . 81 = 1296$

c) $(2^2 + 3^{-2})^{-1} = \left(4 + \dfrac{1}{9}\right)^{-1} = \left(\dfrac{37}{9}\right)^{-1} = \dfrac{9}{37}$

Respostas: a) $\dfrac{16}{81}$ b) 1296 c) $\dfrac{9}{37}$

4. Sendo $x = 2^{40}$, $y = 3^{30}$ e $z = 5^{20}$, então:

a) $x < y < z$ b) $x < z < y$ c) $y < z < x$
d) $z < y < x$ e) $y < x < z$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x = 2^{40} = (2^4)^{10} = 16^{10} \\ y = 3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10} \\ z = 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} \end{cases}$$

Como $16^{10} < 25^{10} < 27^{10}$, concluímos que $x < z < y$.

Resposta: B

5. O número $x = \dfrac{0{,}02448}{800000}$ pode ser representado por $\alpha . 10^{-n}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 10$ e $n \in$ IN. Nessas condições, podemos concluir que **n** é divisível por:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 9 e) 10

RESOLUÇÃO:

$x = \dfrac{0{,}02448}{800000} = \dfrac{2448 . 10^{-5}}{8 . 10^5} =$

$= 306 . 10^{-10} = 3{,}06 . 10^2 . 10^{-10} =$

$= 3{,}06 . 10^{-8} = \alpha . 10^{-n}$

n = 8

Resposta: B

MÓDULO 2

RADICIAÇÃO: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

1. Considere as afirmações:

I. $\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$ II. $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$

III. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$ IV. $\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

Julgando cada uma como verdadeira (V) ou falsa (F), obtemos, respectivamente:

a) VVVV b) VVVF c) VFVV
d) FVVV e) VVFF

RESOLUÇÃO:
Resposta: A

2. Assinale a afirmação **falsa**:

a) $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{32} = 4$ b) $(\sqrt[6]{2})^{12} = 4$

c) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[18]{5}$ d) $\sqrt[8]{2^{11}} : \sqrt[8]{2^3} = 2$

e) $\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{6}$

RESOLUÇÃO:

a) ***Verdadeira***, **pois** $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{64} = 4.$

b) ***Verdadeira***, **pois** $(\sqrt[6]{2})^{12} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2 = 4.$

c) ***Verdadeira***, **pois** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6.3]{5} = \sqrt[18]{5}\,.$

d) ***Verdadeira***, **pois** $\sqrt[8]{2^{11}} : \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{2^{11} : 2^3} = \sqrt[8]{2^8} = 2.$

e) ***Falsa***, **pois** $\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \,.\, \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{72}.$

Resposta: E

3. Sendo $x = \sqrt{2} + \sqrt{50}$ e $y = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{18}$, então $\dfrac{x}{y}$ resulta igual a:

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{2\sqrt{13}}{6}$ e) $2\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:

$x = \sqrt{2} + \sqrt{50} = \sqrt{2} + \sqrt{2 \,.\, 5^2} =$

$= \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$y = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$

Logo, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}\,.$

Resposta: B

4. Considere os números reais $x = \sqrt[3]{3} \,.\, \sqrt[6]{2}$ e $y = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}$. É correto afirmar que:

a) $x = y$ b) $x^2 = y^3$ c) $x^3 = y^2$
d) $x \,.\, y = \sqrt[3]{12}$ e) $x + y = \sqrt[3]{18}$

RESOLUÇÃO:

$x = \sqrt[3]{3} \,.\, \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{3^2} \,.\, \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{3^2 \,.\, 2}$

$y = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2 . 2}} = \sqrt[6]{3^2 \,.\, 2}$

Resposta: A

Obs.: $x \,.\, y = \sqrt[6]{(3^2 \,.\, 2)^2} = \sqrt[3]{3^2 \,.\, 2} = \sqrt[3]{18}$

MÓDULO 3

FATORAÇÃO

1. Fatore as expressões:

a) $a^5 + a^4 + a^3 =$ $\mathbf{a^3(a^2 + a + 1)}$

b) $2x^3y^2z + 6x^2y^3z^2 - 4xyz^3 =$ $\mathbf{2xyz\,(x^2y + 3xy^2z - 2z^2)}$

2. Fatore as expressões:

a) $a^2 + ab + ab^2 + b$

b) $x^3 - x^2 - 3x + 3$

RESOLUÇÃO:

a) $a^2 + ab + ab^2 + b^3 = a\,(a + b) + b^2(a + b) = (a + b)\,(a + b^2)$

b) $x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2\,(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)\,(x^2 - 3)$

3. **(UNESP)** – Transforme o polinômio $P(x) = x^5 + x^2 - x - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 3º grau.

RESOLUÇÃO:

$P(x) = x^5 + x^2 - x - 1 = x^5 - x + x^2 - 1 =$

$= x(x^4 - 1) + (x^2 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)[x(x^2 + 1) + 1] = (x^2 - 1)(x^3 + x + 1)$

4. O valor da expressão $\dfrac{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^4 + a^2 + 1}$ para a = 59 é:

a) 119 b) 118 c) 60 d) 59 e) 30

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{a^4(a + 1) + a^2(a + 1) + (a + 1)}{a^4 + a^2 + 1} =$$

$$= \frac{(a + 1)(a^4 + a^2 + 1)}{a^4 + a^2 + 1} = a + 1 = 59 + 1 = 60$$

Resposta: C

MÓDULO 4

FATORAÇÃO

1. Fatore as expressões:

a) $x^2 - y^2 =$ $(x + y)(x - y)$

b) $x^4 - 1 =$ $(x^2)^2 - 1^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

2. Desenvolva as expressões:

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 . (2x) . (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(5x - 2y)^2 = (5x)^2 - 2 . (5x) . (2y) + (2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$

3. Fatore:

a) $9x^2 - 30xy + 25y^2 =$ $(3x - 5y)^2$

b) $49x^4 - 14x^2 + 1 =$ $(7x^2 - 1)^2$

4. **(UFV)** – Uma sala retangular tem comprimento *x* e largura *y*, em metros. Sabendo-se que $(x + y^2) - (x - y)^2 = 384$, é correto afirmar que a área dessa sala, em metros quadrados, é:

a) 82 b) 64 c) 96 d) 78

RESOLUÇÃO:

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 384 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = 384 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 384 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy = 384 \Leftrightarrow xy = 96$

Resposta: C

5. **(ESPM)** – Sabendo-se que $x + y^{-1} = 7$ e que $x = 4y$, o valor da expressão $x^2 + y^{-2}$ é igual a:

a) 49 b) 47 c) 45 d) 43 e) 41

RESOLUÇÃO:

$x + y^{-1} = 7 \Rightarrow (x + y^{-1})^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + 2xy^{-1} + y^{-2} = 49$

Substituindo-se x por 4y, tem-se:

$x^2 + 2 . 4y . y^{-1} + y^{-2} = 49 \Rightarrow x^2 + 8 + y^{-2} = 49 \Rightarrow x^2 + y^{-2} = 41$

Resposta: E

6. **(OBM)** – Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 . 20112007$?

a) $2 . 20112007^2$ b) $2 . 20112003^2$ c) $2 . 20112007$

d) $2 . 20112003$ e) $2 . 20112011^2$

RESOLUÇÃO:

Para x = 20112007, a expressão dada assume a forma:

$(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16x = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x =$

$= 2x^2 - 16x + 32 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2(x - 4)^2 =$

$= 2(20112007 - 4)^2 = 2 . 20112003^2$

Resposta: B

MÓDULO 5

EXERCÍCIOS DE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1. **(UFLA)** – Simplificando-se a expressão $\dfrac{2^{x+1} + 2^{x+2}}{2^{2-x} - 2^{1-x}}$, obtém-se:

a) 6^{2x} b) 3^{x+1} c) $2^2(3^x)$

d) 4^x e) $3(4^x)$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2^{x+1} + 2^{x+2}}{2^{2-x} - 2^{1-x}} = \frac{2^x . 2 + 2^x . 2^2}{\dfrac{2^2}{2^x} - \dfrac{2}{2^x}} = \frac{6 . 2^x}{\dfrac{2}{2^x}} = 3 . 2^{2x} = 3 . (2^2)^x = 3 . 4^x$$

Resposta: E

2. Sabendo-se que $1{,}098^{32}$ é aproximadamente igual a 20, qual dos valores abaixo está mais próximo do número $5^6 . (1{,}098)^{192}$?

a) 100 mil. b) 1 milhão. c) 100 milhões.

d) 1 bilhão. e) 1 trilhão.

RESOLUÇÃO:

$5^6 . (1{,}098)^{192} = 5^6 . (1{,}098^{32})^6 \simeq 5^6 . (20)^6 = (5 . 20)^6 =$

$= 100^6 = (10^2)^6 = 10^{12} = 1$ **trilhão**

Resposta: E

3. O número de algarismos do número $n = 8^6 \cdot 25^{11}$ é:
a) 22 b) 21 c) 20 d) 19 e) 18

RESOLUÇÃO:
$n = 8^6 \cdot 25^{11} = (2^3)^6 \cdot (5^2)^{11} = 2^{18} \cdot 5^{22} =$
$= 2^{18} \cdot 5^{18} \cdot 5^4 = 10^{18} \cdot 5^4 = 625 \cdot 10^{18}$
Portanto, n tem 3 + 18 = 21 algarismos.
Resposta: B

4. O número $x = \dfrac{2^{17} \cdot 5^{12} + 20^6 \cdot 50^4}{6^3 \cdot 10^{12}}$ resulta igual a:

a) 2 b) 5 c) 216 d) 432 e) 648

RESOLUÇÃO:
$$x = \frac{2^{17} \cdot 5^{12} + 20^6 \cdot 50^4}{6^3 \cdot 10^{12}} = \frac{2^5 \cdot 2^{12} \cdot 5^{12} + 20^2 \cdot 20^4 \cdot 50^4}{6^3 \cdot 10^{12}} =$$
$$= \frac{32 \cdot 10^{12} + 400 \cdot 10^{12}}{6^3 \cdot 10^{12}} = \frac{432 \cdot 10^{12}}{216 \cdot 10^{12}} = 2$$
Resposta: A

MÓDULO 6

EXERCÍCIOS DE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1. O valor de $\sqrt[4]{\dfrac{2^{14} + 2^{16}}{2^6 + 2^8}}$ é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32

RESOLUÇÃO:
$$\sqrt[4]{\frac{2^{14} + 2^{16}}{2^6 + 2^8}} = \sqrt[4]{\frac{2^{12} \cdot (2^2 + 2^4)}{2^4 \cdot (2^2 + 2^4)}} = \frac{2^3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
Resposta: B

2. O valor da expressão $\sqrt{2}\left(\sqrt{3 + \sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3 - \sqrt{3}}\right)$ é:
a) 1 b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:
$$\sqrt{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(3+\sqrt{3}) \cdot (3-\sqrt{3})} =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{9-3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
Resposta: E

3. **(UFPB)** – Seja n > 1 um número natural. O valor da expressão $\sqrt[n]{\dfrac{72}{9^{2-n} - 3^{2-2n}}}$, quando simplificada, é:

a) 9 b) 9^{2n} c) 9^n d) $\sqrt[n]{9}$ e) 1

RESOLUÇÃO:
$$= \sqrt[n]{\frac{72}{9^{2-n} - 3^{2-2n}}} = \sqrt[n]{\frac{72}{3^{4-2n} - 3^{2-2n}}} =$$
$$= \sqrt[n]{\frac{72}{3^4 \cdot 3^{-2n} - 3^2 \cdot 3^{-2n}}} = \sqrt[n]{\frac{72}{3^{-2n} \cdot (3^4 - 3^2)}} =$$
$$= \sqrt[n]{\frac{1}{3^{-2n}}} = \frac{1}{3^{-2}} = 9$$
Resposta: A

4. Racionalize o denominador de cada fração dada a seguir.

a) $\dfrac{8}{3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^4}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{2^4}} \cdot \dfrac{\sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{8}}{2}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{5(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$

5. Calculando-se $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} : \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$, obtém-se:

a) $2 + \sqrt{3}$ b) $3 + \sqrt{2}$ c) $2 - \sqrt{3}$
d) $3 - \sqrt{2}$ e) 1

RESOLUÇÃO:
$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} : \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} \cdot \frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{6 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3}{6 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})} \cdot \frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$
Resposta: A

MÓDULO 7

FATORAÇÃO

1. Elimine os parênteses:

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$ $a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$

b) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$ $a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

c) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) =$ $x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

d) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) =$ $x^3 - 3^3 = x^3 - 27$

2. Fatore:

a) $x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

b) $27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

3. Sendo $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, o valor da expressão

$$\left[\frac{(x^3 + 8).(x^2 - 4)}{(x^2 + 4x + 4).(x^2 - 2x + 4).(2x - 4)}\right]^{-3} \text{ é:}$$

a) 1 b) 8 c) 27 d) 125 e) 250

RESOLUÇÃO:

$$\left[\frac{(x^3 + 8).(x^2 - 4)}{(x^2 + 4x + 4).(x^2 - 2x + 4).(2x - 4)}\right]^{-3} =$$

$$= \left[\frac{(x + 2) . (x^2 - 2x + 4) . (x + 2) . (x - 2)}{(x + 2)^2 . (x^2 - 2x + 4) . 2(x - 2)}\right]^{-3} = \left[\frac{1}{2}\right]^{-3} = 8$$

Resposta: B

4. Desenvolva:
a) $(a + b)^3 =$ b) $(a - b)^3 =$

RESOLUÇÃO:

a) $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b) $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

5. Os números reais *a*, *b* e *c* são tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 41$ e $ab + ac + bc = 4$. Então, $a + b + c$ pode ser:
a) – 5 b) – 3 c) 3 d) 5 e) 7

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 41 \\ ab + ac + bc = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = 41 + 2 . 4 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 49 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b + c = 7$ ou $a + b + c = -7$

Resposta: E

MÓDULO 8

EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\dfrac{2x + 1}{3} - \dfrac{x - 3}{4} = \dfrac{x}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 3}{4} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{4(2x + 1) - 3(x - 3)}{12} = \frac{6x}{12} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8x + 4 - 3x + 9 = 6x \Leftrightarrow 8x - 3x - 6x = -4 - 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x = -13 \Leftrightarrow x = 13 \Leftrightarrow V = \{13\}$

Resposta: $V = \{13\}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as igualdades:
a) $5 . (x - 3) = x + 4 . (x - 2)$
b) $3 . (2x - 1) + 1 = 2 . (3x - 1)$

RESOLUÇÃO:

a) $5(x - 3) = x + 4(x - 2) \Leftrightarrow 5x - 15 = x + 4x - 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - x - 4x = -8 + 15 \Leftrightarrow 0x = 7 \Leftrightarrow V = \emptyset$

b) $3(2x - 1) + 1 = 2(3x - 1) \Leftrightarrow 6x - 3 + 1 = 6x - 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x - 6x = -2 + 3 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow V = \mathbb{R}$

Respostas: a) $V = \emptyset$ b) $V = \mathbb{R}$

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

RESOLUÇÃO:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \,.\, 2\,(-3) = 25 + 24 = 49$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow V = \{-\frac{1}{2}; 3\}$$

b) $\Delta = (-10)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 25 = 100 - 100 = 0$

$$x = \frac{10 \pm 0}{2} \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow V = \{5\}$$

c) $\Delta = 2^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 1 = 4 - 12 = -8 \Leftrightarrow V = \varnothing$

4. A equação, em $\mathbb{R}$, $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = 0$ tem

a) duas raízes de sinais contrários.

b) uma raiz positiva e duas negativas.

c) duas raízes positivas distintas.

d) duas raízes negativas distintas.

e) uma única raiz.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ e } x^2 - 25 \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2} \text{ e}$$

$x^2 \neq 25 \Leftrightarrow (x = 5 \text{ ou } x = -1) \text{ e } (x \neq 5 \text{ e } x \neq -5) \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow x = \{-1\}$

Resposta: E

MÓDULO 9

EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU

1. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $4x^2 - 11x - 12 = 0$, o valor da expressão $2(x_1 + x_2) - x_1\,x_2$ é:

a) 6,5 b) 7 c) 7,5 d) 8 e) 8,5

RESOLUÇÃO:

$$2(x_1 + x_2) - x_1 \,.\, x_2 = 2 \,.\, \frac{11}{4} - \left(\frac{-12}{4}\right) = \frac{11}{2} + 3 = \frac{11 + 6}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Resposta: E

2. **(UFMG)** – Sejam

$p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \dfrac{1}{b}$

polinômios com coeficientes reais.

Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes.

Então, é correto afirmar que o valor de a + b é:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

RESOLUÇÃO:

A soma das raízes da p(x) é $\dfrac{-a + 15}{a}$ **e a soma das raízes de q(x) é** $\dfrac{3}{2}$.

Então $\dfrac{-a + 15}{a} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 3a = -2a + 30 \Leftrightarrow a = 6.$

O produto das raízes de p(x) é $\dfrac{1}{a}$ **e o produto das raízes de q(x) é** $\dfrac{1}{2b}$.

Logo, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2b} \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{2} = 3.$

Portanto, a + b = 6 + 3 = 9.

Resposta: C

3. O valor do número real **k** para que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 - 8x + k = 0$ seja 52 é:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

RESOLUÇÃO:

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, temos que $x_1 + x_2 = 8$ e $x_1\,x_2 = k$.

$x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 8^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\,x_2 = 64.$

Logo, $52 + 2k = 64 \Leftrightarrow 2k = 12 \Leftrightarrow k = 6.$

Resposta: B

4. **(UNIRIO-Adaptada)** – A equação $x^2 + x - a = 0$, $a > 0$, possui a soma dos quadrados de suas raízes igual à soma dos inversos de suas raízes. O valor de *a* é:

a) 1 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{5}{2}$ e) 3

RESOLUÇÃO:

Sendo x_1 e x_2 as raízes, temos:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1\,x_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1\,x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 - 2 \,.\, (-a) = \frac{-1}{-a} \Leftrightarrow 1 + 2a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ ou } a = -1 \text{ (não serve)}$$

Resposta: C

5. Qual das equações abaixo tem conjunto verdade $V = \left\{ \frac{1}{6} ; \frac{3}{4} \right\}$?

a) $24x^2 - 3x + 22 = 0$
b) $12x^2 - 11x + 3 = 0$
c) $24x^2 + 22x - 3 = 0$
d) $24x^2 - 22x + 3 = 0$
e) $12x^2 + 11x - 3 = 0$

RESOLUÇÃO:
Calculando-se a soma S e o produto P das raízes, obtém-se:

$$S = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2+9}{12} = \frac{11}{12} \text{ e } P = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

Uma equação do 2º grau de raízes $\frac{1}{6}$ **e** $\frac{3}{4}$ **é:**

$$x^2 - \frac{11}{12}x + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 24x^2 - 22x + 3 = 0$$

Resposta: D

MÓDULO 10

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A 1º OU 2º GRAU

1. Em $\mathbb{R}$, a equação $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2}$ admite

a) duas raízes positivas e distintas.
b) duas raízes negativas e distintas.
c) duas raízes de sinais contrários.
d) uma única raiz positiva.
e) uma única raiz negativa.

RESOLUÇÃO:
Devemos ter $x \neq 0$ e $x \neq 2$. Logo,

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 + 2x - x^2}{2x(2-x)} = \frac{8}{2x(2-x)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$ (não serve); portanto, $V = \{4\}$.
Resposta: D

2. **(FGV)** – A equação $x + \frac{x}{x-5} = 5 + \frac{x}{x-5}$ tem

a) uma única raiz.
b) exatamente duas raízes.
c) exatamente três raízes.
d) conjunto solução vazio.
e) raízes imaginárias.

RESOLUÇÃO:

$$x \neq 5 \text{ e } x + \frac{x}{x-5} = 5 + \frac{x}{x-5} \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ e } x = 5 \Leftrightarrow V = \emptyset$$

Resposta: D

3. As raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ são *a, b* e *c*. Se $a < b < c$, então a expressão $a^3 + b^2 + c$ resulta igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

RESOLUÇÃO:
$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x-3) - (x-3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.
Logo, $a = -1$, $b = 1$ e $c = 3$ e $a^3 + b^2 + c = -1 + 1 + 3 = 3$.
Resposta: D

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$.

RESOLUÇÃO:
$x^4 - 5x^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5(x^2) - 14 = 0$
Substituindo-se x^2 por y, tem-se a equação:
$y^2 - 5y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = 7$ ou $y = -2$
Para $y = 7$, tem-se $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.
Para $y = -2$, tem-se $x^2 = -2$ ($x \notin \mathbb{R}$).
Resposta: $V = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{2x+1} + 1 = x$.

RESOLUÇÃO:
$\sqrt{2x+1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x - 1$
$\sqrt{2x+1} = x - 1 \Rightarrow (\sqrt{2x+1})^2 = (x-1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$.
0 não é raiz, pois $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0$ (F).
4 é raiz, pois $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + 1 = 4 \Rightarrow 3 + 1 = 4$ (V).
O conjunto verdade da equação é $V = \{4\}$.

Resposta: $V = \{4\}$

MÓDULO 11

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A 1º OU 2º GRAU

1. Num determinado instante, o que falta para completar um certo dia é um oitavo do que já passou desse mesmo dia. Em que momento este fato aconteceu?

a) 21h b) 21h10min c) 21h20min
d) 21h30min e) 21h40min

RESOLUÇÃO:
Se já se passaram x horas desse dia, faltam 24 – x horas para completá-lo.

Então, de acordo com o enunciado, devemos ter $24 - x = \frac{1}{8}x$

$192 - 8x = x \Rightarrow 9x = 192 \Rightarrow x = \frac{192}{9}$ **em horas.**

Portanto, o fato aconteceu às $\frac{192}{9}$ **h = 21h20min.**

Resposta: C

2. **(UFT)** – Um produtor estava vendendo ovos de galinha na feira de seu bairro em uma cesta. O primeiro cliente que o vendedor atendeu fez o seguinte pedido: "Quero a metade dos ovos que estão na cesta mais meio ovo." O vendedor prontamente o atendeu e lhe entregou a quantidade solicitada. Sabendo-se que o feirante não quebrou nenhum ovo para atender seu cliente e que restou apenas um ovo na cesta, pode-se afirmar que o cliente levou

a) 2 ovos. b) 3 ovos. c) 4 ovos.
d) 5 ovos. e) 6 ovos.

RESOLUÇÃO:
Se x é a quantidade de ovos na cesta, então:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

O cliente levou 3 – 1 = 2 ovos.

Resposta: A

3. **(FACAMP)** – Numa empresa, $\frac{3}{4}$ dos funcionários recebem um salário menor que R\$ 1000,00, $\frac{1}{5}$ dos funcionários recebe um salário entre R\$ 1000,00 e R\$ 5000,00 e somente dois funcionários recebem um salário acima de R\$ 5000,00.

a) Quantos funcionários essa empresa possui?
b) Quantos funcionários ganham no máximo R\$ 5000,00?

RESOLUÇÃO:
Sendo x o número de funcionários dessa empresa, temos:

a) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x + 2 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x + 4x + 40 = 20x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 40$

b) 40 – 2 = 38 funcionários ganham no máximo R\$ 5000,00.

Respostas: a) 40
b) 38

4. **(UEG)** – Um feirante vendeu todo o seu estoque de maçãs e peras por R\$ 350,00. O preço de venda das peras e das maçãs está descrito na tabela abaixo:

3 maçãs por R\$ 2,00
2 peras por R\$ 1,50

Se o feirante tivesse vendido somente metade das maçãs e $\frac{2}{5}$ das peras, ele teria arrecadado R\$ 160,00.
Sendo assim, quantas frutas o feirante vendeu?

a) 200 b) 300 c) 400 d) 500

RESOLUÇÃO:
Na média, em real, cada maçã custa $\frac{2}{3}$ **e cada pera** $\frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$.

Se são x maçãs e y peras, devemos ter:

$$\begin{cases} x \cdot \frac{2}{3} + y \cdot \frac{3}{4} = 350 \\ \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot y \cdot \frac{3}{4} = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 350 \\ \frac{x}{3} + \frac{3y}{10} = 160 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 4200 \\ 10x + 9y = 4800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases} \Rightarrow x + y = 500$$

Resposta: D

5. **(ESPM)** – Uma costureira pagou R$ 135,00 por uma certa quantidade de metros de um tecido. Ao passar pela loja vizinha, notou que o metro desse mesmo tecido estava R$ 2,00 mais barato que na anterior. Comprou, então, um metro a mais do que na primeira compra, gastando R$ 130,00. Considerando-se as duas compras, o total de metros de tecido que ela comprou foi:

a) 15 b) 17 c) 19 d) 21 e) 23

RESOLUÇÃO:
Se na primeira compra ela adquiriu *x* metros, então:

$$\frac{135}{x} = \frac{130}{x+1} + 2 \Leftrightarrow 135x + 135 = 130x + 2x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 135x + 135 = 130x + 2x^2 + 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 135 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 33}{4} \Leftrightarrow x = 9 \text{ ou } x = -7{,}5 \text{ (não serve)}$$

Ela comprou 9 + 9 + 1 = 19 metros.
Resposta: C

MÓDULO 12

SISTEMAS E PROBLEMAS

1. **(UEL)** – As variáveis reais *x* e *y* verificam as seguintes condições: $(x + y)^3 = 64$ e $(x - y)^6 = 64$.
Então esse sistema tem

a) zero solução. b) uma solução. c) duas soluções.
d) três soluções. e) quatro soluções.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 64 \\ (x-y)^6 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Resposta: C

2. **(PUC-MG)** – Os 120 alunos de uma academia militar estão dispostos de forma retangular, em filas, de tal modo que o número de alunos em cada fila supera em 7 o número de filas. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de alunos em cada fila é igual a:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15

RESOLUÇÃO:
Se cada fila tem x alunos, são x – 7 filas.
Então: $x(x-7) = 120 \Leftrightarrow x^2 - 7x = 120 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 120 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 23}{2} \Leftrightarrow x = 15 \text{ ou } x = -8 \text{ (não serve)}$$

Resposta: D

3. **(UNIFAP)** – Pedro dá a Mateus tantos reais quanto Mateus possui. Em seguida, Mateus dá a Pedro tantos reais quanto Pedro possui. Por fim, cada um termina com R$ 12,00. Quantos reais cada um possuía no início?

a) Mateus possuía 5 e Pedro, 13. b) Mateus possuía 6 e Pedro, 14.
c) Mateus possuía 7 e Pedro, 18. d) Mateus possuía 8 e Pedro, 16.
e) Mateus possuía 9 e Pedro, 15.

RESOLUÇÃO:
Se, no início, Mateus possuía x reais e Pedro y reais, então, após a 1.ª operação, Mateus fica com 2x e Pedro com y – x. Em seguida, após a 2.ª operação, Mateus fica com 2x – (y – x) e Pedro com 2 (y – x).

Portanto: $2x - (y - x) = 12$ e $2(y - x) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 12 \\ -x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 15 \end{cases}$

Resposta: E

4. Há quatro anos, a idade de João era o dobro da idade de Pedro. Daqui a quatro anos, a soma das duas idades será 31 anos. Quando Pedro nasceu, João tinha

a) 2 anos. b) 4 anos. c) 5 anos.
d) 6 anos. e) 7 anos.

RESOLUÇÃO:

	Há 4 anos	Hoje	Daqui a 4 anos
João	x	x + 4	x + 8
Pedro	y	y + 4	y + 8

$$\begin{cases} x = 2y \\ (x+8)+(y+8) = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 5$$

Resposta: C

5. Eu tenho o triplo da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tu tiveres a idade que eu tenho, juntos teremos 70 anos. Quantos anos eu tinha há cinco anos?

a) 20 b) 25 c) 27 d) 30 e) 31

RESOLUÇÃO:
Sendo 3x e y as idades atuais, podemos organizar o "quadro" seguinte:

	Passado	Presente	Futuro
Eu	y	3x	4x
Tu	x	y	3x

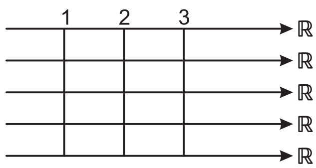
Como y – x = 3x – y, concluímos que y = 2x e, no futuro, as idades serão 4x e 3x. Logo, 4x + 3x = 70 ⇔ x = 10.
Há cinco anos, eu tinha 3 . 10 – 5 = 25 anos.
Resposta: B

MÓDULO 13

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

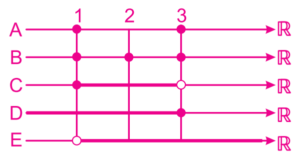
1. Represente, graficamente, os conjuntos:

$A = \{1; 3\}$
$B = \{1; 2; 3\}$
$C = [1; 3[$
$D =]-\infty; 3]$
$E =]1; +\infty[$



RESOLUÇÃO:

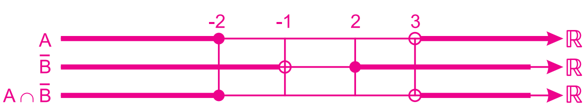
$A = \{1; 3\}$
$B = \{1; 2; 3\}$
$C = [1; 3[$
$D =]-\infty; 3]$
$E =]1; +\infty[$



2. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > 3\}$, $B = [-1; 2[$ e $\overline{B}$ é o complementar de B em relação a $\mathbb{R}$, então o conjunto $A \cap \overline{B}$ resulta

a) $[-2; 3[$ b) $\mathbb{R} -]-2; 3]$ c) $]-\infty; -2]$
d) $[-2; -1[\cup [2; 3]$ e) $\varnothing$

RESOLUÇÃO:
Se $B = [-1; 2[$, então: $\overline{B} = \mathbb{R} - B =]-\infty; -1[\cup [2; +\infty[$
Assim:



Portanto: $A \cap \overline{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > 3\} = \mathbb{R} -]-2; 3]$
Resposta: B

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:
a) $3(1 - x) < -9$
b) $5(x - 2) - 5x > 4$
c) $2x - 6 \leqslant 2(x - 3)$

RESOLUÇÃO:

a) $3(1 - x) < -9 \Leftrightarrow 3 - 3x < -9 \Leftrightarrow -3x < -9 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x < -12 \Leftrightarrow x > \dfrac{-12}{-3} \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $5(x - 2) - 5x > 4 \Leftrightarrow 5x - 10 - 5x > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 5x > 4 + 10 \Leftrightarrow 0x > 14 \Leftrightarrow V = \varnothing$

c) $2x - 6 \leqslant 2(x - 3) \Leftrightarrow 2x - 6 \leqslant 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 2x \leqslant -6 + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0x \leqslant 0 \Leftrightarrow V = \mathbb{R}$

Respostas: **a)** $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $V = \varnothing$
c) $V = \mathbb{R}$

4. Considere as soluções inteiras da inequação $\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{5x - 8}{4} \leqslant 1$. A afirmativa verdadeira é:

a) A maior delas é 6. b) A menor delas é – 6.
c) A maior delas é 5. d) A menor delas é 2.
e) A inequação não admite soluções inteiras.

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{5x - 8}{4} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{4(2x - 1) - 3(5x - 8)}{12} \leqslant \dfrac{12}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 4 - 15x + 24 \leqslant 12 \Leftrightarrow 8x - 15x \leqslant 12 + 4 - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7x \leqslant -8 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{8}{7}$

As soluções inteiras são 2, 3, 4, … .
Resposta: D

5. O número de soluções inteiras do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4x-2}{3} < 2 \\ \dfrac{4x-2}{-3} < 2 \end{cases} \quad \text{é:}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO:

a) $\dfrac{4x-2}{3} < 2 \Leftrightarrow 4x-2 < 6 \Leftrightarrow 4x < 8 \Leftrightarrow x < 2$

b) $\dfrac{4x-2}{-3} < 2 \Leftrightarrow 4x-2 > -6 \Leftrightarrow 4x > -4 \Leftrightarrow x > -1$

De *a* e *b*, concluímos que $-1 < x < 2$.

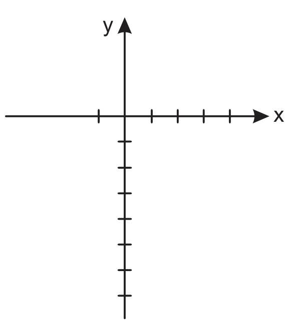
Portanto, as soluções inteiras são 0 e 1.

Resposta: B

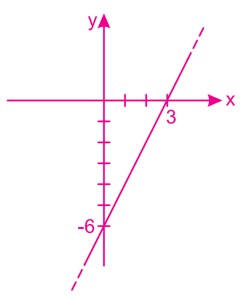
MÓDULO 14

FUNÇÕES DO 1º E 2º GRAU

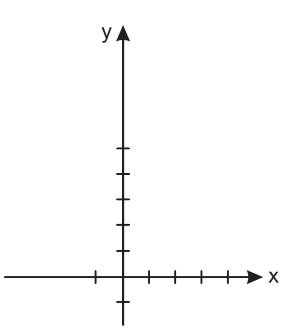
1. Esboce o gráfico da função f: ℝ → ℝ, definida por $f(x) = 2x - 6$.



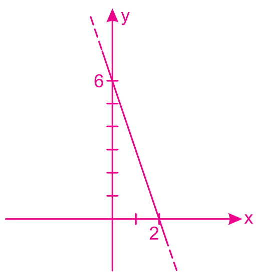
RESOLUÇÃO:



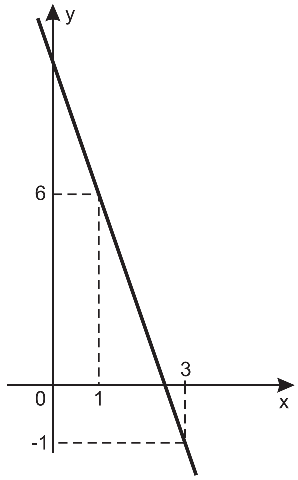
2. Esboce o gráfico da função f: ℝ → ℝ, definida por $f(x) = -3x + 6$.



RESOLUÇÃO:



3. **(UNEMAT)** – Observe o gráfico.



Das expressões abaixo, qual representa a lei de formação da função?

a) $Y = \dfrac{-5x}{2} + \dfrac{11}{2}$ b) $Y = \dfrac{-3x}{6} + \dfrac{7}{2}$

c) $Y = \dfrac{-7x}{2} + \dfrac{19}{2}$ d) $Y = \dfrac{-3x}{5} + \dfrac{19}{5}$

e) $Y = \dfrac{-3x}{5} + \dfrac{11}{2}$

RESOLUÇÃO:

Sendo $y = f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, temos que $f(1) = 6$ e $f(3) = -1$.

Assim:

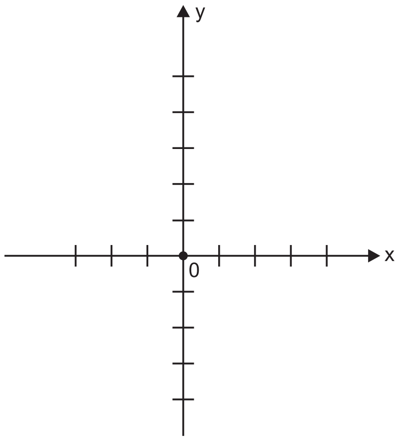
$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{19}{2} \end{cases}$$

Portanto:

$$y = f(x) = -\frac{7}{2}x + \frac{19}{2}$$

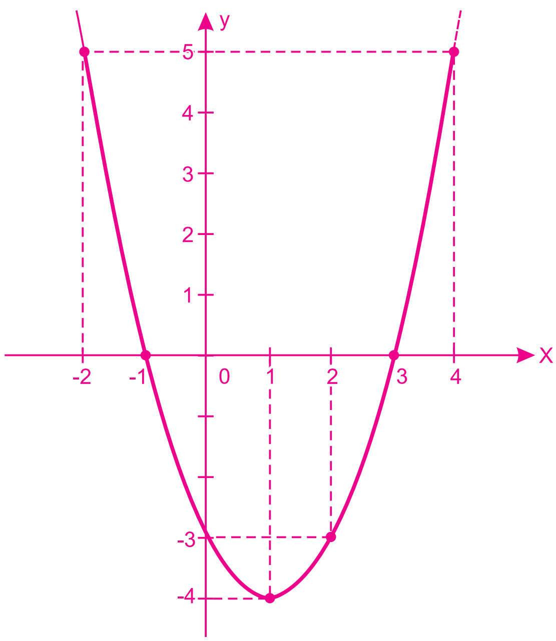
Resposta: C

4. Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Obtenha $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ e esboce o gráfico de f no sistema de coordenadas cartesianas.

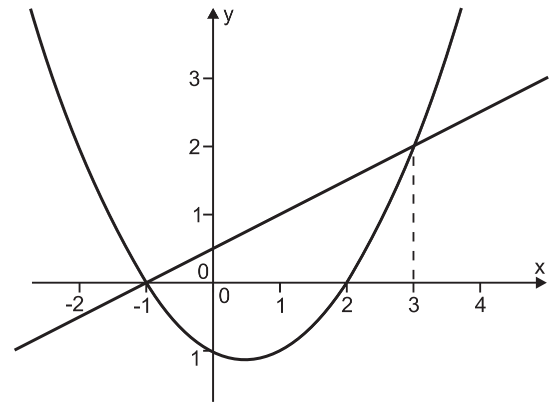


RESOLUÇÃO:

$f(-2) = 5$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -3$, $f(1) = -4$, $f(2) = -3$, $f(3) = 0$, $f(4) = 5$



5. **(UFJF)** – No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de uma função f, do 1º grau, e de uma função g, do 2º grau.



Considerando-se o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) - g(x) > 0\}$, é correto afirmar que:

a) $S =]-1, 3[$ b) $S =]-1, 2[$ c) $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

d) $S =]3, +\infty[$ e) $S = \emptyset$

RESOLUÇÃO:

A reta representa a função f e a parábola, a função g.

Analisando as representações gráficas, concluímos que:

1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$.

2) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 3$.

3) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) - g(x) > 0\} \Leftrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\} =]-1; 3[$

Resposta: A

MÓDULO 15

INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

1. **(UNEMAT)** – A função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem suas raízes dadas pela expressão: $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,

em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Logo, é correto afirmar:

a) Se $a > 0$ e $\Delta > 0$, então a curva do gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, que intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.

b) Se $\Delta < 0$, a curva do gráfico de f intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.

c) Se $a > 0$ e $\Delta = 0$, a curva do gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e a função não possui raízes reais.

d) Se $a < 0$, a curva do gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e intercepta o eixo das ordenadas em $y = c$.

e) Se $a > 0$ e $c < 0$, a curva do gráfico de f intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos.

RESOLUÇÃO:

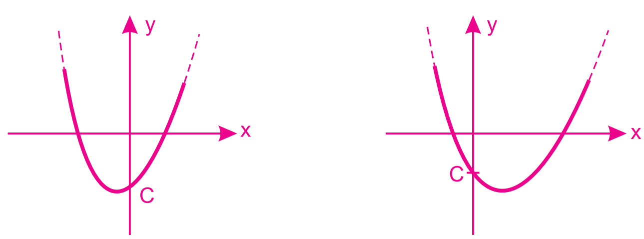
a) *Falsa*, pois, se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

b) *Falsa*, pois, se $\Delta < 0$, a curva do gráfico de f não intercepta o eixo das abscissas.

c) *Falsa*, pois, se $\Delta = 0$, a função possui raízes iguais (uma única raiz).

d) *Falsa*, pois, se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

e) *Verdadeira*, pois, se $a > 0$ e $c < 0$, a curva do gráfico de f é um dos tipos:



Obs.: $a > 0$ e $c < 0 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow f(x)$ admite duas raízes reais distintas.

Resposta: E

2. **(FGV)** – A quantidade mensal vendida x de um produto relaciona-se com seu preço de venda p por meio da equação: $p = 100 - 0{,}02x$. A receita mensal será maior ou igual a 80 000, se e somente se:

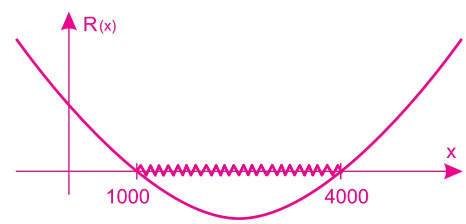
a) $3000 \leqslant x \leqslant 6000$
b) $x \geqslant 2500$
c) $2000 \leqslant x \leqslant 5000$
d) $x \geqslant 3500$
e) $1000 \leqslant x \leqslant 4000$

RESOLUÇÃO:

Se R(x) for a receita mensal, em função da quantidade mensal vendida, temos, então:

1) $R(x) = x \cdot (100 - 0{,}02x) \Leftrightarrow R(x) = -0{,}02x^2 + 100x$

2) $R(x) \geq 80\,000 \Rightarrow -0{,}02x^2 + 100x \geq 80\,000 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 5\,000x + 4\,000\,000 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1\,000 \leq x \leq 4\,000$, pois o gráfico de
$R(x) = x^2 - 5\,000x + 4\,000\,000$ é do tipo:



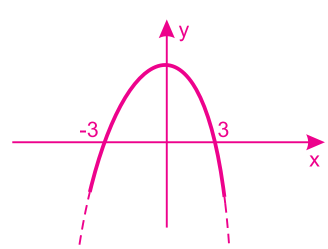
Resposta: E

3. O conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, da inequação $-x^2 + 9 \geqslant 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) Ø

RESOLUÇÃO:

$-x^2 + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$, pois o gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$ é do tipo:



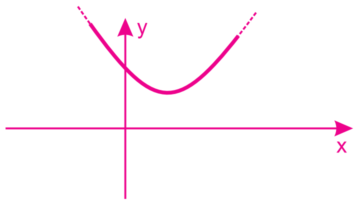
Resposta: D

4. Considere a função f: ℝ → ℝ, definida por $f(x) = x^2 - 4x + (m - 2)$. Se **m** é um número real, então $f(x) > 0$ para todo **x** se, e somente se:

a) $m > 6$ b) $m < 2$ c) $2 < m < 6$
d) $m < 0$ e) $m < 6$

RESOLUÇÃO:

O gráfico de f(x) deve ser do tipo:



Devemos ter, portanto:
$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (m - 2) < 0 \Leftrightarrow 16 - 4m + 8 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4m < -24 \Leftrightarrow m > 6$
Resposta: A

2. A equação da parábola cujo gráfico está representado abaixo é:

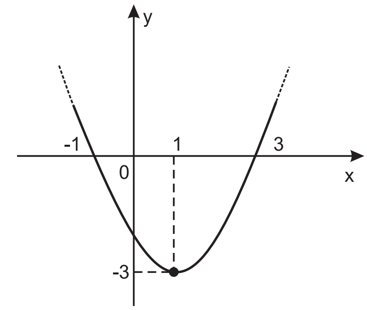
a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$

c) $y = 3x^2 - 6x - 9$

d) $y = 4x^2 - 8x - 12$

e) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$



RESOLUÇÃO:

I) $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

II) $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ (do gráfico)

III) $f(1) = -3$ (do gráfico)

De (I), (II) e (III), resulta:

$a \,.\, (1 - (-1))\,(1 - 3) = -3 \Leftrightarrow -4a = -3 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$

Portanto, $y = f(x) = \dfrac{3}{4}(x + 1)(x - 3) = \dfrac{3}{4}(x^2 - 2x - 3) =$

$= \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$

Resposta: B

MÓDULO 16

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO 2º GRAU

1. Sabendo que, para $a \neq 0$, $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$, sendo x_1 e x_2 as raízes (ou zeros) da função f, fatore em ℝ:

a) $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ b) $f(x) = 5x^2 + 10x + 5$
c) $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$

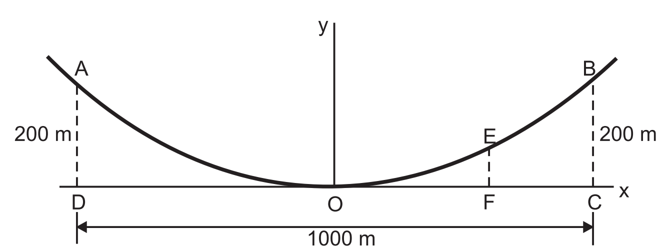
RESOLUÇÃO:

a) As raízes de $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.
Assim, $f(x) = 3x^2 - 15x + 18 = 3(x - 2)(x - 3)$.

b) As raízes de $f(x) = 5x^2 + 10x + 5$ são $x_1 = x_2 = -1$.
Assim, $f(x) = 5x^2 + 10x + 5 = 5(x + 1)(x + 1) = 5(x + 1)^2$.

c) Não existe a fatoração em ℝ, pois:
$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 4 = 16 - 48 = -32 < 0$

3. **(UFF)** – Se um cabo suporta um peso homogêneo muito maior que o seu próprio peso, ele toma a forma de uma parábola.
As torres AD e BC de uma ponte pênsil medem 200 m e são perpendiculares à pista de rolamento CD, que mede 1000 m. O cabo de sustentação preso às torres nos pontos A e B tem a forma de uma parábola com vértice no ponto médio O de CD, conforme a figura a seguir.



a) Determine, em relação ao sistema Oxy, a equação da parábola de vértice O que passa pelos pontos A e B.

b) Se o fio de aço EF de 72 m de comprimento é preso ao cabo de sustentação no ponto E e é perpendicular à pista de rolamento no ponto F (conforme mostra a figura), calcule a medida de FC.

RESOLUÇÃO:

a) A sentença que define f é do tipo $y = f(x) = ax^2$.

Para $f(500) = 200$, temos: $a \,.\, 500^2 = 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{1\,250}$

Então: $y = f(x) = \dfrac{1}{1\,250}x^2$

b) Em metros, devemos ter f(OF) = 72 ⇒

$\Rightarrow \dfrac{1}{1\,250}\,(OF)^2 = 72 \Leftrightarrow (OF)^2 = 90\,000 \Rightarrow OF = 300$

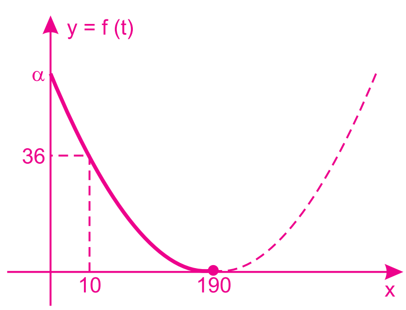
Logo, FC = OC – OF = 500 – 300 = 200.

Respostas: a) $y = f(x) = \dfrac{1}{1\,250}\,x^2$

b) FC = 200 m

4. **(EPCAR)** – No tempo t = 0, o tanque de um automóvel está com α litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função do 2º grau em função do tempo t, em minutos.
O carro entra em movimento. Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e, após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota.
Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ num único ponto de coordenadas (190; 0).
Dessa forma, o número α está compreendido entre:
a) 40 e 42 b) 42 e 44 c) 44 e 46 d) 46 e 48

RESOLUÇÃO:
O gráfico do volume de combustível no tanque do automóvel, para $0 \leqslant t \leqslant 190$ é do tipo:



Logo, $f(t) = a\,.\,(t - 190)^2$ e $f(10) = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(10 - 190)^2 = 36 \Leftrightarrow a = \dfrac{36}{180^2} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{900}$.

Assim sendo, $f(t) = \dfrac{1}{900}\,(t - 190)^2$.

Portanto, $\alpha = f(0) = \dfrac{1}{900}\,(-190)^2 = \dfrac{19^2}{9} = \dfrac{361}{9} = 40{,}111\ldots$

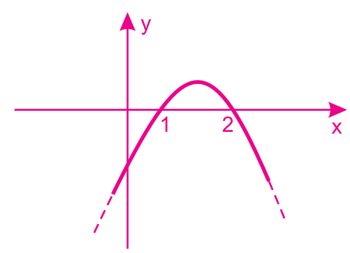
Resposta: A

MÓDULO 17

INEQUAÇÕES – PRODUTO E QUOCIENTE

1. **(UEPB)** – O domínio da função real $f(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)^5}$ é dado por:
a) D(f) = R* b) D(f) = R+
c) D(f) = [1; 2] d) D(f) =]1; 2[
e) D(f) =]– ∞; 1] , [2; + ∞[

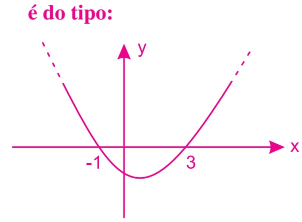
RESOLUÇÃO:
O domínio de f(x) é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(2-x)^5 \geqslant 0\}$.
Temos, então:
$(x-1)(2-x)^5 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$, pois o gráfico de f é do tipo:



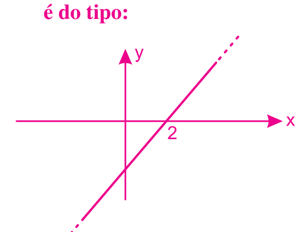
Resposta: C

2. **(UFJF)** – Os valores de **x** que satisfazem a inequação $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} \geqslant 0$ pertencem a:
a) [– 1; 2) ∪ [3; ∞) b) (– 1; 2] ∪ (3; ∞)
c) [1; 3] d) [– 3; 2)
e) [– 3; – 2] ∪ (2; ∞)

RESOLUÇÃO:
I) O gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ é do tipo:



II) O gráfico de $g(x) = x - 2$ é do tipo:



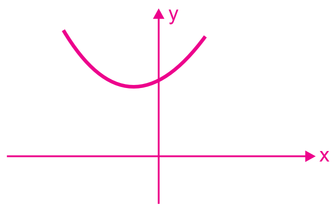
III) O correspondente “quadro” de sinais é:

	-1		2		3	
f(x)	+	–		–		+
g(x)	–	–		+		+
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	–	+		–		+

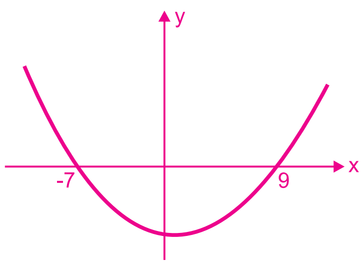
O conjunto solução da inequação é [– 1; 2) ∪ [3; + ∞).
Resposta: A

3. **(UFTO)** – Resolva a inequação:
$(n-9)(n^2-4n+5)(n+7)<0$ no conjunto dos números reais. A soma dos números inteiros que satisfazem a inequação acima é:
a) 3 b) 15 c) 12 d) -4 e) -9

RESOLUÇÃO:
O gráfico de $f(x) = n^2 + 4n + 5$ é do tipo:



Então, $n^2 + 4n + 5 > 0\ \forall n \in \mathbb{R}$.
Logo, $(n-9)(n^2+4n+5)(n+7) < 0 \Leftrightarrow (n-9)(n+7) < 0 \Leftrightarrow -7 < n < 9$, pois o gráfico de $g(n) = (n-9)(n+7)$ é do tipo:



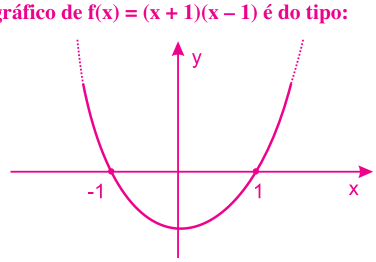
A soma dos números inteiros entre -7 e 9 é igual a $7 + 8 = 15$.
Resposta: B

4. **(ESPM)** – O conjunto verdade da inequação $\dfrac{2x}{x-1} \leqslant 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 1\}$

RESOLUÇÃO:
$$\frac{2x}{x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x-x+1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \leqslant 0$ e $x \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 1$, pois o gráfico de $f(x) = (x+1)(x-1)$ é do tipo:



Resposta: D

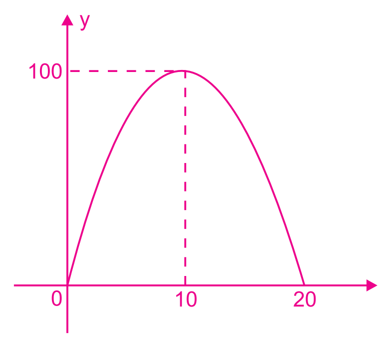
MÓDULO 18

CONJUNTO IMAGEM DA FUNÇÃO DO 2º GRAU E SINAL DAS RAÍZES

1. **(ACAFE)** – Após o lançamento de um projétil, sua altura h, em metros, t segundos após o seu lançamento, é dada por $h(t) = -t^2 + 20t$. Em relação a este lançamento, analise as afirmações a seguir.
I. A altura máxima atingida pelo projétil foi de 10m.
II. O projétil atingiu a altura máxima quando t = 10s.
III. A altura do projétil é representada por uma função polinomial quadrática cujo domínio é [0; 20].
IV. Quando t = 11, o projétil ainda não atingiu sua altura máxima.

Todas as afirmações corretas estão em:
a) I e II. b) I, II e IV. c) II e III. d) III e IV.

RESOLUÇÃO:
Sendo $t \geq 0$ e $h(t) \geq 0$, o gráfico de $h(t) = -t^2 + 20t$ é do tipo



Observe que a abscissa do vértice da parábola é $t_v = \dfrac{-20}{-2} = 10$ e a ordenada é $y_v = h(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 = 100$, t em segundos e h em metros.
II e III são verdadeiras.
I e IV são falsas.
Resposta: C

2. **(FGV)** – O gráfico de uma função quadrática f(x) tem as seguintes características:

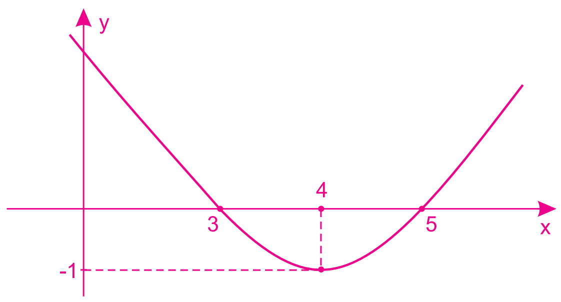
- O vértice é o ponto (4; –1).
- Intercepta o eixo das abscissas no ponto (5; 0).

O ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é:

a) (0; 14) b) (0; 15) c) (0; 16)
d) (0; 17) e) (0; 18)

RESOLUÇÃO:

1) De acordo com os dados, o gráfico de f é do tipo:



e, portanto, $f(x) = a(x-3)(x-5)$.

2) O vértice é o ponto (4; – 1) e, portanto, $f(4) = -1$.
Logo: $-1 = a \cdot (4-3)(4-5) \Leftrightarrow a = 1$

3) $f(x) = 1 \cdot (x-3)(x-5)$

4) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é (0; 15), pois $f(0) = 1 \cdot (0-3)(0-5) = 15$.

Resposta: B

3. **(MACKENZIE)** – Em um processo industrial, a função $C(x) = x^2 - mx + n$, $x > 0$ representa o custo de produção de x peças. Se R\$ 7.500,00 é o menor custo que pode ocorrer, correspondente à produção de 150 peças, então o valor de m + n é igual a:

a) 32.450 b) 29.600 c) 30.290
d) 30.300 e) 28.700

RESOLUÇÃO:

Se o menor custo ocorre com a produção de 150 peças, então:

$$-\frac{(-m)}{2 \cdot 1} = 150 \Leftrightarrow m = 300$$

Além disso, em reais, temos:

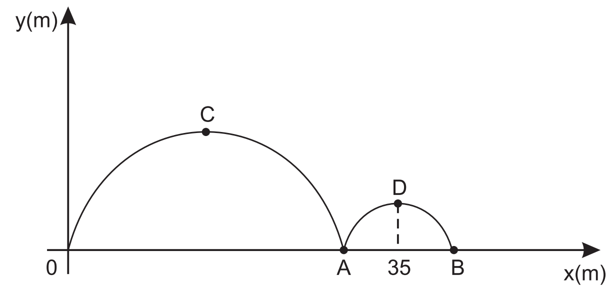
$C(150) = 150^2 - m \cdot 150 + n = 7500 \Leftrightarrow 150m - n = 15000$

Desta forma, $150 \cdot 300 - n = 15000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 30000$ e $m + n = 300 + 30000 = 30300$.

Resposta: D

4. **(UERJ)** – Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D. A equação de uma dessas parábolas é $y = \dfrac{-x^2}{75} + \dfrac{2x}{5}$.

Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

a) 38 b) 40 c) 45 d) 50

RESOLUÇÃO:

A equação $y = \dfrac{-x^2}{75} + \dfrac{2x}{5}$ é da parábola que passa pelos pontos 0, C e A da figura, pois $\dfrac{-x^2}{75} + \dfrac{2x}{5} = 0$ para x = 0 (0) ou x = 30 (A).

A abscissa do ponto B é tal que $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_D$, pois D é o vértice da parábola que passa por A e B.

Devemos ter, então, $\dfrac{30 + x_B}{2} = 35 \Leftrightarrow x_B = 40$.

A distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a $x_B - x_0 = 40 - 0 = 40$.

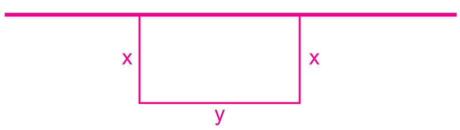
Resposta: B

MÓDULO 19

CONJUNTO IMAGEM DA FUNÇÃO DO 2º GRAU E SINAL DAS RAÍZES

1. **(UEG)** – Um criador de gado leiteiro tem arame suficiente para fazer uma cerca de 500 metros de comprimento. Ele deseja cercar uma área retangular para plantar um canavial, visando fazer ração para o gado, aproveitando esse arame. O local escolhido por ele possui uma cerca pronta que será aproveitada como um dos lados da área a ser cercada. Quais as dimensões dos lados desse canavial para que a área plantada seja a maior possível, se o criador utilizar o arame que possui apenas para os três lados restantes?

RESOLUÇÃO:



Sendo A a área do retângulo e x e y suas dimensões, em metros, como na figura, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 500 \\ A = x \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 500 - 2x \\ A = xy \end{cases} \Rightarrow A(x) = x \cdot (500 - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = -2x^2 + 500x$$

A área máxima é obtida para $x = \dfrac{-500}{-4} = 125 \Rightarrow y = 500 - 2 \cdot 125 = 250.$

Resposta: As dimensões dos lados do canavial são 125 e 250 metros.

2. **(BARRO BRANCO)** – Um avião com 100 lugares foi fretado para uma excursão. O valor que cada passageiro pagou foi estabelecido como sendo R$ 400,00 mais R$ 5,00 por assento não ocupado. A receita máxima que a empresa conseguirá é

a) R$ 40 000,00.
b) R$ 40 350,00.
c) R$ 40 500,00.
d) R$ 41 000,00.
e) R$ 42 000,00.

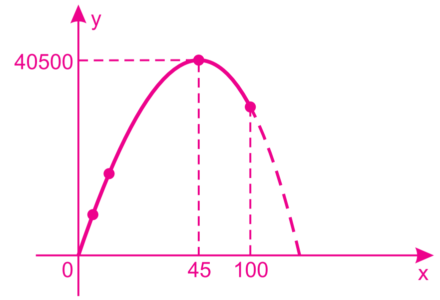
RESOLUÇÃO:
Lugares ocupados: x
Lugares não ocupados: 100 – x
Cada passageiro deverá desembolsar, em reais,
$400 + 5 \cdot (100 - x) = 400 + 500 - 5x = 900 - 5x.$
A receita da empresa, nessa viagem, será, então: $f(x) = (900 - 5x) \cdot x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = -5x^2 + 900x.$

A receita máxima, em reais, é dada por $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-900^2}{-20} = 40\,500,$

quando o número de passageiros for de $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-900}{-10} = 45.$

Resposta: C

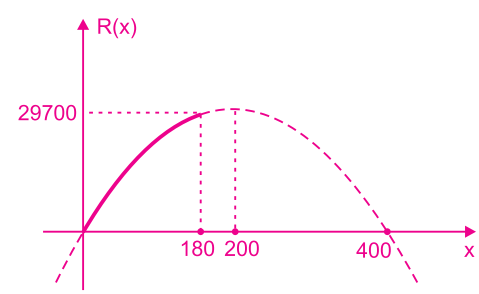
Obs.: O gráfico de f é do tipo:



3. **(FGV)** – O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação p = 300 – 0,75x.
A receita máxima possível por viagem é:

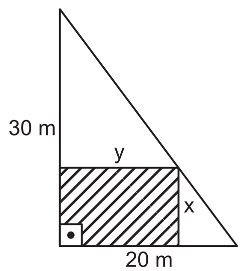
a) R$ 30 000,00.
b) R$ 29 700,00.
c) R$ 29 900,00.
d) R$ 29 600,00.
e) R$ 29 800,00.

RESOLUÇÃO:
A receita é dada por:
$R(x) = p \cdot x = (300 - 0{,}75x) \cdot x = -0{,}75x^2 + 300x$
O número de passageiros que resulta na receita máxima é:
$x_v = \dfrac{-300}{-1{,}5} = 200$



Como o avião utilizado tem 180 lugares, concluímos que a receita máxima ocorre para x = 180 e resulta, em reais, em:
$R(180) = (310 - 0{,}75 \cdot 180) \cdot 180 = 165 \cdot 180 = 29\,700$
Resposta: B

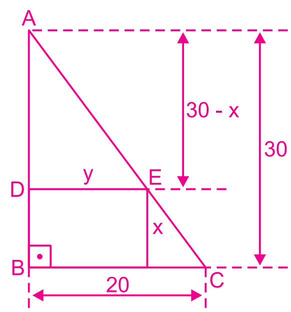
4. **(EPCAR)** – Num terreno em forma de um triângulo retângulo com catetos medindo 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, conforme figura abaixo.



O perímetro da casa, em metros, para que ela ocupe a maior área possível, é igual a:

a) 100 b) 150
c) 50 d) 25

RESOLUÇÃO:



Da semelhança entre os triângulos ADE e ABC da figura, resulta:

$$\frac{30 - x}{30} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = \frac{2}{3}(30 - x)$$

A área da casa é: $A = x \cdot y = x \cdot \frac{2}{3}(30 - x)$

Então, $r(x) = \frac{2}{3}x \cdot (30 - x) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x$ **tem seu valor máximo fornecido por** $x = \dfrac{-20}{2 \cdot \dfrac{-2}{3}} = 15.$

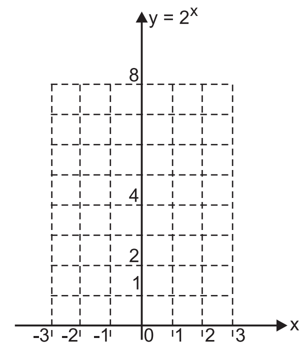
Para x = 15, temos y = 10 e o perímetro 2x + 2y = 50.

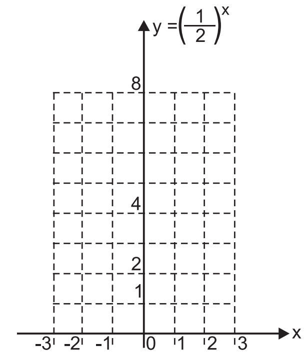
Resposta: C

MÓDULO 20

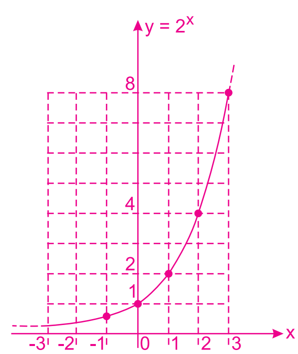
FUNÇÃO EXPONENCIAL

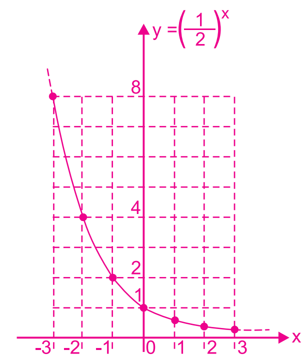
1. Esboce os gráficos das funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, respectivamente, por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.





RESOLUÇÃO:





2. **(UFJF)** – Dada a equação $2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}$, podemos afirmar que sua solução é um número

a) natural. b) maior que 1.
c) de módulo maior do que 1. d) par.
e) de módulo menor do que 1.

RESOLUÇÃO:

$2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{3x-2} \cdot (2^3)^{x+1} = (2^2)^{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{3x-2} \cdot 2^{3x+3} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow 2^{6x+1} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow 6x + 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$

Resposta: E

3. **(UEPB)** – Seja V o conjunto de todas as soluções reais de $\dfrac{5}{3^{2+2x-x^2}} \leqslant 15$. Então:

a) $V = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geqslant -1\}$
b) $V = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3\}$
c) $V = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant 3\}$
d) $V = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) $V = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geqslant 0\}$

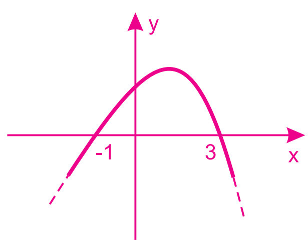
RESOLUÇÃO:

$$\frac{5}{3^{2+2x-x^2}} \leqslant 15 \Leftrightarrow 5 \leqslant 15 \,.\, (3^{2+2x-x^2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{-x^2+2x+2} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{-x^2+2x+2} \geqslant 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 \geqslant -1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$, pois o gráfico de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ é do tipo:



Resposta: D

4. Os valores do número real **x** que satisfazem a inequação $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \geqslant \dfrac{1}{0{,}16}$ são dados por:

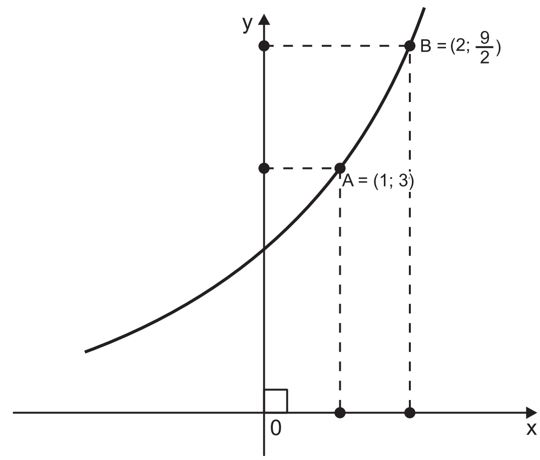
a) $x \geqslant -2$
b) $x \leqslant 2$
c) $x \leqslant -2$
d) $x < \dfrac{1}{2}$
e) $x \geqslant 2$

RESOLUÇÃO:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x \geqslant \frac{1}{0{,}16} \Leftrightarrow (0{,}4)^x \geqslant (0{,}4)^{-2} \Leftrightarrow x \leqslant -2$$

Resposta: C

5. **(UFF)** – O gráfico da função exponencial f, definida por $f(x) = k \,.\, a^x$, foi construído utilizando-se o programa de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (http://www.geogebra.org), conforme mostra a figura a seguir:



Sabe-se que os pontos A e B, indicados na figura, pertencem ao gráfico de f. Determine:

a) os valores das constantes a e k;
b) f(0) e f(3).

RESOLUÇÃO:

a) Como f(2) = 9/2 e f(1) = 3, têm-se 9/2 = k a² e 3 = k a;cx portanto k = 2 e a = 3/2.

b) Usando-se os resultados obtidos no item anterior, tem-se

$$f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x. \text{ Assim, } f(0) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2 \text{ e } f(3) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}.$$

Respostas: a) $a = \dfrac{3}{2}$ e $k = 2$.

b) $f(0) = 2$ e $f(3) = \dfrac{27}{4}$

MÓDULO 1

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE CONJUNTOS

1. Seja A = {2; 5; {3; 4}; 6}. Complete as frases com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ e assinale a alternativa que contém esses símbolos em uma correspondência correta e na respectiva ordem:

I) 2 .... A   II) {2} .... A   III) {3; 4} .... A

IV) Ø .... A   V) 4 .... A   VI) {5; 6} .... A

a) $\notin, \subset, \notin, \subset, \notin$ e $\subset$ b) $\subset, \subset, \in, \subset, \in$ e $\subset$

c) $\in, \subset, \in, \subset, \notin$ e $\subset$ d) $\in, \subset, \subset, \subset, \notin$ e $\subset$

e) $\in, \subset, \in, \subset, \in$ e $\subset$

RESOLUÇÃO:
Completadas de forma correta, as frases ficam assim:
I) 2 $\in$ A   II) {2} $\subset$ A   III) {3; 4} $\in$ A
IV) Ø $\subset$ A   V) 4 $\notin$ A   VI) {5; 6} $\subset$ A
Na ordem, usamos os símbolos $\in, \subset, \in, \subset, \notin$ e $\subset$.
Resposta: C

2. Considere o conjunto A = {1; {2; 3}, 4, {5; Ø}} e assinale a alternativa **falsa**.

a) 1 $\in$ A   b) {2; 3} $\in$ A   c) {4} $\subset$ A

d) Ø $\in$ A   e) {1; {5; Ø}} $\subset$ A

RESOLUÇÃO:
São elementos de A: 1, {2; 3}, 4 e {5; Ø}.
Desta forma, *d* é falsa.
Além disso, {4} $\subset$ A, pois 4 $\in$ A.
{1; {5; Ø}} $\subset$ A, pois 1 $\in$ A e {5; Ø} $\in$ A.
Resposta: D

3. Dados os conjuntos X = {a}, Y = {a; b} e Z = {a; b; c}, escreva o conjunto das partes de X, o conjunto das partes de Y e o conjunto das partes de Z. Estabeleça uma relação entre n(A) e n[P(A)], em que A é um conjunto qualquer e P(A) é o conjunto das partes de A.

RESOLUÇÃO:
X = {a} $\Rightarrow$ P(X) = {Ø; {a}}. Observe que n[P(X)] = 2 = 2^1.
Y = {a; b} $\Rightarrow$ P(Y) = {Ø; {a}; {b}; {a, b}}. Observe que n[P(Y)] = 4 = 2^2.
Z = {a; b; c} $\Rightarrow$ P(Z) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a; b}, {a; c}, {b; c}, {a; b; c}}.
Observe que n [P(Z)] = 8 = 2^3.

Assim: $\boxed{n[P(A)] = 2^{n(A)}}$

4. Sabe-se que {a; b; c; d} $\subset$ X, {c; d; e; f} $\subset$ X e que o conjunto X possui 64 subconjuntos. O número de subconjuntos de X que não possuem os elementos **c** e **d** é:

a) 4   b) 8   c) 16   d) 20   e) 32

RESOLUÇÃO:
Se X possui 64 = 2^6 subconjuntos, então n(X) = 6. Como {a; b; c; d} $\subset$ X e {c; d; e; f} $\subset$ X, temos que X = {a; b; c; d; e; f}. Os subconjuntos de X que não possuem os elementos *c* e *d* são os subconjuntos de {a; b; e; f}, num total de 2^4 = 16 subconjuntos.
Resposta: C

5. Se {– 1; 2; a; 3; 5} = {– 1; 3; b; 4; c}, com b < c, então $(a + c)^b$ é igual a:

a) 27   b) 36   c) 49   d) 64   e) 81

RESOLUÇÃO:
Para que o 1º conjunto possua o elemento 4, deve-se ter a = 4. Para que o 2º conjunto possua os elementos 2 e 5, devem-se ter b = 2 e c = 5, pois b < c.
Assim, $(a + c)^b = (4 + 5)^2 = 9^2 = 81$.
Resposta: E

MÓDULO 2

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

1. Dados os conjuntos A = {2; 3; 4}, B = {3; 4; 5; 6} e S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, determine:

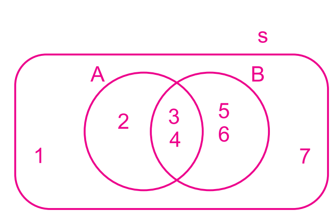
a) A $\cup$ B   b) A $\cap$ B   c) A – B

d) B – A   e) $\complement_S A$

f) o Diagrama de Venn-Euler representando a situação destes conjuntos.

RESOLUÇÃO:
a) A $\cup$ B = {2; 3; 4; 5; 6}   b) A $\cap$ B = {3; 4}
c) A – B = {2}   d) B – A = {5; 6}
e) $\complement_S A$ = S – A = {1; 5; 6; 7}

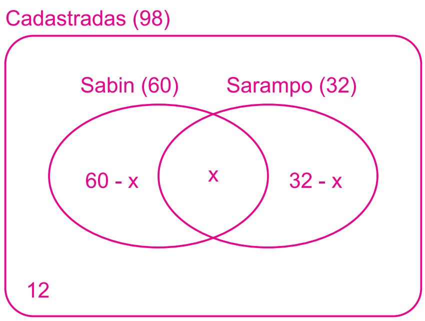
f)



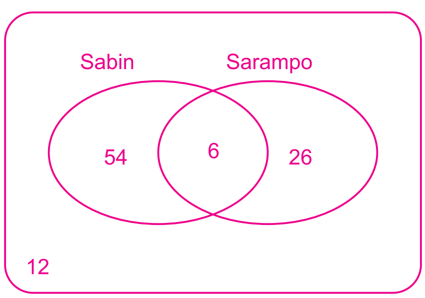
2. **(UEPB)** – O controle de vacinação em uma creche indica que, entre 98 crianças cadastradas, 60 receberam a vacina Sabin, 32 foram vacinadas contra o sarampo e 12 crianças não foram vacinadas. Dessa forma, o número de crianças que não receberam exatamente as duas vacinas é igual a:

a) 66 b) 38 c) 92 d) 72 e) 44

RESOLUÇÃO:



$(60 - x) + x + (32 - x) + 12 = 98 \Leftrightarrow 104 - x = 98$
$\Leftrightarrow x = 6$
Desta forma, temos o seguinte diagrama:



Não receberam exatamente as duas vacinas:
$12 + 54 + 26 = 98 - 6 = 92$ crianças.
Resposta: C

3. **(UDESC)** – O que os brasileiros andam lendo?

O brasileiro lê, em média, 4,7 livros por ano. Este é um dos principais resultados da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil, encomendada pelo Instituto Pró-Livro ao Ibope Inteligência, que também pesquisou o comportamento do leitor brasileiro, as preferências e as motivações dos leitores, bem como os canais e a forma de acesso aos livros.

(Associação Brasileira de Encadernação e Restaure. Adaptado.)

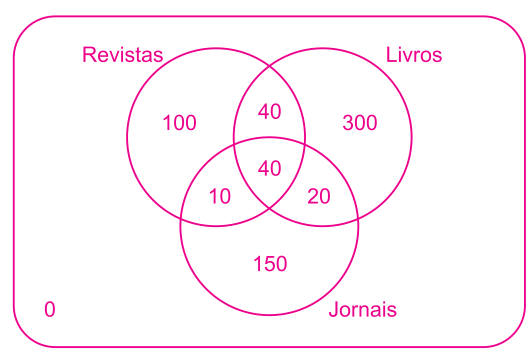
Supõe-se que, em uma pesquisa envolvendo 660 pessoas, cujo objetivo era verificar o que elas estão lendo, obtiveram-se os seguintes resultados: 100 pessoas leem somente revistas, 300 pessoas leem somente livros e 150 pessoas leem somente jornais.
Supõe-se ainda que, dessas 660 pessoas, 80 leem livros e revistas, 50 leem jornais e revistas, 60 leem livros e jornais e 40 leem revistas, jornais e livros.
Em relação ao resultado dessa pesquisa, são feitas as seguintes afirmações:

I. Apenas 40 pessoas leem pelo menos um dos três meios de comunicação citados.
II. Quarenta pessoas leem somente revistas e livros e não leem jornais.
III. Apenas 440 pessoas leem revistas ou livros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa II é verdadeira.
e) Somente a afirmativa I é verdadeira.

RESOLUÇÃO:
Com os dados do enunciado, é possível montar o seguinte Diagrama de Venn:



I) *Falsa*, pois todas leem pelo menos um dos três meios de comunicação.
II) *Verdadeira*, conforme diagrama.
III) *Falsa*, pois leem revistas ou livros:
$100 + 40 + 40 + 10 + 20 + 300 = 510$ pessoas.

Resposta: D

4. Dos 91 alunos da escola “Grandes torcidas”, 51 são corintianos e, destes, 20 são meninas. A escola tem 32 alunos palmeirenses e, destes, 19 são meninos. Três meninos não são corintianos nem palmeirenses. Quantas meninas odeiam o Corinthians?

a) 10 b) 13 c) 18 d) 20 e) 25

RESOLUÇÃO:
O enunciado sugere a tabela:

	Corinthians	Palmeiras	Outros	Total
Meninos	31	19	3	53
Meninas	20	13	5	38
Total	51	32	8	91

Odeiam o Corinthians: 13 + 5 = 18 meninas.
Resposta: C

5. **(UFPE)** – A agremiação X tem 140 sócios do sexo feminino e 110 do sexo masculino; a agremiação Y tem 90 sócios do sexo feminino e 160 do sexo masculino. Existem 60 mulheres que são sócias das duas agremiações e um total de 370 pessoas que são sócias de, pelo menos, uma das agremiações. Quantos homens são sócios da agremiação X, mas não da agremiação Y?

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

RESOLUÇÃO:

	Somente X	Ambas	Somente Y
Feminino	80	60	30
Masculino	110 – a	a	160 – a

As informações do enunciado permitem montar o diagrama acima, no qual $80 + 60 + 30 + (110 - a) + a + (160 - a) = 370 \Leftrightarrow a = 70$.

São sócios de X e não de Y:
$110 - a = 110 - 70 = 40$ homens.
Resposta: C

MÓDULO 3

PRODUTO CARTESIANO, RELAÇÃO BINÁRIA E FUNÇÃO

1. Os pares ordenados (2a; b + 3) e (b + 5; a + 2) são iguais. O valor de a^b é:

a) 8 b) 16 c) 32 d) 64 e) 128

RESOLUÇÃO:

$$(2a; b + 3) = (b + 5; a + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + 5 \\ b + 3 = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a = 4$ e $b = 3$
Assim, $a^b = 4^3 = 64$.
Resposta: D

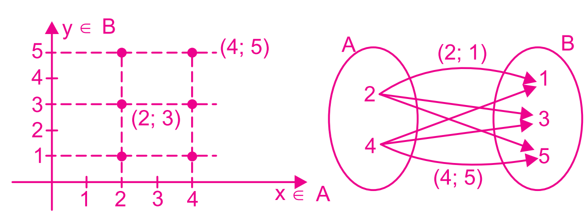
2. Considere os conjuntos A = {2; 4} e B = {1; 3; 5}. Represente:

a) A × B, enumerando, um a um, seus elementos;
b) A × B por meio de um diagrama de flechas e de um gráfico cartesiano;
c) por meio de um diagrama de flechas, a relação binária $h = \{(x; y) \in A \times B \mid y < x\}$;
d) por meio de um diagrama de flechas, a relação binária $g = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x + 3\}$;
e) por meio de um diagrama de flechas, a relação binária $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$.

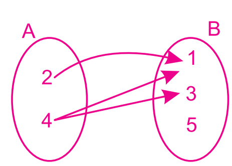
RESOLUÇÃO:
***Atenção, professor:* A intenção da questão é apresentar produto cartesiano, relações e funções.**

a) A × B = {(2; 1), (2; 3), (2; 5), (4; 1), (4; 3), (4; 5)}

b)

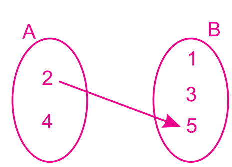


c)



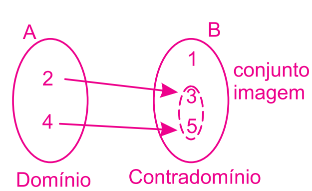
h = {(2; 1), (4; 1), (4; 3)}

d)



g = {(2; 5)}

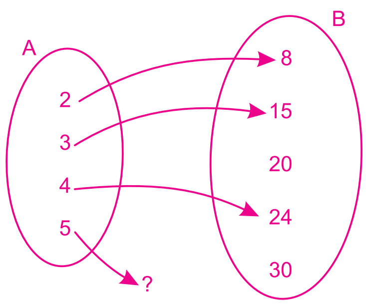
e)



f = {(2; 3), (4; 5)}
f é uma função de A em B
D(f) = A
CD(f) = B
Im(f) = {3; 5}

3. Considere os conjuntos A = {2; 3; 4; 5} e B = {8; 15; 20; 24; 30} e a relação binária f = {(x; y) ∈ A × B | $y = x^2 + 2x$}. Pode-se dizer que f é uma função?

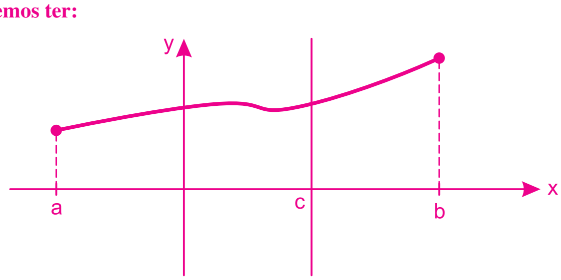
RESOLUÇÃO:
Para x = 2, temos $y = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.
Para x = 3, temos $y = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15$.
Para x = 4, temos $y = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24$.
Para x = 5, temos $y = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35$.
Como o par (5; 35) ∉ A × B, temos que f não é uma função, como mostra o diagrama:



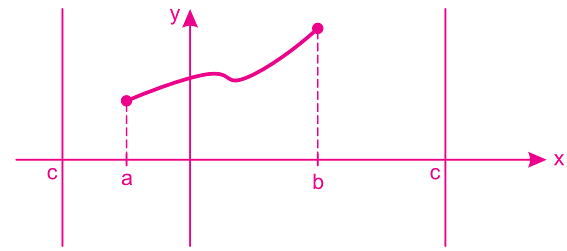
4. **(UFJF)** – Seja f : [a; b] → ℝ uma função. Considere o conjunto M, cujos elementos são os pontos de interseção da reta x = c com o gráfico de f. Pode-se afirmar que

a) M = ∅ para c < a ou c > b.
b) M = [a; b].
c) M é um conjunto unitário.
d) M possui exatamente dois elementos.
e) M = ℝ.

RESOLUÇÃO:
Para que um gráfico represente uma função, nenhuma reta paralela ao eixo y pode interceptar o gráfico em mais de um ponto. Assim, para a função f, podemos ter:

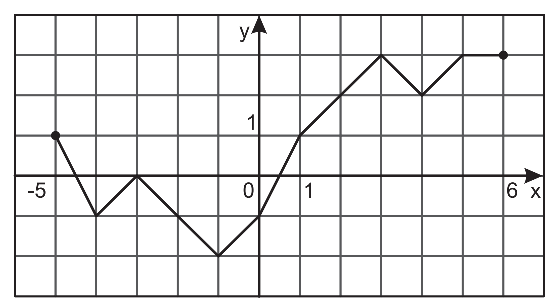


1) A reta x = c intercepta o gráfico de f em um único ponto se, e somente se, c ∈ [a; b].



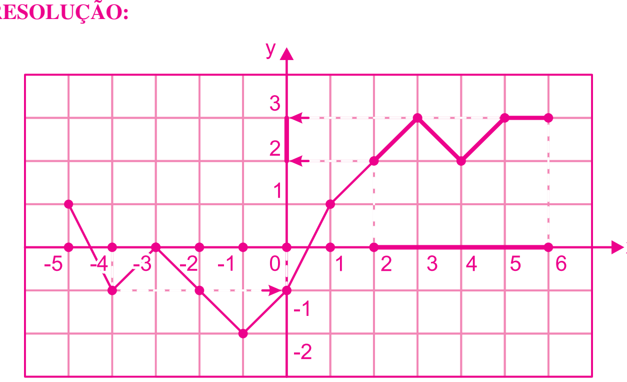
2) A reta x = c não intercepta o gráfico de f se, e somente se, c ∉ [a; b].
Resposta: A

5. **(GAVE-Adaptada)** – No gráfico a seguir, está representada, em referencial xOy, uma função f de domínio [– 5, 6].



a) Calcule f(2) + f(– 2) + f(6).
b) Indique todos os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a – 1.
c) Qual é o conjunto imagem de f?
d) Resolva a inequação f(x) ⩾ 2.

RESOLUÇÃO:



a) f(2) = 2, f(– 2) = – 1 e f(6) = 3; portanto,
f(2) + f(– 2) + f(6) = 2 + (– 1) + 3 = 4.
b) f(x) = – 1 se, e somente se, x = – 4, x = – 2 ou x = 0.
c) Im(f) = [– 2; 3] obtido no eixo y.
d) f(x) ⩾ 2 ⇔ 2 ⩽ x ⩽ 6, como destacado no gráfico.

MÓDULO 4

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

1. **(CEFET-MG-Adaptada)** – Considerando-se **f** a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x), & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 < x < 3 \\ 3, & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

o valor de $A = \sqrt{f\left(-\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{7}{2}\right) . f\left(\frac{3}{2}\right)}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

RESOLUÇÃO:

Como $-\frac{1}{2} < 1$, **temos** $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[\sqrt{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$

$= \left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right]\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right] = (\sqrt{2})^2 - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$

Sendo $\frac{7}{2} > 3$, **temos** $f\left(\frac{7}{2}\right) = 3$ **e,**

sendo $1 < \frac{3}{2} < 3$, **temos** $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$

Assim:

$A = \sqrt{f\left(-\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{7}{2}\right) . f\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{7}{4} - 3 . \frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Resposta: A

2. Sejam A e B subconjuntos dos números reais e os respectivos domínios das funções definidas por $f(x) = \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = \sqrt{5 - x}$. O produto dos elementos inteiros de $A \cap B$ é:

a) 60 b) 80 c) 100 d) 120 e) 150

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{x - 2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$; **portanto,** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

$\sqrt{5 - x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leqslant 5$; **portanto,** $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$.

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$. **Os números inteiros pertencentes a** $A \cap B$ **são 2, 3, 4 e 5, cujo produto é 120.**

Resposta: D

3. O tempo gasto para um determinado número de ratos atravessar um labirinto é dado pela função $t(x) = \sqrt{x + 14}$, em que t(x) é dado em segundos e x é o número de ratos. Desta forma, responda:

a) Em $\mathbb{R}$, qual o domínio da função t?

b) No contexto do exercício, qual o domínio da função t?

c) Qual a diferença entre os tempos gastos por uma população de 50 ratos e outra de apenas 2 ratos?

RESOLUÇÃO:

a) $\sqrt{x + 14} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -14$ **e**

$D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$

b) A quantidade de ratos não pode ser negativa nem nula e deverá ser inteira. Desta forma, no contexto, $D(t) = \mathbb{N}^*$.

c) $t(50) = \sqrt{50 + 14} = \sqrt{64} = 8$

$t(2) = \sqrt{2 + 14} = \sqrt{16} = 4$

$t(50) - t(2) = 8 - 4 = 4$ **segundos**

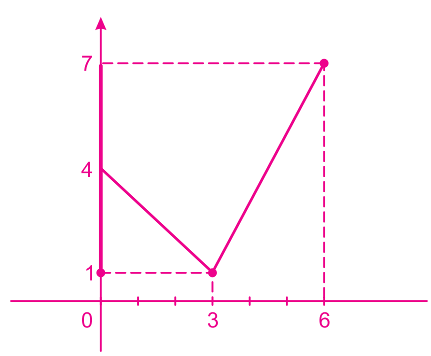
Respostas: a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -14\}$ **b)** $\mathbb{N}^*$ **c) 4 segundos**

4. O conjunto imagem da função $f: [0; 6] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x + 4, \text{ se } 0 \leqslant x < 3 \\ 2x - 5, \text{ se } 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$ é:

a) [4; 7] b) [1; 7] c) [0; 6]
d) [–5; –2] e) [1; + ∞[

RESOLUÇÃO:

O gráfico de f é:



O conjunto imagem é Im(f) = [1; 7], conforme assinalado no gráfico.

Resposta: B

5. **(UECE)** – Seja f a função real de variável real, definida por $f(x) = x^2 + px + q$, em que p e q são números reais constantes. Se o gráfico de f passa pelos pontos (5; 0) e (0; 5), o valor de f(1) é:

a) –1 b) 0 c) 1 d) 2

RESOLUÇÃO:

Dizer que o gráfico passa pelo ponto (5; 0) equivale a dizer que f(5) = 0. Se passa pelo ponto (0; 5), então f(0) = 5.

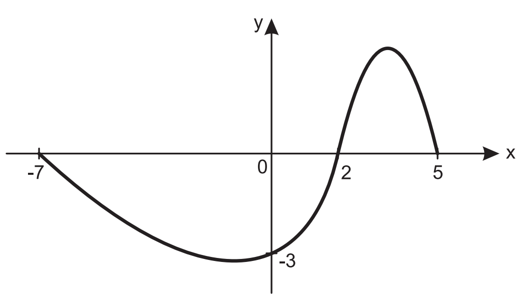
Desta forma:

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = 5^2 + p\,.\,5 + q = 0 \\ f(0) = 0^2 + p\,.\,0 + q = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5p + q = -25 \\ q = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p = -6 \\ q = 5 \end{array}\right.$$

A função f é tal que $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e $f(1) = 1^2 - 6\,.\,1 + 5 = 0$.

Resposta: B

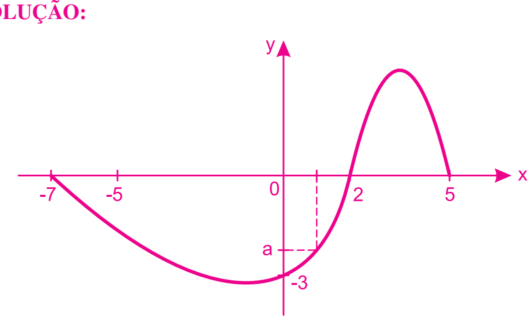
6. **(UFAM)** – Analise o gráfico da função f e assinale a única alternativa **falsa**:



a) f(1) > f(2) b) f(0) = –3 c) –5 ∈ D(f)

d) f(2) = f(5) = 0 e) f(1) < 0

RESOLUÇÃO:



Observe, no gráfico, que:

1) f(1) = a < 0

2) f(–7) = 0, f(2) = 0 e f(5) = 0

3) f(0) = –3

4) –5 ∈ [–7; 5] = D(f)

De (1) e (2), obtemos:

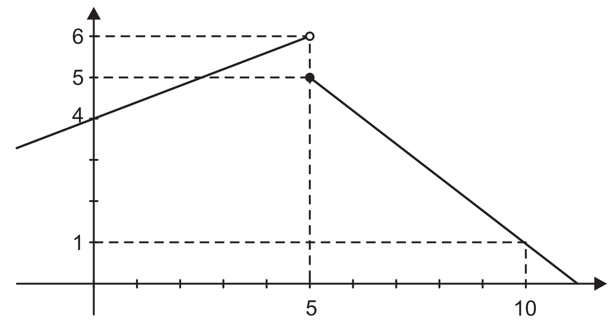
f(1) = a < 0 = f(2)

Resposta: A

MÓDULO 5

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

1. **(UFGO)** – A função definida para todo número real x cujo gráfico é



tem a seguinte lei de formação:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ -\dfrac{4}{5}x + 9, & x \geqslant 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ \dfrac{4}{5}x + 9, & x \geqslant 5 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2}x + 4, & x < 5 \\ -\dfrac{5}{4}x + 9, & x \geqslant 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x + 4, & x < 5 \\ \dfrac{4}{5}x + 9, & x \geqslant 5 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2}x + 4, & x < 5 \\ \dfrac{5}{4}x + 9, & x \geqslant 5 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

Para x < 5, o gráfico é uma semirreta e tem equação do tipo y = ax + b, com y = 4 para x = 0 e y = 6 para x = 5.

Assim:

$$\left\{\begin{array}{l} 4 = a\,.\,0 + b \\ 6 = a\,.\,5 + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{5} \\ b = 4 \end{array}\right. \text{; portanto, } y = \frac{2}{5}x + 4.$$

Para x ⩾ 5, o gráfico é uma semirreta e tem equação do tipo y = mx + n, com y = 5 para x = 5 e y = 1 para x = 10.

Assim:

$$\left\{\begin{array}{l} 5 = m\,.\,5 + n \\ 1 = m\,.\,10 + n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -\dfrac{4}{5} \\ n = 9 \end{array}\right. \text{; portanto, } y = -\frac{4}{5}x + 9.$$

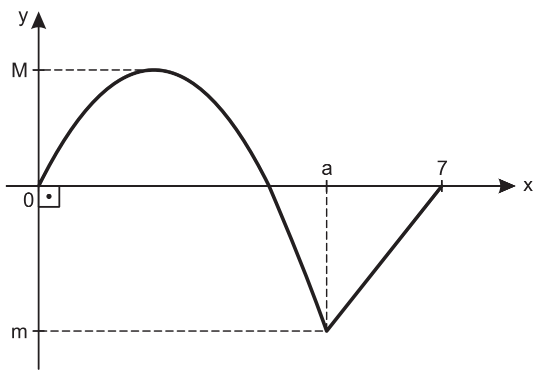
Desta forma: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x + 4, \text{ se } x < 5 \\ -\dfrac{4}{5}x + 9, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$

Resposta: A

2. **(UFOP)** – Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x, \text{ se } 0 \le x \le a \\ 5x - 35, \text{ se } a \le x \le 7 \end{cases}$$

cujo domínio é o intervalo fechado [0; 7]. *M* e *m* são, respectivamente, o maior e o menor valor de f(x), como mostra o gráfico.

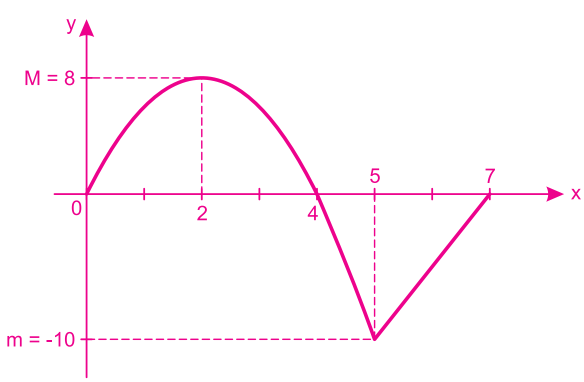


O valor de M – m é:

a) –18 b) 18 c) –2 d) 2

RESOLUÇÃO:
Para x = a, temos
$f(a) = -2a^2 + 8a = 5a - 35 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 35 = 0 \Leftrightarrow a = 5$, pois $a > 0$.

Como as raízes da equação $-2x^2 + 8x = 0$ são 0 e 4, temos que o gráfico de f é:



pois f(5) = –10 e f(2) = 8. Assim M – m = 8 – (–10) = 18.

Resposta: B

3. Seja f: A → ℝ uma função tal que $f(2x + 1) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, com $x \neq 1$.

O domínio da função f é:

a) ℝ – {1} b) ℝ* c) ℝ – {3}

d) ℝ – {– 1} e) $\mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\}$

RESOLUÇÃO:

Fazendo 2x + 1 = t, temos $x = \dfrac{t-1}{2}$ e $f(2x + 1) = \dfrac{x-3}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{\dfrac{t-1}{2} - 3}{\dfrac{t-1}{2} - 1} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t-7}{t-3}$ ou, de forma equivalente,

$f(x) = \dfrac{x-7}{x-3}$.

Para que f(x) ∈ ℝ, devemos ter $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. O domínio de f é ℝ – {3}.
Resposta: C

4. **(FGV-Adaptada)** – Se f é uma função tal que f(a – b) = f(a) + f(b), quaisquer que sejam os números reais *a* e *b*, então f(3x) é igual a:

a) f(x) + 2 b) 0 c) – f(x) + 1

d) 3f(x) – 3 e) – 3f(x) + 1

RESOLUÇÃO:
Como f(a – b) = f(a) + f(b), ∀a, b ∈ ℝ, para a = b = 0, temos:
f(0 – 0) = f(0) + f(0) ⇔ f(0) = 2f(0) ⇔ f(0) = 0.
Assim, para a = b = 3x, temos:
f(3x – 3x) = f(3x) + f(3x) ⇔ f(0) = 2f(3x) = 0 ⇔ f(3x) = 0
Observe que:
f(x – x) = f(x) + f(x) ⇔ f(0) = 2f(x) ⇔ f(x) = 0, ∀x ∈ ℝ
Resposta: B

5. Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ que satisfaz a condição $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(2) = 4$:

a) calcule f(1);

b) mostre que $f(2a) = [f(a)]^2$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$;

c) determine um possível valor de **a** que satisfaça a equação $f(2a) - 3f(a) + f(1) = 0$.

RESOLUÇÃO

a) $f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = [f(1)]^2 = 4 \Leftrightarrow f(1) = 2$, pois $f(1) \in \mathbb{R}_+^*$

b) $f(2a) = f(a + a) = f(a) \cdot f(a) = [f(a)]^2$

c) $f(2a) - 3f(a) + f(1) = 0 \Leftrightarrow [f(a)]^2 - 3f(a) + 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) = 1$ ou $f(a) = 2$

Um possível valor de *a* é 1, pois f(1) = 2.

Respostas: a) f(1) = 2
b) Demonstração
c) 1

MÓDULO 6

PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO (I)

1. Considere as funções:

f: {1; 2; 3} → {4; 5; 6; 7} | f(x) = x + 3

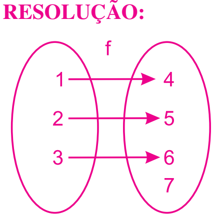
g: {– 1; 0; 1} → {0; 1} | $g(x) = x^2$

h: {1; 2; 3} → {5; 6; 7} | h(x) = x + 4

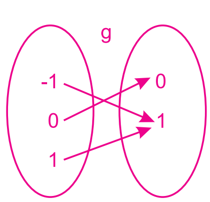
i: {0; 1; 2} → {0; 2; 4} | $i(x) = x^2 - x$

Classifique-as em sobrejetora, injetora ou bijetora.

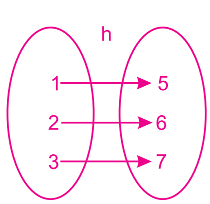
RESOLUÇÃO:



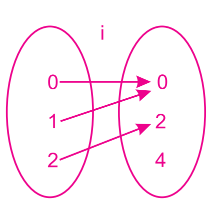
f é injetora, mas não é sobrejetora.



g é sobrejetora, mas não é injetora.

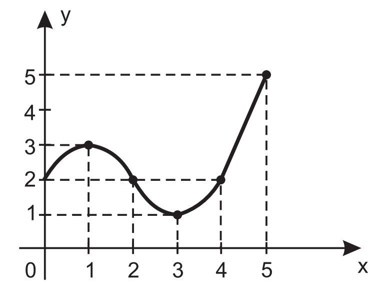


h é injetora e sobrejetora; portanto, bijetora.



i não é injetora nem sobrejetora.

2. Considere a função f: [0; 5] → $\mathbb{R}$, definida pelo gráfico:



Apresente **dois** motivos para f não ser bijetora.

RESOLUÇÃO:

Do gráfico, conclui-se que:

f(0) = f(2) = f(4) = 2, portanto f não é injetora.

Im(f) = [1; 5] ≠ $\mathbb{R}$ = CD(f), portanto f não é sobrejetora.

3. **(UFRN)** – Considere a função f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 - 6$.

a) Determine o valor de f(15).

b) Determine x, no domínio de f, de modo que f(x) = 762.

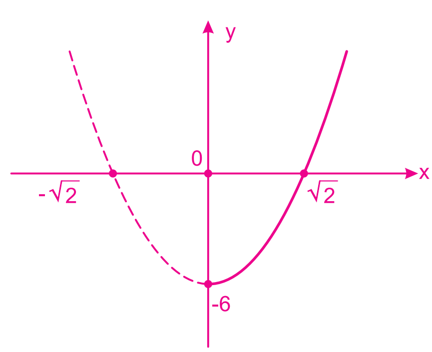
c) Explique por que não é possível encontrar valores, no domínio de f, com $x_1 \neq x_2$, de modo que $f(x_1) = f(x_2)$.

RESOLUÇÃO:

a) $f(15) = 3 \cdot 15^2 - 6 = 669$

b) $f(x) = 3x^2 - 6 = 762 \Leftrightarrow 3x^2 = 768 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$, pois $x \in \mathbb{R}_+$

c) Não existem x_1 e x_2 pertencentes a $\mathbb{R}_+$, com $x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, pois a função f é injetora, como se vê no gráfico.



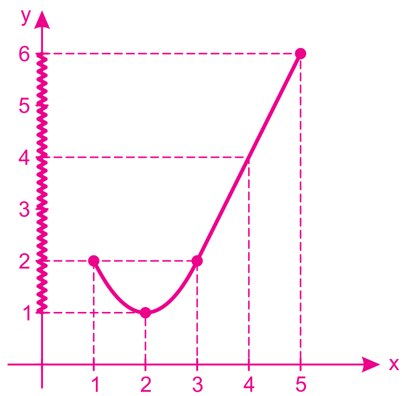
4. Se a função f: [1; 5] → [a; b], definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, \text{ se } 1 \le x \le 3 \\ 2x - 4, \text{ se } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

é sobrejetora, então a + b é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

RESOLUÇÃO:
O gráfico de f é:

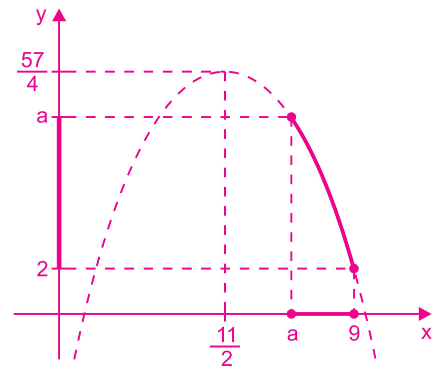


O conjunto imagem de f é [1; 6].
Se f é sobrejetora, então CD(f) = Im(f) ⇔ [a; b] = [1; 6] ⇔
⇔ a = 1, b = 6 e a + b = 7.
Resposta: D

5. O valor de **a** que torna bijetora a função f:[a; 9] → [2; a], definida por $f(x) = -x^2 + 11x - 16$, é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

RESOLUÇÃO:
O gráfico de f é:



Para que f seja bijetora, devemos ter:

Im(f) = [2; a] = CD(f), $a > \frac{11}{2}$ **e f(a) = a**

Assim, $f(a) = -a^2 + 11a - 16 = a \Leftrightarrow a^2 - 10a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 8$**, pois** $a > \frac{11}{2}$**.**

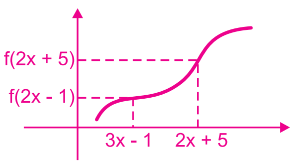
Resposta: D

MÓDULO 7

PROPRIEDADES DE UMA FUNÇÃO (II)

1. Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$f(3x - 1) < f(2x + 5)$ é estritamente crescente, então:
a) $x < 5$ b) $x < 5{,}5$ c) $x < 6$
d) $x > 7$ e) $x > 9$

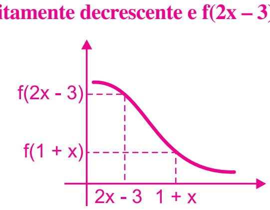
RESOLUÇÃO:
f é estritamente crescente e $f(3x - 1) < f(2x + 5) \Rightarrow 3x - 1 < 2x + 5 \Rightarrow x < 6$.



Resposta: C

2. A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente decrescente.
Se $f(2x - 3) > f(1 + x)$, então:
a) $0 < x < 1$ b) $x > 2$ c) $x < 4$
d) $x > 1$ e) $x < 0$

RESOLUÇÃO:
f é estritamente decrescente e $f(2x - 3) > f(1 + x) \Rightarrow 2x - 3 < 1 + x \Rightarrow x < 4$.



Resposta: C

3. **(IBEMEC)** – Dizer que uma função f(x) é estritamente decrescente é equivalente a dizer que, quaisquer que sejam a e b elementos do domínio da função, tem-se $a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.
Sabendo-se que a função $f(x) = (1 + x)^{1 - x}$ é estritamente decrescente no domínio dos reais maiores do que 1, segue das desigualdades $\dfrac{5}{4} < \dfrac{4}{3} < \dfrac{3}{2}$ que:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{7}} < \sqrt{\dfrac{2}{5}} < \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}} < \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}} < \sqrt[3]{\dfrac{3}{7}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{5}} < \sqrt[3]{\dfrac{3}{7}} < \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{7}} < \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}} < \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{4}{9}} < \sqrt[3]{\dfrac{3}{7}} < \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

RESOLUÇÃO:
Se f é estritamente decrescente, então:

$$\frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) > f\left(\frac{4}{3}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

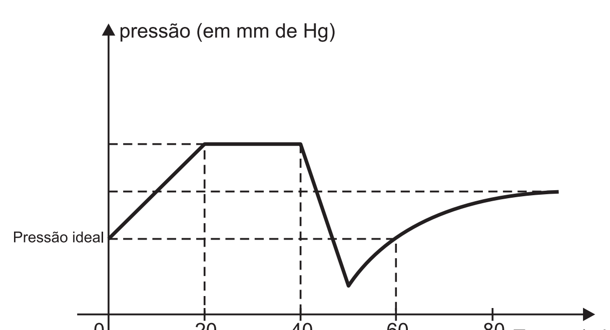
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{5}{4}\right)^{1 - \frac{5}{4}} > \left(1 + \frac{4}{3}\right)^{1 - \frac{4}{3}} > \left(1 + \frac{3}{2}\right)^{1 - \frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} > \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{4}{9}} > \sqrt[3]{\frac{3}{7}} > \sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{5}} < \sqrt[3]{\frac{3}{7}} < \sqrt[4]{\frac{4}{9}}$$

Resposta: C

4. O gráfico a seguir mostra a variação da pressão arterial alta de um indivíduo, em função do tempo, em um determinado dia em que esteve sob observação.



Após notar que a pressão permanecia alta por 20 minutos, o médico aplicou um medicamento que fez baixar a pressão durante um intervalo de tempo pequeno. Pode-se afirmar:

a) A pressão foi estritamente crescente durante todo o tempo observado.
b) O medicamento foi aplicado tardiamente.
c) Não há um intervalo de tempo em que a pressão arterial foi decrescente.
d) A pressão arterial alta nunca ficou abaixo da ideal.
e) Podemos considerar que a medicação aplicada não foi totalmente eficaz.

RESOLUÇÃO:

a) A pressão foi estritamente crescente somente durante os 20 min iniciais da observação.
b) Não se pode garantir que o medicamento foi aplicado tardiamente, pois não se conhece o padrão de espera em pressão alta e tampouco se ela foi extremamente elevada.
c) A pressão foi decrescente no intervalo entre 20 min e aproximadamente 50 min da observação.
d) A pressão arterial alta esteve abaixo da ideal em um instante entre 40 min e 60 min.
e) Considerando que a pressão arterial voltou a subir e ultrapassou a ideal, podemos considerar que a medicação aplicada não foi totalmente eficaz.

Resposta: E

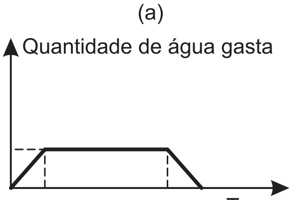
5. **(GAVE-Adaptada)** – João e Miguel são dois irmãos que jogam na equipe *Os Vencedores*. João cronometrou o tempo que o seu irmão demorou para tomar um banho no vestiário. Reparou que Miguel:

- durante o banho, só fechou a torneira enquanto se ensaboou;
- demorou 1 minuto e 20 segundos molhando-se com a torneira sempre aberta;
- demorou 3 minutos e 5 segundos ensaboando-se com a torneira fechada;
- terminou o banho, quando tinham decorrido 6 minutos e 30 segundos após ter iniciado o banho.

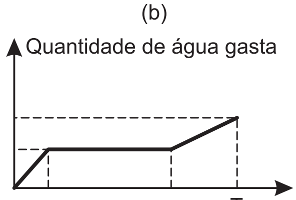
O João verificou que, quando a torneira está aberta, gasta-se 0,6 litro de água em 2 segundos.

a) Quantos litros de água foram gastos por Miguel no banho? Apresente os cálculos efetuados.
b) Qual dos gráficos seguintes poderá representar a quantidade de água gasta por Miguel no banho?

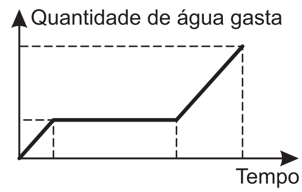
(a)



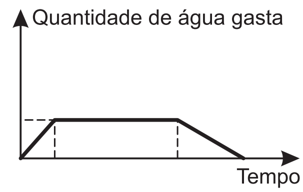
(b)



(c)



(d)



RESOLUÇÃO:

Miguel permaneceu com a torneira aberta durante (6 min e 30 s) – (3 min e 5 s) = 3 min e 25 s = 205 s.

Durante esse período, gastou $\frac{205}{2} \cdot 0{,}6\,\ell = 61{,}5$ litros.

O gráfico que melhor representa o gasto de água durante o tempo em que Miguel ficou no banho é o da alternativa C.

Respostas: a) 61,5 litros b) C

6. **(UFJF)** – Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada:

- função par se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- função ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Dada uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, determine condições sobre *a*, *b* e *c* para que f seja uma função par.
b) Mostre que nenhuma função quadrática pode ser uma função ímpar.
c) Encontre uma função que seja, simultaneamente, uma função par e uma função ímpar.

RESOLUÇÃO:

a) Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ for uma função par:

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow a(-x)^2 + b \cdot (-x) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2bx = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 0}$$

b) Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ for uma função ímpar:

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c = -(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ax^2 + c = 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } c = 0$$

Porém, se $\boxed{a = 0}$, f deixa de ser quadrática.

c) Se f for par e ímpar simultaneamente, para $\forall x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

MÓDULO 8

FUNÇÃO COMPOSTA

1. Considere os conjuntos

$A = \{1; 2\}$, $B = \{5; 8\}$ e $C = \{9; 15\}$ e as funções:

$f: A \to B \mid f(x) = 3x + 2;$

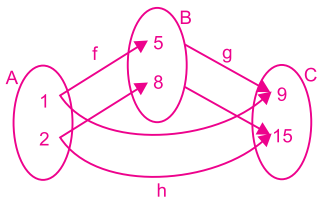
$g: B \to C \mid g(x) = 2x - 1;$

$h: A \to C \mid h(x) = 6x + 3.$

Faça um diagrama de flechas mostrando as funções **f**, **g** e **h**. Escreva a função **h** usando as funções **f** e **g**.

RESOLUÇÃO:

a)



b) **$h: A \to C \mid h(x) = g[f(x)]$ ou $h: A \to C \mid h(x) = gof(x)$**

Observação: A intenção deste exercício é apresentar a função composta. Comente também o domínio e o contradomínio de gof.

2. Admita as funções $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x^2 - x$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 3 - x$. Determine:

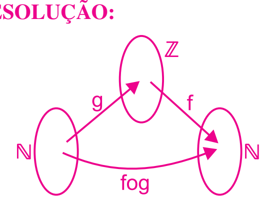
a) D(fog) e CD(fog)   b) D(gof) e CD(gof)

c) (gof)(– 4)   d) (fog)(5)

e) as raízes da equação (fog)(x) = 0

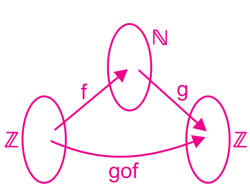
RESOLUÇÃO:

a)



D(fog) = ℕ
CD(fog) = ℕ

b)



D(gof) = ℤ
CD(gof) = ℤ

c) **$f(-4) = (-4)^2 - (-4) = 20$**

$(gof)(-4) = g[f(-4)] = g[20] = -17$

d) **$g(5) = 3 - 5 = -2$**

$(fog)(5) = f[g(5)] = f(-2) = (-2)^2 - (-2) = 6$

e) **$(fog)(x) = f[g(x)] = f[3 - x] =$**

$= (3 - x)^2 - (3 - x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

3. **(FUVEST)** – Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a:

a) 4   b) 5   c) 6   d) 7   e) 8

RESOLUÇÃO:

Sendo $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$, temos:

$f[g(x)] = f[x^2 + 5x + 3] = 2(x^2 + 5x + 3) - 9 = 2x^2 + 10x - 3$

Como $f[g(x)] = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 3 = x^2 + 5x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 1$

As raízes de $f[g(x)] = g(x)$ são – 6 e 1 e a soma dos valores absolutos dessas raízes é $|-6| + |1| = 7$.

Resposta: D

4. **(UFCE)** – O coeficiente b da função quadrática $f: \mathbb{R} \to R$, $f(x) = x^2 + bx + 1$, que satisfaz a condição $f(f(-1)) = 3$, é igual a:

a) –3   b) –1   c) 0   d) 1   e) 3

RESOLUÇÃO:

Sendo $f(x) = x^2 + bx + 1$, temos:

$f(-1) = (-1)^2 + b \,.\, (-1) + 1 = 2 - b$ e

$f(f(-1)) = f\,[2 - b] = (2 - b)^2 + b\,(2 - b) + 1 = -2b + 5 = 3$ (dado) $\Leftrightarrow b = 1$

Resposta: D

5. **(CEPERJ)** – Se $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, a raiz da equação $fof(x) = 10$ é:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{5}{3}$ d) $\dfrac{7}{3}$ e) $\dfrac{8}{3}$

RESOLUÇÃO:

$$fof(x) = f(f(x)) = f = \left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{2}{\dfrac{2}{x-1} - 1} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{3-x}{x-1}} = \frac{2x-2}{3-x} = 10$$

Assim: $2x - 2 = 30 - 10x \Leftrightarrow 12x = 32 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

Resposta: E

MÓDULO 9

FUNÇÃO INVERSA

1. Dadas as funções **f** e **g** tais que $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, mostre que fog = id e gof = id.

RESOLUÇÃO:

Utilize este exercício para definir função inversa e função identidade.

$$fog(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x-2}{3}\right] = 3 \,.\, \left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x \Rightarrow fog = id$$

$$gof(x) = g[f(x)] = g[3x+2] = \frac{(3x+2)-2}{3} = x \Rightarrow gof = id$$

Como f e g são de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, fog e gof também são de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

2. Obtenha as sentenças que definem as funções inversas de:

a) $f: [-3; 5] \to [1; 17]$ tal que $f(x) = 2x + 7$

b) $g: [2; 5] \to [0; 9]$ tal que $g(x) = x^2 - 4x + 4$

RESOLUÇÃO:

a) $f(x) = 2x + 7 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-7}{2}$

$f^{-1}: [1; 17] \to [-3; 5]$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{x-7}{2}$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = y \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y} \Leftrightarrow g^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{x}$

Para que $g^{-1}(x) \in [2; 5]$, devemos ter $g^{-1}: [0; 9] \to [2; 5]$ tal que $g^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$.

3. A função que fornece o custo em reais, por unidade, para a produção de um certo tipo de ferramenta é $C(x) = \left(3 + \dfrac{1200}{x}\right)$, em que x é um número natural não nulo e representa a quantidade de ferramentas produzidas. A função Q(x), que permite obter a quantidade de ferramentas a ser produzida para cada custo x, dado em reais, da produção da ferramenta, é:

a) $Q(x) = \dfrac{1200}{x} + 3$ b) $Q(x) = \dfrac{1200}{x} - 3$

c) $Q(x) = \dfrac{1200 - x}{3}$ d) $Q(x) = \dfrac{1200}{x-3}$

e) $Q(x) = (1200 + x) \,.\, 3$

RESOLUÇÃO:

Fazendo $C(x) = \left(3 + \dfrac{1200}{x}\right) = y$, temos $\dfrac{1200}{x} = y - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1200}{y-3}$.

Assim: $Q(x) = \dfrac{1200}{x-3}$

Resposta: D

4. Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

a) Determine os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1}.

b) Construa o gráfico de f^{-1} com base no gráfico de f.

RESOLUÇÃO:

a) Havendo intersecção entre os gráficos de f e f^{-1}, ela ocorre sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta y = x).

Assim: $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x = x \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

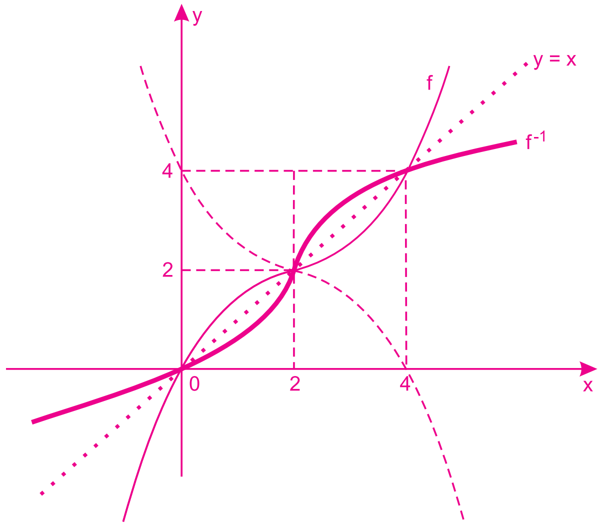
e

$\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 8 = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$

Desta forma, os pontos de intersecção são (0; 0), (2; 2) e (4; 4).

b)



MÓDULO 10

FUNÇÃO INVERSA

1. **(UFAM)** – Dada a função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq -1$, então f(f(x)) é igual a:

a) x + 1 b) – x c) $-\dfrac{1}{x}$

d) x – 1 e) x

RESOLUÇÃO:

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - 1}{\dfrac{x-1}{x+1} + 1} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{x+1}}{\dfrac{(x-1)+(x+1)}{x+1}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

Resposta: C

2. **(U.F.ITAJUBA)** – Se f e g são funções tais que f(x) = 7x – 4 e $f[g(x)] = x^2 - f(x + 1)$, então g(7) é igual a:

a) $\dfrac{1}{7}$ b) 1 c) 4 d) 7

RESOLUÇÃO:

f(x + 1) = 7 . (x + 1) – 4 = 7x + 3

$f[g(x)] = x^2 - f(x+1) = x^2 - (7x+3) = x^2 - 7x - 3$

mas f[g(x)] = 7 . g(x) – 4

Dessa forma, $7g(x) - 4 = x^2 - 7x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{7} \cdot x^2 - x + \dfrac{1}{7}$ e $g(7) = \dfrac{1}{7} \cdot 7^2 - 7 + \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{7}$.

Resposta: A

3. Sejam **f** e **g** funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que f (g(x)) = 10x + 3 e f(x) = 2x – 5. Calcule g(1).

RESOLUÇÃO:

Atenção, Sr. Professor! A intenção desta questão é recordar com o aluno como, dada a função “externa”, pode-se obter a função “interna”.

$f(g(x)) = 2g(x) - 5 = 10x + 3 \Leftrightarrow 2g(x) = 10x + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = 5x + 4$ e $g(1) = 5 \cdot 1 + 4 = 9$

4. Sejam **f** e **g** funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que g(x) = 2x + 5 e fog(x) = 6x + 3. Pode-se afirmar que **f(x)** é igual a:

a) 3x – 12 b) 3x – 1 c) $\dfrac{x}{2} + 3$

d) 2x + 1 e) $\dfrac{x}{3} + 4$

RESOLUÇÃO:

Atenção, Sr. Professor! A intenção desta questão é recordar com o aluno como, dada a função “interna”, pode-se obter a função “externa”.

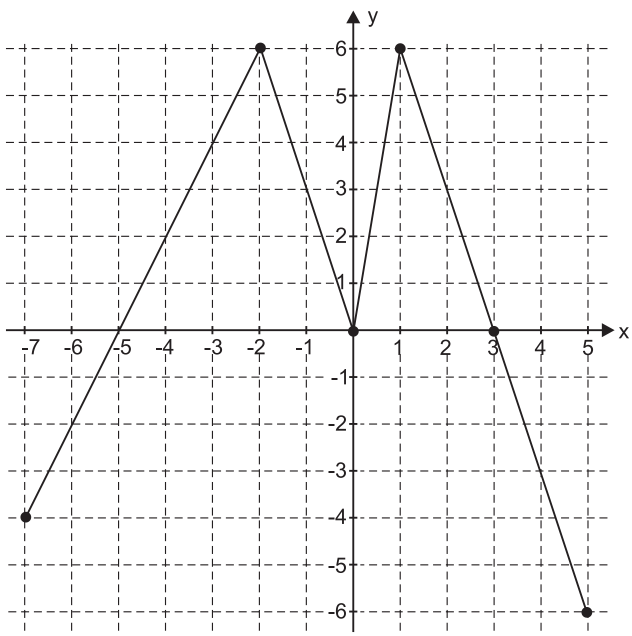
1) $\left.\begin{array}{l} g(x) = 2x + 5 \\ fog(x) = 6x + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x)) = f(2x+5) = 6x + 3$

2) $2x + 5 = t \Rightarrow x = \dfrac{t-5}{2}$

3) $f(t) = 6 \cdot \dfrac{t-5}{2} + 3 = 3t - 12 \Rightarrow f(x) = 3x - 12$

Resposta: A

5. **(FGV)** – A figura indica o gráfico da função f, de domínio [–7; 5], no plano cartesiano ortogonal.

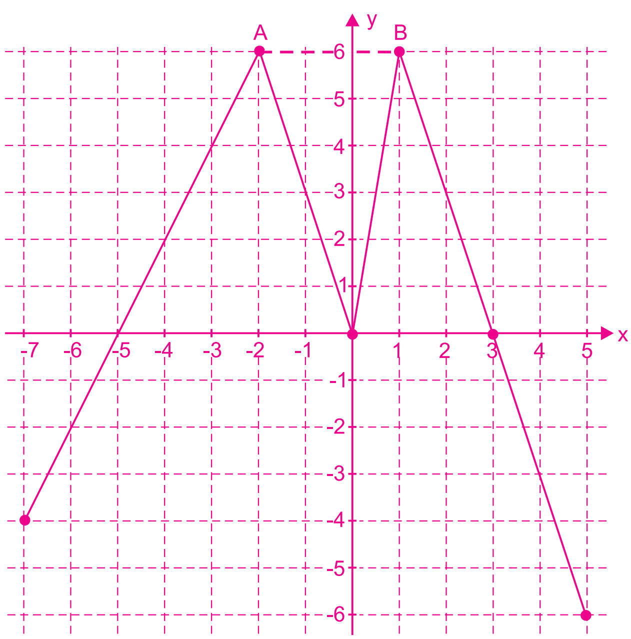


O número de soluções da equação f(f(x)) = 6 é:

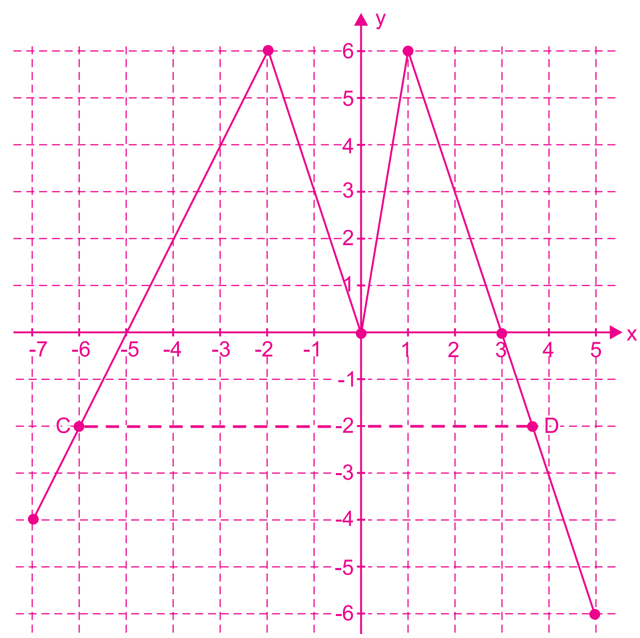
a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

RESOLUÇÃO:

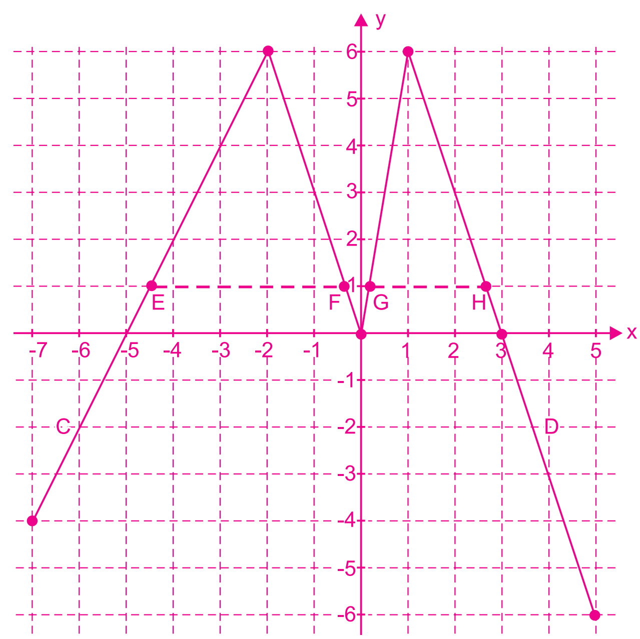
1) Se f(f(x)) = 6, obtemos, o gráfico f(x) = – 2 ou f(x) = 1, pontos A e B.



2) Quando f(x) = – 2, do gráfico resultam 2 valores para x: pontos C e D.



3) Quando f(x) = 1, do gráfico resultam 4 valores para x: pontos E, F, G e H.



Portanto, o número total de soluções da equação f(f(x)) = 6 é igual a 6: pontos C, D, E, F, G e H.

Resposta: D

MÓDULO 1

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. Completar a tabela abaixo:

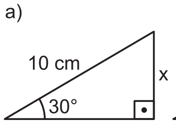
x	sen x	cos x	tg x
30º			
45º			
60º			

RESOLUÇÃO:

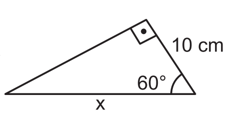
x	**sen x**	**cos x**	**tg x**
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2. Determine o valor de x nas figuras abaixo:

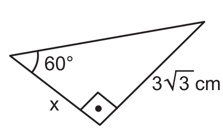
a)



b)



c)



RESOLUÇÃO:

a) $\text{sen } 30° = \frac{x}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10 \text{ cm}} \Leftrightarrow x = 5 \text{ cm}$

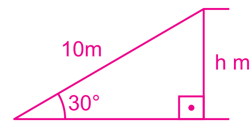
b) $\cos 60° = \frac{10 \text{ cm}}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10 \text{ cm}}{x} \Leftrightarrow x = 20 \text{ cm}$

c) $\text{tg } 60° = \frac{3\sqrt{3} \text{ cm}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} \text{ cm}}{x} \Leftrightarrow x = 3 \text{ cm}$

3. **(PUC-MG)** – Uma escada rolante de 10 m de comprimento liga dois andares de uma loja e tem inclinação de 30°. A altura h entre um andar e outro, em metros, é tal que:

a) $3 < h < 5$ b) $4 < h < 6$ c) $5 < h < 7$
d) $6 < h < 8$ e) $7 < h < 9$

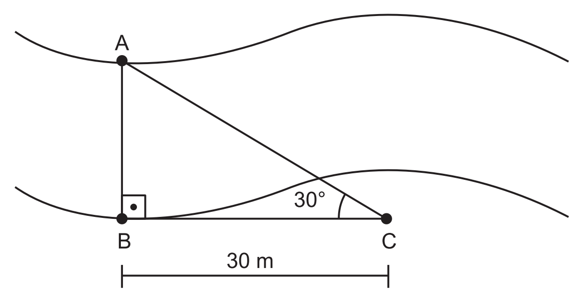
RESOLUÇÃO:



$\text{sen } 30° = \frac{h \text{ m}}{10 \text{ m}} \Leftrightarrow h = 5$

Resposta: B

4. **(PUCCAMP – MODELO ENEM)** – A fim de medir a largura de um rio, num certo local, adotou-se o seguinte procedimento: marcou-se um ponto B numa margem; 30 m à direita marcou-se um ponto C, de tal forma que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; do ponto C mediu-se o ângulo $B\hat{C}A$, encontrando-se 30°. Dessa forma, conclui-se que a largura AB do rio é:



a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m c) $5\sqrt{3}$ m

d) $10\sqrt{3}$ m e) $50\sqrt{3}$ m

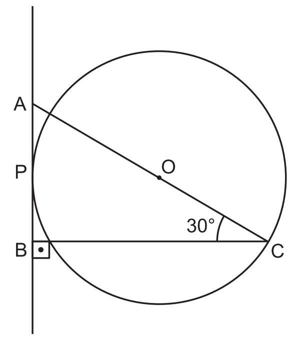
RESOLUÇÃO:

No ΔABC, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{30} \Leftrightarrow AB = 10\sqrt{3} \text{ m}$

Resposta: D

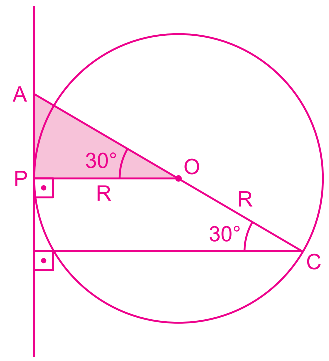
5. **(MACKENZIE)** – Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto P. Se AC = 2, o raio da circunferência é



a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{6}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{6}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo APO, retângulo em P, temos:

AO = AC – OC = 2 – R, pois AC = 2

PO = R, em que R é o raio da circunferência

$$\cos 30° = \frac{PO}{AO} = \frac{R}{2-R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2R = 2\sqrt{3} - R\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R\,.\,(2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Resposta: A

MÓDULO 2

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS E AUXILIARES

1. **(UNESP)** – Considere $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$, sendo $0° < \theta < 90°$. O valor da tg(θ) é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\dfrac{4}{9}$ c) $\dfrac{3}{5}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) 1

RESOLUÇÃO:

Sendo 0° < θ < 90°, temos:

$$\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5} \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5} \\ \cos\theta = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Portanto, $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$

Resposta: D

2. **(U.F.VIÇOSA)** – Satisfeitas as condições de existência, a expressão $E = \left(\dfrac{1-\text{sen}^2x}{\text{cotg}\,x}\right)\,.\,\text{cossec}\,x$ é idêntica a:

a) sen x b) cos x c) 1 d) 0 e) sec x

RESOLUÇÃO:

$$E = \left(\frac{1-\text{sen}^2x}{\text{cotg}\,x}\right).\,\text{cossec}\,x = \frac{\cos^2x}{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}\,.\,\frac{1}{\text{sen}\,x} = \frac{\cos^2x}{\cos x} = \cos x$$

Resposta: B

3. **(UNAERP-Adaptado)** – Sendo sen x = $\dfrac{1}{3}$ e 0° < x < 90°, o valor da expressão E = $\cos^2 x \cdot (1 + tg^2 x) + 6 \cdot cossec\ x$ é:
a) 18 b) 1 c) 2 d) 3 e) 19

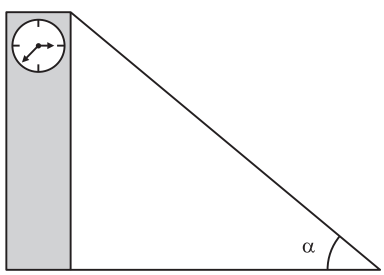
RESOLUÇÃO:
$E = \cos^2 x \cdot (1 + tg^2 x) + 6 \cdot cossec\ x =$

$= \cos^2 x \cdot \sec^2 x + 6 \cdot cossec\ x = \cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} + 6 \cdot cossec\ x =$

$= 1 + 6 \cdot \dfrac{1}{sen\ x} = 1 + 6 \cdot 3 = 19$

Resposta: E

4. **(FUVEST)** – A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como mostra a figura.



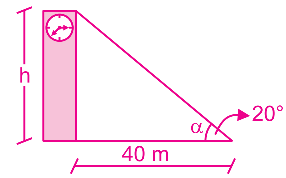
Usando a tabela a seguir, determine a altura da torre, supondo α = 20°. Efetue os cálculos.

x	sen x°	cos x°
10	0,174	0,985
11	0,191	0,982
12	0,208	0,978
13	0,255	0,974
14	0,242	0,970
15	0,259	0,966
16	0,276	0,961
17	0,292	0,956
18	0,309	0,951
19	0,326	0,946
20	0,342	0,940
21	0,358	0,934
22	0,375	0,927
23	0,391	0,921
24	0,407	0,914
25	0,423	0,906
26	0,438	0,899
27	0,454	0,891
28	0,470	0,883
29	0,485	0,875
30	0,500	0,866

RESOLUÇÃO:
• De acordo com a tabela: sen 20° = 0,342 e cos 20° = 0,940

Assim, $tg\ 20° = \dfrac{0,342}{0,940} \cong 0,3638$

• De acordo com a figura:



$tg\ 20° = \dfrac{h}{40\ m} \Rightarrow h \cong 40 \cdot 0,3638\ m \Rightarrow h \cong 14,552\ m$

Resposta: A altura aproximada da torre é 14,552 m.

5. **(UN. ESTÁCIO DE SÁ)** – Simplificando a expressão
y = sen 17° . cotg 17° . cotg 73° . sec 73°, encontramos:
a) – 2 b) – 1 c) 2 d) 1 e) 5

RESOLUÇÃO:

$y = sen\ 17° \cdot \dfrac{\cos 17°}{sen\ 17°} \cdot \dfrac{\cos 73°}{sen\ 73°} \cdot \dfrac{1}{\cos 73°}$

$y = \cos 17° \cdot \dfrac{1}{sen\ 73°}$

Sendo 17° + 73° = 90°, resulta sen 73° = cos 17°, portanto

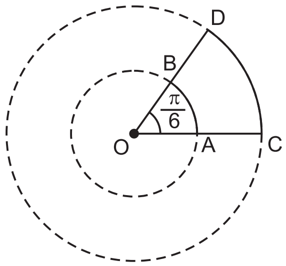
$y = \cos 17° \cdot \dfrac{1}{\cos 17°} = 1$

Resposta: D

MÓDULO 3

MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

1. **(UFBA)**



Na figura, têm-se dois círculos de raios 3 cm e 5 cm. Sendo $\mathbf{s_1}$ o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e $\mathbf{s_2}$ o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$, então o valor de $\mathbf{s_2} - \mathbf{s_1}$ é aproximadamente, em cm, igual a:

a) 0,52 b) 1,05 c) 1,57 d) 3,14 e) 4,71

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{3} = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{CD})}{5} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{3} = \frac{S_2}{5} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 3\pi/6 \\ s_2 = 5\pi/6 \end{cases}$$

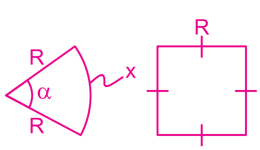
Então: $s_2 - s_1 = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow s_2 - s_1 \cong \dfrac{3{,}14}{3} \cong 1{,}05$

Resposta: B

2. **(FUVEST – MODELO ENEM)** – O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então, α é igual a:

a) $\pi/3$ b) 2 c) 1 d) $2\pi/3$ e) $\pi/2$

RESOLUÇÃO:



$R + R + x = 4R \Rightarrow x = 2R$

$$\alpha = \frac{x}{R} = \frac{2R}{R} = 2$$

Resposta: B

3. **(FEI)** – Adotando $\pi = 3{,}14$, concluímos que o valor aproximado de 1 radiano, em graus, é:

a) 180° b) 360° c) 57° d) 62° e) 1°

RESOLUÇÃO:

180° ——— π rad
x° ——— 1 rad

$$\pi \cdot x = 1.180 \Leftrightarrow x = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}14} \cong 57$$

Resposta: C

4. **(FUVEST)** – Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° numa circunferência de raio 5 cm. Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém-se:

a) $\dfrac{11}{6}$ b) 2 c) $\dfrac{11}{3}$ d) $\dfrac{22}{3}$ e) 11

RESOLUÇÃO:

Observando que 110° é equivalente a $\dfrac{11\pi}{18}$ e 60° a $\dfrac{\pi}{3}$, e admitindo que x e y são, respectivamente, as medidas, em cm, dos arcos AB e A'B', temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10\text{ cm}} = \dfrac{11\pi}{18} \\ \dfrac{y}{5} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{110\pi}{18} \\ y = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$

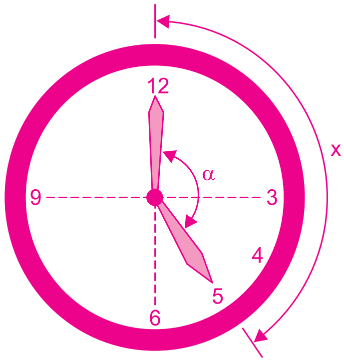
$$\frac{x}{y} = \frac{110\pi}{18} : \frac{5\pi}{3} = \frac{11}{3}$$

Resposta: C

5. **(MACKENZIE)** – O ponteiro dos minutos de um relógio mede 4 cm. Supondo $\pi = 3$, a distância, em centímetros, que a extremidade desse ponteiro percorre em 25 minutos é:

a) 15 b) 12 c) 20 d) 25 e) 10

RESOLUÇÃO:



Em 25 minutos, o ponteiro dos minutos anda o correspondente a um ângulo central $\alpha = 150° = \dfrac{5\pi}{6}$ rad

Pela definição de radiano, temos

$$\alpha = \frac{\text{comp}\,(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{\text{comp}\,(\widehat{AB})}{4}$$

Para $\pi = 3$, resulta: comp $(\widehat{AB})$ = 10 m

Resposta: E

MÓDULO 4

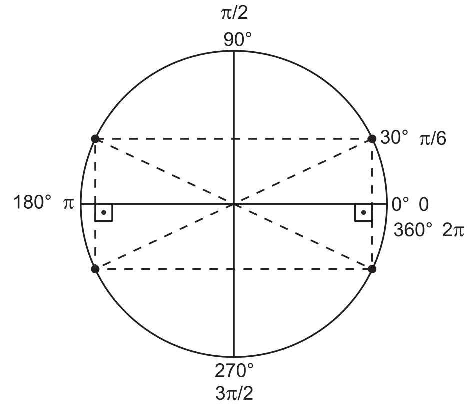
MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS TRIGONOMÉTRICOS

1. Completar a tabela a seguir.

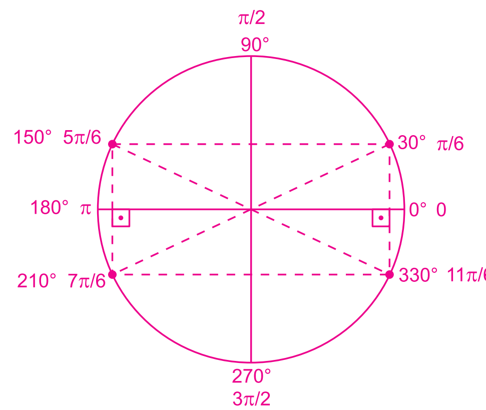
MEDIDA DE UM ÂNGULO	
em graus	**em radianos**
0°	**0**
30°	**$\pi/6$**
45°	**$\pi/4$**
60°	**$\pi/3$**
90°	**$\pi/2$**
180°	**π**
270°	**$3\pi/2$**
360°	**2π**

2. Completar, no ciclo trigonométrico a seguir, com a primeira determinação positiva (em graus e radianos), os arcos com as extremidades em destaque.

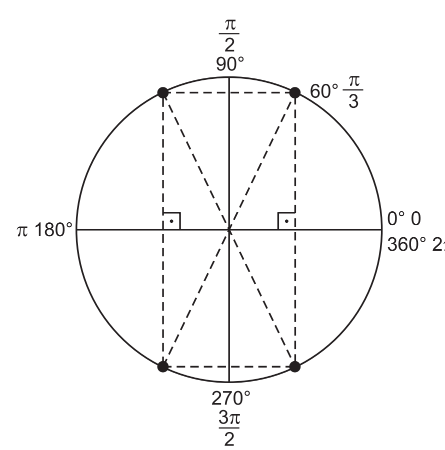
a)



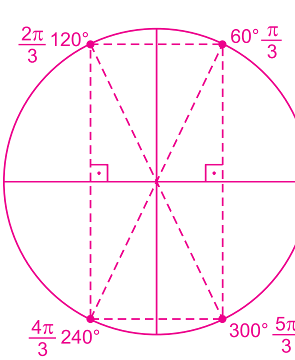
RESOLUÇÃO:



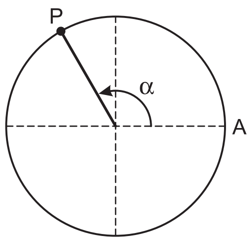
b)



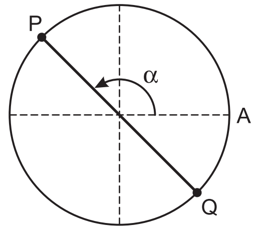
RESOLUÇÃO:



3. Escrever o conjunto das determinações dos arcos assinalados em cada figura, conforme os casos representados abaixo.

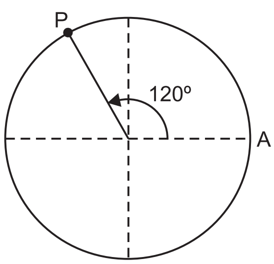


$\alpha + n \cdot 2\pi$
$\alpha + n \cdot 360°$

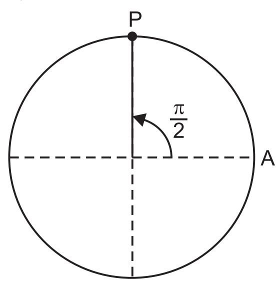


$\alpha + n \cdot \pi$
$\alpha + n \cdot 180°$

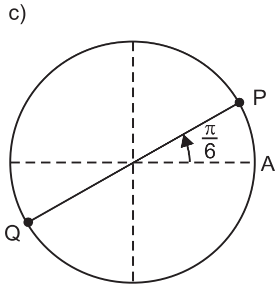
a)



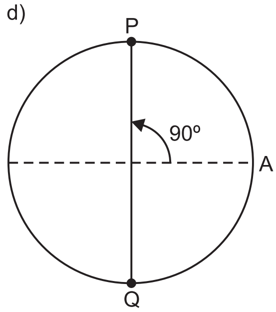
b)



c)



d)



RESOLUÇÃO:

A partir das figuras, temos

a) $120° + n \cdot 360°\ (n \in \mathbb{Z})$

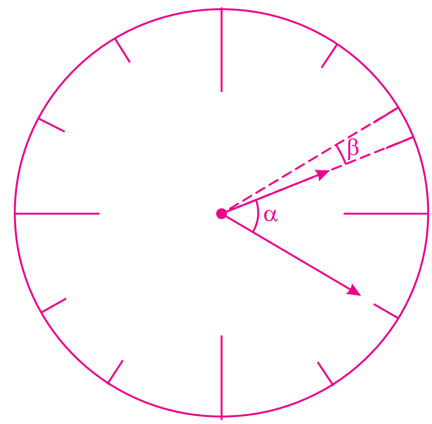
b) $\dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

c) $\dfrac{\pi}{6} + n \cdot \pi\ (n \in \mathbb{Z})$

d) $90° + n \cdot 180°\ (n \in \mathbb{Z})$

4. **(UNESP)** – O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 20 minutos é:
a) 8° b) 50° c) 52,72° d) 60° e) 62°

RESOLUÇÃO:



Sendo α a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio e β a medida do ângulo descrito pelo ponteiro menor em 20 minutos, temos:
Ponteiro "pequeno":

$$\left.\begin{array}{l}\text{60 minutos} — 30°\\ \text{20 minutos} — \beta\end{array}\right\}\ \beta = \frac{20}{60} \cdot 30° = 10°$$

Como α + β = 60°, resulta α = 50°

Resposta: B

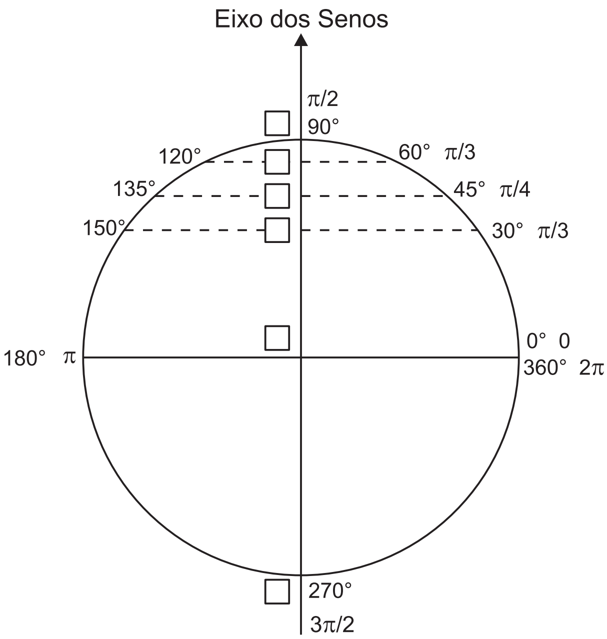
MÓDULO 5

ESTUDO DA FUNÇÃO SENO

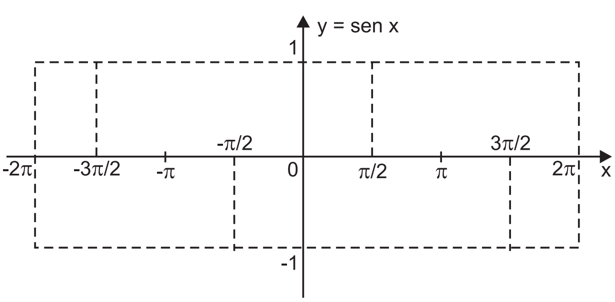
1. Completar o quadro e a figura a seguir.

x		sen x
0°	0	**0**
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

x		sen x
90°	$\frac{\pi}{2}$	**1**
180°	π	**0**
270°	$\frac{3\pi}{2}$	**– 1**
360°	2π	**0**



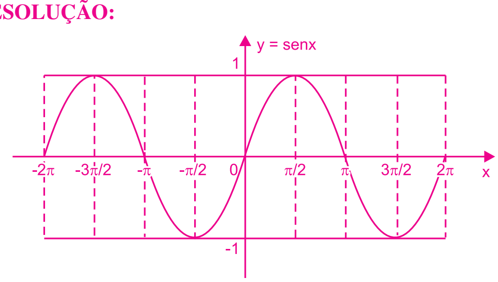
2. Esboçar o gráfico da função y = sen x, no intervalo [– 2π; 2π]. Completar o quadro com o período e a imagem da função seno.



Período: P =

Imagem: Im(f) = {y ∈ ℝ | }

RESOLUÇÃO:



Período: P = 2π, Imagem: Im(f) = {y ∈ ℝ | – 1 ≤ y ≤ 1}

3. **(FATEC)** – O vigésimo quinto termo da sequência (sen 30°, sen 60°, sen 90°, sen 120°, sen 150°, ...) é:

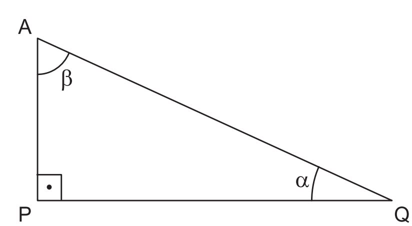
a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

RESOLUÇÃO:
Observando que (sen 30°, sen 60°, sen 90°, ...) = = (sen(1 . 30°); sen(2 . 30°); sen(3 . 30°); ...), concluímos que o vigésimo quinto termo dessa sequência é:

$\text{sen}(25 \cdot 30°) = \text{sen } 750° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

Resposta: C

4. **(MACKENZIE)** – No triângulo retângulo da figura, $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AP}$. Então, sen(α + 3β) vale:



a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

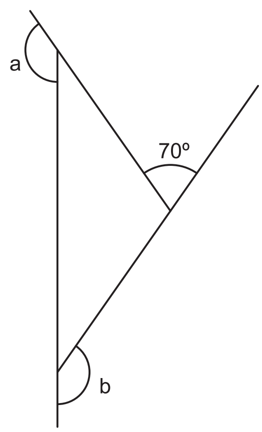
RESOLUÇÃO:

$\cos \beta = \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AP}{2 \cdot AP} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$ e portanto $\alpha = 30°$

Assim, $\text{sen}(\alpha + 3 \cdot \beta) = \text{sen}(30° + 3 \cdot 60°) = \text{sen } 210° = -\dfrac{1}{2}$

Resposta: C

5. **(FGV)** – De acordo com a figura abaixo, se a – b = 10°, então:



a) $\cos a = -\dfrac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} a = \dfrac{1}{2}$

c) $\cos b = -\dfrac{1}{2}$

d) $\operatorname{sen} a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\operatorname{sen} b = \dfrac{1}{2}$

RESOLUÇÃO:

Com base na figura, temos: a + b + 70° = 360° ⇔

⇔ a + b = 290° (soma dos ângulos externos do triângulo)

Então: $\begin{cases} a + b = 290° \\ a - b = 10° \end{cases} \Leftrightarrow a = 150° \text{ e } b = 140°$

Portanto: $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$

Resposta: B

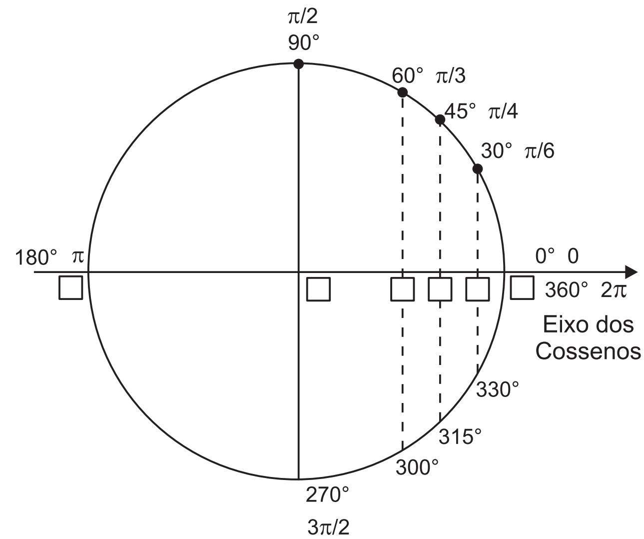
MÓDULO 6

ESTUDO DA FUNÇÃO COSSENO

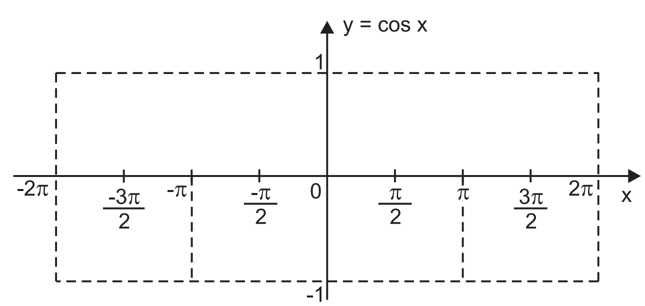
1. Completar o quadro e a figura a seguir:

x		cos x
0°	0	**1**
30°	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

x		cos x
90°	$\dfrac{\pi}{2}$	**0**
180°	π	**– 1**
270°	$\dfrac{3\pi}{2}$	**0**
360°	2π	**1**



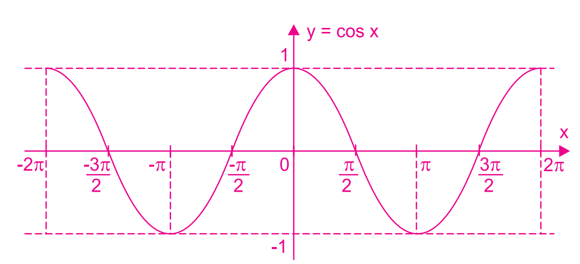
2. Esboçar o gráfico da função y = cos x, no intervalo [– 2π; 2π]. Completar o quadro com o período e a imagem da função cosseno.



Período: P =

Imagem: Im(f) = {y ∈ ℝ | }

RESOLUÇÃO:



Período: P = 2π

Imagem: Im(f) = {y ∈ ℝ | – 1 ≤ y ≤ 1}

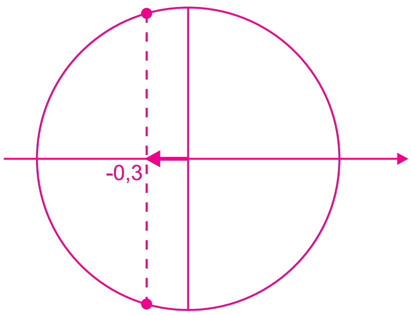
3. **(GAVE)** – Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0{,}3$. Num dos intervalos seguintes, esta equação tem apenas uma solução. Em qual deles?

a) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ b) $[0; \pi]$ c) $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

d) $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ e) $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$

RESOLUÇÃO:

No ciclo trigonométrico, identificamos duas soluções para $\cos x = -0{,}3$



Na análise das alternativas, a equação tem apenas uma solução no intervalo da B.

Resposta: B

4. **(UNICAMP-MODELO ENEM)** – Considere a função $f(x) = x^2 + x \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$ para $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.

RESOLUÇÃO:

Para $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, temos: $f(x) = x^2 + x \cdot \cos \dfrac{3\pi}{2} + \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x \cdot 0 + (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$V = \{-1; 1\}$

5. **(UCS)** – Um biorritmo pode ser descrito aproximadamente pela fórmula $y = 2{,}5 + 1{,}5 \cos \left[\dfrac{\pi}{12}(t-5)\right]$, na qual t é o tempo dado em horas. Considerando $0 \leqslant t \leqslant 24$, o valor máximo de y ocorre quando

a) $t = 0$ e y vale 3,5. b) $t = 5$ e y vale 4.
c) $t = 17$ e y vale 3,5. d) $t = 17$ e y vale 4.
e) $t = 5$ e y vale 3,5.

RESOLUÇÃO:

I) $0 \leqslant t \leqslant 24$, o valor máximo é obtido quando $\cos\left[\dfrac{\pi}{12}(t-5)\right] = 1$

Assim: $2{,}5 + 1{,}5 \cdot \cos\left[\dfrac{\pi}{12}(t-5)\right] = 2{,}5 + 1{,}5 \cdot 1 = 4$

Portanto, o valor máximo de y é 4.

II) para $y = 4$

$2{,}5 + 1{,}5 \cos\left[\dfrac{\pi}{12}(t-5)\right] = 4 \Rightarrow \cos\left[\dfrac{\pi}{12}(t-5)\right] = 1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12}(t-5) = 0$

Considerando $0 \leqslant t \leqslant 24$, resulta $t = 5$

Resposta: B

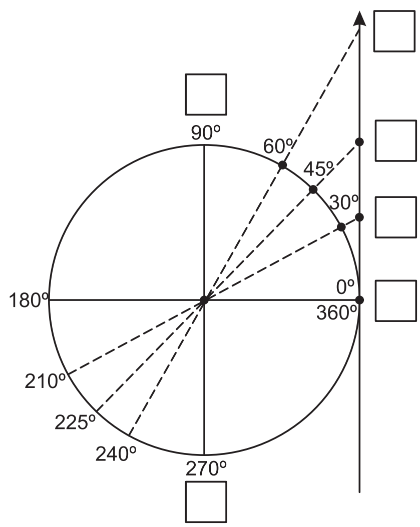
MÓDULO 7

ESTUDO DA FUNÇÃO TANGENTE

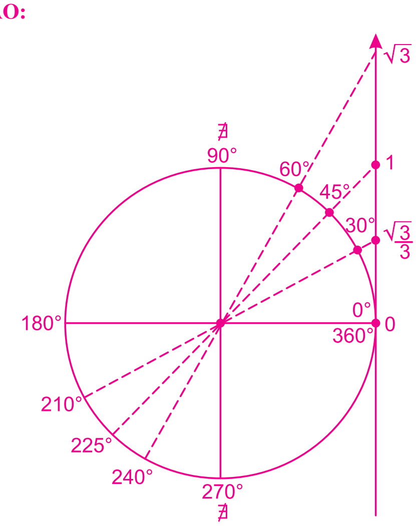
1. Complete o quadro e o ciclo trigonométrico com os valores da tangente dos ângulos indicados:

x		tg x
0°	0	**0**
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	**1**
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

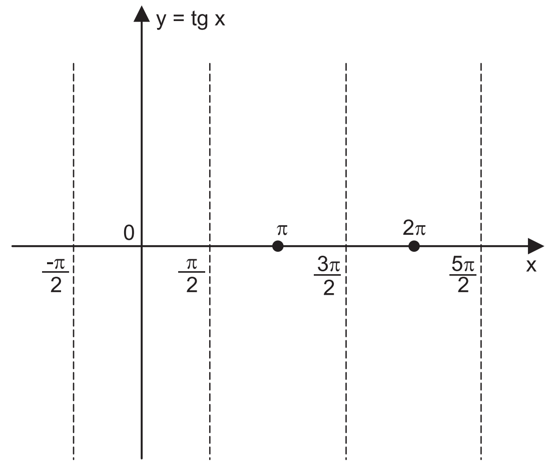
x		tg x
90°	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
180°	π	**0**
270°	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
360°	2π	**0**



RESOLUÇÃO:



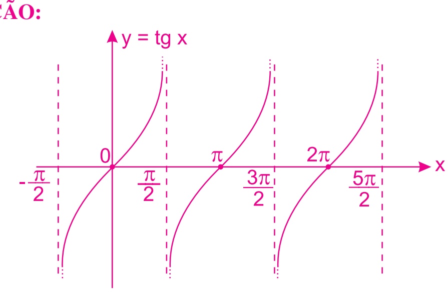
2. Esboce o gráfico da função y = tg x, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$. Complete, indicando o período e a imagem da função tangente.



Período: P =

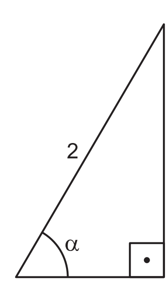
Imagem: Im(f) =

RESOLUÇÃO:



Período: P = π **Imagem: Im(f) = ℝ**

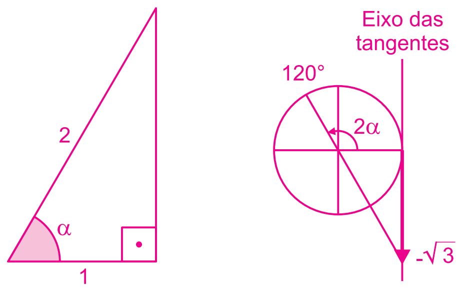
3. **(MACKENZIE)** – Com relação ao ângulo α da figura, podemos afirmar que tg 2α vale:



a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 1 c) $-\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUÇÃO:

De acordo com os dados da figura, temos:



$\cos \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow 2\alpha = 120° \Rightarrow \text{tg } 2\alpha = -\sqrt{3}$

Resposta: C

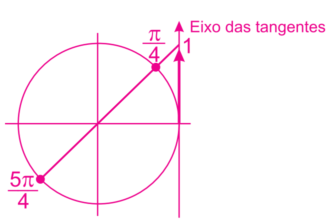
4. **(MACKENZIE)** – A soma de todas as soluções da equação tg a + cotg a = 2, para $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, é:

a) $\dfrac{5\pi}{4}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{3\pi}{2}$ d) $\dfrac{7\pi}{4}$ e) $\dfrac{7\pi}{3}$

RESOLUÇÃO:

$\text{tg a} + \text{cotg a} = 2 \Leftrightarrow \text{tg a} + \dfrac{1}{\text{tg a}} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg}^2\text{a} - 2 \,.\, \text{tg a} + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{tg a} = 1$



Para $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, temos:

$a = \dfrac{\pi}{4}$ **ou** $\dfrac{5\pi}{4}$**, portanto** $S = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{6\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$.

Resposta: C

5. **(MODELO ENEM)** – O conjunto verdade da equação sen x – cos x = 0, no intervalo [0; 2π], é:

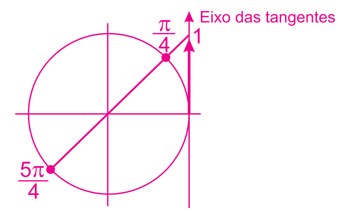
a) $\left\{ \dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4} \right\}$ b) $\left\{ \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

c) $\left\{ \dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3} \right\}$ d) $\left\{ \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6} \right\}$

e) $\left\{ \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4} \right\}$

RESOLUÇÃO:

$\text{sen x} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \text{sen x} = \cos x \Leftrightarrow \text{tg x} = 1$



Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos: $V = \left\{ \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$.

Resposta: B

MÓDULO 8

ESTUDO DAS FUNÇÕES COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE

1. Resolva as equações:

a) sen x = 1, para $0° \leqslant x \leqslant 360°$ b) sen x = ± 1, para $0° \leqslant x \leqslant 360°$

c) sen x = 1 d) sen x = ± 1

e) sen (2x) = ± 1

RESOLUÇÃO:

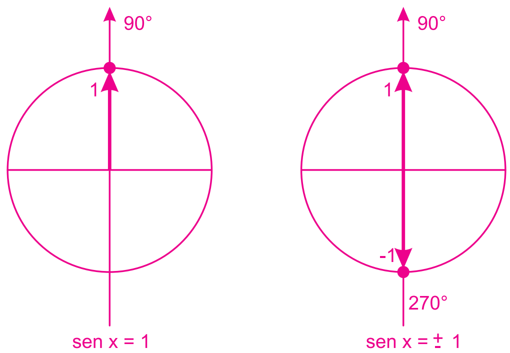
a) $\left.\begin{array}{l} \text{sen x} = 1 \\ 0° \leqslant x \leqslant 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 90°$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{sen x} = \pm 1 \\ 0° \leqslant x \leqslant 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = 90° \text{ ou } x = 270°$

c) $\text{sen x} = 1 \Leftrightarrow x = 90° + n \,.\, 360°, n \in \mathbb{Z}$

d) $\text{sen x} = \pm 1 \Leftrightarrow x = 90° + n \,.\, 180°, n \in \mathbb{Z}$

e) $\text{sen } (2x) = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = 90° + n \,.\, 180° \Leftrightarrow x = 45° + n \,.\, 90°, n \in \mathbb{Z}$



2 **(UFRN)** – A projeção da quantidade a ser vendida de determinado produto para os próximos dois anos pode ser aproximada pela equação $Q(t) = 64 + 36 \,.\, \text{sen}\left(\dfrac{\pi \,.\, t}{4}\right)$, t em meses, sendo t = 0 este mês em que estamos.

O conjunto de todos os valores de t, com $t \in [0; 8]$, nos quais a quantidade vendida será igual a 100 unidades, é:

a) {2} b) {0, 4, 8} c) {4, 8}
d) {2, 8} e) {4, 6}

RESOLUÇÃO:

$$Q(t) = 64 + 36 \,.\, \text{sen}\left(\frac{\pi \,.\, t}{4}\right) = 100 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi \,.\, t}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi \,.\, t}{4} = \frac{\pi}{2} + n \,.\, 2\pi \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \frac{1}{2} + 2 \,.\, n \Leftrightarrow t = 2 + 8 \,.\, n \; (n \in \mathbb{Z})$$

Como $t \in [0; 8]$, temos t = 2.

Resposta: A

3. **(VUNESP)** – No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2001, este número, de janeiro (t = 0) a dezembro (t = 11), seja dado, aproximadamente, pela expressão

$$S(t) = \lambda - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$$

com λ uma constante positiva, S(t) em milhares e t em meses, $0 \leqslant t \leqslant 11$. Determine

a) a constante λ, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue;
b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue.

RESOLUÇÃO:

a) Em fevereiro, tem-se t = 1 e

$$S(1) = \lambda - \cos\left[\frac{(1-1)\pi}{6}\right] = \lambda - \cos 0 = \lambda - 1 = 2 \Rightarrow \lambda = 3$$

b) Houve 3 mil doações de sangue quando

$$S(t) = \lambda - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right] = 3 - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right] = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t - 1 = 3 + 6n \Leftrightarrow t = 4 + 6n \Rightarrow t = 4 \text{ ou } t = 10, \text{ pois } 0 \leqslant t \leqslant 11$$

Respostas: a) $\lambda = 3$
b) Maio(t = 4) e novembro(t = 10).

4. **(UFPA)** – Considere a função f dada por $f(x) = 8 + \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{7}\right)$. Podemos afirmar que f assume seu valor mínimo quando:

a) $x = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

b) $x = \dfrac{8\pi}{7} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

c) $x = \dfrac{23\pi}{14} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

d) $x = \dfrac{9\pi}{14} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

e) $x = \dfrac{8\pi}{7} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

RESOLUÇÃO:

A função f assume seu valor mínimo quando:

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{7} = \frac{3\pi}{2} + k\,2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23\pi}{14} + k \,.\, 2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Resposta: C

5. **(UNESP)** – Em uma pequena cidade, um matemático modelou a quantidade de lixo doméstico total (orgânico e reciclável) produzida pela população, mês a mês, durante um ano, através da função

$f(x) = 200 + (x + 50) \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}\right)$, em que f(x) indica a quantidade de lixo, em toneladas, produzida na cidade no mês x, com $1 \le x \le 12$, x inteiro positivo.

Sabendo que f(x), nesse período, atinge seu valor máximo em um dos valores de x no qual a função $\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3}\right)$ atinge seu máximo, determine o mês x para o qual a produção de lixo foi máxima e quantas toneladas de lixo foram produzidas pela população nesse mês.

RESOLUÇÃO:

Se $f(x) = 200 + (x + 50) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{4\pi}{3}\right)$ e sabendo que seu valor máximo ocorre quando

$\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$, temos:

$\frac{\pi}{3} \cdot x - \frac{4\pi}{3} = 0 + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 4 + n \cdot 6 \ (n \in \mathbb{Z})$

Como $1 \le x \le 12$, temos x = 4 ou x = 10; portanto

$f(4) = 200 + (4 + 50) \cdot 1 = 254$ e $f(10) = 200 + (10 + 50) \cdot 1 = 260$.

Os valores obtidos de f(4) e f(10) permitem concluir que a produção de lixo foi máxima no mês x = 10 e que a quantidade de lixo produzida nesse mês foi igual a 260 toneladas.

Respostas: x = 10; 260 toneladas.

MÓDULO 9

ESTUDO DAS FUNÇÕES COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE

1. **(UNIRIO)** – Obtenha o conjunto solução das inequações:

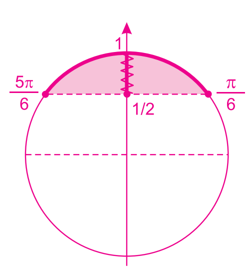
a) $\text{sen } x \geqslant \frac{1}{2}$, sendo $0 \leqslant x < 2\pi$

b) $\text{sen } x \geqslant \frac{1}{2}$

RESOLUÇÃO:

a) Para $\text{sen } x \geqslant \frac{1}{2}$ e $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$



b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi\right\} (n \in \mathbb{Z})$

2. **(UNESP)** – O conjunto-solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, é definido por

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

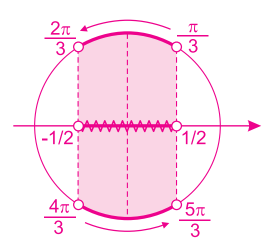
c) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$

RESOLUÇÃO:

$|\cos x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

Resposta: A

3. **(UFPE)** – A equação $x^2 + \sqrt{2}\,.\,x + \cos\theta = 0$, com $0 < \theta < \pi$, não admite raízes reais se, e somente se:

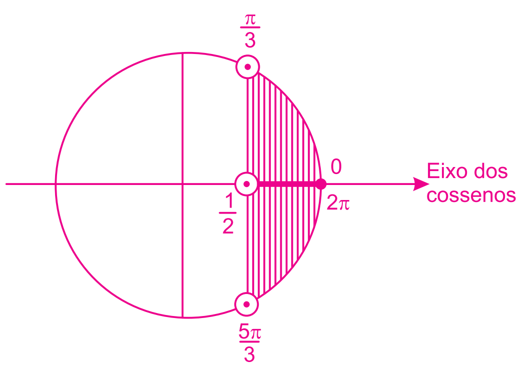
a) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

d) $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$

RESOLUÇÃO:

A equação $x^2 + \sqrt{2}\,.\,x + \cos\theta = 0$ não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$. Assim, para $0 < \theta < \pi$, temos:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 - 4\cos\theta < 0 \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$



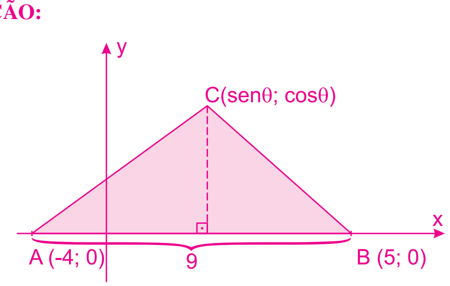
Resposta: A

4. **(UFSCar)** – As coordenadas dos vértices do triângulo ABC num plano cartesiano são A(– 4, 0), B(5, 0) e C(sen θ, cos θ). Sendo θ um arco do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica e sendo a área do triângulo ABC maior que $\dfrac{9}{4}$, o domínio de validade de θ é o conjunto:

a) $\left]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ b) $\left]\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right[$ c) $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right[$

d) $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right[$ e) $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right[$

RESOLUÇÃO:



Sendo A (– 4; 0), B (5; 0) e C (sen θ; cos θ) e a área do triângulo ABC maior que $\dfrac{9}{4}$, temos:

$\dfrac{AB\,.\cos\theta}{2} > \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{9\,.\cos\theta}{2} > \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{1}{2}$

Como θ é um arco do primeiro quadrante, temos:

$0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{3}$

O domínio da validade de θ é o conjunto $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Resposta: E

5. **(ITA-adaptado)** – Determine todos os valores $\alpha \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^2 - 2\sqrt[4]{3}\,x + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

admita apenas raízes reais simples e positivas.

RESOLUÇÃO:

A equação $x^2 - 2\,.\sqrt[4]{3}\,.\,x + \operatorname{tg}\alpha = 0$ admite apenas raízes reais simples (distintas) e estritamente positivas, quando:

I) $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\sqrt[4]{3})^2 - 4\operatorname{tg}\alpha > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$

II) $P = \dfrac{c}{a} = \operatorname{tg}\alpha > 0$

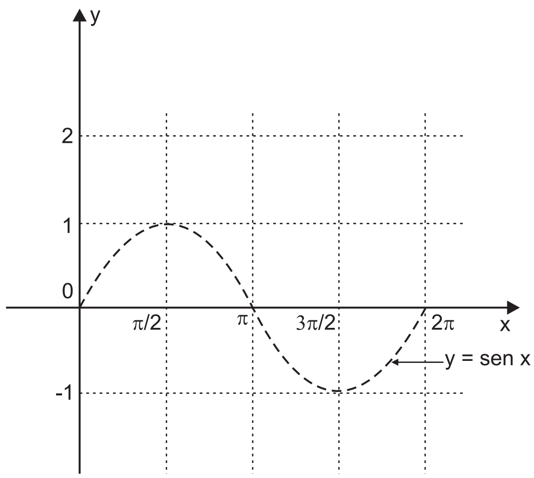
Assim: $0 < \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$, no intervalo $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, resulta $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

MÓDULO 10

ESTUDO DAS VARIAÇÕES DO PERÍODO E DOS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Esboce entre 0 e 2π o gráfico da função $y = 1 + \text{sen } x$.

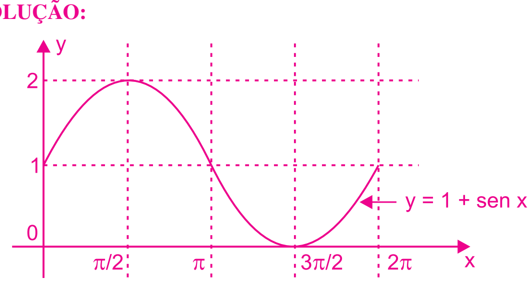


Conclusões:

Período: P =

Imagem: Im =

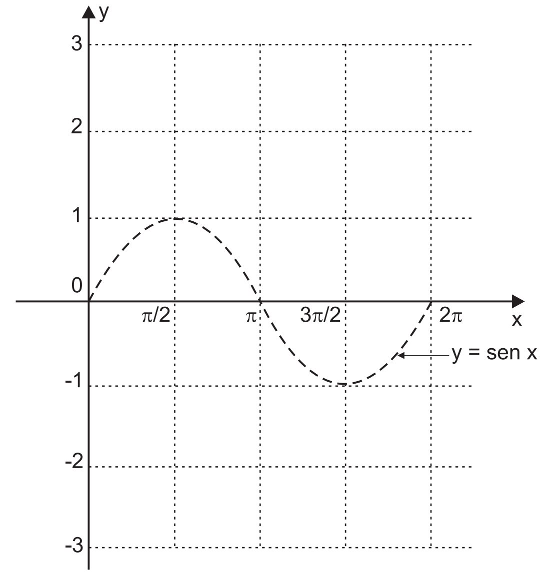
RESOLUÇÃO:



P = 2π Im = [0; 2]

A alteração que ocorre com o gráfico da função y = k + sen x é o deslocamento na vertical (sobe ou desce) do gráfico da função y = sen x; o período não se altera. Nesse caso, haverá apenas mudança na imagem da função.

2. Esboce entre 0 e 2π o gráfico da função $y = 2 \,.\, \text{sen } x$.

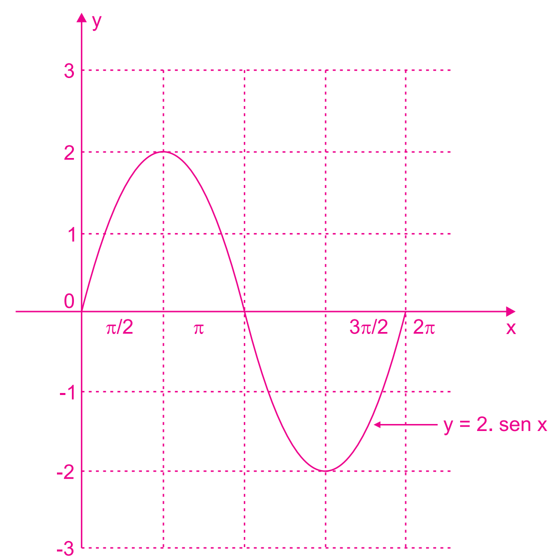


Conclusões:

Período: P =

Imagem: Im =

RESOLUÇÃO:

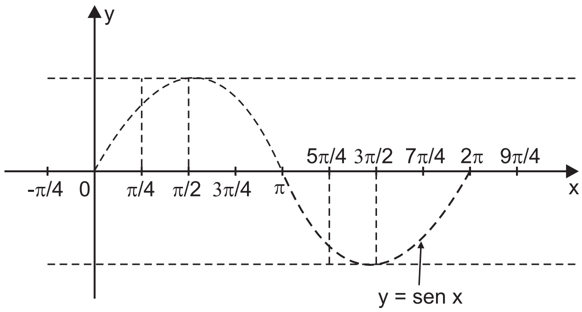


P = 2π Im = [– 2; 2]

A alteração que ocorre com o gráfico da função y = k . sen x é uma deformação na vertical (aumenta ou diminui) do gráfico da função y = sen x; o período não se altera. Nesse caso, haverá apenas mudança na imagem da função.

Obs.: Se a constante que multiplica a função for negativa, então o gráfico "girará" em torno do eixo x.

3. Esboce um período do gráfico da função $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

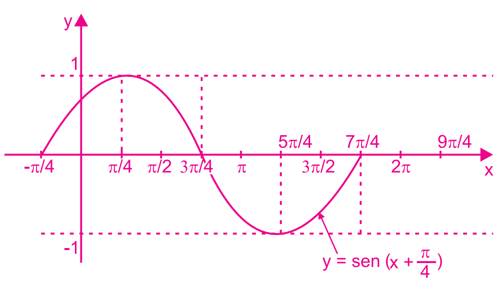


Conclusões:

Período: P =

Imagem: Im =

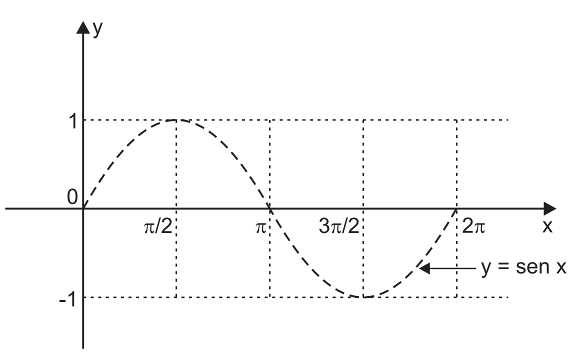
RESOLUÇÃO:



$P = 2\pi$ Im(f) = [–1; 1]

A alteração que ocorre com o gráfico da função y = sen(k + x) é o deslocamento na horizontal (direita ou esquerda) da função y = sen x. O período e a imagem da função não se alteram.

4. Esboce um período do gráfico da função y = sen (2 . x).

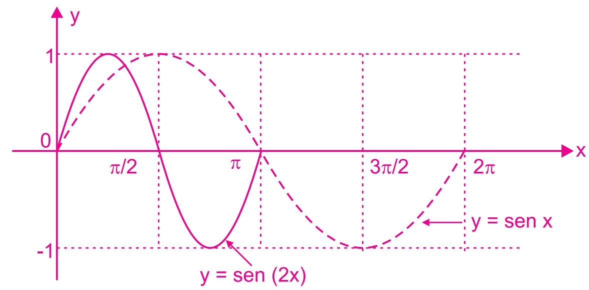


Conclusões:

Período: P =

Imagem: Im =

RESOLUÇÃO:



$P = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ Im = [–1; 1]

A alteração que ocorre com o gráfico da função y = sen(k . x) é uma deformação na horizontal (abre ou fecha) do gráfico da função y = sen x, devida a uma mudança no seu período, segundo a regra a seguir: $y = f(k\,.\,x) \to P = \dfrac{p}{|k|}$. A imagem da função não se altera.

5. **(UNIFESP)** – Considere a função

$y = f(x) = 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, definida para todo x real.

Dê o período e o conjunto imagem da função f.

RESOLUÇÃO:

O período da função $y = 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ é obtido de

$P = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1.$

Obs.: A soma da parcela 1 não altera o período.

A subtração da parcela $\dfrac{\pi}{2}$ no ângulo não altera o período.

A imagem é [0; 2], pois $-1 \leqslant \text{sen}\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) \leqslant 1$ e

$0 \leqslant 1 + \text{sen}\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) \leqslant 2.$

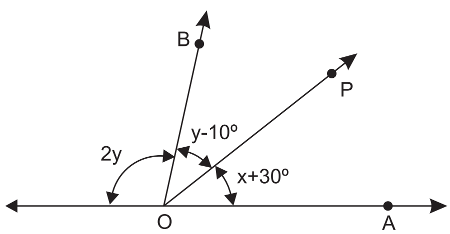
Respostas: Período = 1

Imagem = [0; 2]

MÓDULO 1

ÂNGULOS

1. **(CFT-SC)** – Na figura abaixo, a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Os valores de x e y são:



a) x = 13° e y = 49°
b) x = 15° e y = 35°
c) x = 12° e y = 48°
d) x = 17° e y = 42°
e) x = 10° e y = 50°

RESOLUÇÃO:

$y - 10° = x + 30° \Leftrightarrow y = x + 40°$ ($\overrightarrow{OP}$ é bissetriz)

$2y + y - 10° + x + 30° = 180° \Leftrightarrow 3y + x = 160°$

Resolvendo o sistema

$\begin{cases} y = x + 40° \\ 3y + x = 160° \end{cases}$ **temos**

x = 10° e y = 50°

Resposta: E

2. **(CFT-CE)** – O ângulo cujo suplemento excede de 6° o quádruplo do seu complemento, é:

a) 58° b) 60° c) 62° d) 64° e) 68°

RESOLUÇÃO:
Sendo x a medida, em graus, desse ângulo, tem-se:
$180° - x = 6° + 4(90° - x) \Leftrightarrow 3x = 186° \Leftrightarrow x = 62°$
Resposta: C

3. **(PUC–PR)** – Dois ângulos complementares A e B, sendo A < B, têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo A para o suplemento do ângulo B vale:

a) 43/47 b) 17/13 c) 13/17 d) 119/48 e) 47/43

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{B} = \dfrac{13}{17} \\ A + B = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow A = 39° \text{ e } B = 51°$$

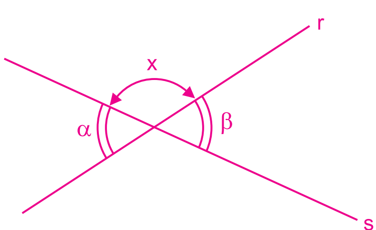
Assim:

$$\frac{180° - A}{180° - B} = \frac{180° - 39°}{180° - 51°} = \frac{141°}{129°} = \frac{47}{43}$$

Resposta: E

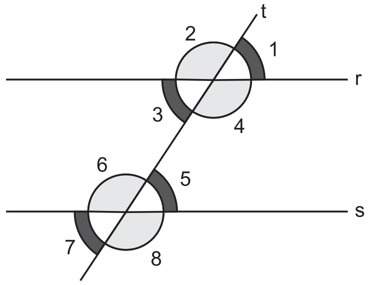
4. Prove que, se dois ângulos são opostos pelo vértice, então as suas medidas são iguais.

RESOLUÇÃO:



$$\left.\begin{array}{l} \alpha + x = 180° \\ \beta + x = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + x = \beta + x \Rightarrow \alpha = \beta$$

5. Com os dados da figura seguinte, na qual as retas **r** e **s** são paralelas, complete as sentenças, quanto à posição dos ângulos citados.



a) Os ângulos congruentes 1 e 3 são: **opostos pelo vértice**

b) Os ângulos congruentes 1 e 5 são: **correspondentes**

c) Os ângulos congruentes 4 e 8 são: **correspondentes**

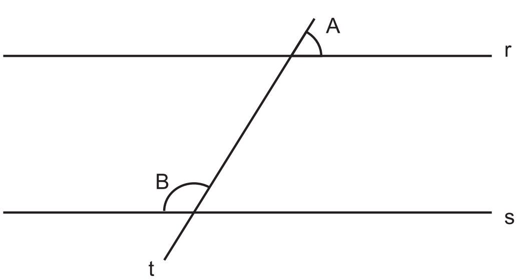
d) Os ângulos congruentes 3 e 5 são: **alternos internos**

e) Os ângulos congruentes 1 e 7 são: **alternos externos**

f) Os ângulos suplementares 3 e 6 são: **colaterais internos**

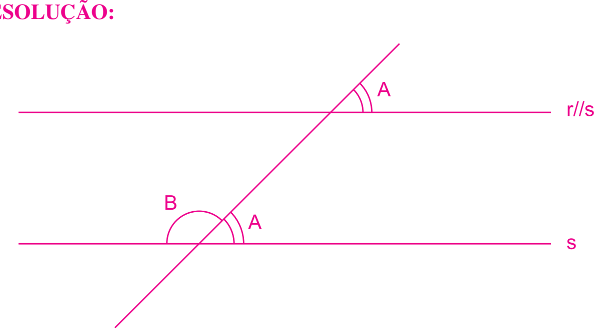
g) Os ângulos suplementares 2 e 7 são: **colaterais externos**

6. **(CESGRANRIO-RJ)** – As retas r e s da figura são paralelas cortadas pela transversal t. Se o ângulo B é o triplo de A, então B – A vale:



a) 90° b) 85° c) 80° d) 75° e) 60°

RESOLUÇÃO:



$$\begin{cases} B = 3A \\ B + A = 180° \end{cases}$$

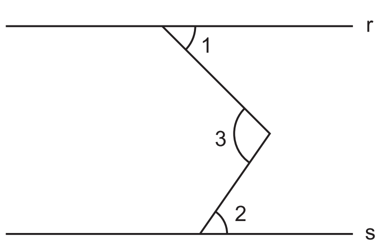
assim: $3A + A = 180° \Leftrightarrow A = 45°$
e $B = 3A = 135°$
logo: $B - A = 135° - 45° = 90°$

Resposta: A

MÓDULO 2

RETAS PARALELAS

1. **(FUVEST)** – Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:



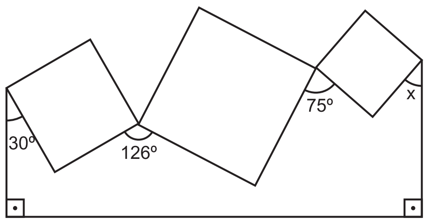
a) 50° b) 55° c) 60° d) 80° e) 100°

RESOLUÇÃO:

$\hat{3} = \hat{1} + \hat{2} \Leftrightarrow \hat{3} = 45° + 55° \Leftrightarrow \hat{3} = 100°$

Resposta: E

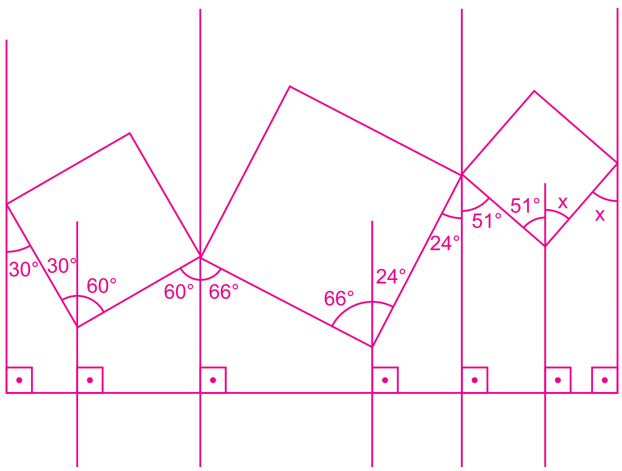
2. **(OBM)** – Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



A medida do ângulo x é:

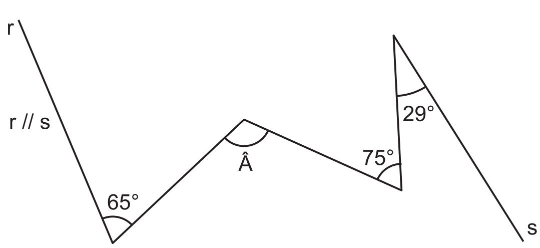
a) 39° b) 41° c) 43° d) 44° e) 46°

RESOLUÇÃO:



x + 51° = 90° ⇔ x = 39°
Resposta: A

3. **(CFTPR-PR)** – Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio: Na cidade de Curitiba, fotografar a construção localizada na rua Marechal Hermes no número igual a nove vezes o valor do ângulo Â da figura a seguir:



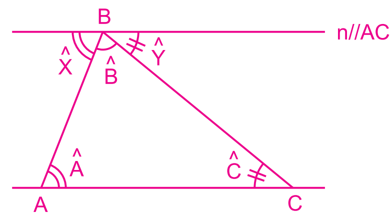
Se a equipe resolver corretamente o problema irá fotografar a construção localizada no número:

a) 990 b) 261 c) 999 d) 1026 e) 1260

RESOLUÇÃO:
Â + 29° = 65° + 75° ⇔ Â = 111°
Assim:
9Â = 999°
Resposta: C

4. **(FUVEST)** – Demonstre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

RESOLUÇÃO:

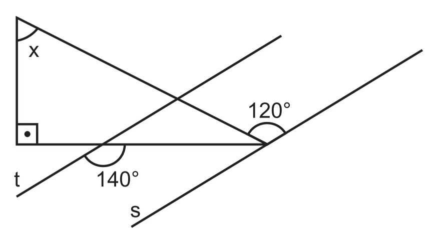


Por B traça-se uma paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ que forma com $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ ângulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$, respectivamente.

Assim: $\begin{cases} \hat{X} = \hat{A} \text{ (alternos internos)} \\ \hat{Y} = \hat{C} \text{ (alternos internos)} \\ \hat{X} + \hat{B} + \hat{Y} = 180° \text{ (suplementares)} \end{cases}$

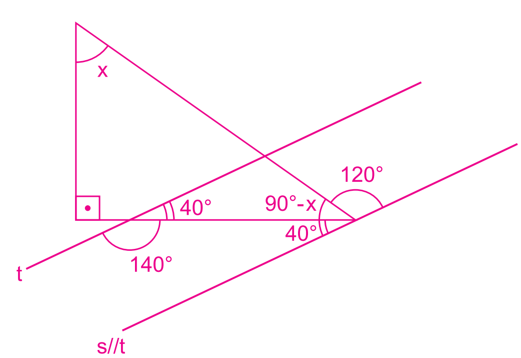
Logo: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (Lei Angular de Tales)

5. **(FUVEST)** – As retas t e s são paralelas. A medida do ângulo x, em graus é:



a) 30 b) 40 c) 50 d) 60 e) 70

RESOLUÇÃO:



40° + (90° – x) + 120° = 180° ⇔ x = 250° – 180° ⇔ x = 70°

Resposta: E

6. **(OBM)** – Na figura, quanto vale x?

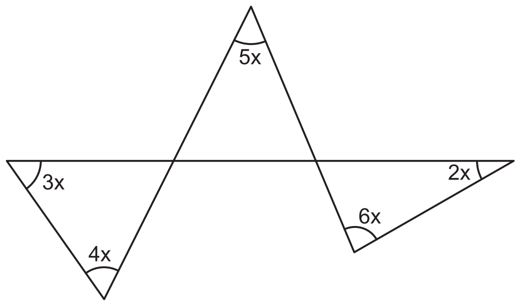
a) 6°

b) 12°

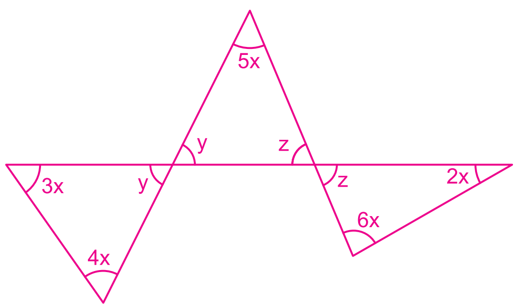
c) 18°

d) 20°

e) 24°



RESOLUÇÃO:



A soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos triângulos da figura anterior é igual a 180°.

Assim:

$3x + 4x + y = 180° \Leftrightarrow 7x + y = 180°$ (I)

$6x + 2x + z = 180° \Leftrightarrow 8x + z = 180°$ (II)

$5x + y + z = 180°$ (III)

De (I), (II) e (III) tem-se:

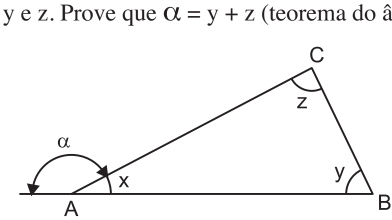
$7x + 8x - 5x = 180° + 180° - 180° \Leftrightarrow 10x = 180° \Leftrightarrow x = 18°$

Resposta: C

MÓDULO 3

TRIÂNGULOS

1. No triângulo ABC da figura abaixo, α é a medida do ângulo externo de vértice A. Os ângulos internos de vértices A, B e C medem, respectivamente, x, y e z. Prove que $\alpha = y + z$ (teorema do ângulo externo).



RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \alpha + x = 180° \text{ (suplementares)} \\ x + y + z = 180° \text{ (Lei Angular de Tales)} \end{cases}$$

Assim: $\alpha + x = x + y + z \Leftrightarrow \alpha = y + z$

2. **(UFRN)** – Na figura adiante, o ângulo θ mede:

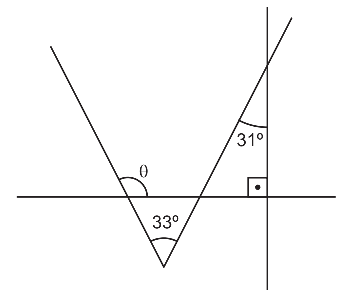
a) 96°

b) 94°

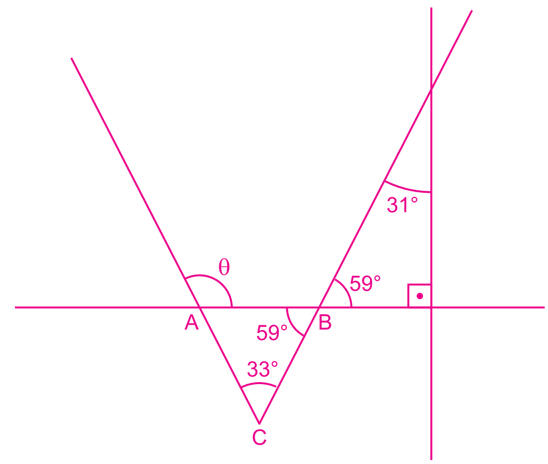
c) 93°

d) 92°

e) 91°



RESOLUÇÃO:



No triângulo ABC, de acordo com o teorema do ângulo externo tem-se:
$\theta = 59° + 33° \Leftrightarrow \theta = 92°$
Resposta: D

3. **(PUCCAMP)** – Na figura a seguir, tem-se o triângulo equilátero XYZ, inscrito no triângulo isósceles ABC. O valor de $\alpha - \beta$ é:

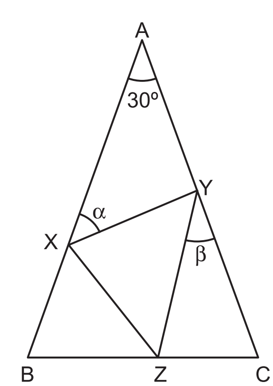
a) 15°

b) 20°

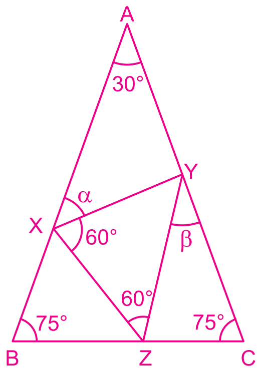
c) 25°

d) 30°

e) 45°



RESOLUÇÃO:

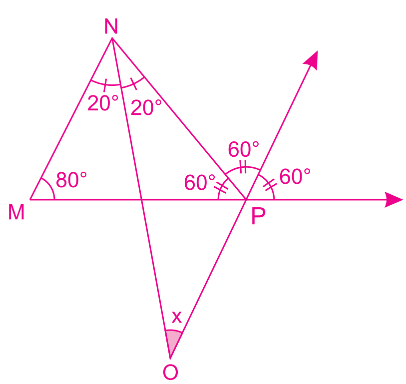


No triângulo AXY, de acordo com o teorema do ângulo externo, tem-se:
med($X\hat{Y}C$) = med($A\hat{X}Y$) + med($X\hat{A}Y$)
Assim: $60° + \beta = \alpha + 30°$ ⇔
⇔ $\alpha - \beta = 60° - 30°$ ⇔ $\alpha - \beta = 30°$
Resposta: D

4. **(UFF-RJ)** – O triângulo MNP é tal que o ângulo interno de vértice M mede 80° e o ângulo interno de vértice P mede 60°. A medida do ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno de vértice N com a bissetriz do ângulo externo de vértice P é:

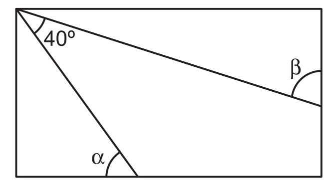
a) 20° b) 30° c) 40° d) 50° e) 60°

RESOLUÇÃO:



No triângulo NOP, de acordo com o teorema do ângulo externo, tem-se:
$60° = 20° + x$ ⇔ $x = 40°$
Resposta: C

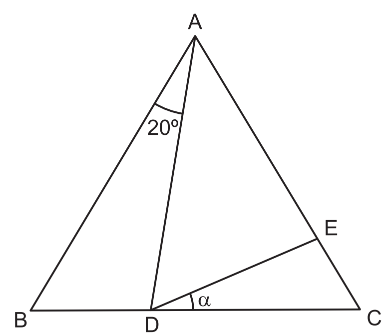
5. **(FUVEST)** – No retângulo abaixo, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:



a) 50° b) 90° c) 120° d) 130° e) 220°

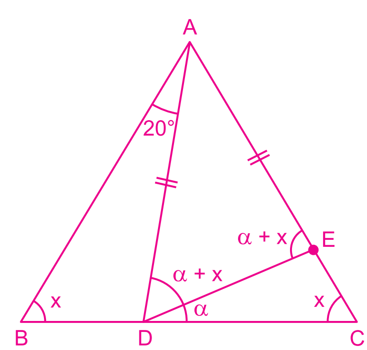
RESOLUÇÃO:
$(\alpha - 40°) + \beta + 90° = 180°$ ⇔ $\alpha + \beta + 50° = 180°$ ⇔ $\alpha + \beta = 130°$
Resposta: D

6. **(MACKENZIE)** – Na figura ao lado, tem-se AB = AC e AD = AE. A medida do ângulo α é:



a) 5° b) 10° c) 15° d) 20° e) 25°

RESOLUÇÃO:



$(\alpha + x) + \alpha = x + 20°$ ⇔ $2\alpha + x = x + 20°$ ⇔ $2\alpha = 20°$ ⇔ $\alpha = 10°$
Resposta: B

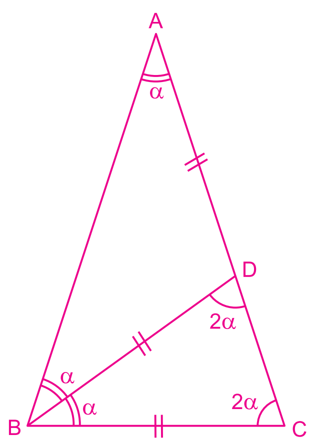
MÓDULO 4

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1. **(ITA)** – Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

RESOLUÇÃO:



1) Seja α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$ temos: $D\hat{A}B = D\hat{B}A = \alpha$.

2) $B\hat{D}C = 2\alpha$ pois é ângulo externo do triângulo ABD.

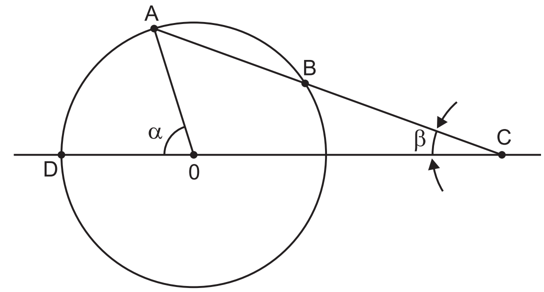
3) ΔCBD é isósceles de base $\overline{CD} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C = 2\alpha$.

4) ΔABC é isósceles de base $\overline{BC} \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\alpha$.

Assim, no triângulo CBD temos: $2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$.

Resposta: C

2. **(UFMG)** – Na figura a seguir, a circunferência tem centro O e seu raio tem a mesma medida do segmento $\overline{BC}$. Sejam α a medida do ângulo $A\hat{O}D$ e β a medida do ângulo $A\hat{C}D$.

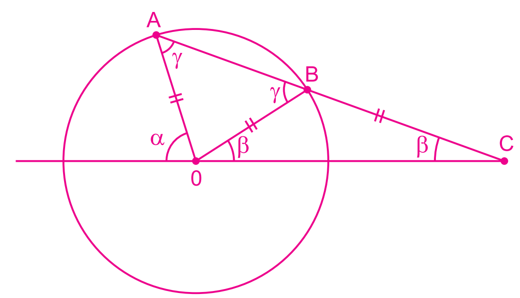


A relação entre α e β é:

a) $\alpha = \dfrac{5\beta}{2}$ b) $\alpha = 3\beta$ c) $\alpha = \dfrac{7\beta}{2}$

d) $\alpha = 2\beta$ e) $\alpha = \beta$

RESOLUÇÃO:



1) No triângulo isósceles BOC, tem-se: $\gamma = \beta + \beta \Leftrightarrow \gamma = 2\beta$

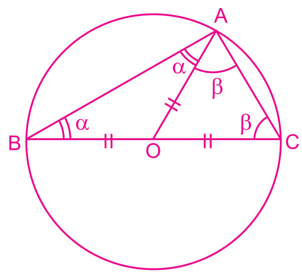
2) No triângulo OCA, tem-se: $\alpha = \gamma + \beta$

Assim: $\alpha = 2\beta + \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$

Resposta: B

3. **(FUVEST)** – Três pontos distintos A, B e C de uma circunferência de centro O são tais que B e C são extremos de um mesmo diâmetro. Prove que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto.

RESOLUÇÃO:



1) OB = OA ⇒ ΔOBA é isósceles ⇒ $\hat{B} = \hat{A} = \alpha$

2) OA = OC ⇒ ΔOCA é isósceles ⇒ $\hat{A} = \hat{C} = \beta$

3) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

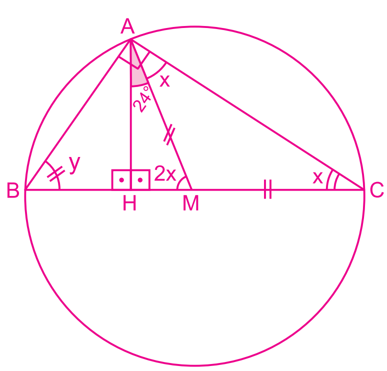
Assim: $(\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow$ med$(B\hat{A}C) = 90° \Leftrightarrow B\hat{A}C$ é reto

4. **(CFT-CE)** – A altura e a mediana traçadas do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo formam um ângulo de 24°. Sendo assim, os ângulos agudos do triângulo são:

a) 33° e 57° b) 34° e 56° c) 35° e 55°
d) 36° e 54° e) 37° e 53°

RESOLUÇÃO:



1º) $2x + 24° + 90° = 180° \Rightarrow 2x = 66° \Rightarrow x = 33°$
2º) $x + y = 90°$
Assim: $33° + y = 90° \Rightarrow y = 57°$
Resposta: A

MÓDULO 5

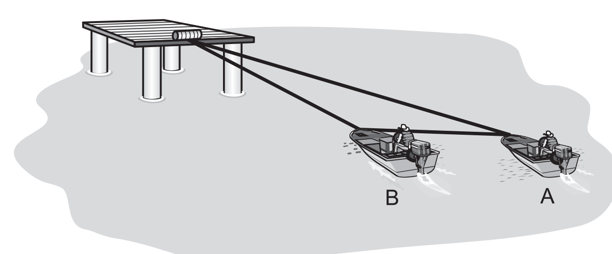
CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1. **(PUC-MG)** – Sabe-se que, em um triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Uma afirmativa equivalente a essa é:

a) A menor distância entre dois pontos é igual ao comprimento do segmento de reta que os une.
b) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o maior dos lados.
c) Ao lado menor de um triângulo, opõe-se o menor ângulo.
d) Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base divide-a em dois segmentos de mesmo comprimento.

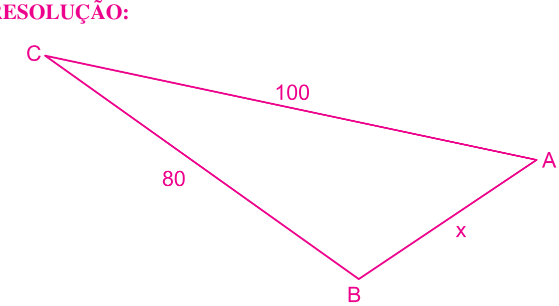
RESOLUÇÃO:
Essa afirmação é equivalente a:
A distância entre dois pontos é a medida do segmento que tem esses pontos por extremidades.
Resposta: A

2. **(UFPE)** – Um barco está sendo rebocado para a margem de um porto por um cabo de aço. Inicialmente, o barco está no ponto A da ilustração, quando o cabo tem comprimento de 100 m. Após puxar o cabo de 20 m, o barco ocupa a posição B. Nessas condições, podemos afirmar que a distância AB é



a) maior que 20 m. b) igual a 20 m.
c) igual a 19 m. d) igual a 18 m.
e) menor que 18 m.

RESOLUÇÃO:

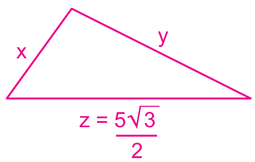


$|80 - 100| < x < 80 + 100 \Leftrightarrow 20 < x < 180$
Resposta: A

3. **(OBM)** – Qual o menor perímetro inteiro possível de um triângulo que possui um dos lados com medida igual a $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

RESOLUÇÃO:



Para existir tal triângulo, deve-se ter:

$x + y > \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + y + z > 5\sqrt{3} \Rightarrow x + y + z > \sqrt{75}$

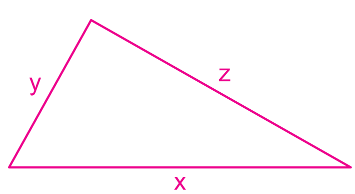
Assim, o menor valor inteiro para x + y + z é 9

Resposta: B

4. Se um triângulo escaleno tem perímetro **u**, prove que a medida **x** do seu maior lado é tal que: $\dfrac{u}{3} < x < \dfrac{u}{2}$.

RESOLUÇÃO:

Se y e z são as medidas dos outros dois lados desse triângulo, têm-se:



1) $x < y + z \Rightarrow x + x < x + y + z \Rightarrow 2x < u \Rightarrow x < \dfrac{u}{2}$ (I)

2) $x > y$ e $x > z \Rightarrow x + x > y + z \Rightarrow x + x + x > x + y + z \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x > u \Rightarrow x > \dfrac{u}{3}$ (II)

De (I) e (II), tem-se finalmente: $\dfrac{u}{3} < x < \dfrac{u}{2}$.

5. **(UNICAMP)**

a) Quantos são os triângulos não congruentes cujas medidas dos lados, em metros, são NÚMEROS INTEIROS e cujos perímetros medem 11 metros?

b) Quantos dos triângulos considerados no item anterior são equiláteros? E quantos são isósceles?

RESOLUÇÃO:

Sejam a, b e c os números inteiros que expressam, em metros, as medidas dos lados de um triângulo, com $a \geq b$, $b \geq c$ e $a + b + c = 11$.

Como $\dfrac{11}{3} \leq a < \dfrac{11}{2}$, **tem-se a = 5 ou a = 4.**

Assim, podemos montar a seguinte tabela para os valores de *a*, *b* e *c*.

a	b	c	a + b + c
5	5	1	11
5	4	2	11
5	3	3	11
4	4	3	11

Nela se observa que os triângulos "possíveis" são quatro e destes nenhum é equilátero, três são isósceles e um é escaleno.

Respostas: a) Quatro triângulos.
b) Nenhum equilátero e três isósceles.

MÓDULO 6

POLÍGONOS

1. **(AMAN)** – O polígono convexo em que o triplo do número de vértices é igual ao total de diagonais é o

a) eneágono. b) dodecágono. c) hexágono.
d) heptágono. e) icoságono.

RESOLUÇÃO:

$3n = d \Leftrightarrow 3n = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow n - 3 = 6$, **pois** $n \neq 0$

Assim: n = 9

Resposta: A

2. **(UFSCar)** – Um polígono convexo com exatamente 35 diagonais tem

a) 6 lados. b) 9 lados. c) 10 lados.
d) 12 lados. e) 20 lados.

RESOLUÇÃO:

$\dfrac{n\,.\,(n-3)}{2} = 35 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0$

Assim: $n = \dfrac{3 \pm 17}{2} \Leftrightarrow n = 10$, pois $n > 3$

Resposta: C

3. **(PUC Rio-RJ)** – As medidas, em graus, dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são iguais a: 3x – 45, 2x + 10, 2x + 15 e x + 20. O menor ângulo interno desse quadrilátero mede:

a) 90° b) 65° c) 45° d) 105° e) 80°

RESOLUÇÃO:

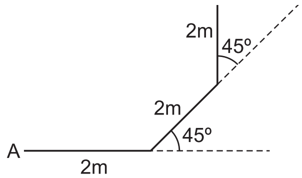
$(2x + 10°) + (2x + 15°) + (x + 20°) + (3x - 45°) = 360°$

Assim: $8x = 360° \Leftrightarrow x = 45°$

Portanto: $3x - 35° = 90°$, $2x + 10° = 100°$, $2x + 15° = 105°$ e $x + 20° = 65°$

Resposta: B

4. **(PUCCAMP)** – A figura descreve o movimento de um robô:



Partindo de A, ele sistematicamente avança 2 m e gira 45° para a esquerda. Quando esse robô retornar ao ponto A, a trajetória percorrida terá sido

a) uma circunferência. b) um hexágono regular.
c) um octógono regular. d) um decágono regular.
e) um polígono não regular.

RESOLUÇÃO:

Quando esse robô retornar ao ponto A, terá percorrido os lados de um polígono regular, cujo ângulo externo mede 45°. Assim, sendo n o número de lados desse polígono, tem-se:

$\dfrac{360°}{n} = 45° \Leftrightarrow n = 8$

Resposta: C

5. **(USF-SP)** – O polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo é o:

a) pentágono b) hexágono c) octógono
d) decágono e) dodecágono

RESOLUÇÃO:

Sendo n o número de lados desse polígono regular, tem-se:

$\dfrac{(n-2)180°}{n} = 3\,.\,\dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow n - 2 = 6 \Leftrightarrow n = 8$

Resposta: C

6. **(FUVEST)** – Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. O número de lados do polígono é:

a) 6 b) 7 c) 13 d) 16 e) 17

RESOLUÇÃO:

Seja n o número de lados desse polígono. De acordo com o enunciado pode-se concluir que 2 dos ângulos externos desse polígono medem 50° cada um e que os demais (n – 2) ângulos externos medem 52° cada um.

Assim:

$2\,.\,50° + (n-2)\,.\,52° = 360° \Leftrightarrow (n-2)\,.\,52° = 260° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n - 2 = \dfrac{260°}{52°} \Leftrightarrow n - 2 = 5 \Leftrightarrow n = 7$

Resposta: B

MÓDULO 7

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

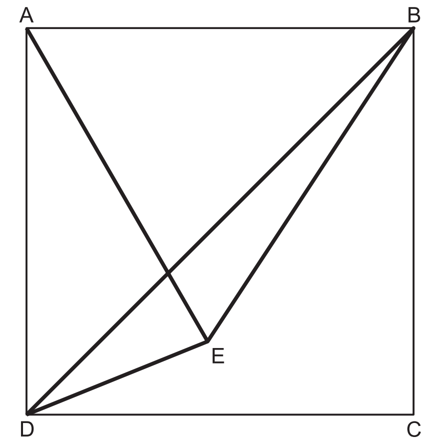
1. **(UNESP-SP)** – A afirmação **falsa** é:
a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que não são losangos.
c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
d) Todo quadrado é um retângulo.
e) Um losango pode não ser um paralelogramo.

RESOLUÇÃO:
Todo losango é um paralelogramo com os lados todos congruentes.
Resposta: E

2. **(UNESP-SP)** – Considere as seguintes proposições:
– Todo quadrado é um losango.
– Todo quadrado é um retângulo.
– Todo retângulo é um paralelogramo.
– Todo triângulo equilátero é isósceles.
Pode-se afirmar que
a) só uma é verdadeira.
b) todas são verdadeiras.
c) só uma é falsa.
d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
e) todas são falsas.

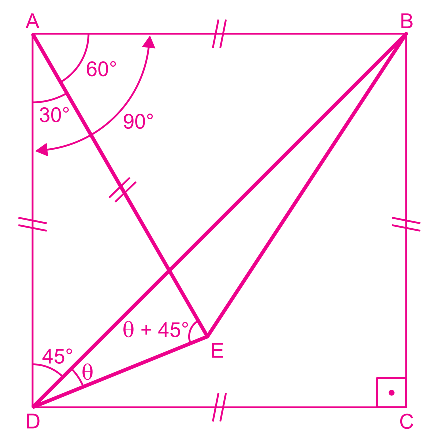
RESOLUÇÃO:
1) Todo quadrado é um losango retângulo.
2) Todo retângulo é um paralelogramo de ângulos internos congruentes.
3) Todo triângulo equilátero tem os três lados congruentes e, portanto, apresenta dois lados congruentes, sendo assim isósceles.
Logo, todas as proposições são verdadeiras.
Resposta: B

3. **(CEFET-MG)** – ABCD é um quadrado e ABE, um triângulo equilátero, conforme representado na figura.



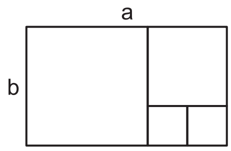
A medida do ângulo $B\hat{D}E$, em graus, é:
a) 10 b) 15 c) 20 d) 30 e) 36

RESOLUÇÃO:



Sendo θ a medida do ângulo $B\hat{D}E$, no triângulo isósceles ADE, tem-se:
$30° + (45° + \theta) + (\theta + 45°) = 180°$
Assim: $120° + 2\theta = 180° \Leftrightarrow \theta = 30°$
Resposta: D

4. **(FUVEST-SP)** – O retângulo a seguir, de dimensões **a** e **b**, está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão **a/b**?



a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

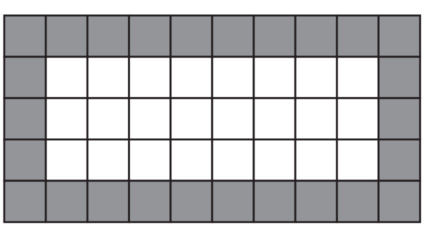
RESOLUÇÃO:

$$\frac{a-b}{2} = b-(a-b) \Leftrightarrow a-b = 2\,(2b-a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + 2a = 4b + b \Leftrightarrow 3a = 5b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

Resposta: A

5. **(ESPM)** – Uma parede retangular cujo comprimento mede o dobro da altura foi revestida com azulejos quadrados, inteiros e de mesmo tamanho e, em todo o contorno externo, foi feita uma faixa decorativa com 68 peças mais escuras, como na figura abaixo.



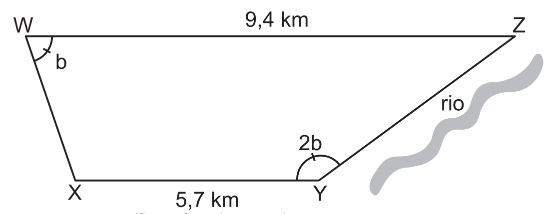
O número de azulejos mais claros usados no interior da parede foi:
a) 260 b) 246 c) 268 d) 312 e) 220

RESOLUÇÃO:
Sejam x e y, respectivamente, os números de azulejos utilizados numa fileira horizontal e numa fileira vertical.
Do enunciado, obtemos: x = 2y.
Além disso, o número de azulejos usados no contorno externo é tal que: 2(x + y) – 4 = 68
Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2(x+y) - 4 = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 12 \end{cases}$$

Portanto, o número de azulejos mais claros usados no interior da parede foi (x – 2)(y – 2) = 22 . 10 = 220.
Resposta: E

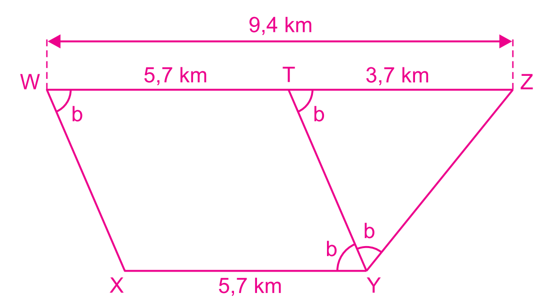
6. **(UNESP-SP)** – Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio, como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.



(figura fora de escala)

Se o ângulo $X\hat{Y}Z$ é o dobro do ângulo $X\hat{W}Z$, a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:
a) 7,5 b) 5,7 c) 4,7 d) 4,3 e) 3,7

RESOLUÇÃO:

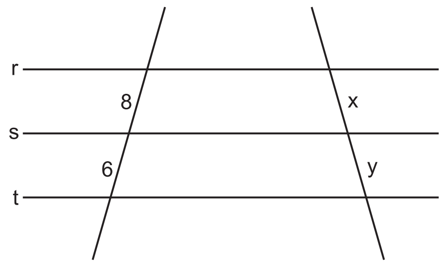


Traçando $\overline{TY} // \overline{XW}$, temos $T\hat{W}X = T\hat{Y}X = b$
e XY = WT = 5,7 km, pois XYTW é um paralelogramo.
O triângulo TZY é isósceles, pois $Z\hat{Y}T = Z\hat{Y}X - T\hat{Y}X =$
$= 2b - b = b$ e $Z\hat{T}Y = X\hat{Y}T = b$ (alternos internos).
Logo: YZ = ZT = WZ – WT = 9,4 km – 5,7 km = 3,7 km
Resposta: E

MÓDULO 8

LINHAS PROPORCIONAIS

1. **(UFRJ-RJ)** – Pedro está construindo uma fogueira representada pela figura abaixo. Ele sabe que a soma de x com y é 42 e que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas.



A diferença x – y é igual a:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 10 e) 12

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{8}{6} = \dfrac{x}{y} \\ x + y = 42\end{array}\right\} \Rightarrow x = 24 \text{ e } y = 18$$

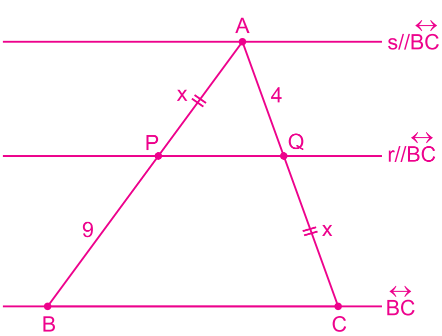
Assim: x – y = 24 – 18 = 6

Resposta: C

2. **(PUC-RJ)** – Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo em P e Q, respectivamente, em que AQ = 4, PB = 9 e AP = QC. Então o comprimento de $\overline{AP}$ é:

a) 5 b) 6 c) 8 d) 2 e) 1

RESOLUÇÃO:

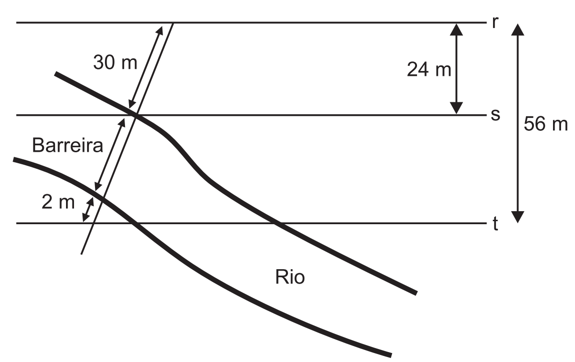


De acordo com o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$$

Resposta: B

3. **(UFSM-RS)** – A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscar alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidroelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observamos a figura e, admitindo que as linhas retas *r*, *s* e *t* sejam paralelas, podemos afirmar que a barreira mede:



a) 33 m b) 38 m c) 43 m d) 48 m e) 53 m

RESOLUÇÃO:

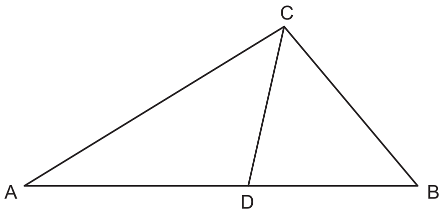
Sendo x o comprimento, em metros, da barreira, de acordo com o Teorema Linear de Tales, tem-se:

$$\frac{30}{x+2} = \frac{24}{56-24} \Leftrightarrow \frac{5}{x+2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x + 2 = 40 \Leftrightarrow x = 38$$

Resposta: B

4. **(CESGRANRIO-RJ)** – No triângulo ABC da figura, $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo interno de vértice C. Se AD = 3 cm, DB = 2 cm e AC = 4 cm, então o lado $\overline{BC}$ mede, em centímetros:

a) 3 b) $\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{7}{2}$ d) $\dfrac{8}{3}$ e) 4

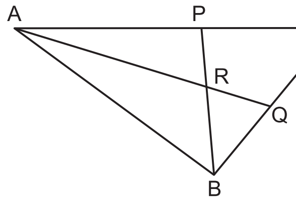


RESOLUÇÃO:
De acordo com o teorema da bissetriz interna, tem-se: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{DB}$

Assim: $\dfrac{4}{3} = \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow BC = \dfrac{8}{3}$

Resposta: D

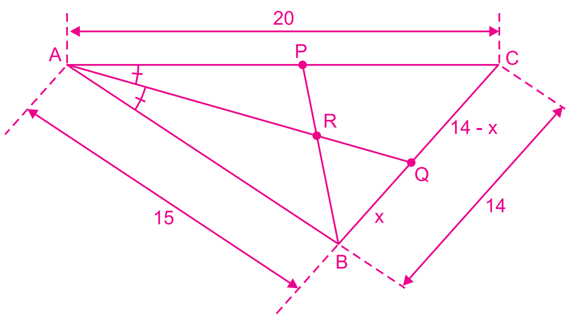
5. **(FGV-SP)** – Na figura, ABC é um triângulo com AC = 20 cm, AB = 15 cm e BC = 14 cm.



Sendo AQ e BP bissetrizes interiores do triângulo ABC, o quociente $\dfrac{QR}{AR}$ é igual a:

a) 0,3 b) 0,35 c) 0,4 d) 0,45 e) 0,5

RESOLUÇÃO:



Sendo BQ = x, pelo teorema da bissetriz, tem-se:

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{14 - x} = \frac{15}{20} \Leftrightarrow x = 6 \text{ e, portanto, } BQ = 6.$$

Ainda pelo teorema da bissetriz, tem-se:

$$\frac{QR}{AR} = \frac{BQ}{AB} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Resposta: C

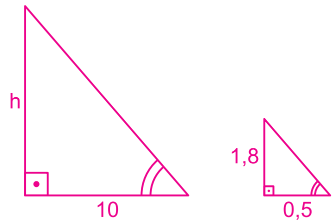
MÓDULO 9

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1. **(UELON-PR)** – Para medir a altura de um edifício, um engenheiro utilizou o seguinte procedimento: mediu a sombra do prédio, obtendo 10,0 metros. Em seguida, mediu sua própria sombra, que resultou em 0,5 metro. Sabendo que sua altura é de 1,8 metro, ele pôde calcular a altura do prédio, obtendo

a) 4,5 metros. b) 10,0 metros.
c) 18,0 metros. d) 36,0 metros.
e) 45,0 metros.

RESOLUÇÃO:



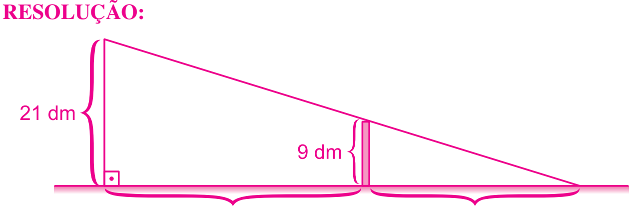
Sendo h a altura, em metros, do edifício, da semelhança entre os triângulos retângulos da figura, tem-se:

$$\frac{h}{1,8} = \frac{10,0}{0,5} \Leftrightarrow h = \frac{18,0}{0,5} \Leftrightarrow h = 36,0$$

Resposta: D

2. **(UNESP)** – Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial, e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm. Desprezando os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância desta, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

RESOLUÇÃO:



Sendo x a distância, em decímetros, da rede ao ponto em que a bola atingirá o outro lado da quadra, temos:

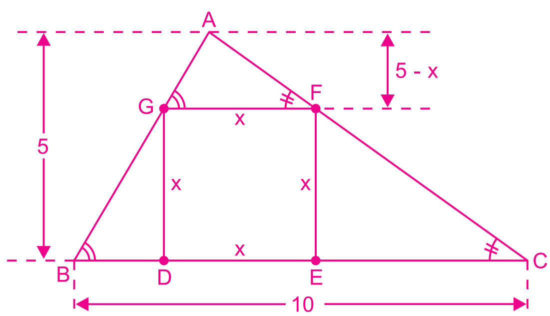
$$\frac{x}{9} = \frac{120 + x}{21} \Leftrightarrow x = 90$$

Resposta: 9 m

3. **(UFJF-MG)** – Seja o triângulo de base igual a 10 m e altura igual a 5 m com um quadrado inscrito, tendo um lado contido na base do triângulo. O lado do quadrado é, em metros, igual a:

a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{15}{4}$ e) $\frac{15}{2}$

RESOLUÇÃO:

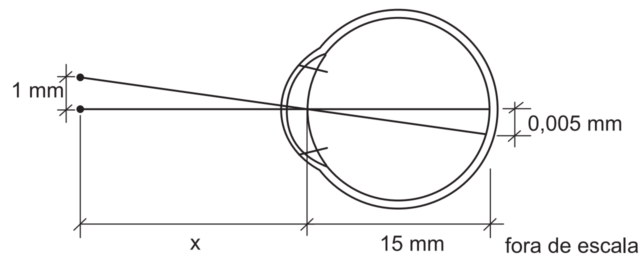


Da semelhança entre os triângulos AGF e ABC, obtém-se, com todas as dimensões em metros:

$$\frac{x}{10} = \frac{5 - x}{5} \Leftrightarrow 5x = 50 - 10x \Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

Resposta: A

4. **(UNESP)** – Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de 0,005 mm.



Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera cujo diâmetro médio é igual a 15 mm, a maior distância x, em metros, a que dois pontos luminosos, distantes 1 mm um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

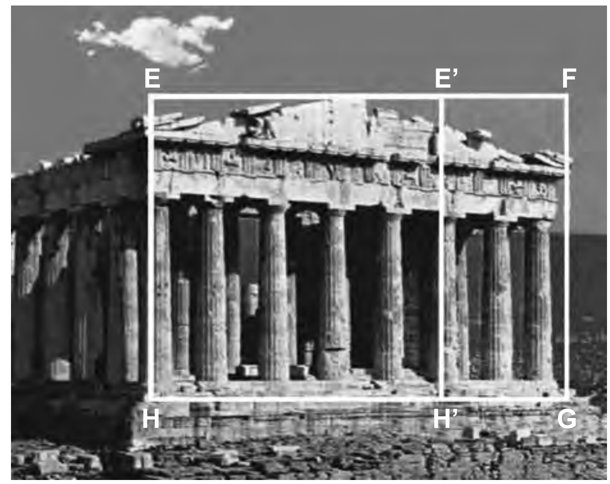
RESOLUÇÃO:
Da semelhança entre os triângulos retângulos da figura, em milímetros, obtemos:

$$\frac{1}{0{,}005} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x = \frac{15}{0{,}005} \Leftrightarrow x = 3\,000$$

Portanto: x = 3 000 mm = 3 m

Resposta: C

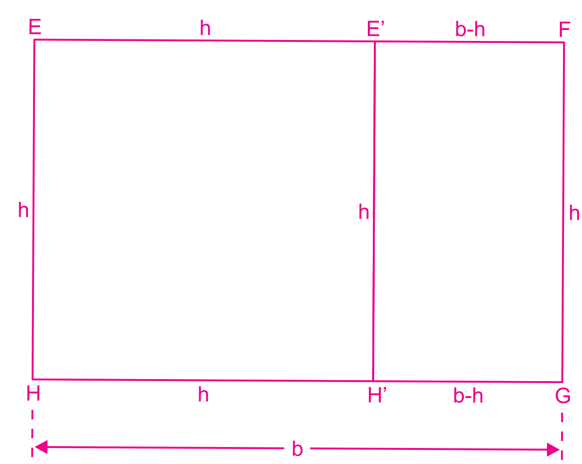
5. **(UFRN)** – Phidias, um arquiteto grego que viveu no século V a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que EE'H'H é um quadrado e que os retângulos EFGH e E'FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo, assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura abaixo.



Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 + x - 1$ c) $x^2 - x - 1$
d) $x^2 - x + 1$ e) $x^2 - 2x + 1$

RESOLUÇÃO:



Sendo *b* a medida da base do Parthenon, *h* a sua altura e *x* o valor da razão $\frac{b}{h}$, da semelhança entre os retângulos EFGH e FGH'E', obtém-se:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{FG}{GH'} \Leftrightarrow \frac{b}{h} = \frac{h}{b-h} \Leftrightarrow b^2 - bh - h^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{h^2} - \frac{bh}{h^2} - \frac{h^2}{h^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{h}\right)^2 - \frac{b}{h} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resposta: C

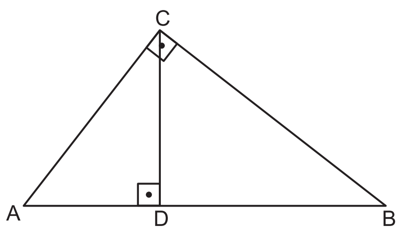
MÓDULO 10

TEOREMA DE PITÁGORAS

1. **(FUVEST-SP)** – Na figura, $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

a) Prove que os triângulos ABC, ACD e CBD são semelhantes.

b) Usando essa semelhança, demonstre o Teorema de Pitágoras.



RESOLUÇÃO:

a) $\left.\begin{array}{l}\hat{A} \text{ é ângulo comum} \\ \hat{C} \cong \hat{D} \text{ (retos)}\end{array}\right\} \xRightarrow{(AA\sim)} \Delta ABC \sim \Delta ACD \qquad \text{(I)}$

$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \text{ é ângulo comum} \\ \hat{C} \cong \hat{D} \text{ (retos)}\end{array}\right\} \xRightarrow{(AA\sim)} \Delta ABC \sim \Delta CBD \qquad \text{(II)}$

De (I) e (II): $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

b) $\Delta ABC \sim \Delta ACD \Rightarrow (AC)^2 = AB \,.\, AD \qquad \text{(III)}$

$\Delta ABC \sim \Delta CBD \Rightarrow (BC)^2 = AB \,.\, BD \qquad \text{(IV)}$

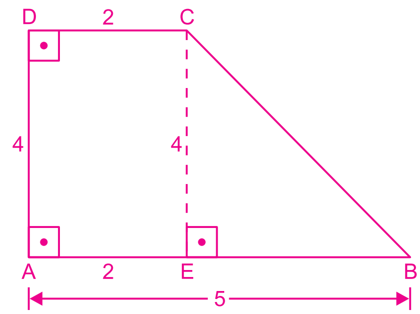
Somando-se (III) e (IV), membro a membro, tem-se:

$(AC)^2 + (BC)^2 = AB \,.\, (AD + BD) \Rightarrow (AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$

2. **(FUVEST-SP)** – Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

RESOLUÇÃO:



No triângulo retângulo EBC, tem-se:

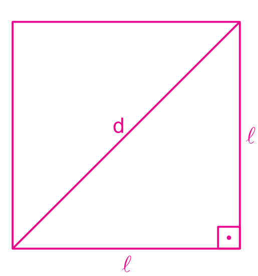
$(BC)^2 = (EB)^2 + (EC)^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 4^2 + (5 - 2)^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 25 \Leftrightarrow BC = 5$

Assim: $AB + BC + CD + DA = 5 + 5 + 2 + 4 = 16$

Resposta: D

3. Calcule a diagonal de um quadrado de lado "ℓ".

RESOLUÇÃO:



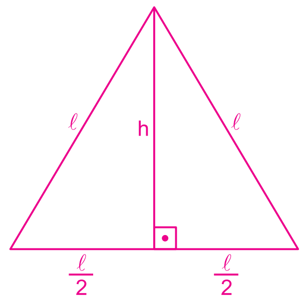
$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Leftrightarrow d^2 = 2\ell^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = \ell\sqrt{2}$

Resposta: $\ell\sqrt{2}$

4. Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado "ℓ".

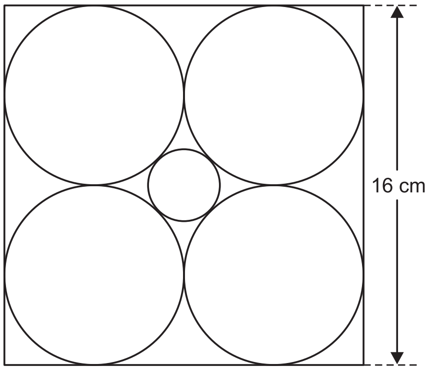
RESOLUÇÃO:



$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

5. **(USF-SP)** – A figura seguinte representa como 5 sabonetes esféricos, tangentes uns aos outros e às paredes da caixa de secção quadrada, poderiam ser dispostos. Sendo 16 cm o comprimento do lado do quadrado, então o raio do sabonete esférico central, em centímetros, mede:



a) $\sqrt{2} - 1$

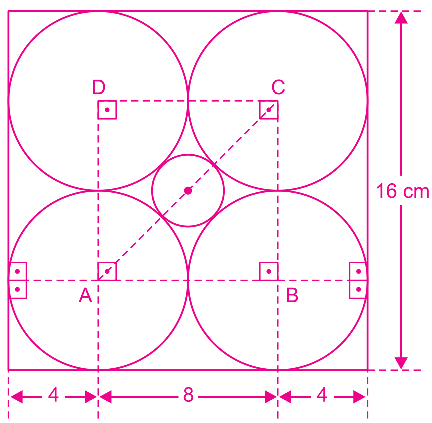
b) $2\sqrt{2} - 2$

c) $4\sqrt{2} - 2$

d) $4\sqrt{2} - 4$

e) $\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:



Seja r a medida, em centímetros, do raio do sabonete esférico central.

$4 + r + r + 4 = 8\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado ABCD).

Assim:

$$8 + 2r = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 2r = 8\sqrt{2} - 8 \Leftrightarrow r = \frac{8\sqrt{2} - 8}{2} \Leftrightarrow r = 4\sqrt{2} - 4$$

Resposta: D