# MÓDULO 1 — Potenciação: Definição e Propriedades

## 1. DEFINIÇÃO

Sendo **a** um número **real** e **n** um número **natural**, chama-se potência de expoente inteiro o número $\mathbf{a^n}$ ou $\mathbf{a^{-n}}$ assim definido:

| |
|---|
| • **Se $n \geqslant 2$, então $a^n = a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \, a$ (n fatores)** |
| • **Se $n = 1$, então $a^1 = a$** |
| • **Se $n = 0$, então $a^0 = 1$** |
| • **Se $a \neq 0$, então $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$** |

## 2. PROPRIEDADES

Sendo **a** e **b** números reais, **m** e **n** números inteiros e supondo que o denominador de cada fração seja diferente de zero, valem para as potências as seguintes propriedades:

| |
|---|
| • $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$ |
| • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ |
| • $a^n \,.\, b^n = (a \,.\, b)^n$ |
| • $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ |
| • $(a^n)^m = a^{n \,.\, m}$ |

Observe que, se $n \geqslant 2$ e $m \geqslant 2$, então:

$$a^n \,.\, a^m = \underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{\text{n fatores}} \,.\, \underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{\text{m fatores}} =$$

$$= \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{\text{(n + m) fatores}} =$$

$$= a^{n+m},\ a \in \mathbb{R},\ n,\ m \in \mathbb{N}$$

Verifique, substituindo, a validade da propriedade para ($n = 0$ e $m = 0$), ($n = 0$ e $m = 1$) e ($n = 1$ e $m = 1$).

# MÓDULO 2 — Radiciação: Definição e Propriedades

## 1. DEFINIÇÃO

Seja **a** um número **real** e **n** um número **natural** não nulo. O número **x** é chamado raiz **enésima de a** se, e somente se, elevado ao expoente **n**, reproduz **a**.

Simbolicamente:

| |
|---|
| **x é a raiz enésima de a $\Leftrightarrow x^n = a$** |

## 2. EXISTÊNCIA (EM $\mathbb{R}$)

• Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe uma única raiz enésima que é o próprio zero.

Assim: $\sqrt[n]{0} = 0$

• Se **a** é **estritamente positivo** e **n** é **par**, então existem duas e somente duas raízes enésimas de **a**. Estas duas raízes são simétricas. A raiz enésima estritamente positiva é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. A raiz enésima estritamente negativa, por ser simétrica da primeira, é representada pelo símbolo $-\sqrt[n]{a}$.

• Se **a** é **estritamente negativo** e **n** é **par**, então não existe raiz enésima de **a**.

• Se $a \in \mathbb{R}$ e **n** é **ímpar**, então existe uma única raiz enésima de **a**. Esta raiz enésima tem o mesmo sinal de **a** e é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

**Observações**

• No símbolo $\sqrt[n]{a}$:
- $\sqrt{\ }$ é o radical;
- **a** é o radicando;
- **n** é o índice da raiz.

• Por convenção, na raiz quadrada omite-se o índice.

Escreve-se, por exemplo, $\sqrt{4}$ em lugar de $\sqrt[2]{4}$.

• Se **a** é um número real positivo e **n** é par, então a raiz enésima positiva de **a** é chamada raiz aritmética de **a**, sempre existe, é única e é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

### Propriedades

Sendo **a** e **b** números reais positivos e **n** um número natural não nulo, valem as seguintes propriedades:

| |
|---|
| • $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ |
| • $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$ |
| • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, com $m \in \mathbb{Z}$ |
| • $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, com $m \in \mathbb{N}^*$ |
| • $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{N}^*$ |

Observe que:

$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{a} \\ y = \sqrt[n]{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^n = a \\ y^n = b \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^n \cdot y^n = a \cdot b \Rightarrow (x \cdot y)^n = a \cdot b \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot y = \sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\ a \in \mathbb{R}^*_+,\ n \in \mathbb{N}^*$

## 3. POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

### Definição

Sendo **a** um número real positivo, **n** um número natural não nulo e $\dfrac{m}{n}$ um número racional na forma irredutível, define-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### Propriedades

Demonstra-se que todas as propriedades válidas para as potências de expoentes inteiros valem também para as potências de expoentes racionais.

## 4. RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar todos os radicais (ou potências de expoentes fracionários) que existem no denominador desta, sem porém alterar o seu valor.

# MÓDULOS 3 e 4 — Fatoração

## 1. DEFINIÇÃO

Fatorar é transformar uma soma de duas ou mais parcelas num produto de dois ou mais fatores.

## 2. CASOS TÍPICOS

### 1º Caso: FATOR COMUM

$$ax + bx = x \cdot (a + b)$$

### 2º Caso: AGRUPAMENTO

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b) \cdot (x + y)$$

### 3º Caso: DIFERENÇA DE QUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

### 4º Caso: QUADRADO PERFEITO

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2$$

# MÓDULOS 5 e 6 — Exercícios de Potenciação e Radiciação

# MÓDULO 7 — Fatoração

### 5º Caso: SOMA E DIFERENÇA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

### 6º Caso: CUBO PERFEITO

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^3$$

## 1. INTRODUÇÃO

Analisando as sentenças

(I) $2 \cdot 6 - 1 = 13$
(II) $2 \cdot 7 - 1 = 13$
(III) $2x - 1 = 13$

podemos fazer as seguintes considerações:

a) A sentença (I) é falsa, pois $2 \cdot 6 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 13$.

b) A sentença (II) é verdadeira, pois $2 \cdot 7 - 1 = 14 - 1 = 13$.

c) A sentença $2x - 1 = 13$ não é verdadeira nem falsa, pois x, chamado **variável**, pode assumir qualquer valor. Este tipo de sentença é um exemplo de **sentença aberta**.

Toda **sentença aberta** na forma de **igualdade** é chamada **equação**.

d) Substituindo **x por 7**, a sentença aberta $2\mathbf{x} - 1 = 13$ transforma-se em $2 \cdot \mathbf{7} - 1 = 13$, que é uma sentença verdadeira. Dizemos, então, que **7** é uma raiz (ou uma solução) da equação $2x - 1 = 13$.

## 2. RAIZ, CONJUNTO-VERDADE, RESOLUÇÃO

• **Raiz** (ou solução) de uma equação é um número que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira.

• **Conjunto-verdade** (ou conjunto-solução) de uma equação é o conjunto de todas, e somente, as raízes.

• Resolver uma equação é determinar o seu conjunto-verdade.

• Existem processos gerais de resolução de alguns tipos de equações, particularmente as do 1º e do 2º grau, que, a seguir, passamos a comentar.

## 3. EQUAÇÃO DO 1º GRAU

### ❑ Definição

É toda sentença aberta, redutível e equivalente a $\boxed{ax + b = 0}$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

### Exemplos

São equações do 1º grau as sentenças abertas $5x - 3 = 12$ e $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{x+3}{2} = 1$.

### Resolução

Notando que $ax + b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ para $a \neq 0$,

concluímos que o conjunto-verdade da equação é $V = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

### ❑ Discussão

Analisando a equação $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos as seguintes hipóteses:

a) Para $\mathbf{a \neq 0}$, $ax + b = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{V} = \left\{-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right\}$ (a equação admite uma única solução).

b) Para $\mathbf{a = 0}$ e $\mathbf{b \neq 0}$, $ax + b = 0$ não tem solução, pois a sentença é sempre falsa. Neste caso, $\mathbf{V = \emptyset}$.

c) Para $\mathbf{a = 0}$ e $\mathbf{b = 0}$, a equação $ax + b = 0$ admite todos os números reais como solução, pois a sentença $\mathbf{0x + 0 = 0}$ é sempre verdadeira. Neste caso, $\mathbf{V = \mathbb{R}}$.

### Observação

Sentenças abertas redutíveis ao tipo $0x = 0$ são chamadas **identidades**. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ é um exemplo de identidade em $\mathbb{R}$.

## 4. EQUAÇÕES DO TIPO "PRODUTO" OU "QUOCIENTE"

### ❑ Definição

São equações dos tipos $\mathbf{a \cdot b = 0}$ (produto) ou $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ (quociente), com $\{ a; b \} \subset \mathbb{R}$.

### Resolução

Ao resolver equações destes tipos, lembrar das duas seguintes equivalências:

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

$$\boxed{\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b \neq 0}$$

## 5. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

### ❑ Definição

É toda **sentença aberta**, em x, redutível e equivalente a $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

### ❑ Resolução para o caso

$\boxed{c = 0}$ e $\boxed{b \neq 0}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \left\{0; -\dfrac{b}{a}\right\}$

### ❑ Resolução para o caso

$\boxed{b = 0}$ e $\boxed{c \neq 0}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \left\{\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, se **a** e **c** forem de sinais contrários, ou $V = \emptyset$, se **a** e **c** forem de mesmo sinal, para $x \in \mathbb{R}$.

### ❑ Resolução para o caso

$\boxed{b = 0}$ e $\boxed{c = 0}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow V = \{ 0 \}$

### Resolução do caso geral

Utilizando "alguns artifícios", Báskara verificou que a equação **$ax^2 + bx + c = 0$** é equivalente à equação **$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$**.

De fato:

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$

Multiplicando-se ambos os membros desta última igualdade por **4a**, obtém-se:

$ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando-se **$b^2$** aos dois membros da igualdade assim obtida, resulta:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Assim, representando por **$\Delta$** o **discriminante** $b^2 - 4ac$, temos:

a) $\Delta < 0 \Rightarrow$ a equação não tem solução em $\mathbb{R}$.

b) $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, sendo V o conjunto-verdade em $\mathbb{R}$, conclui-se que:

$$\Delta > 0 \Rightarrow V = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow V = \varnothing$$

### Propriedades

Se $\Delta \geqslant 0$ e $\{x_1; x_2\}$ é conjunto-verdade da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## MÓDULOS 10 e 11 — Equações Redutíveis a 1º ou 2º Grau

### 1. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO A PARTIR DAS SUAS RAÍZES

Sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$, então uma equação do 2º grau, cujo conjunto-verdade é $\{x_1; x_2\}$, será:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

De fato, supondo $a \neq 0$, temos:

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

### Equações redutíveis a 1º ou 2º grau

a) Se a equação estiver na forma de produto ou na forma de quociente, será útil uma das seguintes equivalências:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b \neq 0$$

b) Se a equação proposta não for do tipo $ax + b = 0$ nem $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, deve-se, se possível,

1º) **Fatorar** e utilizar a equivalência $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

2º) **Fazer uma troca de variáveis** e procurar recair em 1º ou 2º grau.

## MÓDULO 12 — Sistemas e Problemas

### 1. SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS INCÓGNITAS

Note que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação **$x + y = 9$**.

Além disso, $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação **$x - y = 7$**.

O sistema formado pelas equações $x + y = 9$ e $x - y = 7$, isto é, $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$, apresenta $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ como solução, pois esses dois valores tornam verdadeiras as duas equações simultaneamente.

A solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas, x e y, é qualquer par ordenado de valores (x; y) que satisfaz ambas as equações.

# MÓDULO 13 — Inequações do 1º Grau

## ❑ Definição

Chama-se inequação (desigualdade) do 1º grau, na variável real **x**, toda sentença que pode ser reduzida a uma das formas: $ax + b > 0$ ou $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leqslant 0$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

### Resolução

Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 1º grau é determinar o conjunto de todos os valores da variável x que tornam a sentença verdadeira.

Por ser mais prático, é costume "isolar" o x da sentença. Para isso são utilizadas as seguintes propriedades da desigualdade em $\mathbb{R}$, sendo x, y e a números reais:

| |
|---|
| $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a, \forall a \in \mathbb{R}$ |
| $x < y \Leftrightarrow ax < ay$, se $a > 0$ |
| $x < y \Leftrightarrow ax > ay$, se $a < 0$ |

### Exemplos

1) $2x + 10 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x < -10 \Leftrightarrow x < -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

2) $-2x + 10 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x < -10 \Leftrightarrow x > 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

3) $\dfrac{x-3}{4} - \dfrac{2x-1}{6} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-3) - 2(2x-1)}{12} < \dfrac{12}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 9 - 4x + 2 < 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 4x < 12 + 9 - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x < 19 \Leftrightarrow x > -19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -19\}$

# MÓDULO 14 — Funções do 1º e 2º Grau

## 1. FUNÇÃO DO 1º GRAU

### ❑ Definição

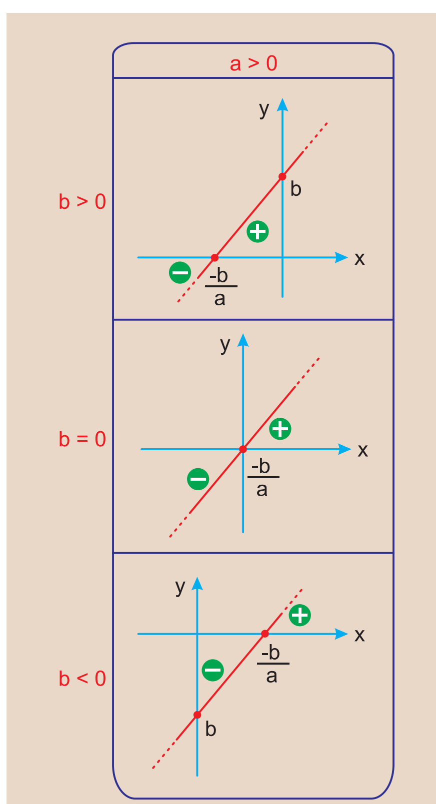
É a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

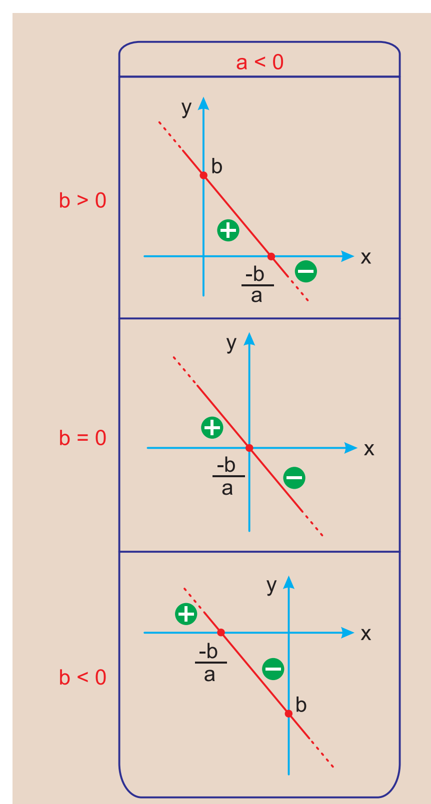
- **Domínio = $\mathbb{R}$**
- **Contradomínio = Imagem = $\mathbb{R}$**

### ❑ Gráfico

É uma reta não paralela a qualquer um dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas.

A raiz de **f** é $x = \dfrac{-b}{a}$ e conforme os sinais de **a** e **b** podemos ter os seguintes tipos de gráficos:



## 2. FUNÇÃO DO 2º GRAU

### Definição

É a função f : ℝ → ℝ, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in ℝ^*$, $b \in ℝ$ e $c \in ℝ$.

- **Domínio = ℝ**
- **Contradomínio = ℝ**
- **Conjunto-imagem (ver mais adiante)**

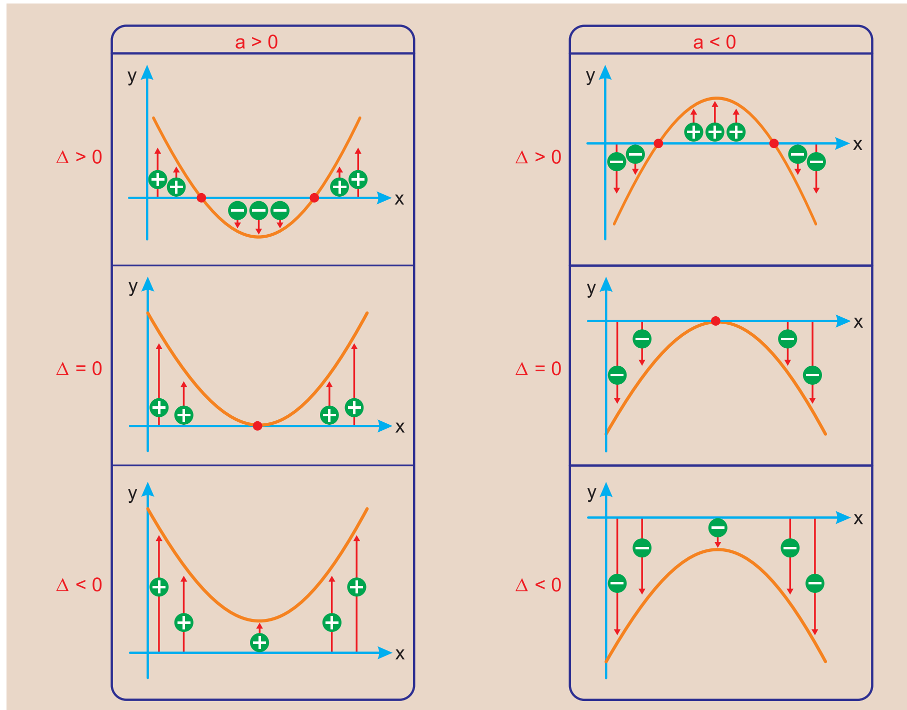
### Raízes reais de f

Se V é o conjunto-verdade de f(x) = 0, em ℝ, e $\Delta = b^2 - 4ac$, então:

- $\Delta > 0 \Rightarrow V = \left\{ \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow V = \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow V = \varnothing$

### Gráfico

É sempre uma parábola, com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y. Conforme os sinais de a e Δ, podemos ter os seis seguintes tipos possíveis de gráficos.




## MÓDULO 15 Inequações do 2º Grau

### Definição

Chama-se inequação (desigualdade) do 2º grau, na variável real x, toda sentença que pode ser reduzida a uma das formas: $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, com a, b, c ∈ ℝ e $a \neq 0$.

**Resolução**

Resolver, em ℝ, uma inequação do 2º grau é determinar todos os valores da variável x que tornam a sentença verdadeira.

Sendo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, podemos analisar a variação de sinais da função e chegar à solução da seguinte maneira:

1º) Determinar as raízes reais de f, marcando esses valores no eixo x, das abscissas.

2º) Esboçar o gráfico que representa f (parábola) passando por esses pontos.

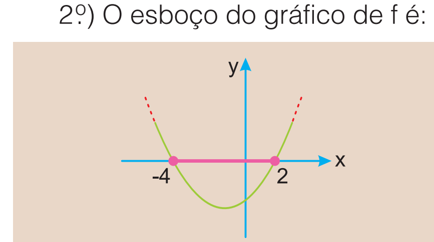
3º) Assinalar no eixo x os valores que satisfazem à sentença. Se a função não admitir raízes reais, então $f(x) > 0$ $\forall x \in ℝ$ para $a > 0$ ou $f(x) < 0$ $\forall x \in ℝ$ para $a < 0$.

**Exemplo**

O conjunto-solução da inequação $x^2 + 2x - 8 \leq 0$, em ℝ, é $V = \{x \in ℝ \mid -4 \leq x \leq 2\}$, pois, sendo $f(x) = x^2 + 2x - 8$, temos:

1º) As raízes de f são $x_1 = -4$ e $x_2 = 2$. Como $a > 0$ $(a = 1)$, então a parábola tem a "concavidade" voltada para cima.

2º) O esboço do gráfico de f é:




3º) Para $-4 \leq x \leq 2$, temos $f(x) \leq 0$.

## MÓDULO 16 Fatoração do Trinômio do 2º Grau

## 1. FATORAÇÃO

Se $x_1$ e $x_2$ são os zeros reais (raízes) de $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, então:

- $\Delta > 0 \Rightarrow f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- $\Delta = 0 \Rightarrow f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_1) = a(x - x_1)^2$
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ não existe fatoração em ℝ.

Observe que para $a \neq 0$ o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ é tal que

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a \cdot \left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] =$$

$$= a[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2] =$$

$$= a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)] =$$

$$= a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

**Exemplos**

1. Fatorar o trinômio:

$f(x) = 2x^2 - 9x + 4$

**Resolução**

As raízes de f são $x_1 = \dfrac{9+7}{4}$ e $x_2 = \dfrac{9-7}{4}$, isto é, $x_1 = 4$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

**Portanto**

$f(x) = 2x^2 - 9x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 2(x-4) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = (x-4) \cdot (2x-1)$

2. Fatorar o trinômio:

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

**Resolução**

As raízes de f são

$x_1 = x_2 = \dfrac{12 \pm 0}{8} = \dfrac{3}{2}$

Portanto, $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 =$

$= 4 \cdot \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) =$

$= 4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 2^2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 =$

$= \left[2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\right]^2 = (2x-3)^2$

3. Fatorar o trinômio

$f(x) = 3x^2 + 8x + 6$.

**Resolução**

Como $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 =$ $= 64 - 72 = -8 < 0$, concluímos que não existe, em $\mathbb{R}$, a fatoração de $f(x) = 3x^2 + 8x + 6$.

## MÓDULO 17 Inequações – Produto e Quociente

### Definição

Inequações-produto são sentenças na variável real x, que podem ser reduzidas a uma das formas:

$f(x) \cdot g(x) > 0$ ou $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \cdot g(x) < 0$ ou $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

No caso das inequações-quociente, ao invés de $f(x) \cdot g(x)$, temos

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$.

**Resolução**

Para resolver esses tipos de sentenças, pode-se analisar isoladamente a variação de sinais de f e g. Isso é feito interpretando-se o esboço do gráfico de cada uma. Em seguida, constrói-se um quadro de sinais através do qual se obtém a resposta.

Como o produto e o quociente de dois números reais não nulos têm o mesmo sinal, convém salientar que as inequações-quociente podem ser resolvidas usando-se uma das seguintes equivalências:

**$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$**

**$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $g(x) \neq 0$**

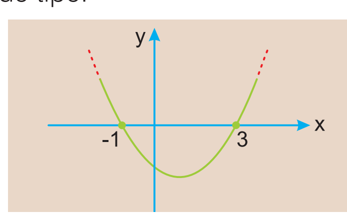
**$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$**

**$\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$ e $g(x) \neq 0$**

**Exemplos**

1º) $\dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

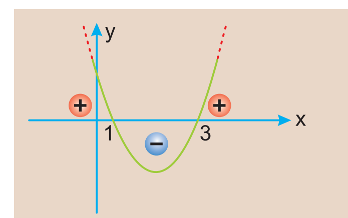
$\Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-3) \geqslant 0$ e $x \neq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leqslant -1$ ou $x > 3$, pois o gráfico de $f(x) = (x+1) \cdot (x-3)$ é do tipo:



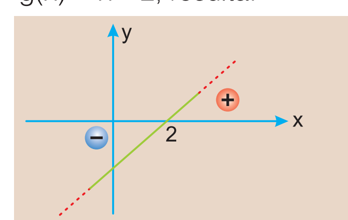

2º) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3) \cdot (x - 2) \leqslant 0$ e $x \neq 2$.

Esboçando-se o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$, resulta:




Esboçando-se o gráfico de $g(x) = x - 2$, resulta:




Construindo o quadro de sinais, temos:

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | + | – | – | + |
| g(x) | – | – | + | + |
| f(x).g(x) | – | + | – | + |

O conjunto-verdade, em $\mathbb{R}$, da inequação é, portanto,

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x \leqslant 3\}$

## MÓDULOS 18 e 19 Conjunto Imagem da Função do 2º Grau e Sinal de Raízes

### 1. VÉRTICE DA PARÁBOLA

Vértice é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a} ; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

### Eixo de simetria da parábola

Eixo de simetria é a reta de equação $x = \dfrac{-b}{2a}$.

**❑ Conjunto Imagem de $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$**

$$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}, \text{ se } a > 0.$$

ou

$$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}, \text{ se } a < 0.$$

## 2. SINAL DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

Lembrando que se $x_1$ e $x_2$ são raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, então:

$$\boxed{x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}} \quad e \quad \boxed{x_1 . x_2 = P = \frac{c}{a}},$$

temos, para $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $x_1 > 0$ e $x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

- $x_1 < 0$ e $x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

- $x_1$ e $x_2$ com sinais contrários $\Leftrightarrow \Leftrightarrow P < 0$.

# MÓDULO 20 — Função Exponencial

**❑ Definição**

É a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$.

- **Domínio = $\mathbb{R}$**
- **Conjunto-imagem = = Contradomínio = $\mathbb{R}_+^*$**

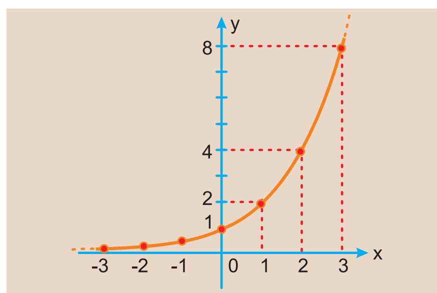
**Exemplos**

Esboçar o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2^x$.

**Resolução**

| x | $f(x) = 2^x$ |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| – 6 | 1/64 |
| – 5 | 1/32 |
| – 4 | 1/16 |
| – 3 | 1/8 |
| – 2 | 1/4 |
| – 1 | 1/2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| ⋮ | ⋮ |

A função exponencial de base $a > 1$ é estritamente crescente e contínua em $\mathbb{R}$. Assim, para $f(x) = 2^x$, temos o esboço:



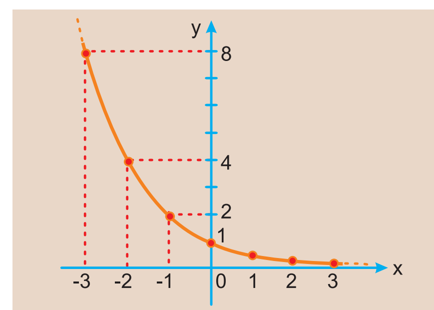

Esboçar o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

**Resolução**

| x | $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| – 6 | 64 |
| – 5 | 32 |
| – 4 | 16 |
| – 3 | 8 |
| – 2 | 4 |
| – 1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1/2 |
| 2 | 1/4 |
| 3 | 1/8 |
| 4 | 1/16 |
| 5 | 1/32 |
| 6 | 1/64 |
| ⋮ | ⋮ |

A função exponencial de base **a**, com $0 < a < 1$, é estritamente decrescente e contínua em $\mathbb{R}$.

Assim, para $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos o esboço:




**Resumo**

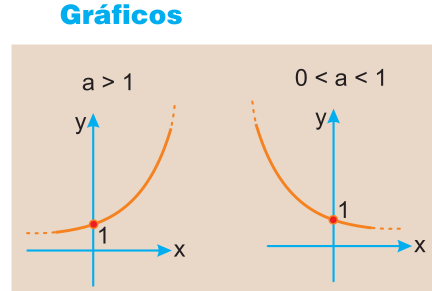
A função exponencial assim definida é:

| |
|---|
| **Injetora e Sobrejetora (Bijetora)** |
| **Estritamente Crescente, se a > 1** |
| **Estritamente Decrescente, se 0 < a < 1** |

**Conclusões**

| |
|---|
| $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, se $0 < a \neq 1$ |
| $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, se $a > 1$ |
| $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, se $0 < a < 1$ |

**Gráficos**



# MÓDULO 1 — Definição e Propriedades de Conjuntos

## 1. PRIMEIROS CONCEITOS

### • Conceitos primitivos

Se A é um conjunto e x é um elemento,

"$x \in A$" significa "x é elemento de A"
"$x \notin A$" significa "x não é elemento de A"

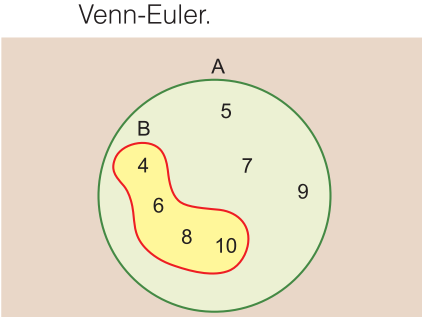
**Exemplo**

Seja A o conjunto dos números naturais maiores que 3 e menores que 11 e seja B o conjunto formado pelos elementos de A que são pares. Represente os conjuntos A e B, simbolicamente:

I) enumerando, um a um, os seus elementos;
$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$B = \{4, 6, 8, 10\}$

II) caracterizando seus elementos por uma propriedade;
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 11\}$
$B = \{x \in A \mid x \text{ é par}\}$

III) construindo diagramas de Venn-Euler.




### • Conjunto Vazio

Se, para TODO x, tem-se $x \notin A$, diz-se que A é o CONJUNTO VAZIO. Usa-se o símbolo Ø para indicar o conjunto vazio.

$$A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x, x \notin A$$

**Exemplo**

$\varnothing = \{x : x$ é um número inteiro e $3x + 1 = 2\}$

## 2. SUBCONJUNTO OU PARTE

### • Definição

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A é também elemento de B, dizemos que A é um SUBCONJUNTO ou PARTE de B e indicamos por $A \subset B$.

Em símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x), (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x), (x \in A \text{ e } x \notin B)$$

**Exemplo**

$\{1; 3\} \subset \{1; 2; 3\}$

### • Consequências

I) $\forall A, A \subset A$
II) $\forall A, \varnothing \subset A$

**Exemplo**

$\{5; 6\} \subset \{5; 6\}$
$\varnothing \subset \{5; 6\}$

## 3. IGUALDADE DE CONJUNTOS

### • Definição

Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é igual a B e indicamos por A = B se, e somente se, A é subconjunto de B e B é também subconjunto de A.

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$
$$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A$$

**Exemplo**

$\{2, 2, 2, 4\} = \{4, 2\}$, pois
$\{2, 2, 2, 4\} \subset \{4, 2\}$ e
$\{4, 2\} \subset \{2, 2, 2, 4\}$

### • Propriedades da inclusão

I) Reflexiva
$\forall A, A \subset A$

II) Antissimétrica
$\forall A, \forall B, A \subset B \text{ e } B \subset A \Rightarrow$
$\Rightarrow A = B$

III) Transitiva
$\forall A, \forall B, \forall C, A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subset C$

### • Propriedades da igualdade

I) Reflexiva
$\forall A, A = A$

II) Simétrica
$\forall A, \forall B; A = B \Rightarrow B = A$

III) Transitiva
$\forall A, \forall B, \forall C; A = B \text{ e } B = C \Rightarrow$
$\Rightarrow A = C$

## 4. CARACTERÍSTICAS GERAIS DOS CONJUNTOS

Se A é um conjunto e x é um elemento, então:

- $\forall A, A \notin A$
- $\forall A, A \subset A$
- $\forall A, \varnothing \subset A$
- $\forall x, x \notin \varnothing$
- $\forall x, x \neq \{x\}$
- $\forall A, A \neq \{A\}$
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

## 5. CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

### • Definição

Dado um conjunto A, podemos construir um novo conjunto formado por todos os subconjuntos (partes) de A. Esse novo conjunto chama-se CONJUNTO DOS SUBCONJUNTOS (ou das partes) de A e é indicado por $\mathbb{P}(A)$.

Em símbolos:

$$\mathbb{P}(A) = \{x \mid x \subset A\}$$
$$x \in \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow x \subset A$$

**Exemplo**

$A = \{1, 2, 3\}$
$\mathbb{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\},$
$\{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

### • Teorema

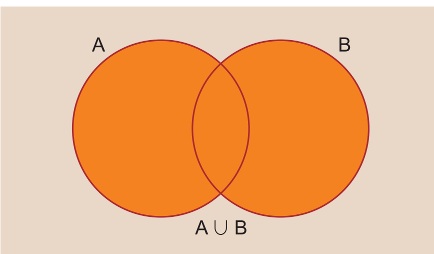
Se A tem k elementos, então $\mathbb{P}(A)$ tem $2^k$ elementos.

## 1. REUNIÃO OU UNIÃO

Dados dois conjuntos A e B, chama-se REUNIÃO (ou UNIÃO) de A e B, e se indica por $A \cup B$, ao conjunto formado pelos elementos de A ou de B.

Em símbolos

$$\mathbf{A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}}$$




**Exemplo**

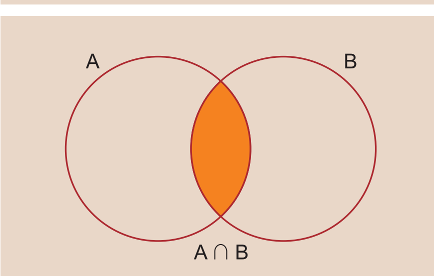
$\{ 2, 3 \} \cup \{ 4, 5, 6 \} = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$

## 2. INTERSECÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, chama-se INTERSECÇÃO de A e B, e se indica por $A \cap B$, ao conjunto formado pelos elementos comuns de A e de B.

Em símbolos

$$\mathbf{A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}}$$

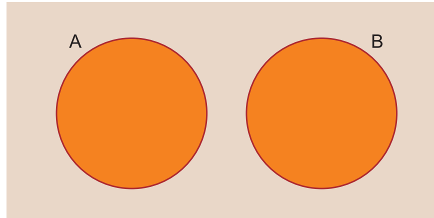



**Exemplo**

$\{ 2, 3, 4 \} \cap \{ 3, 5 \} = \{ 3 \}$

**Observação**

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são CONJUNTOS DISJUNTOS.

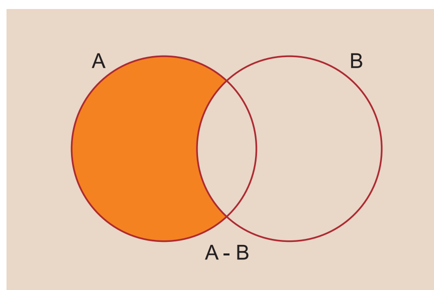



## 3. SUBTRAÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, chama-se DIFERENÇA entre A e B, e se indica por $A - B$, ao conjunto formado pelos elementos que são de A e não são de B.

Em símbolos

$$\mathbf{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}}$$




O conjunto $A - B$ é também conhecido por CONJUNTO COMPLEMENTAR de B em relação a A e, para tal, usa-se a notação $\complement_A B$.

Portanto:

$\complement_A B = A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$

**Exemplo**

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 0, 2 \}$

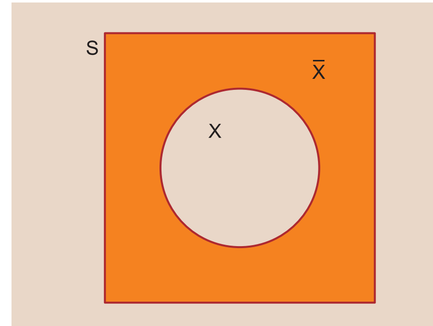
$\complement_A B = A - B = \{ 1, 3 \}$ e

$\complement_B A = B - A = \varnothing$

Se $X \subset S$, indicaremos por $\overline{X}$ o CONJUNTO COMPLEMENTAR de X em relação a S.

Portanto:

$$\mathbf{X \subset S \Rightarrow \overline{X} = S - X = \complement_S X}$$




**Exemplo**

Seja $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Então:

$A = \{ 2, 3, 4 \} \Rightarrow \overline{A} = \{ 0, 1, 5, 6 \}$

- **Propriedades**

Sejam A e B subconjuntos de S e

$\overline{A} = \complement_S A$ e $\overline{B} = \complement_S B$

I) $\complement_A A = \varnothing$

II) $\complement_A \varnothing = A$

III) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

IV) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

V) $A \cup \overline{A} = S$

VI) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

VII) $\overline{\overline{A}} = A$

VIII) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

## 4. NÚMERO DE ELEMENTOS DE UM CONJUNTO FINITO

Seja A um conjunto com um número finito de elementos. Indicaremos por n(A) o número de elementos de A. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Valem as seguintes propriedades:

- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $B \subset A \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(B)$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $n(A) = k \Rightarrow n[\,\mathbb{P}(A)\,] = 2^k$

## 1. PRODUTO CARTESIANO

### • Par ordenado

O conceito de PAR ORDENADO é PRIMITIVO. A cada elemento **a** e a cada elemento **b** está associado um **único** elemento indicado por (a; b) e chamado PAR ORDENADO, de tal forma que se tenha:

$(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

Dado o PAR ORDENADO (a; b), diz-se que **a** é o PRIMEIRO ELEMENTO e **b** é o SEGUNDO ELEMENTO do par ordenado (a; b).

### • Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, chama-se PRODUTO CARTESIANO de A por B, e indica-se por A x B, ao conjunto formado por **todos** os PARES ORDENADOS (x; y), com $x \in A$ e $y \in B$.

Em símbolos

$$A \times B = \{ (x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, por definição, $A \times B = \varnothing$ e reciprocamente.

Em símbolos

$$A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing \Leftrightarrow A \times B = \varnothing$$

**Nota:** Se A = B, em vez de A x A, escreveremos $A^2$.

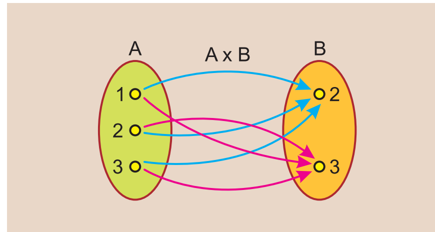
### • Representação gráfica do produto cartesiano

O PRODUTO CARTESIANO de dois conjuntos não vazios pode ser representado graficamente por DIAGRAMAS DE FLECHAS ou por DIAGRAMAS CARTESIANOS.

Por exemplo, se A = {1, 2, 3} e B = {2, 3}, então A x B = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3,3)}, cujas representações podem ser dadas por:

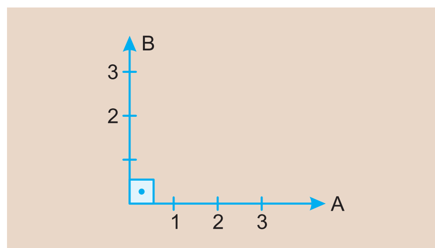
***I) Diagrama de flechas***

Consideramos de um lado o conjunto A e de outro de B e representamos cada PAR ORDENADO por uma FLECHA, adotando a seguinte convenção: a flecha parte do primeiro elemento do par ordenado e chega ao segundo. Assim:

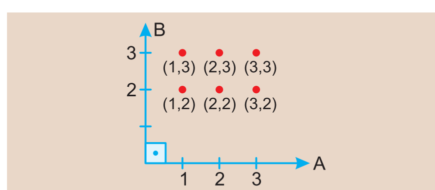



***II) Diagrama cartesiano***

Tomamos dois eixos ortogonais e representamos sobre o eixo horizontal os elementos de A e sobre o eixo vertical os elementos de B.




Traçamos, por estes elementos, paralelas aos eixos considerados.




As intersecções dessas paralelas representam, assim, os pares ordenados de A x B.

### • Número de elementos de um produto cartesiano

**Teorema:** Se A tem **m** elementos e B tem **k** elementos, então A x B tem **m.k elementos**.

## 2. RELAÇÃO BINÁRIA

### • Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação binária de A em B a qualquer subconjunto f de A x B**.

Então:

$$f \text{ é uma RELAÇÃO BINÁRIA DE A EM B} \Leftrightarrow f \subset A \times B$$

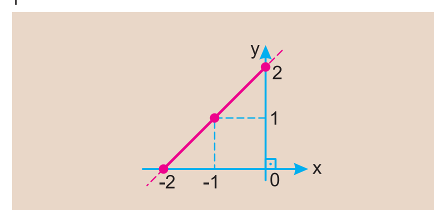
### • Representação gráfica de uma relação

Sendo a RELAÇÃO BINÁRIA um conjunto de pares ordenados, podemos representá-lo graficamente como já o fizemos com o produto cartesiano.

**Exemplo**

Se $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e

$f = \{(x ; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 2\}$, então $f = \{...(0, 2), (-2, 0), (1, 3), (-1, 1), ... \} \subset \mathbb{R}^2$ e o gráfico de f no plano euclidiano (cartesiano) é uma reta que passa por dois desses pontos.




## 3. FUNÇÕES

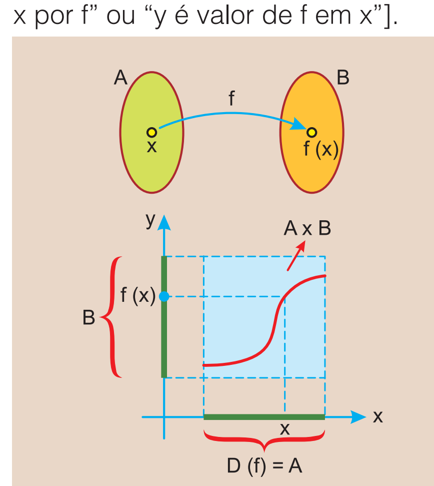
### ❑ Definições

Seja f uma RELAÇÃO BINÁRIA DE A EM B. Diz-se que f é uma APLICAÇÃO DE A EM B ou que f é uma FUNÇÃO DEFINIDA EM A COM VALORES EM B se, e somente se:

I) TODO $x \in A$ se relaciona com ALGUM $y \in B$.

II) CADA $x \in A$ que se relaciona, relaciona-se com um ÚNICO $y \in B$.

Se $(x, y) \in f$, então y se chama IMAGEM DE x PELA APLICAÇÃO f ou, ainda, VALOR DE f EM x e, em ambos os casos, indicaremos este fato por y = f(x) [lê-se: "y é imagem de x por f" ou "y é valor de f em x"].



Seja f a função definida em $\mathbb{R}^*$ com valores em $\mathbb{R}^*$, tal que $y = \frac{1}{x}$, ou seja, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Portanto:

- $f = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mid y = \frac{1}{x}\right\}$

- a imagem de 2 por f é $f(2) = \frac{1}{2}$

- a imagem de – 1 por f é $f(-1) =$

$= \frac{1}{-1} = -1$

- a imagem de x + 3 por f é $f(x + 3) =$

$= \frac{1}{x + 3}$

- $f(x + h) = \frac{1}{x + h}$

## • Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Se f é uma APLICAÇÃO ou FUNÇÃO de A em B, então:

I) O conjunto de partida A passa a ser chamado DOMÍNIO DA APLICAÇÃO f e é indicado por D(f).

Assim: D(f) = A

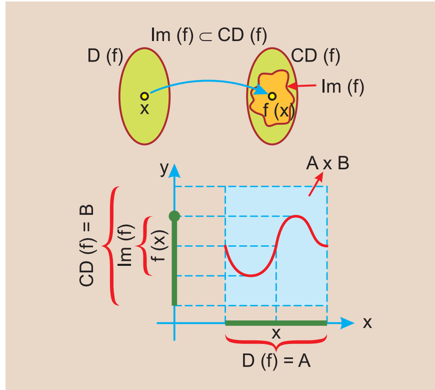
II) O conjunto de chegada B será chamado CONTRADOMÍNIO DA APLICAÇÃO f e é denotado por CD(f). Logo, CD(f) = B.

III)O conjunto de todos os elementos y de B para os quais existe, pelo menos, um elemento x de A, tal que f(x) = y, é denominado IMAGEM DA APLICAÇÃO f e é indicado por Im(f).

Assim:

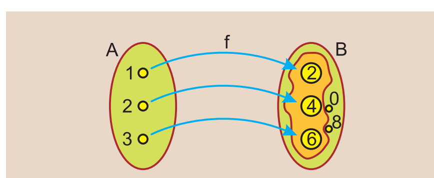
$$\mathbf{Im(f) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}}$$

Pela própria definição de Im(f) decorre que:




Sejam A = {1, 2, 3} e B = {0, 2, 4, 6, 8} e seja f a função de A em B, tal que y = 2x, ou seja, f(x) = 2x. Então:

- $f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = 2x\} =$
  $= \{(x, f(x)) \in A \times B \mid f(x) = 2x\}$
  $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$




- $D(f) = A = \{1, 2, 3\}$
- $CD(f) = B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- $Im(f) = \{2, 4, 6\} \subset CD(f)$

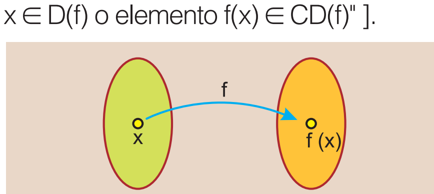
## • Notações

Indicaremos uma APLICAÇÃO f DE DOMÍNIO A e CONTRADOMÍNIO B por uma das notações:

$$\mathbf{f : A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B}$$

Quando não houver dúvidas sobre o DOMÍNIO, o CONTRADOMÍNIO e a definição de f(x), num elemento qualquer x do DOMÍNIO de f, usaremos a notação:

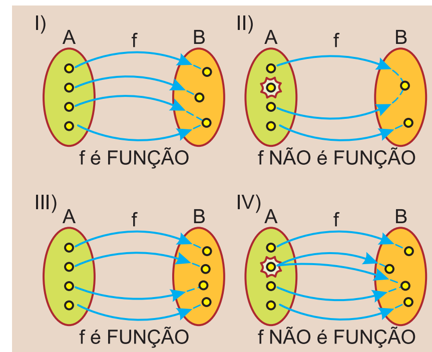
$f : x \to f(x)$: [lê-se "f associa a cada $x \in D(f)$ o elemento $f(x) \in CD(f)$" ].




## • Representação gráfica de uma função

### I) Diagramas de flechas

Uma RELAÇÃO f DE A EM B é uma FUNÇÃO se, e somente se, cada elemento x de A se relaciona com um único elemento y de B, o que equivale dizer que: "de cada elemento x de A parte uma única flecha".



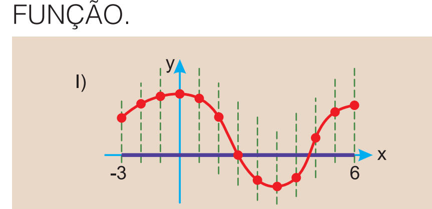

### II) Diagrama cartesiano (Gráfico)

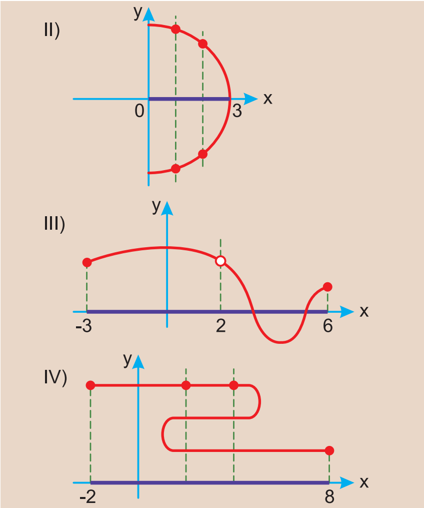
Seja f uma RELAÇÃO BINÁRIA DE $A \subset \mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$ e consideremos o seu GRÁFICO CARTESIANO.

Então, f é uma FUNÇÃO DEFINIDA em A COM VALORES EM $\mathbb{R}$ se, e somente se, toda reta paralela ao eixo Oy, que passa por um ponto de abscissa $x \in A$, "corta" o gráfico f num único ponto.

Portanto, a RELAÇÃO f de $A \subset \mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$ NÃO é FUNÇÃO se, e somente se, existe, pelo menos, uma reta paralela ao eixo Oy que passa por um ponto de abscissa $x \in A$ e tal que ou intercepta o gráfico em mais de um ponto, ou não o intercepta.

Por exemplo, no gráfico III, a reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto de abscissa $2 \in A$ não intercepta o gráfico f, logo f não é FUNÇÃO definida em A com valores em $\mathbb{R}$. No entanto, se restringirmos A ao conjunto $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 2 \text{ ou } 2 < x \leqslant 6\}$, então a RELAÇÃO DE A' EM $\mathbb{R}$ é uma FUNÇÃO.






### III) Domínio e imagem através do gráfico

Um outro problema comum é o da determinação do DOMÍNIO e da IMAGEM DE UMA FUNÇÃO f pelo gráfico. De acordo com as definições e comentários feitos até aqui, dado o gráfico de uma FUNÇÃO f, temos:

- D(f) é conjunto **de todas as abscissas** dos pontos do **eixo tais que as retas** verticais por eles traçadas interceptam o gráfico de f.

- Im(f) é o conjunto **de todas as ordenadas** dos pontos do **eixo Oy tais que as retas** horizontais por eles traçadas interceptam o gráfico de f.

Em outras palavras:

- D(f) é o conjunto **de todos os pontos do eixo Ox que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.**

- Im(f) é conjunto **de todos os pontos do eixo Oy que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.**

## MÓDULOS 4 e 5 — Domínio, Contradomínio e Imagem

### 1. CONVENÇÕES

A função f de A em B fica determinada se especificarmos o domínio A, o contradomínio B e o subconjunto f de A x B que satisfaz as propriedades que definem a função. Em geral, o subconjunto f de A x B é substituído pela sentença aberta de duas variáveis que o define (y = f(x)).

Quando dissermos "consideremos a função definida por y = f(x)" ou "seja a função tal que $x \to f(x)$", fica convencionado, salvo menção em contrário, que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio de f é o "mais amplo" subconjunto de $\mathbb{R}$, para o qual tem sentido a sentença aberta y = f(x).

### 2. EXEMPLO

Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$. Como não foi mencionado o contradomínio, subentende-se que $B = CD\,(f) = \mathbb{R}$. Se $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3} \in \mathbb{R}$, então $x - 3 \neq 0$ e $x - 2 \geqslant 0$, pois em $\mathbb{R}$ não se define a divisão por zero e a raiz quadrada aritmética só tem sentido se o radicando for maior ou igual a zero. Assim,
$A = D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$ e a
imagem $Im(f) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A, \text{ tal que } y = f(x)\}$.

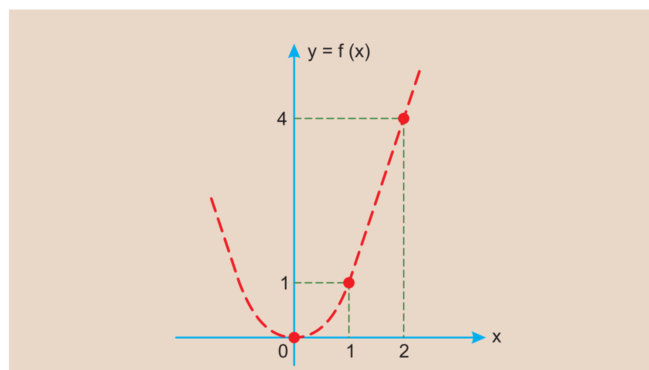
### 3. DOMÍNIO E IMAGEM PELO GRÁFICO

O domínio D(f) é o conjunto de todos os pontos do eixo Ox que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

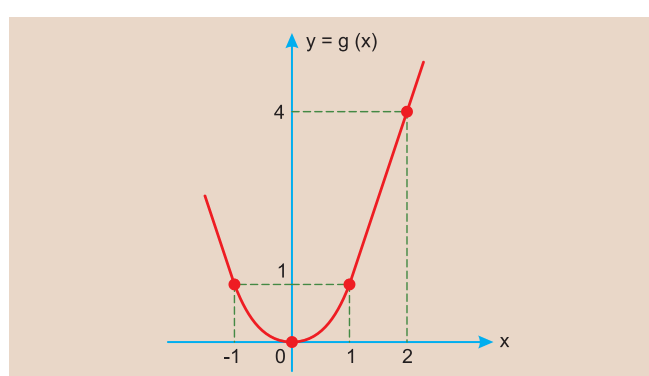
A imagem Im(f) é o conjunto de todos os pontos do eixo Oy que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

### 4. EXEMPLOS

Sejam as funções f; $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, tal que $g(x) = x^2$.




**D(f) = $\mathbb{N}$**
**CD(f) = $\mathbb{R}$**
**Im(f) = {0, 1, 4, 9, ...} = {y = n$^2$, com n $\in \mathbb{N}$}**




**D(g) = $\mathbb{R}$**
**CD(g) = $\mathbb{R}_+$**
**Im(g) = {y = x$^2$, com x $\in \mathbb{R}$} = $\mathbb{R}_+$**

## 1. FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função f : A → B é **sobrejetora** se, e somente se, para **todo** elemento y de B existe **pelo menos** um elemento x de A, tal que y = f(x).

Assim,
f : A → B é SOBREJETORA ⇔
⇔ Im(f) = CD (f).

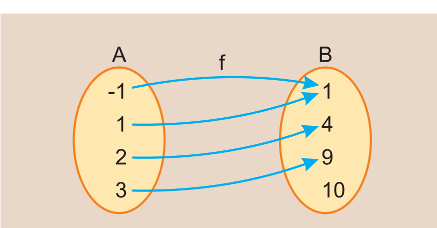
Quanto à representação gráfica:

• f : A → B é sobrejetora se, e somente se, **todo** elemento y ∈ B é atingido por **pelo menos** uma flecha.

• f : A → B é sobrejetora se, e somente se, a reta paralela ao eixo Ox, passando por **todo** ponto de ordenada y ∈ B, intercepta o gráfico de f **pelo menos** uma vez.

**Exemplo**

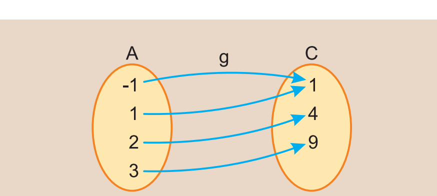
Se A = {–1, 1, 2, 3}, B = {1, 4, 9, 10} e C = {1, 4, 9}, então a função f : A → B, definida por y = f(x) = $x^2$, **não é sobrejetora** e a função g : A → C, definida por y = g(x) = $x^2$, **é sobrejetora**.




D(f) = A

CD(f) = B

Im(f) = {1, 4, 9} ≠ CD(f)




D(g) = A
CD(g) = C = Im(g)

## 2. FUNÇÃO INJETORA

Uma função f : A → B é **injetora** se, e somente se, **elementos distintos** de A têm **imagens distintas** em B.

f : A → B é INJETORA ⇔

⇔ (∀x, x' ∈ A), (x ≠ x' ⇒

⇒ f(x) ≠ f(x')), ou, ainda,

f : A → B é INJETORA ⇔

⇔ (∀x, x' ∈ A), (f(x) = f(x') ⇒

⇒ x = x').

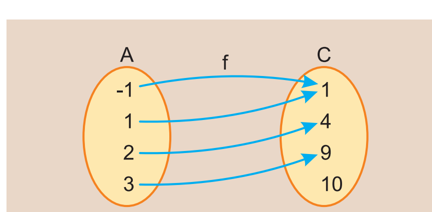
Nos diagramas de flechas e nos gráficos cartesianos:

• f : A → B é injetora se, e somente se, **cada** elemento y ∈ B é atingido **no máximo** por uma flecha.

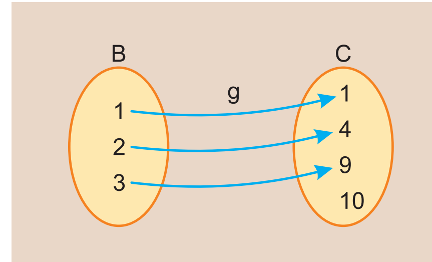
• f : A → B é injetora se, e somente se, a reta paralela ao eixo Ox, passando por **cada** ponto de ordenada y ∈ B, intercepta o gráfico de f, **no máximo**, uma vez.

**Exemplo**

Se A = {–1, 1, 2, 3}, B = {1, 2, 3} e C = {1, 4, 9, 10}, então a função f : A → C, definida por y = f(x) = $x^2$, **não é injetora** e a função g : B → C, definida por y = g(x) = $x^2$, **é injetora**.




f(1) = f(–1) e 1 ≠ –1




g(1) ≠ g(2)

g(2) ≠ g(3)

g(1) ≠ g(3)

## 3. FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f : A → B é **bijetora** se, e somente se, f é **sobrejetora** e **injetora**, ou, em outras palavras, se para **cada** elemento y ∈ B existe um **único** elemento x ∈A, tal que y = f(x).

Assim:
f : A → B é BIJETORA ⇔
⇔ f : A → B é SOBREJETORA E INJETORA.

Quanto à representação:

• f : A → B é bijetora se, e somente se, **cada** elemento y ∈ B é atingido por **uma única** flecha.

• f : A → B é bijetora se, e somente se, a reta paralela ao eixo Ox, passando por **cada** ponto de ordenada y ∈ B, intercepta o gráfico de f uma **única** vez.

**Exemplo**

Se A = {1, 2, 3} e B = {1, 4, 9}, então a função f : A → B, definida por y = f(x) = $x^2$, **é bijetora**.

Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $x_1$ e $x_2$ dois elementos quaisquer do intervalo $[a, b] \subset A$.

## 1. FUNÇÃO ESTRITAMENTE CRESCENTE

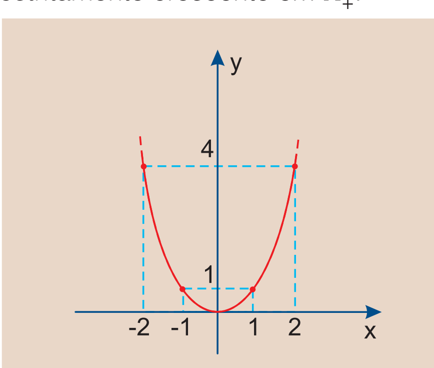
Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função **estritamente crescente** em $[a, b]$ se, e somente se, $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

## 2. FUNÇÃO ESTRITAMENTE DECRESCENTE

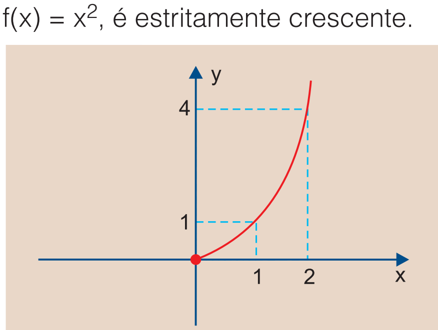
Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função **estritamente decrescente** em $[a, b]$ se, e somente se, $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

### Exemplo

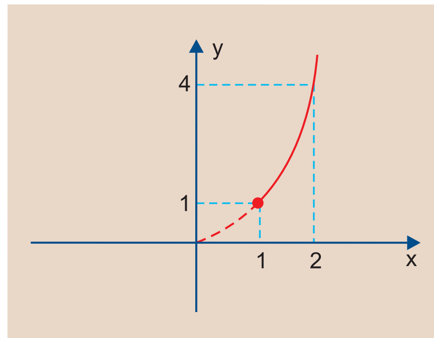
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$, não é monotônica, pois é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_-$ e é estritamente crescente em $\mathbb{R}_+$.



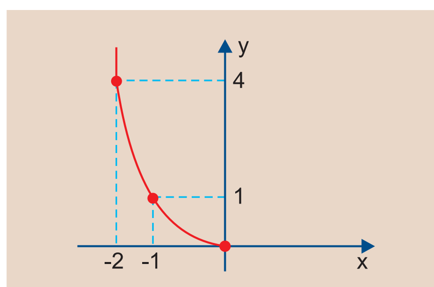

- A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$, é estritamente crescente.




- A função $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$, é estritamente crescente.




- A função $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$, é estritamente decrescente.




## 3. FUNÇÃO CRESCENTE

Uma função $f : A \to B$ é **crescente** em $[a, b]$ se, e somente se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

## 4. FUNÇÃO DECRESCENTE

Uma função $f : A \to B$ é **decrescente** em $[a, b]$ se, e somente se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

## 5. FUNÇÃO CONSTANTE

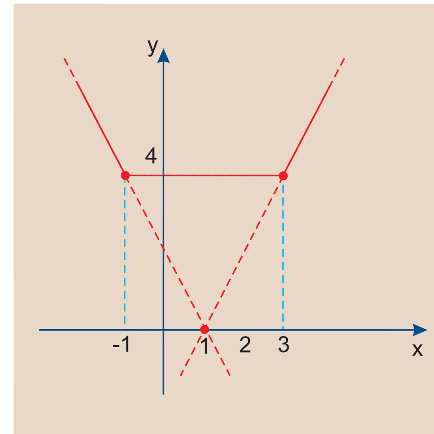
Uma função $f : A \to B$ é **constante** em $[a, b]$ se, e somente se,

$$f(x_1) = f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

### Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 4, \text{ se } -1 < x < 3 \\ 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$




- f não é monotônica.
- f é crescente em $[1; +\infty[$, por exemplo.
- f é decrescente em $]-\infty; 2]$, por exemplo.
- f é constante em $[-1; 3]$, por exemplo.
- A função $f : \{x \in \mathbb{R} / x > -1\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } -1 < x < 3 \\ 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$, é crescente.
- A função $f : \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 3\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x - 2$, é estritamente crescente.
- A função $f : \{x \in \mathbb{R} / x \leqslant -1\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -2x + 2$, é estritamente decrescente.

• A função f : $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 3\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 4, \text{ se } -1 < x < 3 \end{cases}$, é decrescente.

• A função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = 4, é constante.

## 6. FUNÇÃO PAR

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é par se, e somente se, $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.

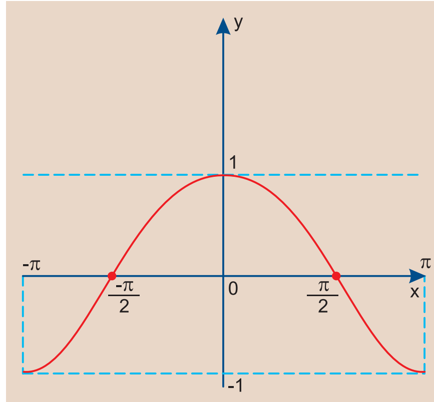
Assim,

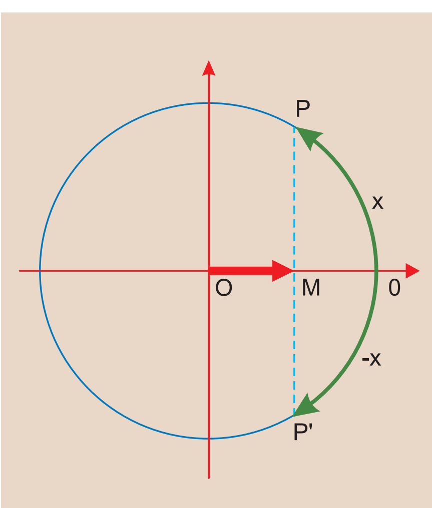
$f : A \to \mathbb{R}$ é **PAR ⇔ f(–x) = f(x)**, $\forall x \in A$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.

### Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função, tal que f(x) = cos x (função cosseno).




Temos:

f(x) = cos x = OM

f(-x) = cos(–x) = OM

Assim, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, f é uma **função par**.

## 7. FUNÇÃO ÍMPAR

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Assim,

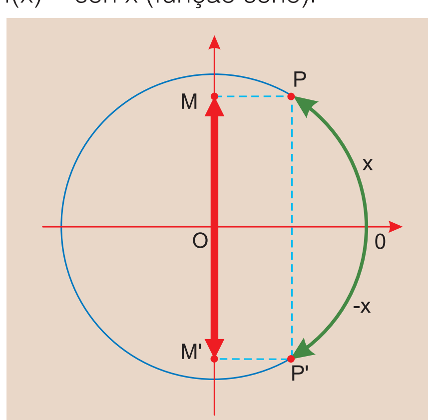
$f : A \to \mathbb{R}$ é **ÍMPAR ⇔**

**⇔ f(–x) = – f(x)**, $\forall x \in A$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.

### Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função, tal que f(x) = sen x (função seno).




Temos:

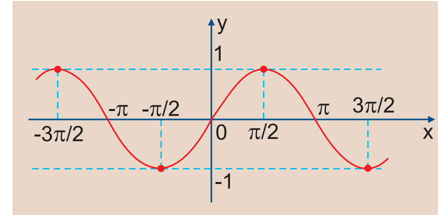
f(x) = sen x = OM

f(– x) = sen(– x) = OM'

Como $|OM| = |OM'|$ e OM = – OM',

então $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, f é uma **função ímpar**.




## 8. FUNÇÃO PERIÓDICA

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

### ❑ Definição

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é **periódica** se, e somente se, **existe** $p \in \mathbb{R}^*$, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo x em A.

### ❑ Propriedade

Se $f(x + p) = f(x)$, para todo x em A, então $f(x + k \,.\, p) = f(x)$, para todo x em A, em que $k \in Z^*$.

### ❑ Período

Se f é uma **função periódica**, então o **menor** valor **estritamente positivo** de p chama-se **período de** f e é indicado por P(f).

### Exemplo

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que f(x) = sen x. Então $f(x + k \,.\, 2\pi) = f(x)$, para todo x em $\mathbb{R}$, em que $k \in Z$. Portanto, f é **periódica** de **período** $2\pi$.

## 9. FUNÇÃO LIMITADA

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.

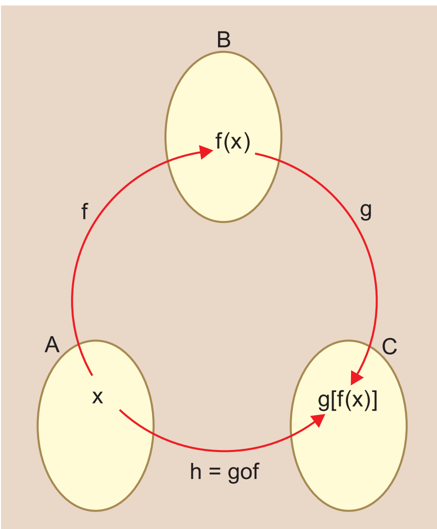
Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma **função limitada**, então **existe** $M \in \mathbb{R}^*_+$, tal que $|f(x)| \leqslant M$, para todo x em A e reciprocamente.

### Exemplo

Se $f : A \to \mathbb{R}$, tal que f(x) = sen x; como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; então $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja: f é limitada (o mesmo para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = cos x).

Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ duas funções.

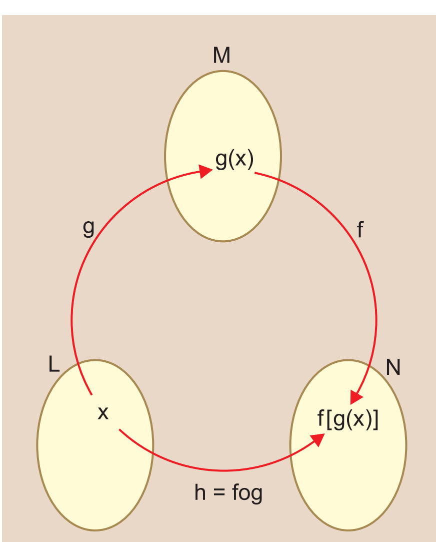
Chama-se composta de g com f a função $h : A \rightarrow C$, tal que $h(x) = g[f(x)]$.




Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : L \rightarrow M$.

Chama-se composta de f com g a função

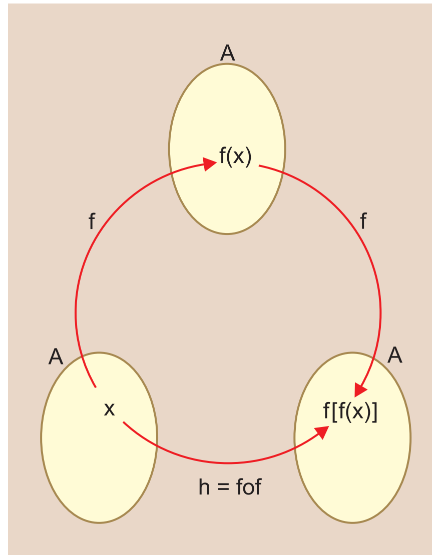
$h : L \rightarrow N$, tal que $h(x) = f[g(x)]$.




Seja $f : A \rightarrow A$.

Chama-se composta de f com f a função

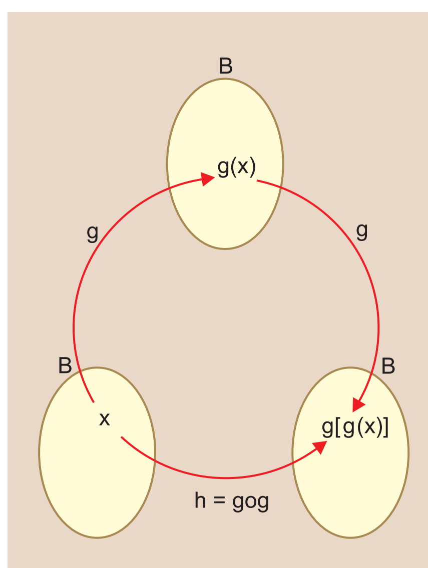
$h : A \rightarrow A$, tal que $h(x) = f(f(x))$.




Seja $g : B \rightarrow B$.

Chama-se composta de g com g a função

$h : B \rightarrow B$, tal que $h(x) = g(g(x))$.




### Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3$. É claro que neste caso estão definidas as funções compostas gof, fog, gog e fof e, além disso:

$gof : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $fog : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $gog : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $fof : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Assim sendo,

- $(gof)(x) = g[f(x)] =$
  $= (f(x))^2 + 3 =$
  $= (x + 1)^2 + 3 =$
  $= (x^2 + 2x + 1) + 3 =$
  $= x^2 + 2x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$

- $(fog)(x) = f[g(x)] =$
  $= g(x) + 1 =$
  $= x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$

- $(fof)(x) = f[f(x)] =$
  $= f(x) + 1 = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

- $(gog)(x) = g[g(x)] =$
  $= \big(g(x)\big)^2 + 3 = (x^2 + 3)^2 + 3 =$
  $= (x^4 + 6x^2 + 9) + 3 =$
  $= x^4 + 6x^2 + 12, \forall x \in \mathbb{R}$

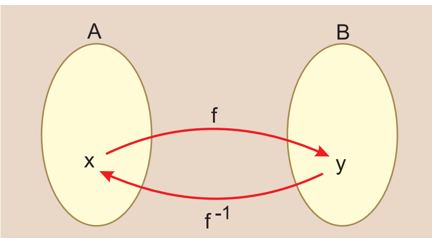
| |
|---|
| **gof:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>**(gof) (x)** $= x^2 + 2x + 4; \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **fof:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>**(fof)(x)** $= x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **fog:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>**(fog)(x)** $= x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **gog:** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$<br>**(gog)(x)** $= x^4 + 6x^2 + 12, \forall x \in \mathbb{R}$ |

Seja $f : A \to B$ uma função.

Se existir uma função $g : B \to A$, tal que:

- $gof = id_A$
- $fog = id_B$

dizemos que $g : B \to A$ é a função inversa da função $f : A \to B$ e se indica por $f^{-1}$.




$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

## 1. TEOREMA

$f : A \to B$ é inversível $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ f é bijetora.

## 2. PROPRIEDADES

- $f^{-1}of = id_A$
- $fof^{-1} = id_B$
- $fog = id_B$ e $gof = id_A \Rightarrow g = f^{-1}$
- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
- Os gráficos de f e $f^{-1}$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º).

## 3. REGRA PRÁTICA

Dada uma função bijetora $f : A \to B$, a sua função inversa será a função $f^{-1}: B \to A$, cuja sentença é assim obtida:

1º) substitui-se, na sentença de f, f(x) por y;
2º) isola-se x num dos membros;
3º) substitui-se na nova sentença x por $f^{-1}(y)$.

### Exemplo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 3$. Como f é bijetora, ela é inversível. Determinemos a sua função inversa.

Pela **regra prática**, temos:

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e, além disso:

$$f(x) = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+3}{3}$$

Portanto,

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{3}$$

ou, ainda:

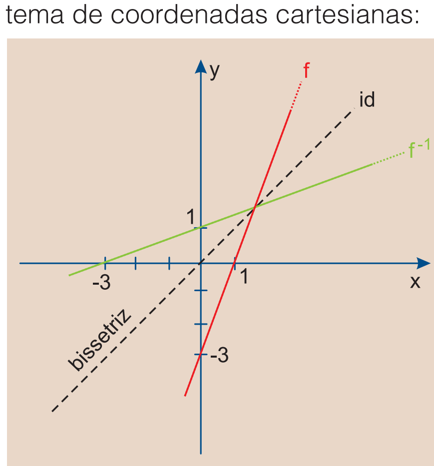
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{3}$$

| | |
|---|---|
| **$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$** | **$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$** |
| **$f(x) = 3x - 3$** | **$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{3}$** |

Notemos que os gráficos de f e $f^{-1}$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes (gráfico da função identidade id).

Façamos, agora, a construção dos gráficos de f e de $f^{-1}$ num só sistema de coordenadas cartesianas:




Consideremos a função $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = x^2$. Como g é bijetora, ela é inversível. Determinemos a sua função inversa.

Pela **regra prática**, temos:

$$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$$

e além disso:

$$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

Portanto,

$$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$$

$$g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

ou, ainda:

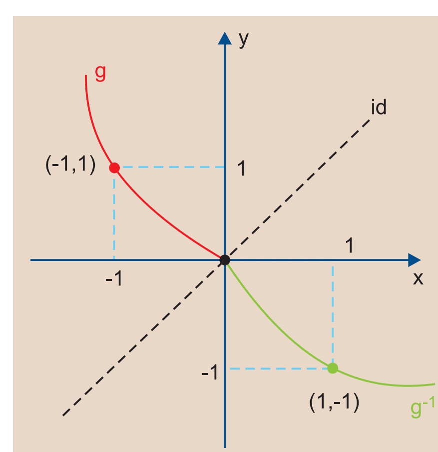
$$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$$

$$g^{-1}(x) = -\sqrt{y}$$

| | |
|---|---|
| **$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$** | **$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$** |
| **$g(x) = x^2$** | **$g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$** |

Notemos que os gráficos de g e $g^{-1}$ são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes (gráfico da função identidade id).

Façamos, agora, a construção dos gráficos de g e $g^{-1}$ num só sistema de coordenadas cartesianas.




Observemos que

$$(-1, 1) \in g \Leftrightarrow (1, -1) \in g^{-1}$$

$$D(g) = Im(g^{-1}) \text{ e } D(g^{-1}) = Im(g)$$

## MÓDULO 1 Funções Trigonométricas no Triângulo Retângulo

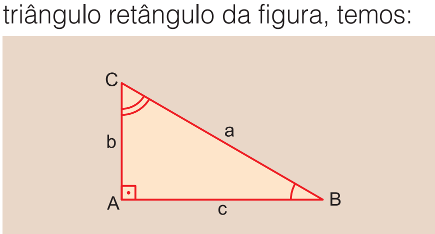
### 1. DEFINIÇÕES

Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Os outros ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos e complementares ($\hat{B} + \hat{C} = 90°$).

Para ângulos **agudos**, temos as seguintes definições das funções trigonométricas:

| | |
|---|---|
| **seno** | $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ |
| **cosseno** | $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ |
| **tangente** | $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ |
| **cotangente** | $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$ |
| **secante** | $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$ |
| **cossecante** | $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$ |

Com base nessas definições, no triângulo retângulo da figura, temos:




| | |
|---|---|
| $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b}{a}$ | $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a}$ |
| $\cos\hat{B} = \dfrac{c}{a}$ | $\cos\hat{C} = \dfrac{b}{a}$ |
| $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b}{c}$ | $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b}$ |
| $\text{cotg}\,\hat{B} = \dfrac{c}{b}$ | $\text{cotg}\,\hat{C} = \dfrac{b}{c}$ |
| $\sec\hat{B} = \dfrac{a}{c}$ | $\sec\hat{C} = \dfrac{a}{b}$ |
| $\text{cossec}\,\hat{B} = \dfrac{a}{b}$ | $\text{cossec}\,\hat{C} = \dfrac{a}{c}$ |

Observando que:

$$\text{sen}\,\hat{B} = \cos\hat{C}$$
$$\cos\hat{B} = \text{sen}\,\hat{C}$$

$$\text{tg}\,\hat{B} = \text{cotg}\,\hat{C}$$
$$\text{cotg}\,\hat{B} = \text{tg}\,\hat{C}$$

$$\sec\hat{B} = \text{cossec}\,\hat{C}$$
$$\text{cossec}\,\hat{B} = \sec\hat{C}$$

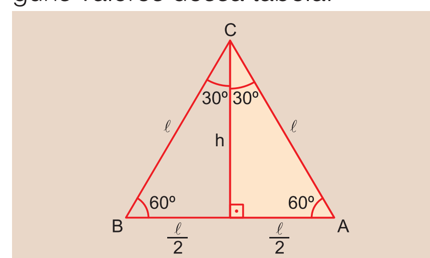
concluímos que as "**cofunções de ângulos complementares são iguais**".

### 2. VALORES NOTÁVEIS

A partir de triângulos retângulos convenientes, as definições de seno, cosseno e tangente permitem a obtenção do seguinte quadro de valores notáveis (decore-os).

| x | sen x | cos x | tg x |
|---|---|---|---|
| 30° | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

A seguir, temos a obtenção de alguns valores dessa tabela.




No triângulo equilátero de lado $\ell$, a altura vale $h = \dfrac{\ell\,.\,\sqrt{3}}{2}$, assim:

$$\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{\ell / 2}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{\ell . \sqrt{3} / 2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\ell / 2}{\ell\,.\,\sqrt{3} / 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\ell\,.\,\sqrt{3} / 2}{\ell / 2} = \sqrt{3}$$

## MÓDULO 2 Relações Fundamentais e Auxiliares

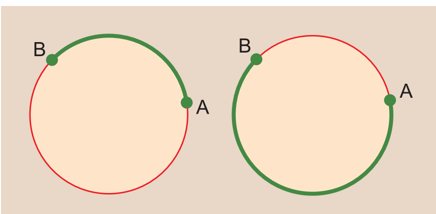
Seja **x** um ângulo agudo num triângulo retângulo. De acordo com as definições das funções trigonométricas, podemos verificar que:

| | | |
|---|---|---|
| **F. 1)** $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}^2x = 1 - \cos^2x \\ \cos^2x = 1 - \text{sen}^2x \end{cases}$ | **F. 3)** $\text{cotg}\,x = \dfrac{1}{\text{tg}\,x}$ | **F. 5)** $\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x}$ |
| **F. 2)** $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ | **F. 4)** $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ | **A. 1)** $\sec^2x = 1 + \text{tg}^2x$<br>**A. 2)** $\text{cossec}^2x = 1 + \text{cotg}^2x$ |

# MÓDULO 3 — Medidas de Arcos e Ângulos

## 1. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Seja uma circunferência em que são tomados dois pontos, **A** e **B**. A circunferência ficará dividida em duas partes chamadas **arcos**. Os pontos **A** e **B** são as extremidades desses arcos.




Representação: $\overset{\frown}{AB}$

Se **A** e **B** coincidem, esses arcos são chamados:

- arco **nulo** (de medida **0°**);
- arco de **uma volta** (de medida **360°**).

Dessa forma,

- 1 grau (1°) = $\dfrac{1}{360}$ do arco de uma volta.

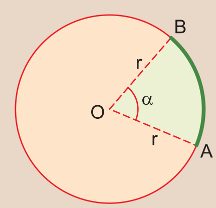
Como submúltiplos do grau, temos:

- 1 minuto (1') = $\dfrac{1}{60}$ do grau ou 60 minutos = 1 grau (60' = 1°);
- 1 segundo (1") = $\dfrac{1}{60}$ do minuto ou 60 segundos = 1 minuto (60" = 1').

## 2. MEDIDA DE ARCOS EM RADIANOS

### ❑ Definição

A medida de um arco, em **radianos**, é a razão entre o **comprimento do arco** e o **raio** da circunferência sobre a qual este arco está determinado.



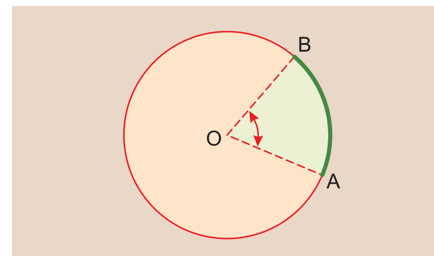

$$\alpha = \frac{\text{comprimento } \overset{\frown}{AB}}{\text{raio}}$$

### ❑ Observações

- O arco de **uma volta**, cuja medida em graus é **360°**, tem comprimento igual a **2πr**, portanto sua **medida em radianos** é:

$$\alpha = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \cong 6{,}28$$

- O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 radiano, se o seu comprimento é igual ao raio da circunferência.
- A medida de um arco, em radianos, é um número real, portanto é costume omitir-se o símbolo **rad**. Se, por exemplo, escrevermos que um arco mede **3**, fica subentendido que sua medida é de **3 radianos**.
- Seja $A\hat{O}B$ o **ângulo central**, determinado pelo arco $\overset{\frown}{AB}$. Adota-se como medida (em graus ou radianos) do **ângulo central** a própria medida do arco $\overset{\frown}{AB}$.




## 3. CONVERSÕES

As conversões entre as medidas de arcos (ou ângulos) em graus e radianos são feitas por uma regra de três simples (direta), a partir da relação: **360°** são equivalentes a **2π** radianos, ou **180°** são equivalentes a **π** radianos.

### Exemplo

Conversão de 210° em radianos.

$$\begin{array}{l} 180° \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 210° \text{ — } x \text{ rad} \end{array} \Leftrightarrow \frac{180}{210} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow$$

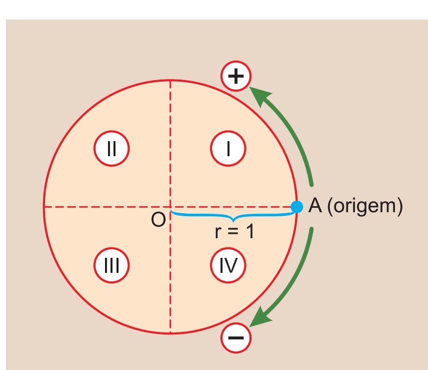
$$\Leftrightarrow \frac{6}{7} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{7 \,.\, \pi}{6}$$

Portanto, 210° equivalem a $\dfrac{7\pi}{6}$ radianos.

# MÓDULO 4 — Medidas de Arcos e Ângulos Trigonométricos

## 1. CICLO TRIGONOMÉTRICO

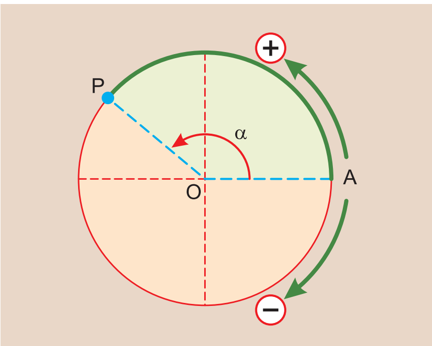
O **ciclo trigonométrico** é uma circunferência de raio unitário, sobre a qual fixamos um ponto (**A**) como origem dos arcos e adotamos um sentido (o anti-horário) como o positivo. O ciclo trigonométrico é dividido em 4 partes, denominadas **quadrantes**.




## 2. ARCO (ÂNGULO) TRIGONOMÉTRICO

Chama-se **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos **infinitos arcos** que são obtidos partindo-se da origem **A** até a extremidade **P**, girando no sentido positivo (ou negativo), seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

O **ângulo trigonométrico** $A\hat{O}P$ é o conjunto dos **infinitos ângulos** centrais associados ao arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$.




• Se, por exemplo, escrevemos que um arco trigonométrico mede 1120°, significa que, partindo da origem, no sentido ⊕, foram dadas 3 voltas completas (3.360° = 1080°) e ainda percorremos mais 40° (1120° = 3.360° + 40°) no ciclo trigonométrico. Dessa forma, todas as funções trigonométricas do arco de **1120°** são **iguais** às correspondentes funções do arco de **40°**.

## 3. CONJUNTO DAS DETERMINAÇÕES DE UM ARCO (OU ÂNGULO) TRIGONOMÉTRICO

A **determinação** de um arco $\overset{\frown}{AP}$ é a medida desse arco precedida de um sinal ⊕ ou ⊖, conforme o sentido de percurso de **A** para **P** seja o anti-horário ou o horário, respectivamente.

Ao **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ associamos **infinitas** determinações, que são obtidas adicionando-se e subtraindo-se múltiplos de 360° (ou $2\pi$) à **1ª determinação** α (positiva ou negativa), e que vão constituir o **conjunto** das determinações:

α é a 1ª determinação (⊕ ou ⊖)
$\alpha + 360°$
$\alpha - 360°$
$\alpha + 2 \,.\, 360°$
$\alpha - 2 \,.\, 360°$
$\alpha + 3 \,.\, 360°$
$\alpha - 3 \,.\, 360°$
⋮

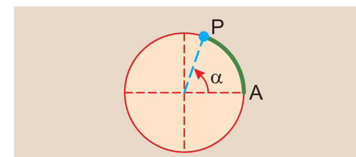
**$\alpha + n \,.\, 360°$**, com $n \in \mathbb{Z}$.

O conjunto das determinações, em radianos, é **$\alpha + n \,.\, 2\pi$**, com $n \in \mathbb{Z}$.

• **Lembrete:** Como a medida do **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ (em graus ou radianos) é igual à medida do **ângulo trigonométrico** $A\hat{O}P$, conclui-se que ambos têm o **mesmo conjunto das determinações**.

• Na trigonometria, os casos mais comuns são os apresentados a seguir:

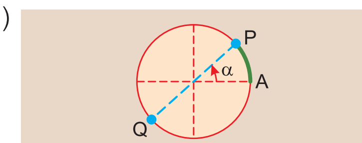
I)




**Conjunto das determinações:**

**$\alpha + n \,.\, 2\pi$**
**$\alpha + n \,.\, 360°$** $(n \in \mathbb{Z})$

II)




**Conjunto das determinações:**

**$\alpha + n \,.\, \pi$**
**$\alpha + n \,.\, 180°$** $(n \in \mathbb{Z})$

# MÓDULO 5 Estudo da Função Seno

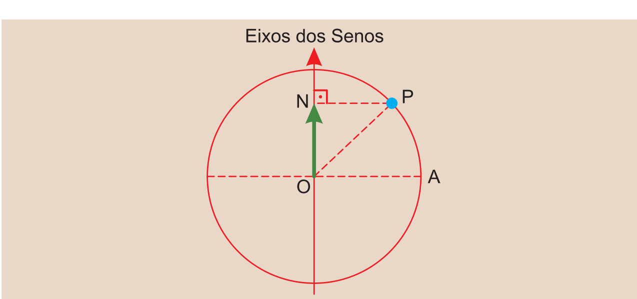
## 1. FUNÇÃO SENO

### ❑ Definição

Consideremos um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ e seja **N** a projeção ortogonal de **P** sobre o **eixo dos senos**.

Por definição, chama-se **seno do arco $\overset{\frown}{AP}$** a medida algébrica do segmento $\overline{ON}$.

Representa-se: **$\text{sen}\ \overset{\frown}{AP} = ON$**




Notando-se que a um arco $\overset{\frown}{AP}$ qualquer de determinação **x** corresponde um único segmento $\overline{ON}$, de medida algébrica **y**, conclui-se que há uma correspondência unívoca entre os números reais **x**, que medem os arcos, e os números reais **y**, senos desses arcos.

Pode-se, portanto, definir uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que a cada **x** associa um **y = sen x = ON**.

**Simbolicamente:**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to$ **$y = f(x) = \text{sen}\ x = ON$**

**Observe** que o ponto P, numa volta completa no ciclo trigonométrico, faz o valor do **seno** (ON) variar entre **– 1** e **1**. A cada volta, verificamos que esse comportamento se repete.

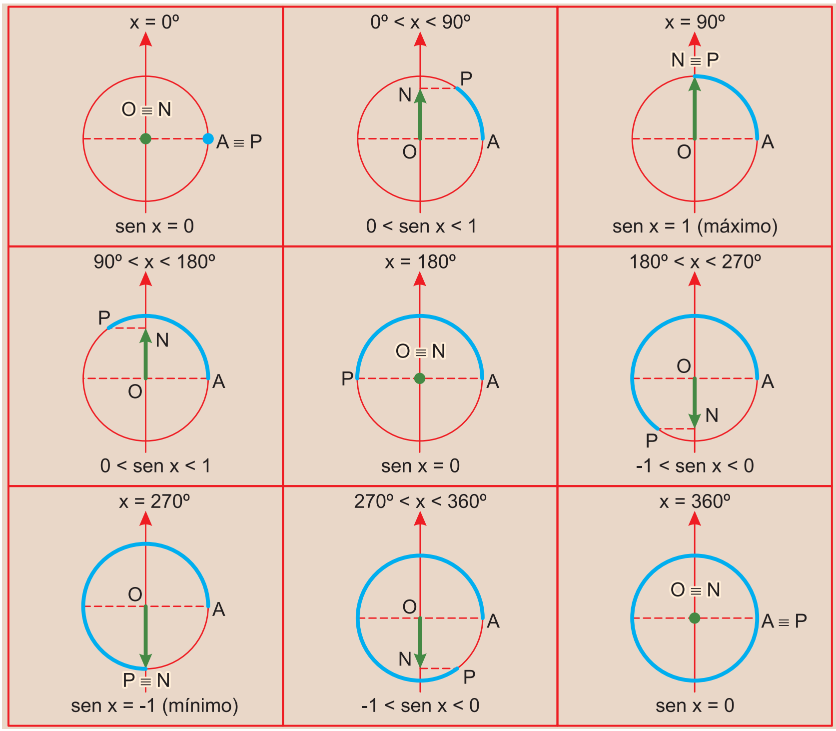
### ❑ Consequências

Da definição da função **$y = f(x) = \text{sen}\ x$**, decorre que

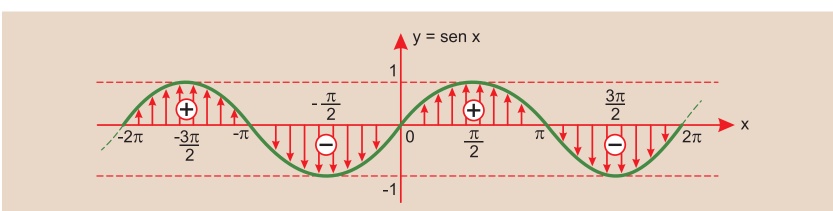
Domínio: **$D(f) = \mathbb{R}$**

Imagem: **$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$**

## ❑ Variação da Função Seno




## ❑ Gráfico




## ❑ Propriedades

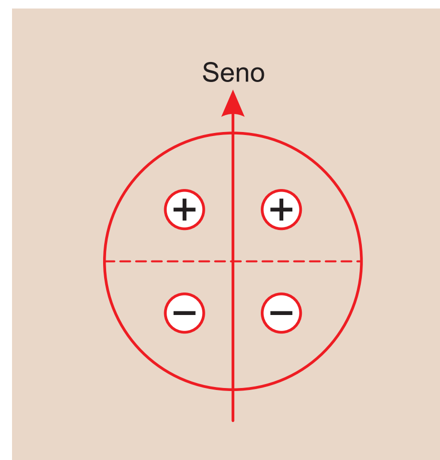
I) O **período** da função seno é **2π**.

II) A função y = sen x é **ímpar**:

**sen (– x) = – sen x** .

III) A função y = sen x é **crescente** nos quadrantes **I** e **IV** e **decrescente** nos quadrantes **II** e **III** (a cada volta no ciclo trigonométrico).

IV) Sinais




# MÓDULO 6 Estudo da Função Cosseno

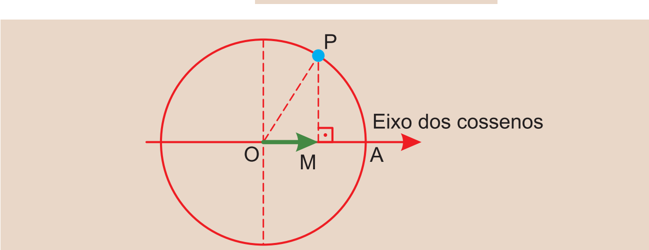
## 1. FUNÇÃO COSSENO

### ❑ Definição

Consideremos um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ e seja **M** a projeção ortogonal de **P** sobre o **eixo dos cossenos**.

Por definição, chama-se **cosseno do arco $\overset{\frown}{AP}$** a medida algébrica do segmento $\overline{OM}$.

Representa-se: **$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$**




Pode-se definir uma função de ℝ em ℝ, tal que a cada **x** associa um **y = cos x = OM**.

**Simbolicamente**

f: ℝ → ℝ

x → **y = f(x) = cos x = OM**

**Observe que** o ponto **P**, numa volta completa no ciclo trigonométrico, faz o valor do **cosseno** (OM) variar entre **– 1** e **1**. A cada volta, verificamos que esse comportamento se repete.

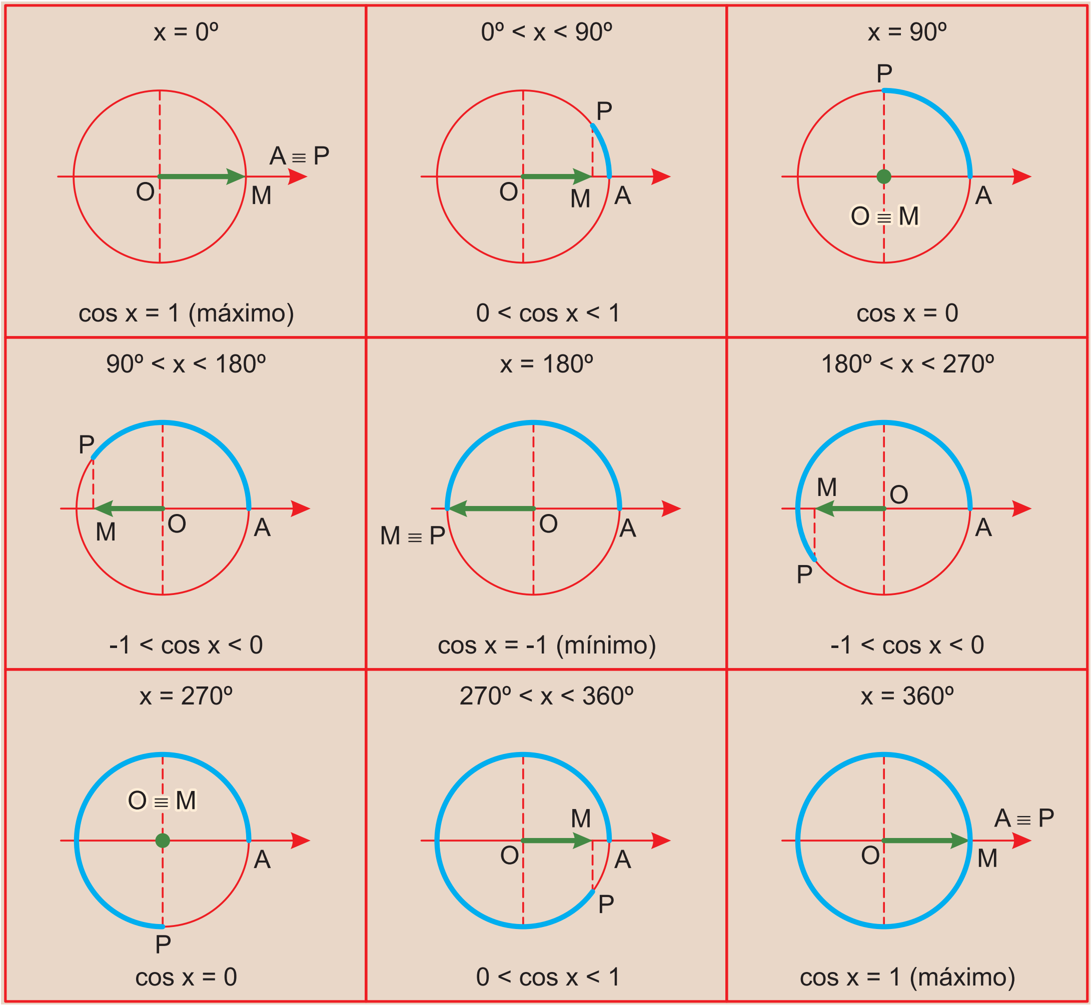
### ❑ Consequências

Da definição da função **y = f(x) = cos x** , decorre que:

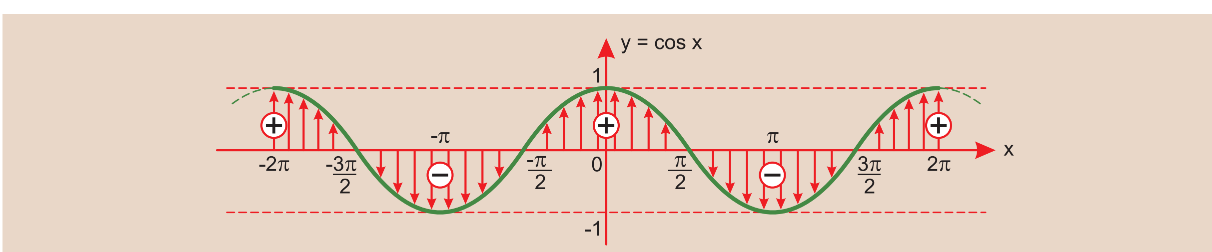
Domínio: **D(f) = ℝ**

Imagem: **Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$**

## ❑ Variação da Função Cosseno




## ❑ Gráfico



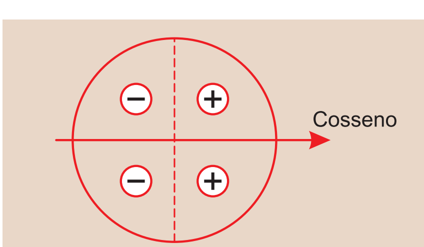

## ❑ Propriedades

I) O **período** da função cosseno é **2π**.

II) A função y = cos x é **par**: **cos (– x) = cos x**

III) A função y = cos x é **decrescente** nos quadrantes **I** e **II** e **crescente** nos quadrantes **III** e **IV** (a cada volta no ciclo trigonométrico).

IV) Sinais



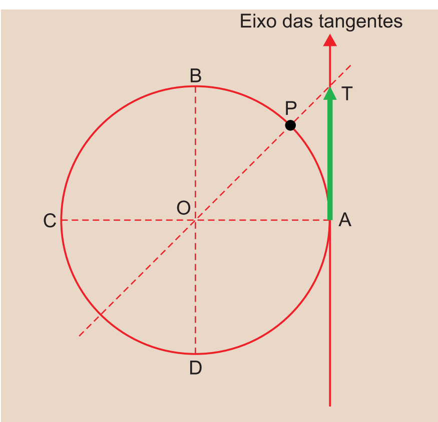
## ❑ Definição

Consideremos um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ com $P \not\equiv B$ e $P \not\equiv D$ e seja **T** a intersecção da reta OP com o **eixo das tangentes**.

Por definição, chama-se **tangente do arco $\overset{\frown}{AP}$** a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Representa-se:

$$\text{tg } \overset{\frown}{AP} = AT$$




Pode-se definir uma função de ℝ em ℝ, tal que a cada **x** associa, um **y = tg x = AT**.

**Simbolicamente:**

$$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = f(x) = \text{tg } x = AT$$

**Observe que:** o ponto **P**, numa volta completa no ciclo trigonométrico, faz o valor da **tangente** (AT) tender a **+ ∞** ou a **– ∞**, quando o ponto **P** se aproxima de **B** (ou **D**), onde a tangente não existe. A cada meia volta, verificamos que os valores da tangente (ℝ) se repetem.

## ❑ Consequências

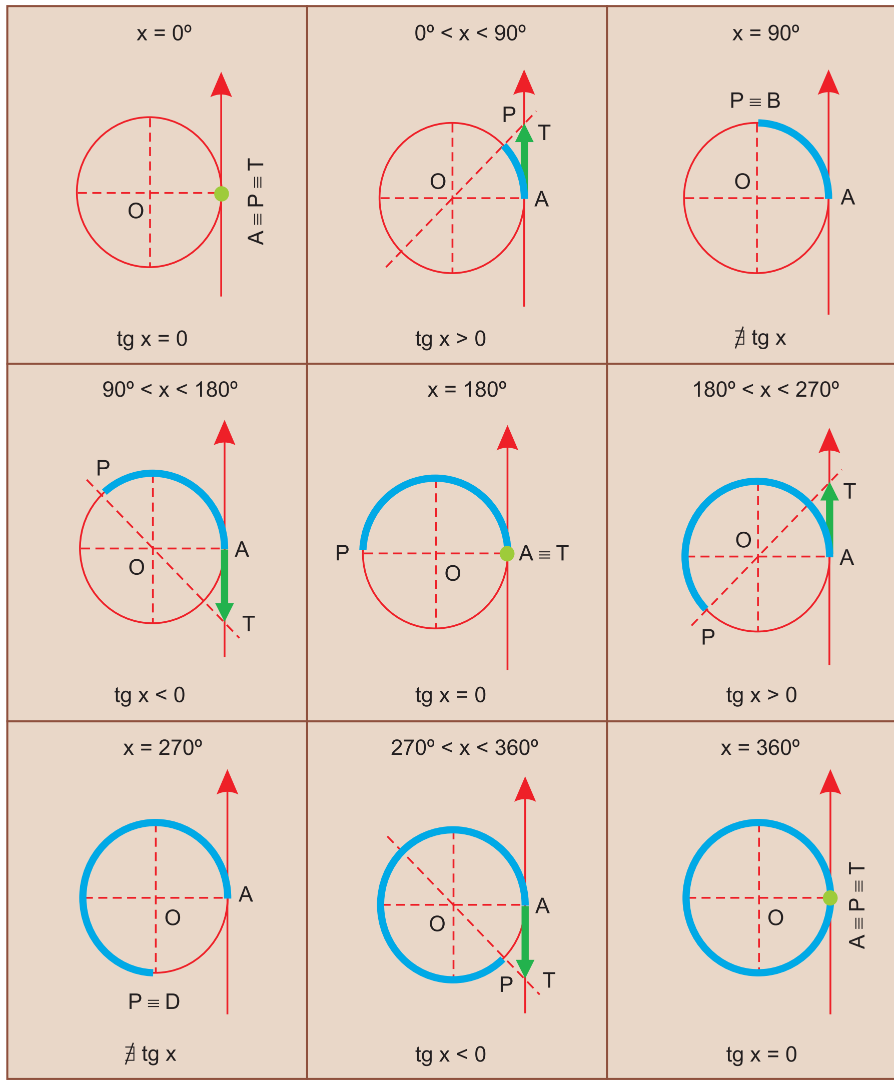
Da definição da função

**y = f(x) = tg x** , decorre que:

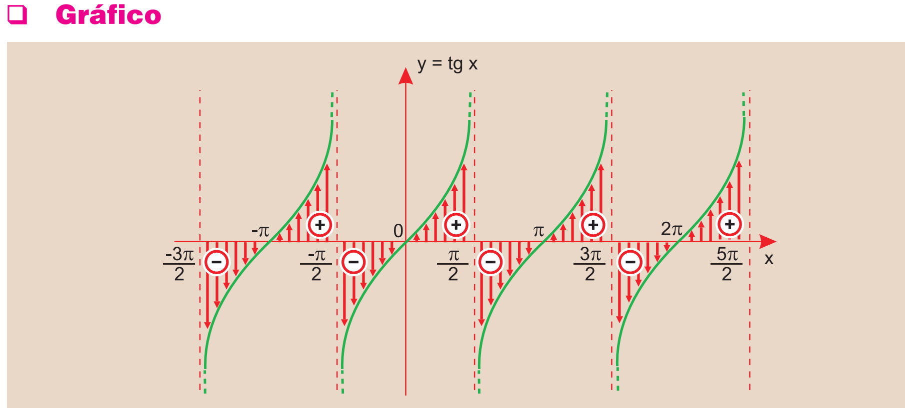
**Domínio:** $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\,.\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

**Imagem:** $Im(f) = \mathbb{R}$

## ❑ Variação da Função Tangente




## ❑ Gráfico



### ❑ Propriedades

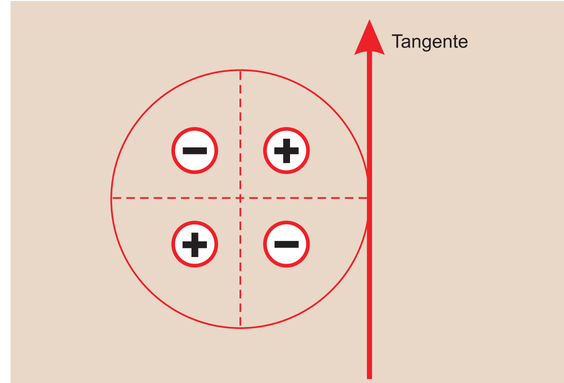
I) O **período** da função tangente é $\pi$.

II) A função y = tg x é ***ímpar***: $\boxed{\mathbf{tg(-x) = -tg\ x}}$.

III) A função y = tg x é **crescente** no intervalo

$$-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

IV) Sinais




## MÓDULOS 8 e 9

## Estudo das Funções Cotangente, Secante e Cossecante

### 1. INTRODUÇÃO

O estudo das funções **Cotangente**, **Secante** e **Cossecante** pode ser feito a partir das três funções já estudadas (seno, cosseno e tangente).

### ❑ Função Cotangente

Lembrando que:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}},$$

podemos concluir que a função $\boxed{y = f(x) = \text{cotg } x}$ tem:

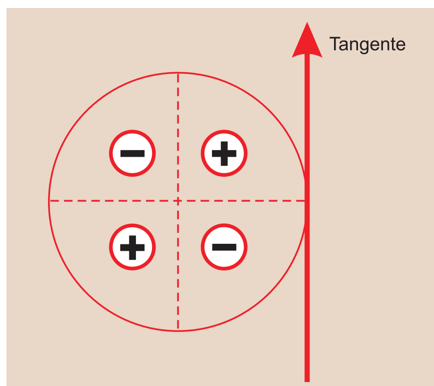
- **Domínio:**

$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\}}$, pois a função cotangente não existe quando a função tangente é zero
(tg x = 0 ⇔ x = n . π, n ∈ ℤ).

- **Imagem:** $\boxed{Im(f) = \mathbb{R}}$. A função cotangente assume esses valores a partir da imagem da função tangente (ℝ).

- **Período:** $\boxed{\pi}$, pois a função cotangente tem o mesmo período da função tangente (π).

- **Sinais:** a função cotangente tem os mesmos sinais da tangente, em cada um dos quadrantes.




- A função y = cotg x é ***ímpar***:

$\boxed{\text{cotg}(-x) = -\text{cotg } x}$

### ❑ Função Secante

Lembrando que:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}},$$

podemos concluir que a função $\boxed{y = f(x) = \sec x}$ tem:

- **Domínio:**

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

pois a função secante não existe quando a função cosseno é zero $\left(\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right)$.

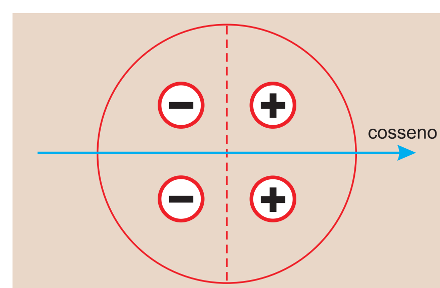
- **Imagem:**

$$\boxed{Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}}.$$

A função secante assume esses valores a partir da imagem da função cosseno (valores do intervalo [– 1; 1]).

- **Período:** $\boxed{2\pi}$, pois a função secante tem o mesmo período da função cosseno (2π).

- **Sinais:** a função secante tem os mesmos sinais da função cosseno, em cada um dos quadrantes.




- A função y = sec x é **par**:

$\boxed{\sec(-x) = \sec x}$

### ❑ Função Cossecante

Lembrando que:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}},$$

podemos concluir que a função $\boxed{y = \text{cossec } x}$ tem:

- **Domínio:**

$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\}}$, pois a função cossecante não existe quando a função seno é zero
(sen x = 0 ⇔ x = n . π, n ∈ ℤ).

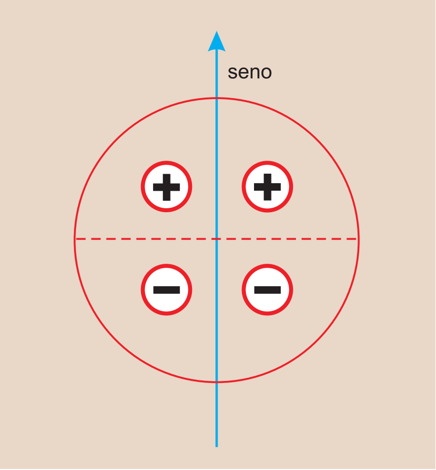
• **Imagem:**

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}.$$

A função cossecante assume esses valores a partir da imagem da função seno (valores do intervalo [–1; 1]).

• **Período:** $2\pi$, pois a função cossecante tem o mesmo período da função seno ($2\pi$).

• **Sinais:** a função cossecante tem os mesmos sinais da função seno, em cada um dos quadrantes.




• A função y = cossec x é **ímpar**:

$$\text{cossec }(-x) = -\text{ cossec } x$$

## 2. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As **inequações** trigonométricas (elementares) são resolvidas a partir da **leitura**, no ciclo trigonométrico, dos **arcos** determinados pelas condições dos problemas, da mesma maneira como foi feito o estudo das **equações** trigonométricas (elementares).

# MÓDULO 10 Estudo das Variações do Período e do Gráfico das Funções Trigonométricas

## 1. VARIAÇÕES DO PERÍODO NAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja **y = f(x)** uma função trigonométrica de período **p** e seja **y = g(x)** uma outra função, obtida de **y = f(x)**, com período **P**. Sendo **K** um número real não nulo, as relações entre **p** e **P**, nos quatro casos importantes que se seguem, são as seguintes:

I) $g(x) = K + f(x)$, verifica-se que $P = p$

II) $g(x) = K \cdot f(x)$, verifica-se que $P = p$

III) $g(x) = f(x + K)$, verifica-se que $P = p$

IV) $g(x) = f(K \cdot x)$, verifica-se que $P = \dfrac{p}{|K|}$

### Exemplos

Determinação do período nas funções a seguir.

1) y = sen x tem período $p = 2\pi$
y = 2 + sen x tem período
$P = p = 2\pi$
(caso I)

2) y = tg x tem período $p = \pi$
y = 3 . tg x tem período
$P = p = \pi$
(caso II)

3) y = cos x tem período $p = 2\pi$
$y = \cos(x + \pi)$ tem período
$P = p = 2\pi$
(caso III)

4) y = sen x tem período $p = 2\pi$
$y = \text{sen}(2 \cdot x)$ tem período
$$P = \frac{p}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$
(caso IV)

5) y = tg x tem período $p = \pi$
$y = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ tem período
$$P = \frac{p}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$
(caso IV)

6) y = cos x tem período $p = 2\pi$
$y = 1 + 3 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ tem
$$\text{período } P = \frac{2 \cdot \pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$
(casos I, II e IV)

## 2. VARIAÇÕES NO GRÁFICO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Considerando os quatro casos mais importantes, temos as seguintes alterações nos gráficos das funções trigonométricas:

(I) **g(x) = K + f(x)**, verifica-se que o gráfico da função da função **g(x)** é obtido através de um **deslocamento na vertical** (igual a $|K|$) do gráfico da função **f(x)**: o gráfico de f(x) **sobe** quando **k > 0**, ou **desce** quando **K < 0**. Se f(x) é a função **seno** (ou **cosseno**), então a imagem da função g(x) será o intervalo [– 1 + k; 1 + k].

(II) **g(x) = K . f(x)**, verifica-se que o gráfico da função **g(x)** é obtido através de uma **deformação na vertical** do gráfico da função **f(x)**: o gráfico de f(x) **abre** quando **$|K| > 1$** ou **fecha** quando **$|K| < 1$**. Se **K < 0**, além dessa deformação, o gráfico gira 180° em torno do eixo x. Se f(x) é a função **seno** (ou **cosseno**), então a imagem da função g(x) será o intervalo $[-1 . |K|; 1 . |K|]$.

(III) **g(x) = f(K + x)**, verifica-se que o gráfico da função **g(x)** é obtido através de um **deslocamento na horizontal** (igual a $|K|$) do gráfico da função **f(x)**: o gráfico de f(x) desloca para a **direita** quando **K < 0** ou para a **esquerda** quando **K > 0**.

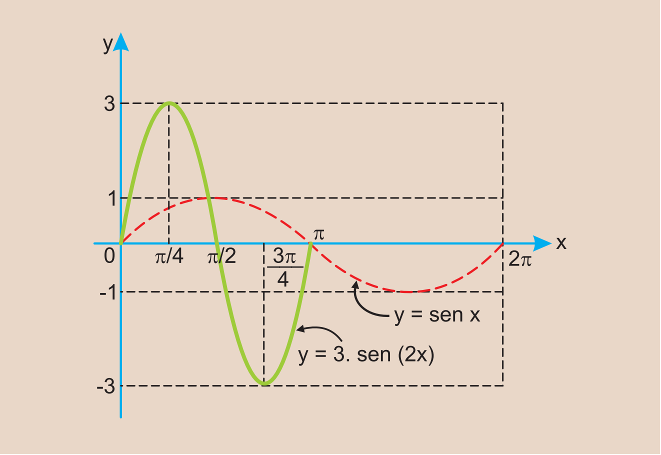
(IV) **g(x) = f(K . x)**, verifica-se que o gráfico da função **g(x)** é obtido através de uma **deformação na horizontal** do gráfico da função **f(x)**; graças a uma **mudança no período** da função $\left(P = \dfrac{p}{|K|}\right)$: o gráfico de f(x) **abre** quando **$|K| < 1$** ou **fecha** quando **$|K| > 1$**.

Nos itens (III) e (IV), se f(x) é a função **seno** (ou **cosseno**), então a imagem da função g(x) será o intervalo [– 1;1].

### Exemplo

Representação gráfica da função y = 3 . sen(2 . x), em um período.

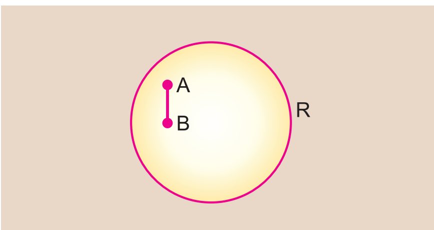
Notando que o **período** da função é $P = \dfrac{2 . \pi}{2} = \pi$ (caso (IV)) e que sua **imagem** é igual ao intervalo [– 3; 3] (caso (II)), temos o seguinte gráfico para a função:



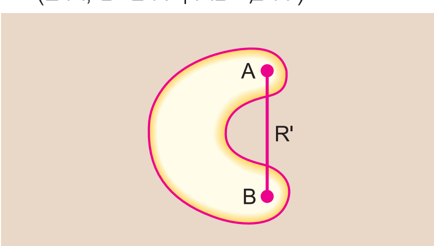
# MÓDULO 1 — Ângulos

## 1. REGIÃO CONVEXA E NÃO CONVEXA (CÔNCAVA)

R é uma **região convexa** $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall A, B \in R\ (A \neq B) \Rightarrow \overline{AB} \subset R)$



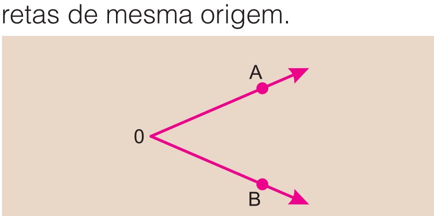

R' é uma **região não convexa** $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists\ A, B \in R' \mid \overline{AB} \not\subset R')$




## 2. ÂNGULOS

### ❑ Definição

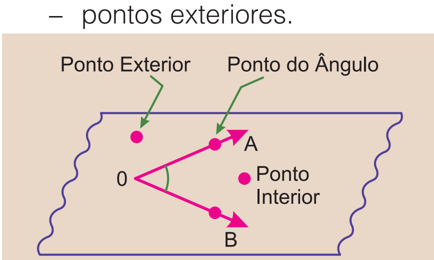
Ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem.



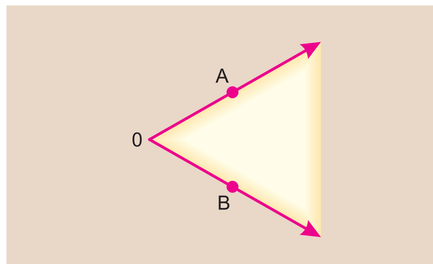

### ❑ Região angular

Um ângulo geralmente determina no plano três conjuntos:

– pontos interiores;
– pontos do ângulo;
– pontos exteriores.

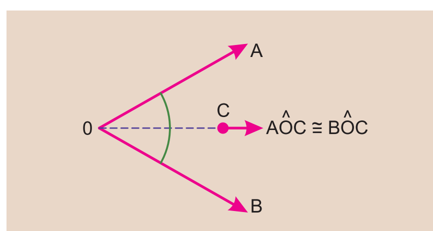



A união do conjunto dos pontos interiores com o conjunto dos pontos do ângulo constitui a região angular.




### ❑ Bissetriz

É uma semirreta de origem no vértice do ângulo, que o divide em dois ângulos congruentes.

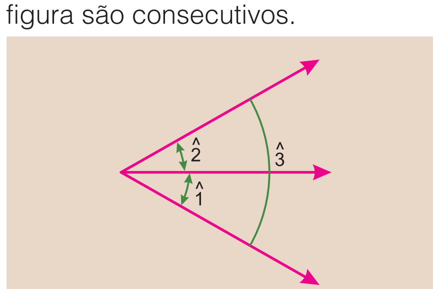



### ❑ Ângulos consecutivos e adjacentes

- São consecutivos dois ângulos que possuem um lado em comum.

**Exemplo**

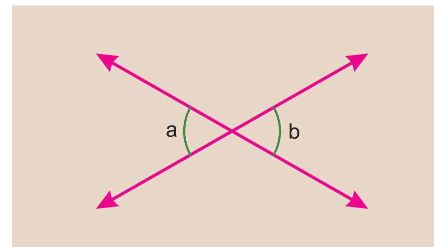
Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$, $\hat{1}$ e $\hat{3}$ e $\hat{2}$ e $\hat{3}$ da figura são consecutivos.



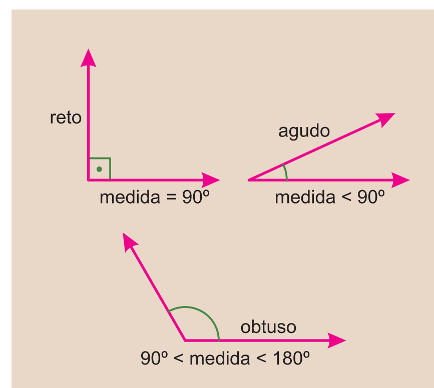

- São adjacentes dois ângulos consecutivos cujas regiões angulares se interceptam no lado comum. Na figura anterior, são adjacentes somente os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$.

### ❑ Ângulos opostos pelo vértice

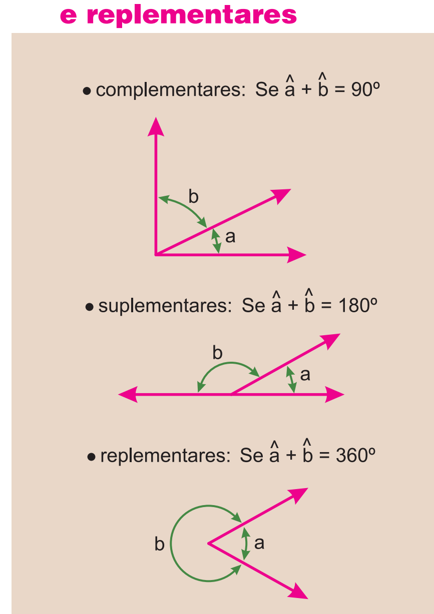
São ângulos cujos lados de um são semirretas opostas aos lados do outro.




### ❑ Ângulos: reto, agudo e obtuso

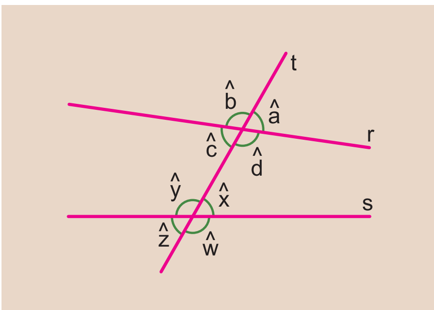



### ❑ Ângulos complementares, suplementares e replementares



## 1. NOMENCLATURA

Dadas, num plano, duas retas, **r** e **s**, e uma transversal **t**, obtêm-se oito ângulos com as seguintes denominações:




- correspondentes $\begin{cases} \hat{a} \text{ e } \hat{x};\ \hat{b} \text{ e } \hat{y} \\ \hat{c} \text{ e } \hat{z};\ \hat{d} \text{ e } \hat{w} \end{cases}$

- alternos internos $\{\ \hat{c} \text{ e } \hat{x};\ \hat{d} \text{ e } \hat{y}$

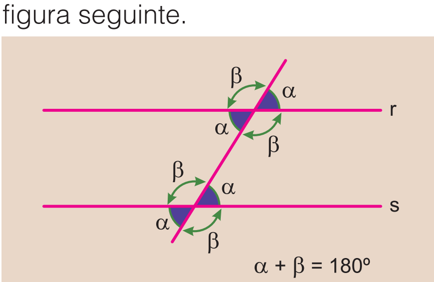
- alternos externos $\{\ \hat{a} \text{ e } \hat{z};\ \hat{b} \text{ e } \hat{w}$

- colaterais internos $\{\ \hat{c} \text{ e } \hat{y};\ \hat{d} \text{ e } \hat{x}$

- colaterais externos $\{\ \hat{a} \text{ e } \hat{w};\ \hat{b} \text{ e } \hat{z}$

**Observação**

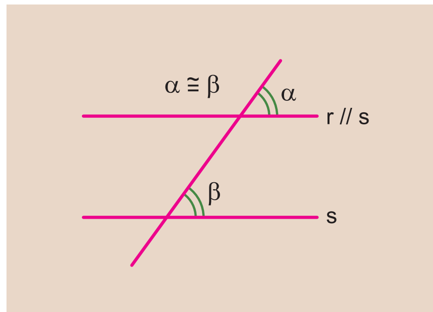
Se as retas **r** e **s** fossem paralelas e a transversal **t** não fosse perpendicular a **r** e **s**, então os oito ângulos determinados seriam tais que quatro deles seriam agudos e congruentes, os outros quatro seriam obtusos e congruentes e finalmente cada ângulo agudo e cada ângulo obtuso seriam suplementares, conforme a figura seguinte.



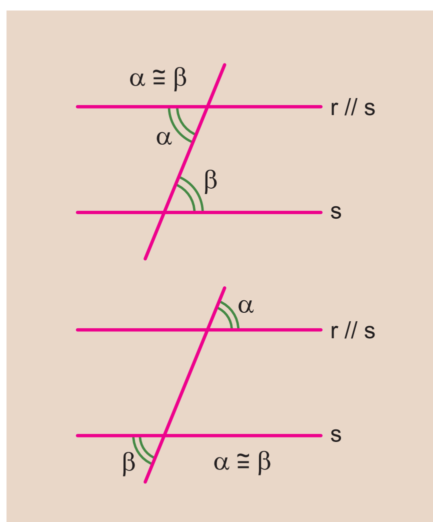

## 2. PARALELISMO

Ângulos de lados paralelos possuem nomes e propriedades especiais.

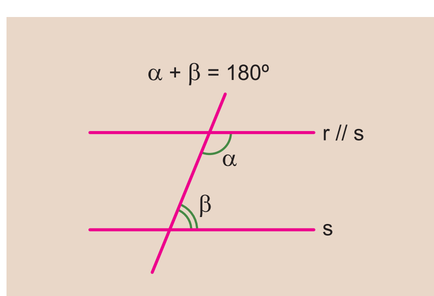
- **Ângulos correspondentes**



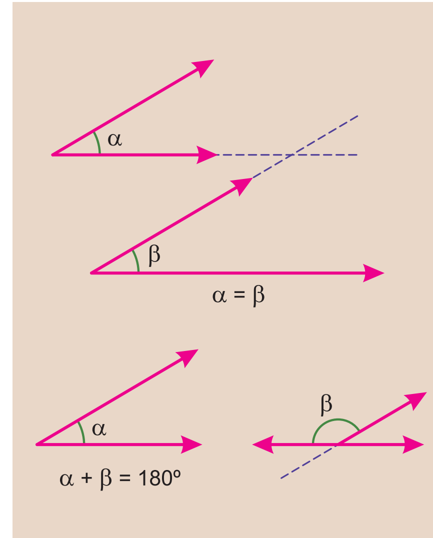

- **Ângulos alternos**




- **Ângulos colaterais**

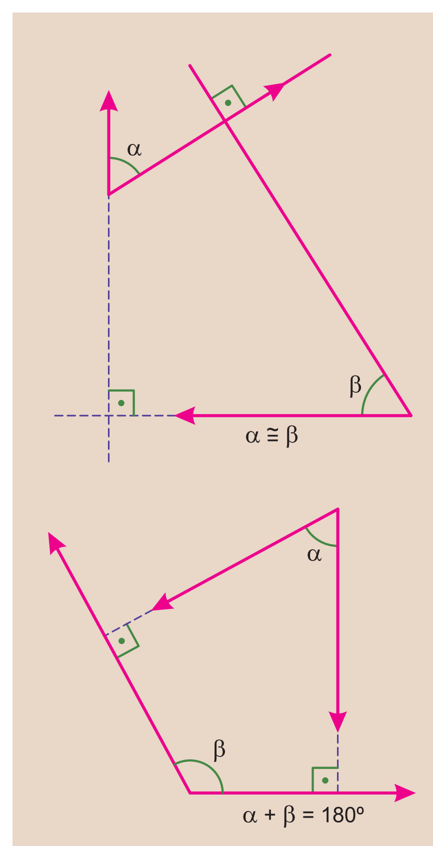



- Ângulos de lados paralelos são **CONGRUENTES** ou **SUPLEMENTARES**.



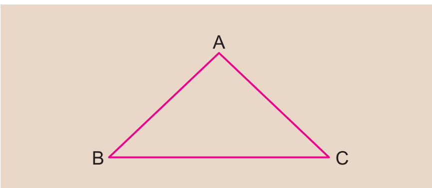

## 3. PERPENDICULARISMO

Ângulos de lados perpendiculares são **CONGRUENTES** ou **SUPLEMENTARES**.



## 1. DEFINIÇÃO

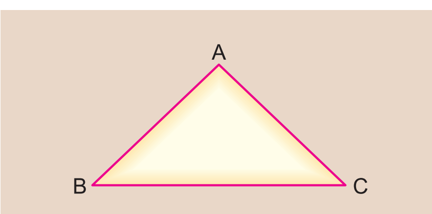
Dados três pontos não alinhados, A, B e C, chama-se triângulo a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.




$\Delta\ ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

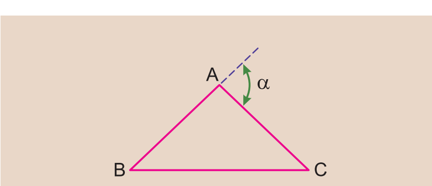
## 2. REGIÃO TRIANGULAR

É a união do triângulo ABC com o conjunto dos pontos interiores.




Elementos do triângulo:

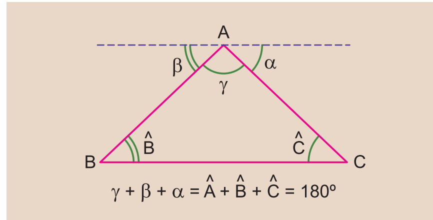
- **vértices:** A, B, C
- **lados:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$
- **ângulos internos:** $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$



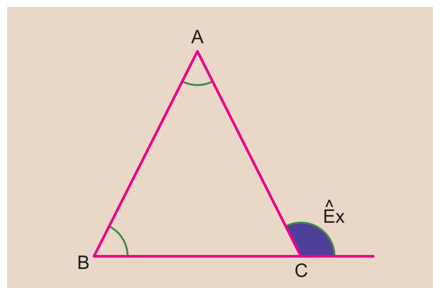

- ângulo externo: é o ângulo formado por um lado e a reta suporte do outro, suplementar ao ângulo interno. Na figura, por exemplo, é o ângulo $\alpha$.

## 3. PROPRIEDADES IMPORTANTES

- **Lei angular de Tales:** a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, pois, como $\alpha \cong \hat{C}$ e $\beta \cong \hat{B}$ (alternos internos) e $\gamma = \hat{A}$, resulta:




- **Teorema do ângulo externo:** em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes.



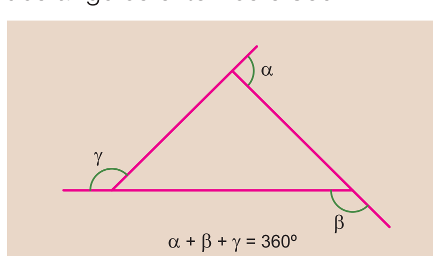

$\hat{E}x + \hat{C} = 180°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

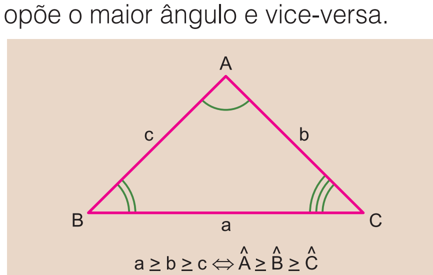
Assim: $\hat{E}x + \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\hat{E}x = \hat{A} + \hat{B}}$

- **Soma dos ângulos externos:** em qualquer triângulo, a soma dos ângulos externos é 360°.

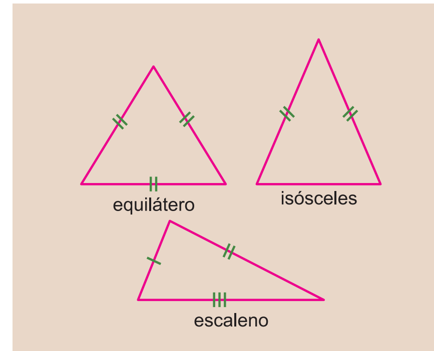



- **Desigualdade nos triângulos:** em todo triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa.




## 4. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

- quanto aos lados:

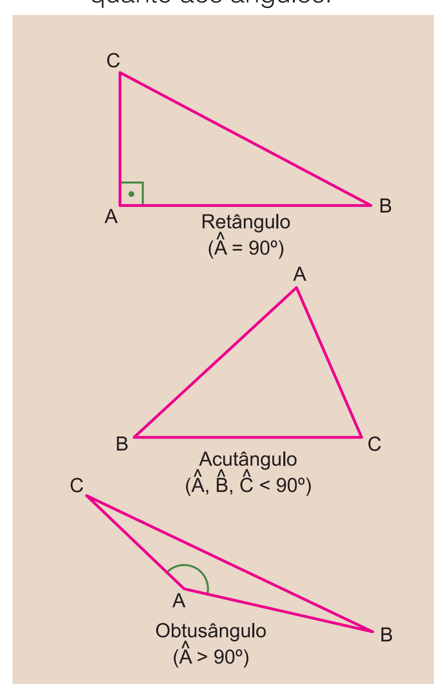



– **Equilátero**: os três lados são congruentes.

– **Isósceles**: dois lados são congruentes.

– **Escaleno**: os três lados são não congruentes.

- quanto aos ângulos:




– **Retângulo:** possui um ângulo reto.

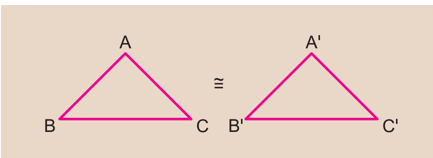
– **Acutângulo:** possui os três ângulos agudos.

– **Obtusângulo:** possui um ângulo obtuso.

# Congruência de Triângulos

## 1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são congruentes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e os do outro, de modo que os lados e os ângulos correspondentes sejam, respectivamente, congruentes.




$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$$

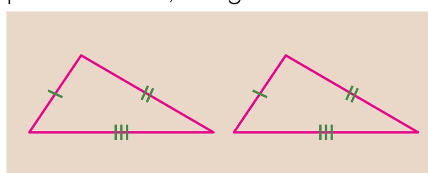
## 2. CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA

Os critérios de congruência são os casos em que se pode assegurar a congruência de dois triângulos sem que se saiba tudo sobre eles.

Temos quatro casos de congruência de triângulos:

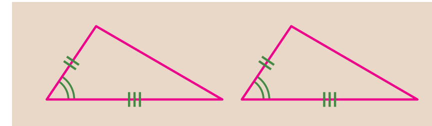
**LLL**

Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados, respectivamente, congruentes.



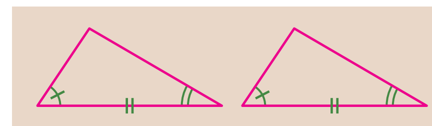
**LAL**

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo entre eles, respectivamente, congruentes.



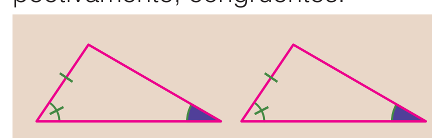
**ALA**

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado entre eles, respectivamente, congruentes.



**$LAA_0$**

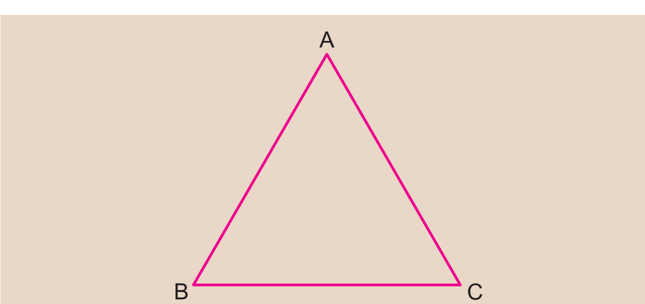
Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.





# Condição de Existência de Triângulos

Em todo triângulo, a medida de cada um dos lados é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois.




$$AB < AC + BC$$
$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$

**Consequência**

Num triângulo ABC, tem-se sempre:

$$|BC - AC| < AB < BC + AC$$

**Observação**

- se AB for o maior lado, basta que $AB < AC + BC$ para existir o triângulo.

- A, B e C são pontos de uma mesma reta (alinhados) se, e somente se, $AB + BC = AC$ ou $AB + AC = BC$ ou $AC + BC = AB$.

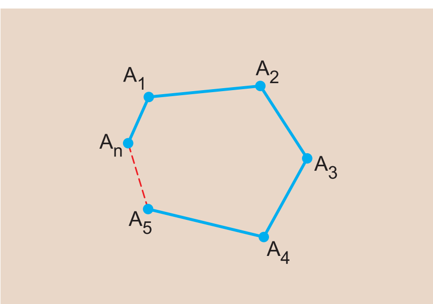
# MÓDULO 6 — Polígonos

## 1. DEFINIÇÃO

Consideremos, num plano, n pontos ($n \geq 3$), $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, ordenados de modo que três consecutivos não sejam colineares.

Chama-se polígono $A_1A_2A_3\ldots A_n$ a figura formada pela união dos n segmentos consecutivos:

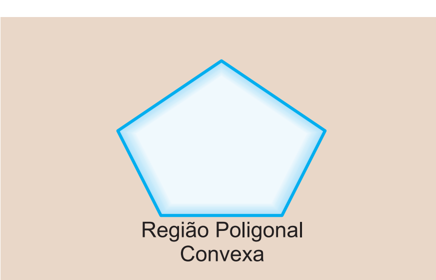
$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \ldots \cup \overline{A_nA_1}$$




## 2. REGIÃO POLIGONAL

É a região do plano formada pela união dos pontos do polígono com os pontos do seu interior.

Se a região poligonal for convexa, o polígono será denominado polígono convexo.




## 3. NOMENCLATURA

Conforme o número de lados, temos a seguinte nomenclatura:

| n | nome |
|---|---|
| 3 | triângulo |
| 4 | quadrilátero |
| 5 | pentágono |
| 6 | hexágono |
| 7 | heptágono |
| 8 | octógono |
| 9 | eneágono |
| 10 | decágono |
| 11 | undecágono |
| 12 | dodecágono |
| 15 | pentadecágono |
| 20 | icoságono |

Para os demais, dizemos polígono de **n** lados.

## 4. CLASSIFICAÇÃO

- **Polígono equilátero:** tem todos os lados congruentes.
  **Exemplos:**
  losango, quadrado,…

- **Polígono equiângulo:** tem todos os ângulos internos congruentes.
  **Exemplos:**
  retângulo, quadrado,…

- **Polígono regular:** é equilátero e equiângulo simultaneamente.
  **Exemplo:**
  quadrado.

## 5. NÚMERO DE DIAGONAIS

Chama-se diagonal de um polígono a todo segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos.

Num polígono convexo de n lados:

a) cada vértice dá origem a $(n - 3)$ diagonais.

b) os **n** vértices dão origem a $n(n - 3)$ diagonais.

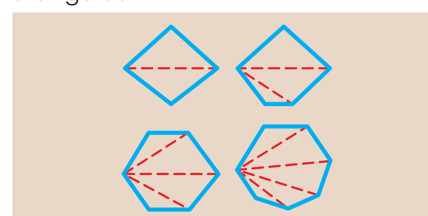
c) com este raciocínio, cada diagonal fica contada duas vezes, pois cada uma delas é determinada por dois vértices.

Assim, sendo **d** o número de diagonais do polígono, temos:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

## 6. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS ($S_i$)

Como ilustram as figuras abaixo, as diagonais que partem de um vértice dividem o polígono, em $(n - 2)$ triângulos.



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então:

$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$$

## 7. SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS($S_e$)

Em cada um dos n vértices de um polígono convexo de n lados, tem-se: $\hat{a}_i + \hat{a}_e = 180°$.

Assim: $n(\hat{a}_i + \hat{a}_e) = n \cdot 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_i + S_e = n \cdot 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{S_e = 360°}$

## 8. POLÍGONOS REGULARES

Em todo polígono **regular** de n lados ($n \geqslant 3$), sendo $\hat{a}_i$ a medida de cada ângulo interno e $\hat{a}_e$ a medida de cada ângulo externo, têm-se:

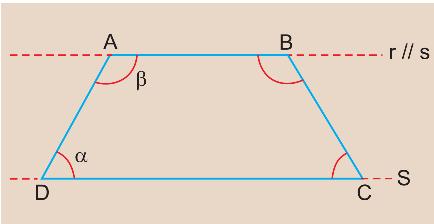
$$\hat{a}_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$\hat{a}_e = \frac{360°}{n}$$

$$\hat{a}_i + \hat{a}_e = 180°$$

## 1. TRAPÉZIO

Quadrilátero com dois lados paralelos.




$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ (bases)

$\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ (lados transversais)

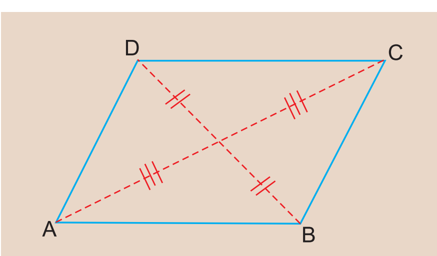
$\alpha + \beta = 180°$

$\alpha = 90° \Rightarrow$ trapézio retângulo

$\overline{AD} \cong \overline{CB} \Rightarrow$ trapézio isósceles

## 2. PARALELOGRAMO

Quadrilátero com os lados opostos respectivamente paralelos.



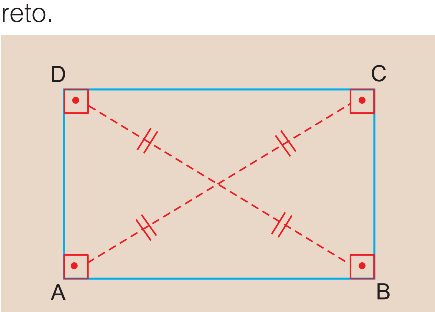

$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

### Propriedades

- Lados opostos côngruos.
- Ângulos opostos côngruos.
- Diagonais que se cortam ao meio.

## 3. RETÂNGULO

Paralelogramo com um ângulo reto.

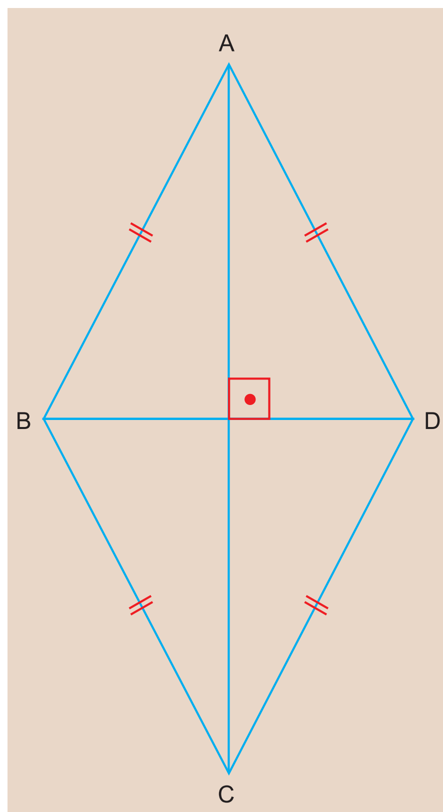



### Propriedades

- Valem as propriedades do paralelogramo.
- As diagonais são côngruas.
- Os quatro ângulos são retos.

## 4. LOSANGO

Paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes.

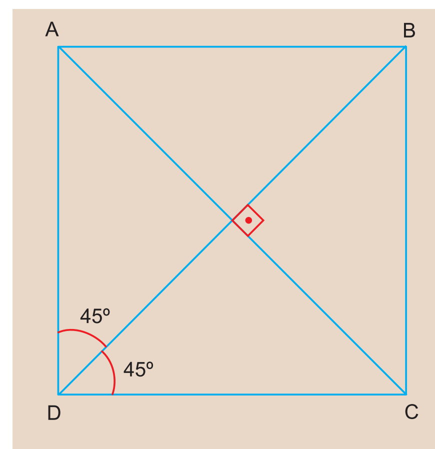



### Propriedades

- Valem as propriedades do paralelogramo.
- As diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos.
- As diagonais são perpendiculares.
- Os quatro lados são congruentes.

## 5. QUADRADO

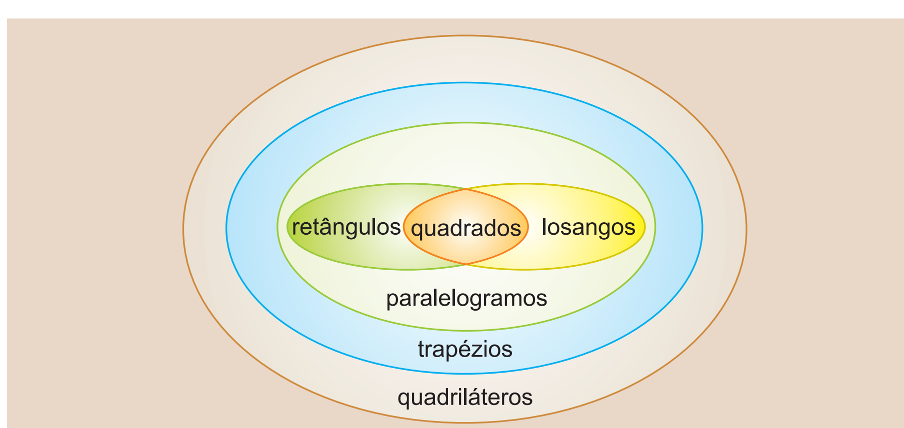
Paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.




### Propriedades

- Valem as propriedades do retângulo.
- Valem as propriedades do losango.

## 6. DIAGRAMA DE INCLUSÃO ENTRE OS CONJUNTOS DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS



## 1. FEIXE DE RETAS PARALELAS

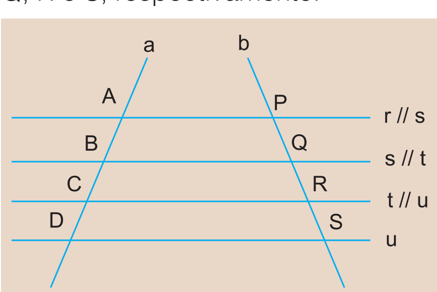
Conjunto de três ou mais retas paralelas entre si.

Qualquer reta interceptando todas as paralelas será uma **transversal** do feixe.


### ❑ Teorema

Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma transversal segmentos congruentes, então determina também, sobre outra transversal qualquer, segmentos congruentes.

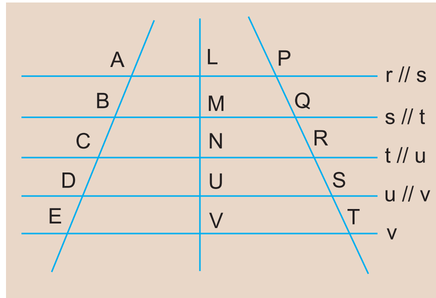
Sejam a e b as transversais que determinam no feixe de paralelas r // s // t // u os pontos A, B, C e D e P, Q, R e S, respectivamente:




$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS}$$

## 2. TEOREMA DE TALES

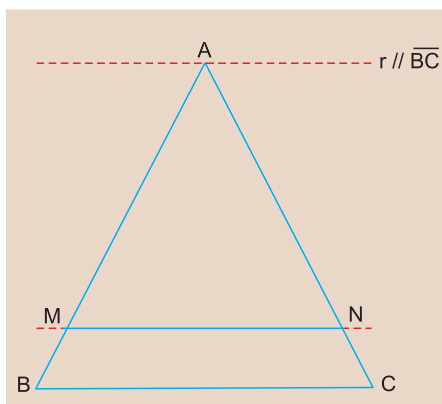
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.




$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS} = \frac{LM}{NU}$$

### ❑ Consequência

“Toda paralela a um lado de um triângulo determina sobre os outros dois lados segmentos proporcionais.”




Sendo $\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

ou

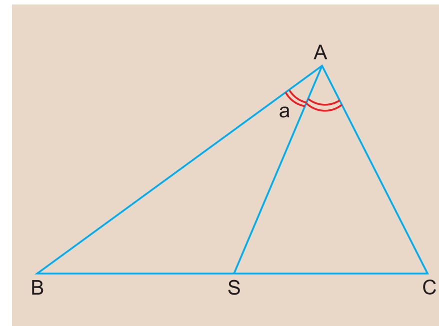
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

## 3. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

“Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno determina no lado oposto dois segmentos diretamente proporcionais aos lados desse ângulo.”

Assim, na figura seguinte, temos:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$




Uma das demonstrações desse teorema consiste no traçado de retas paralelas à $\overline{AS}$ passando, respectivamente, pelos pontos B e C.

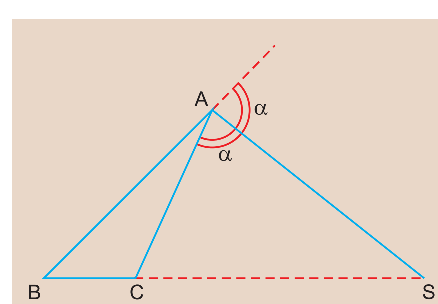
Neste caso, basta aplicar diretamente o Teorema de Tales.

## 4. TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

“Quando a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta suporte do lado oposto, ficam determinados, nesta reta, dois segmentos, cujas medidas são diretamente proporcionais às medidas dos outros dois lados desse triângulo.”

Assim, na figura seguinte, temos:

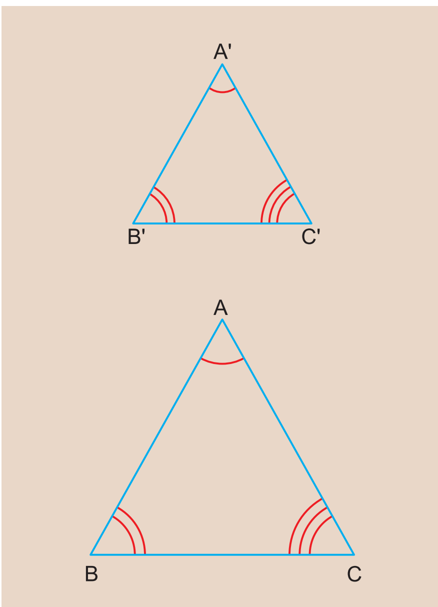
$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$




Como no caso anterior, esse teorema também pode ser demonstrado pelo teorema de Tales.

## 1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes respectivamente proporcionais.




$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}',\ \hat{B} \cong \hat{B}',\ \hat{C} \cong \hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k \end{cases}$$

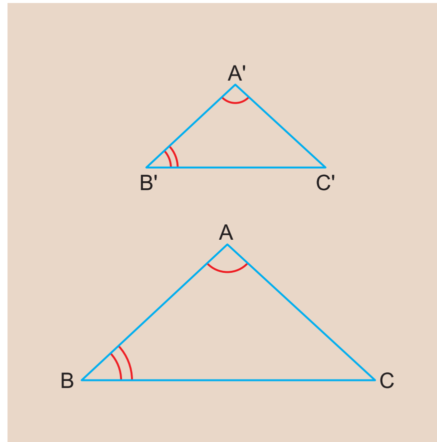
O número k é denominado razão de semelhança dos triângulos.

Se k = 1, então os triângulos são congruentes.

## 2. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

### ❑ 1º Critério (AA~)

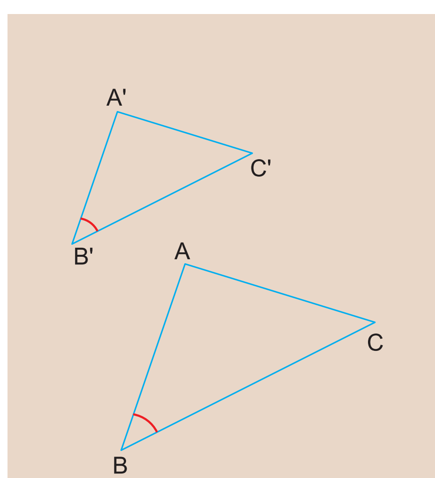
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então são semelhantes."




$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

### ❑ 2º Critério (LAL~)

"Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

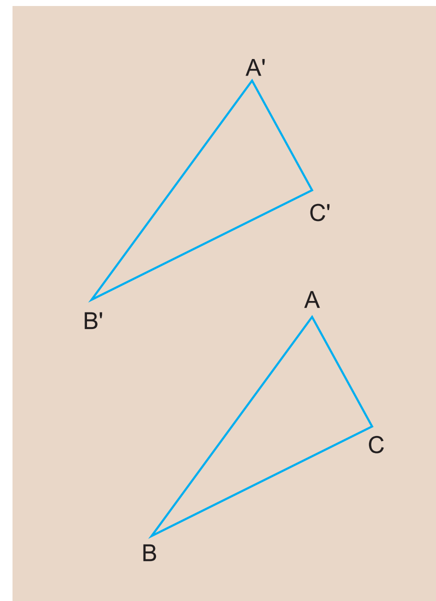



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

### ❑ 3º Critério (LLL~)

"Se dois triângulos têm os três lados correspondentes ordenadamente proporcionais, então são semelhantes."




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

#### Observação

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então a razão entre dois elementos lineares correspondentes quaisquer é k.

#### Exemplo

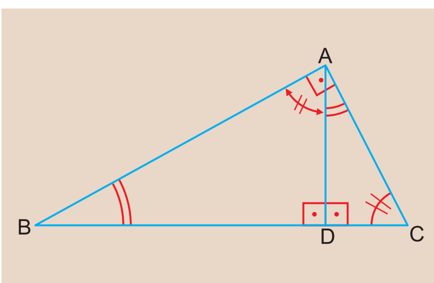
Se a razão de semelhança de dois triângulos é 2, então a razão entre as medianas correspondentes é 2, a razão entre as alturas correspondentes é 2 etc.

## Enunciado

Num triângulo retângulo ABC, reto em A, vale a seguinte relação: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ ou "o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

## Demonstração

Seja o triângulo ABC da figura seguinte, no qual $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.




Os triângulos ABC e DBA são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC \,.\, BD = (AB)^2 \text{ (I)}$$

Os triângulos ABC e DAC são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC \,.\, DC = (AC)^2 \text{ (II)}$$

Somando-se (I) e (II), membro a membro, tem-se:

$$BC \,.\, BD + BC \,.\, DC = (AB)^2 + (AC)^2 \Leftrightarrow$$

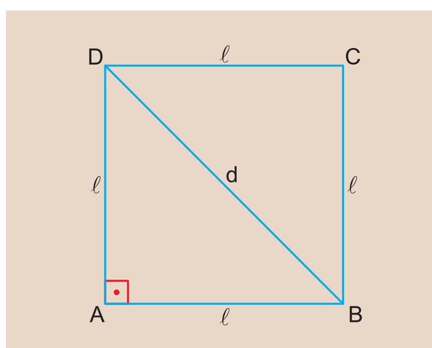
$$\Leftrightarrow BC \,.\, (BD + DC) = (AB)^2 + (AC)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC \,.\, BC = (AB)^2 + (AC)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2}$$

## Cálculo da medida da diagonal de um quadrado em função da medida do seu lado

Seja ABCD um quadrado de lado $\ell$ e de diagonal d.




Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABD, temos:

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$$

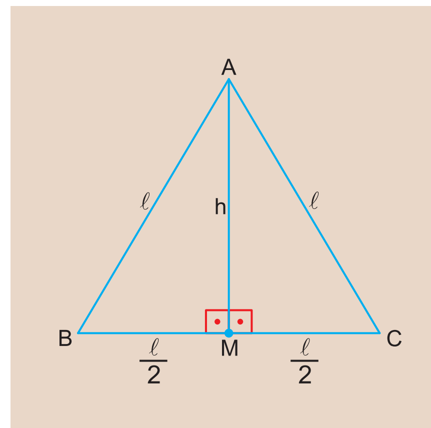
Assim:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Leftrightarrow d^2 = 2\ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{2\ell^2} \Leftrightarrow \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

## Cálculo da altura h de um triângulo equilátero em função do lado $\ell$

Seja ABC um triângulo equilátero de lado $\ell$, cujo ponto médio do lado $\overline{BC}$ é M.




Os triângulos MBA e MCA são congruentes pelo critério LLL e assim são retângulos em M.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a um deles, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$