

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

## FRENTE 1 – ÁLGEBRA

## MÓDULO 21

## LOGARITMOS: DEFINIÇÃO

1. Calcule:

a)  $\log_2 32 =$       b)  $\log_3 9\sqrt{3} =$       c)  $\log_{25} 125 =$

d)  $\log_5 1 + \log_3 3 + \log_7 7^{92} + 2^{\log_2 7} =$

RESOLUÇÃO:

a)  $\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$

b)  $\log_3 9\sqrt{3} = x \Leftrightarrow 3^x = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^x = 3^{2+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

c)  $\log_{25} 125 = x \Leftrightarrow 25^x = 125 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

d)  $\log_5 1 + \log_3 3 + \log_7 7^{92} + 2^{\log_2 7} = 0 + 1 + 92 + 7 = 100$

2. O valor de  $\log_8 [\log_2 (\log_3 81)]$  é

a) 0      b)  $\frac{1}{3}$       c) 1      d) 2      e) 3

RESOLUÇÃO:

$$\log_8 [\log_2 (\log_3 81)] = \log_8 [\log_2 4] = \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

Resposta: B

3. (ESPCEX) – O gráfico abaixo representa a função  $y = a^x$ . A partir dos dados fornecidos, pode-se concluir que o valor de  $\log_a c + \log_c a$  é igual a

a)  $\frac{4}{3}$

b)  $\frac{10}{3}$

c)  $\frac{17}{4}$

d) zero

e) 2

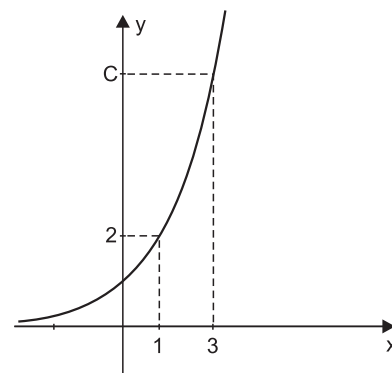


Gráfico fora de escala

RESOLUÇÃO:

Se  $y = f(x) = a^x$  e  $f(1) = 2$  (do gráfico), resulta  $a = 2$ . Logo,  $f(x) = 2^x$  e como  $f(3) = c$  (do gráfico), obtém-se  $2^3 = c$  e, portanto,  $c = 8$ .

$$\text{Assim, } \log_a c + \log_c a = \log_2 8 + \log_8 2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Resposta: B

4. (UNESP) – O valor de  $x$  na equação  $\log_{3\sqrt{3}} x = \frac{1}{3}$  é

a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d)  $\sqrt[3]{3}$

e)  $\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

$$\log_{3\sqrt{3}} x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = (\sqrt{3^3})^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

Resposta: E

5. (UF DE SANTA MARIA-RS) – A partir de dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), o índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental da Escola Estadual Básica Professora Margarida Lopes (Santa Maria, RS) pode ser representado pela expressão

$$f(t) = 5 + \log_2 \left( \frac{t - 1997}{8} \right)$$

onde  $f(t)$  representa o IDEB em função do ano  $t$  em que o dado foi coletado. Diante dessas informações, pode-se afirmar que o acréscimo do IDEB previsto para essa escola, de 2005 a 2013, é de

- a) 5      b) 1      c) 1/2      d) 1/4      e) 0

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{aligned} f(2013) - f(2005) &= \left[ 5 + \log_2 \left( \frac{2013 - 1997}{8} \right) \right] - \\ &- \left[ 5 + \log_2 \left( \frac{2005 - 1997}{8} \right) \right] = \\ &= [5 + \log_2 2] - [5 + \log_2 1] = [5 + 1] - [5 + 0] = 1 \end{aligned}$$

**Resposta: B**

## MÓDULO 22

### PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1. Considerando  $\log_{10} 2 = 0,30$ ,  $\log_{10} 3 = 0,48$  e  $\log_{10} 7 = 0,84$  obtenha:

- a)  $\log_{10}(2 \cdot 3) =$       b)  $\log_{10}(2 + 3) =$   
c)  $\log_{10} 72 =$       d)  $\log_{10} \frac{2^3 \cdot \sqrt{7}}{3} =$

**RESOLUÇÃO:**

a)  $\log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$

b)  $\log_{10}(2 + 3) = \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} =$   
 $= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0,30 = 0,70$

c)  $\log_{10} 72 = \log_{10} 2^3 \cdot 3^2 = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 =$   
 $= 3 \cdot \log_{10} 2 + 2 \cdot \log_{10} 3 = 3 \cdot 0,30 + 2 \cdot 0,48 = 0,90 + 0,96 = 1,86$

d)  $\log_{10} \frac{2^3 \cdot \sqrt{7}}{3} = \log_{10}(2^3 \cdot \sqrt{7}) - \log_{10} 3 =$   
 $= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 7^{\frac{1}{2}} - \log_{10} 3 = 3 \log_{10} 2 + \frac{1}{2} \log_{10} 7 - \log_{10} 3 =$   
 $= 3 \cdot 0,30 + \frac{1}{2} \cdot 0,84 - 0,48 = 0,90 + 0,42 - 0,48 = 0,84$

2. (MACKENZIE) – O pH do sangue humano é calculado por  $\text{pH} = \log \left( \frac{1}{X} \right)$ , sendo  $X$  a molaridade dos íons  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Se essa molaridade for dada por  $4,0 \cdot 10^{-8}$  e, adotando-se  $\log 2 = 0,30$ , o valor desse pH será

- a) 7,20      b) 4,60      c) 6,80      d) 4,80      e) 7,40

**RESOLUÇÃO:**

Sendo, de acordo com o enunciado,

$\text{pH} = \log_{10} \left( \frac{1}{X} \right)$ ,  $X = 4,0 \cdot 10^{-8}$  e  $\log_{10} 2 = 0,3$ , temos

$\text{pH} = \log_{10}(4^{-1} \cdot 10^8) = -1 \cdot \log_{10} 4 + 8 \cdot \log_{10} 10 =$   
 $= -2 \cdot \log_{10} 2 + 8 = -2 \cdot 0,30 + 8 = 7,4$

**Resposta: E**

3. Considerando  $\log 2 = 0,30$ ,  $\log 3 = 0,48$  e  $\log 7 = 0,84$  calcule:

- a)  $\log_3 2$                       b)  $\log_2 7$                       c)  $\log_2 10$

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{a) } \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,30}{0,48} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8} = 0,625$$

$$\text{b) } \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{0,84}{0,30} = \frac{84}{30} = \frac{14}{5} = 2,80$$

$$\text{c) } \log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0,30} = \frac{10}{3} = 3,333...$$

4. (UFSCar) – Adotando-se  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , o valor de  $\log_{1,5} 135$  é igual a

- a)  $\frac{3ab}{b-a}$  .                      b)  $\frac{2b-a+1}{2b-a}$  .                      c)  $\frac{3b-a}{b-a}$  .  
d)  $\frac{3b+a}{b-a}$  .                      e)  $\frac{3b-a+1}{b-a}$  .

**RESOLUÇÃO:**

Se  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , temos:

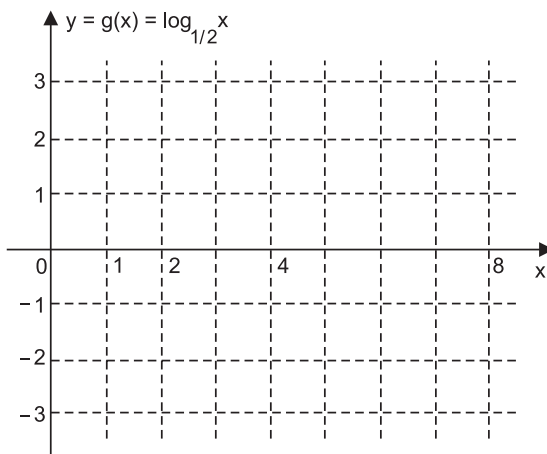
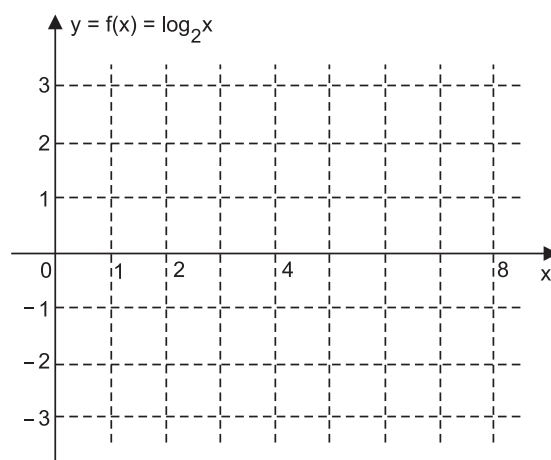
$$\begin{aligned} \log_{1,5} 135 &= \frac{\log 135}{\log 1,5} = \frac{\log 3^3 \cdot 5}{\log \frac{15}{10}} = \frac{\log 3^3 + \log 5}{\log 15 - \log 10} = \\ &= \frac{3\log 3 + \log \frac{10}{2}}{\log 3 \cdot 5 - \log 10} = \frac{3\log 3 + \log 10 - \log 2}{\log 3 + \log \frac{10}{2} - \log 10} = \\ &= \frac{3\log 3 + \log 10 - \log 2}{\log 3 + \log 10 - \log 2 - \log 10} = \frac{3b + 1 - a}{b - a} = \frac{3b - a + 1}{b - a} \end{aligned}$$

**Resposta: E**

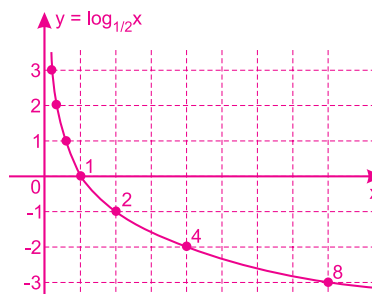
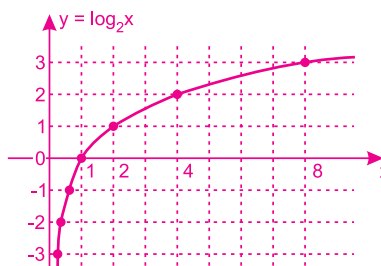
## MÓDULO 23

### FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. Esboçar os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , de  $\mathbb{R}_+^*$  em  $\mathbb{R}$ , definidas por  $f(x) = \log_2 x$  e  $g(x) = \log_{1/2} x$ .



**RESOLUÇÃO:**



2. (UNIP) – A maior raiz real da equação

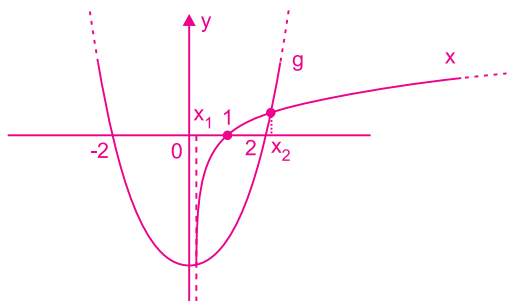
$\log_{10} x = x^2 - 4$  é  $a$ . É correto afirmar que

- a)  $-1 < a < 0$       b)  $0 < a < 1$       c)  $1 < a < 2$   
d)  $0 < a < 2$       e)  $a > 2$

**RESOLUÇÃO:**

Esboçando os gráficos das funções definidas por

$f(x) = \log_{10} x$  e  $g(x) = x^2 - 4$  obtém-se:

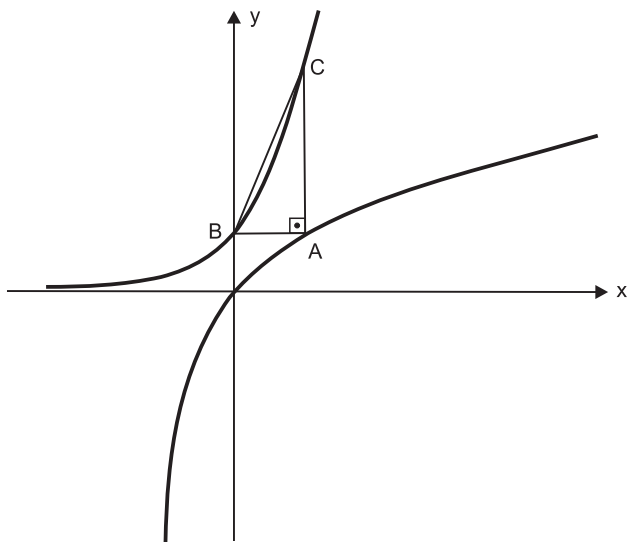


As raízes  $x_1$  e  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) da equação  $f(x) = g(x)$  são as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos. Portanto,  $0 < x_1 < 1$  e  $x_2 > 2$ .

Logo,  $a > 2$ .

**Resposta: E**

3. (MACKENZIE) – A figura mostra os esboços dos gráficos das funções  $f(x) = 2^{2x}$  e  $g(x) = \log_2(x + 1)$ .



A área do triângulo ABC é

- a)  $\frac{1}{4}$       b)  $\frac{5}{2}$       c)  $\frac{3}{2}$       d)  $\frac{2}{5}$       e)  $\frac{1}{3}$

**RESOLUÇÃO:**

1)  $B(0, y_B) \in f \Rightarrow y_B = 2^{2 \cdot 0} = 1$

2)  $A(x_A, y_B) \in g \Rightarrow y_B = \log_2(x_A + 1) = 1 \Rightarrow x_A + 1 = 2 \Rightarrow x_A = 1$

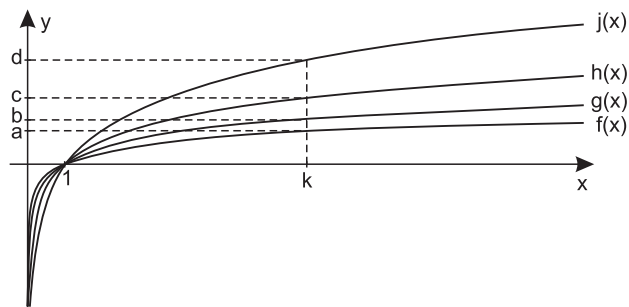
3)  $C(x_A, y_C) \in f \Rightarrow y_C = 2^{2 \cdot x_A} = 2^{2 \cdot 1} = 4$

4) A área do triângulo ABC é

$$\frac{BA \cdot AC}{2} = \frac{(x_A - x_B) \cdot (y_C - y_A)}{2} = \frac{(1 - 0) \cdot (4 - 1)}{2} = \frac{3}{2}$$

**Resposta: C**

4. (IBMEC-Adaptado) – No gráfico a seguir, estão representadas as funções  $\log_2 x$ ,  $\log_3 x$ ,  $\log_5 x$  e  $\log_{10} x$



Utilizando as informações do gráfico podemos concluir que o valor de

$$\log_k \frac{10}{3} - \log_k \frac{5}{2} \text{ é}$$

- a)  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$       b)  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$   
c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$       d)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$   
e)  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$

**RESOLUÇÃO:**

Observando que se  $k > 1$ , então  $\log_{10} k < \log_5 k < \log_3 k < \log_2 k$ , concluímos que  $\log_{10} k = a$ ;  $\log_5 k = b$ ,  $\log_3 k = c$  e  $\log_2 k = d$

$$\text{Então, } \log_k \frac{10}{3} - \log_k \frac{5}{2} = (\log_k 10 - \log_k 3) - (\log_k 5 - \log_k 2) =$$

$$= \log_k 10 - \log_k 3 - \log_k 5 + \log_k 2 = \frac{1}{\log_{10} k} - \frac{1}{\log_3 k} - \frac{1}{\log_5 k} + \frac{1}{\log_2 k} =$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

**Resposta: A**

## MÓDULO 24

### EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

1. (ESPCEX) – O valor de  $x$  na equação exponencial  $7^{2x-1} - 7^x - 7^{x-1} = 0$  é

- a)  $\frac{2\log 2}{\log 7}$       b)  $\frac{3\log 3}{\log 7}$       c)  $\frac{2\log 3}{\log 7}$   
d)  $\frac{3\log 2}{\log 7}$       e)  $\frac{3\log 8}{\log 7}$

**RESOLUÇÃO:**

$$7^{2x-1} - 7^x - 7^{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(7^x)^2}{7} - 7^x - \frac{7^x}{7} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (7^x)^2 - 7 \cdot (7^x) - (7^x) = 0 \Leftrightarrow (7^x)^2 - 8 \cdot (7^x) = 0 \Leftrightarrow 7^x \cdot (7^x - 8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 0 \text{ (não serve) ou } 7^x = 8 \Leftrightarrow \log 7^x = \log 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \log 7 = 3 \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{3 \log 2}{\log 7}$$

**Resposta: D**

2. Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as equações

- a)  $\log_x(x+2) = 2$   
b)  $\log_{(x-2)}(2x-9) = \log_{(x-2)}(23-6x)$

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{a) } \log_x(x+2) = 2 \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1 \text{ (não serve)} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{b) } \log_{(x-2)}(2x-9) = \log_{(x-2)}(23-6x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-9 = 23-6x \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4 \text{ (não serve)}$$

**Resposta: a)  $V = \{2\}$**

**b)  $V = \emptyset$**

3. (FATEC) – Se  $x$  é um número real positivo tal que  $\log_2 9 = \log_2 x - \log_4 x$ , então  $\log_3 x$  é igual a

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 5

**RESOLUÇÃO:**

$$\log_2 9 = \log_2 x - \log_4 x \Leftrightarrow \log_2 9 = \log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 9 = \log_2 x - \frac{\log_2 x}{2} \Leftrightarrow 2\log_2 9 = 2\log_2 x - \log_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 9^2 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 81$$

$$\text{Logo, } \log_3 x = \log_3 81 = 4$$

**Resposta: D**

4. (UFMA) – A soma das raízes da equação  $2 \log_9 x + 2 \log_x 9 = 5$  é:

- a) 92      b) 27      c) 36      d) 76      e) 84

**RESOLUÇÃO:**

$$2 \log_9 x + 2 \log_x 9 = 5 \Leftrightarrow 2 \log_9 x + 2 \cdot \frac{1}{\log_9 x} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_9 x)^2 + 2 = 5 \log_9 x \Leftrightarrow 2(\log_9 x)^2 - 5 \log_9 x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9 x = 2 \text{ ou } \log_9 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 81 \text{ ou } x = 3 \Leftrightarrow V = \{3; 81\}$$

**Resposta: E**

## MÓDULO 25

### EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

1. Resolvendo em  $\mathbb{R}$  a inequação  $\log_{0,1}(x^2 + 75) - \log_{0,1}(x - 4) \leq -2$  resulta como solução o conjunto

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 95\}$
- b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 95\}$
- c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \text{ ou } x \geq 95\}$
- d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5 \text{ ou } x \geq 95\}$
- e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5 \text{ ou } x \geq 75\}$

**RESOLUÇÃO:**

I)  $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

II)  $\log_{0,1}(x^2 + 75) - \log_{0,1}(x - 4) \leq -2 \Rightarrow \log_{0,1} \frac{x^2 + 75}{x - 4} \leq -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2 + 75}{x - 4} \geq 100 \Rightarrow x^2 + 75 \geq 100x - 400, \text{ pois } x > 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 100x + 475 \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \text{ ou } x \geq 95, \text{ pois o gráfico de}$

$f(x) = x^2 - 100x + 475$  é do tipo

De (I) e (II) concluímos que a solução

da inequação é o conjunto

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leq 5 \text{ ou } x \geq 95\}$

**Resposta: D**

2. Os valores reais de  $x$  que satisfazem a sentença

$2 \log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) > \frac{2}{3}$  são dados por

- a)  $x > 3$
- b)  $x > 2$  e  $x \neq 3$
- c)  $x > 3$  e  $x \neq 4$
- d)  $x > 4$
- e)  $3 < x < 4$

**RESOLUÇÃO:**

I)  $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$

II)  $2 \log_8(x - 2) - \log_8(x - 3) > \frac{2}{3} \Rightarrow \log_8 \frac{(x - 2)^2}{x - 3} > \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{x - 3} > 4 \Rightarrow (x - 2)^2 > 4x - 12, \text{ pois } x > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x - 12 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 > 0 \Rightarrow (x - 4)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 4$

De (I) e (II) concluímos que o conjunto verdade da inequação é

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 4\}$

**Resposta: C**

3. (CFOAVI) – Se a função real  $f$  é definida por

$f(x) = \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1)$ , então o conjunto de valores de  $x$  para os quais  $f(x) < 1$  é

a)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}\right\}$

c)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{7}{3}\right\}$

b)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

d)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\right\}$

**RESOLUÇÃO:**

a) **Condição de existência**

$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

b)  $f(x) = \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1) < 1 \Rightarrow \log_3 \frac{3x + 4}{2x - 1} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x + 4}{2x - 1} < 3 \Rightarrow 3x + 4 < 6x - 3 \Rightarrow 7 < 3x \Rightarrow x > \frac{7}{3}$

De a e b concluímos que  $x > \frac{7}{3}$

**Resposta: D**

4. Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a inequação  $\log_3 \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) < 0$ .

**RESOLUÇÃO:**

I)  $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

II)  $\log_{\frac{1}{3}}(x - 3) > 0 \Rightarrow x - 3 < 1 \Rightarrow x < 4$

III)  $\log_3 \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x - 3) < 1 \Rightarrow x - 3 > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \frac{10}{3}$

De (I), (II) e (III) concluímos que a solução da inequação é o conjunto

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{10}{3} < x < 4\right\}$

**Resposta: V =  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{10}{3} < x < 4\right\}$**

## MÓDULO 26

### LOGARITMOS DECIMAIS

1. Utilizando a tabela de logaritmos, determinar

a)  $\log 36500 = 4,5623$

b)  $\log 0,0049 = \bar{3},6902 = -3 + 0,6902 = -2,3098$

2. (UNIFESP) – A tabela apresenta valores de uma escala logarítmica decimal das populações de grupos A, B, C, ... de pessoas.

| Grupo          | A       | B       | C       | D       | E       | F        |
|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| População (P)  | 5       | 35      | 1800    | 60000   | ...     | 10009000 |
| $\log_{10}(p)$ | 0,69897 | 1,54407 | 3,25527 | 4,77815 | 5,54407 | 7,00039  |

Por algum motivo, a população do grupo E está ilegível. A partir de valores da tabela, pode-se deduzir que a população do grupo E é

- a) 170.000.                      b) 180.000.                      c) 250.000.  
d) 300.000.                      e) 350.000.

**RESOLUÇÃO:**

$$\log 35 = 1,54407 = 1 + 0,54407 \Rightarrow 5,54407 = 5 + 0,54407 = \log 350\,000$$

**Resposta: E**

3. (FUVEST) – Pressionando a tecla  $\boxed{\text{Log}}$  de uma calculadora, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava antes no visor. Digita-se inicialmente o número 8 8 8 8 8 8 8 8 (oito oitos). Quantas vezes a tecla  $\boxed{\text{Log}}$  precisa ser pressionada para que apareça mensagem de erro?

- a) 2                      b) 4                      c) 6                      d) 8                      e) 10

**RESOLUÇÃO:**

1ª vez:  $\log 88888888 = 7, m$

2ª vez:  $\log 7, m = 0, n$

3ª vez:  $\log 0, n = -A (A > 0)$

4ª vez:  $\log (-A)$  não existe (ERRO)

**Resposta: B**

4. Considerando  $\log 3 = 0,4771$ , podemos concluir que o número de algarismos de  $x = 3^{1000}$  é:

- a) 47                      b) 48                      c) 477                      d) 478                      e) 572

**RESOLUÇÃO:**

$$x = 3^{1000} \Rightarrow \log x = \log 3^{1000} \Rightarrow \log x = 1000 \cdot \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = 1000 \cdot 0,4771 \Leftrightarrow \log x = 477,1$$

Portanto, x tem  $477 + 1 = 478$  algarismos

**Resposta: D**

5. (FGV) – Os diretores de uma empresa de consultoria estimam que, com x funcionários, o lucro mensal que pode ser obtido é dado pela função:

$$P(x) = 20 + \ell n \left( \frac{x^2}{25} \right) - 0,1x \text{ mil reais.}$$

Atualmente a empresa trabalha com 20 funcionários.

Use a aproximação  $\ell n 2 = 0,7$  para responder qual é o valor do lucro mensal da empresa.

**RESOLUÇÃO:**

Com  $x = 20$  funcionários, o lucro da empresa, em milhares de reais, resulta igual a:

$$\begin{aligned} P(20) &= 20 + \ell n \left( \frac{20^2}{25} \right) - 0,1 \cdot 20 = 20 + \ell n 16 - 2 = 20 + \ell n 2^4 - 2 = \\ &= 20 + 4 \cdot \ell n 2 - 2 = 20 + 4 \cdot 0,7 - 2 = 20 + 2,8 - 2 = 20,8 \end{aligned}$$

No caso, o lucro é, portanto, igual a R\$ 20 800,00.

**Resposta: R\$ 20 800,00**

## TÁBUA DE LOGARITMOS

| N  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |
| N  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |

## TÁBUA DE LOGARITMOS

| N  | 0           | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 55 | 7404        | 7412        | 7419        | 7427        | 7435        | 7443        | 7451        | 7459        | 7466        | 7474        |
| 56 | 7482        | 7490        | 7497        | 7505        | 7513        | 7520        | 7528        | 7536        | 7543        | 7551        |
| 57 | 7559        | 7566        | 7574        | 7582        | 7589        | 7597        | 7604        | 7612        | 7619        | 7627        |
| 58 | 7634        | 7642        | 7649        | 7657        | 7664        | 7672        | 7679        | 7686        | 7694        | 7701        |
| 59 | 7709        | 7716        | 7723        | 7731        | 7738        | 7745        | 7752        | 7760        | 7767        | 7774        |
| 60 | <b>7782</b> | <b>7789</b> | <b>7796</b> | <b>7803</b> | <b>7810</b> | <b>7818</b> | <b>7825</b> | <b>7832</b> | <b>7839</b> | <b>7846</b> |
| 61 | 7853        | 7860        | 7868        | 7875        | 7882        | 7889        | 7896        | 7903        | 7910        | 7917        |
| 62 | 7924        | 7931        | 7938        | 7945        | 7952        | 7959        | 7966        | 7973        | 7980        | 7987        |
| 63 | 7993        | 8000        | 8007        | 8014        | 8021        | 8028        | 8035        | 8041        | 8048        | 8055        |
| 64 | 8062        | 8069        | 8075        | 8082        | 8089        | 8096        | 8102        | 8109        | 8116        | 8122        |
| 65 | 8129        | 8136        | 8142        | 8149        | 8156        | 8162        | 8169        | 8176        | 8182        | 8189        |
| 66 | 8195        | 8202        | 8209        | 8215        | 8222        | 8228        | 8235        | 8241        | 8248        | 8254        |
| 67 | 8261        | 8267        | 8274        | 8280        | 8287        | 8293        | 8299        | 8306        | 8312        | 8319        |
| 68 | 8325        | 8331        | 8338        | 8344        | 8351        | 8357        | 8363        | 8370        | 8376        | 8382        |
| 69 | 8388        | 8395        | 8401        | 8407        | 8414        | 8420        | 8426        | 8432        | 8439        | 8445        |
| 70 | <b>8451</b> | <b>8457</b> | <b>8463</b> | <b>8470</b> | <b>8476</b> | <b>8482</b> | <b>8488</b> | <b>8494</b> | <b>8500</b> | <b>8506</b> |
| 71 | 8513        | 8519        | 8525        | 8531        | 8537        | 8543        | 8549        | 8555        | 8561        | 8567        |
| 72 | 8573        | 8579        | 8585        | 8591        | 8597        | 8603        | 8609        | 8615        | 8621        | 8627        |
| 73 | 8633        | 8639        | 8645        | 8651        | 8657        | 8663        | 8669        | 8675        | 8681        | 8686        |
| 74 | 8692        | 8698        | 8704        | 8710        | 8716        | 8722        | 8727        | 8733        | 8739        | 8745        |
| 75 | 8751        | 8756        | 8762        | 8768        | 8774        | 8779        | 8785        | 8791        | 8797        | 8802        |
| 76 | 8808        | 8814        | 8820        | 8825        | 8831        | 8837        | 8842        | 8848        | 8854        | 8859        |
| 77 | 8865        | 8871        | 8876        | 8882        | 8887        | 8893        | 8899        | 8904        | 8910        | 8915        |
| 78 | 8921        | 8927        | 8932        | 8938        | 8943        | 8949        | 8954        | 8960        | 8965        | 8971        |
| 79 | 8976        | 8982        | 8987        | 8993        | 8998        | 9004        | 9009        | 9015        | 9020        | 9025        |
| 80 | <b>9031</b> | <b>9036</b> | <b>9042</b> | <b>9047</b> | <b>9053</b> | <b>9058</b> | <b>9063</b> | <b>9069</b> | <b>9074</b> | <b>9079</b> |
| 81 | 9085        | 9090        | 9096        | 9101        | 9106        | 9112        | 9117        | 9122        | 9128        | 9133        |
| 82 | 9138        | 9143        | 9149        | 9154        | 9159        | 9165        | 9170        | 9175        | 9180        | 9186        |
| 83 | 9191        | 9196        | 9201        | 9206        | 9212        | 9217        | 9222        | 9227        | 9232        | 9238        |
| 84 | 9243        | 9248        | 9253        | 9258        | 9263        | 9269        | 9274        | 9279        | 9284        | 9289        |
| 85 | 9294        | 9299        | 9304        | 9309        | 9315        | 9320        | 9325        | 9330        | 9335        | 9340        |
| 86 | 9345        | 9350        | 9355        | 9360        | 9365        | 9370        | 9375        | 9380        | 9385        | 9390        |
| 87 | 9395        | 9400        | 9405        | 9410        | 9415        | 9420        | 9425        | 9430        | 9435        | 9440        |
| 88 | 9445        | 9450        | 9455        | 9460        | 9465        | 9469        | 9474        | 9479        | 9484        | 9489        |
| 89 | 9494        | 9499        | 9504        | 9509        | 9513        | 9518        | 9523        | 9528        | 9533        | 9538        |
| 90 | <b>9542</b> | <b>9547</b> | <b>9552</b> | <b>9557</b> | <b>9562</b> | <b>9566</b> | <b>9571</b> | <b>9576</b> | <b>9581</b> | <b>9586</b> |
| 91 | 9590        | 9595        | 9600        | 9605        | 9609        | 9614        | 9619        | 9624        | 9628        | 9633        |
| 92 | 9638        | 9643        | 9647        | 9652        | 9657        | 9661        | 9666        | 9671        | 9675        | 9680        |
| 93 | 9685        | 9689        | 9694        | 9699        | 9703        | 9708        | 9713        | 9717        | 9722        | 9727        |
| 94 | 9731        | 9736        | 9741        | 9745        | 9750        | 9754        | 9759        | 9763        | 9768        | 9773        |
| 95 | 9777        | 9782        | 9786        | 9791        | 9795        | 9800        | 9805        | 9809        | 9814        | 9818        |
| 96 | 9823        | 9827        | 9832        | 9836        | 9841        | 9845        | 9850        | 9854        | 9859        | 9863        |
| 97 | 9868        | 9872        | 9877        | 9881        | 9886        | 9890        | 9894        | 9899        | 9903        | 9908        |
| 98 | 9912        | 9917        | 9921        | 9926        | 9930        | 9934        | 9939        | 9943        | 9948        | 9952        |
| 99 | 9956        | 9961        | 9965        | 9969        | 9974        | 9978        | 9983        | 9987        | 9991        | 9996        |
| N  | 0           | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           |

## MÓDULO 27

### MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

1. A soma das raízes da equação  $3 \cdot |x - 2| - 2x = 1$ , em que  $x$  é um número real, é

- a) 5      b) 6      c) 7      d) 8      e) 9

**RESOLUÇÃO:**

| $x \leq 2$                                                                                                   | $x \geq 2$                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $3 \cdot (-x + 2) - 2x = 1$<br>$-3x + 6 - 2x = 1$<br>$-5x = -5$<br>$x = 1 \in ]-\infty; 2]$<br>$V_1 = \{1\}$ | $3(x - 2) - 2x = 1$<br>$3x - 6 - 2x = 1$<br>$x - 6 = 1$<br>$x = 7 \in [2; +\infty[$<br>$V_2 = \{7\}$ |

$$V = V_1 \cup V_2 = \{1; 7\}$$

A soma das raízes da equação é  $1 + 7 = 8$

**Resposta: D**

2. Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a inequação  $|3x - 6| + |6 - x| > 12$

**RESOLUÇÃO:**

| $x \leq 2$                                                             | $2 \leq x \leq 6$                                                  | $x \geq 6$                                                            |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $-3x + 6 + 6 - x > 12$<br>$-4x > 0$<br>$x < 0$<br>$V_1 = ]-\infty; 0[$ | $3x - 6 + 6 - x > 12$<br>$2x > 12$<br>$x > 6$<br>$V_2 = \emptyset$ | $3x - 6 - 6 + x > 12$<br>$4x > 24$<br>$x > 6$<br>$V_3 = ]6; +\infty[$ |

**Resposta:  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = ]-\infty; 0[ \cup ]6; +\infty[$**

3. Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $|x^2 - 1| = x + 1$

**RESOLUÇÃO:**

- $x \leq -1 \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  (não serve) ou  $x = -1$ . Logo,  $V_1 = \{-1\}$
- $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -1$ . Logo,  $V_2 = \{-1; 0\}$
- $x \geq 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 1 \Rightarrow x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x = -1$  (não serve) ou  $x = 2$ . Logo,  $V_3 = \{2\}$

O conjunto verdade da equação é  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \{-1; 0; 2\}$

**Resposta:  $V = \{-1; 0; 2\}$**

4. O conjunto verdade, em  $\mathbb{R}$ , da equação

$$\sqrt[3]{(2x - 5)^3} + \sqrt{(x - 20)^2} = 20 \text{ é}$$

- a)  $\emptyset$       b)  $\mathbb{R}$       c)  $\{15\}$       d)  $\{5\}$       e)  $\{5; 15\}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sqrt[3]{(2x - 5)^3} + \sqrt{(x - 20)^2} = 20 \Leftrightarrow 2x - 5 + |x - 20| = 20 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x + |x - 20| = 25$$

| $x \leq 20$                                    | $x \geq 20$                                                                           |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $2x - x + 20 = 25$<br>$x = 5$<br>$V_1 = \{5\}$ | $2x + x - 20 = 25$<br>$3x = 45$<br>$x = 15 \notin [20; +\infty[$<br>$V_2 = \emptyset$ |

$$V = V_1 \cup V_2 = \{5\}$$

**Resposta: D**

## MÓDULO 28

### PROPRIEDADES E GRÁFICOS DA FUNÇÃO MODULAR

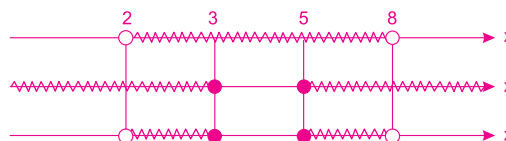
1. (FGV) – A soma dos valores inteiros de  $x$  que satisfazem simultaneamente as desigualdades  $|x - 5| < 3$  e  $|x - 4| \geq 1$  é

- a) 25      b) 13      c) 16      d) 18      e) 21

**RESOLUÇÃO:**

- $|x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$
- $|x - 4| \geq 1 \Leftrightarrow x - 4 \leq -1$  ou  $x - 4 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 3$  ou  $x \geq 5$

De a e b resulta:

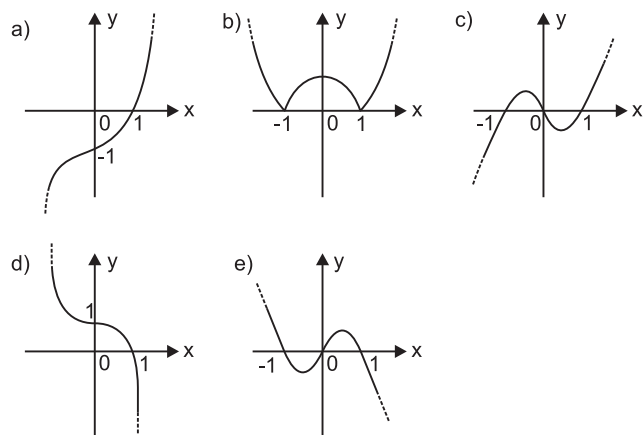


Portanto  $2 < x \leq 3$  ou  $5 \leq x < 8$ .

Os valores inteiros de  $x$  que satisfazem simultaneamente as duas desigualdades do enunciado são 3, 5, 6 e 7. A soma desses números é  $3 + 5 + 6 + 7 = 21$ .

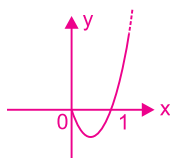
**Resposta: E**

2. Dos gráficos dados a seguir, o que melhor representa a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x \cdot |x| - x$  é

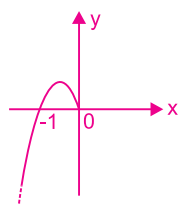


#### RESOLUÇÃO:

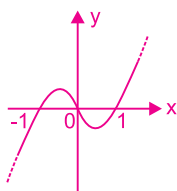
a)  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = x^2 - x$  e o gráfico é



b)  $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x^2 - x$  e o gráfico é



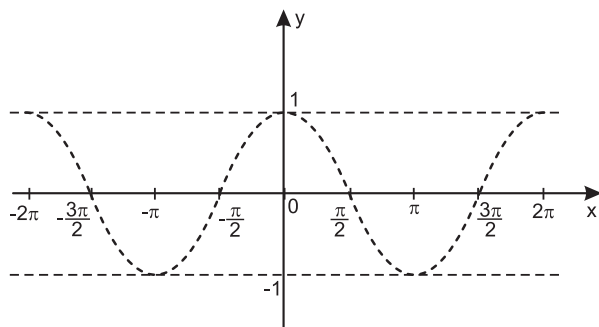
Assim sendo, o melhor esboço para o gráfico de  $f$  é



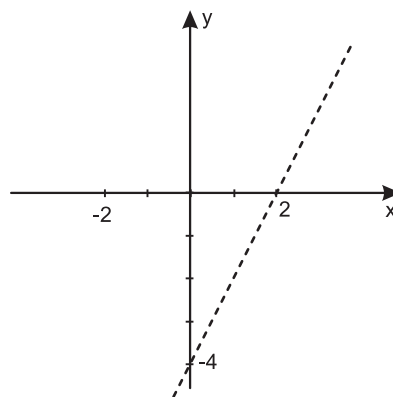
Resposta: C

3. Esboçar os gráficos das funções de  $A \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definidas por

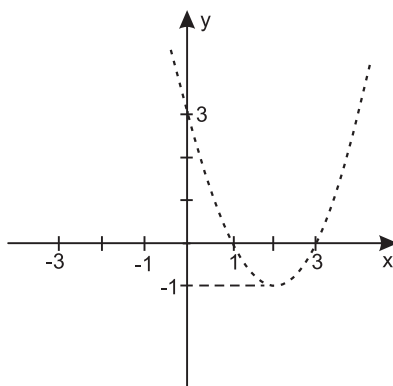
a)  $f(x) = |\cos x|$ ,  $A = [-2\pi; 2\pi]$



b)  $g(x) = 2|x| - 4$ ,  $A = \mathbb{R}$

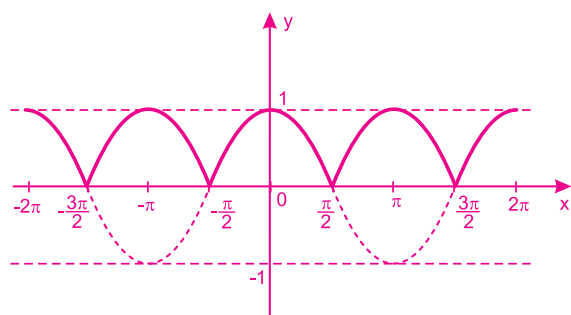


c)  $h(x) = ||x|^2 - 4|x| + 3|$ ,  $A = \mathbb{R}$

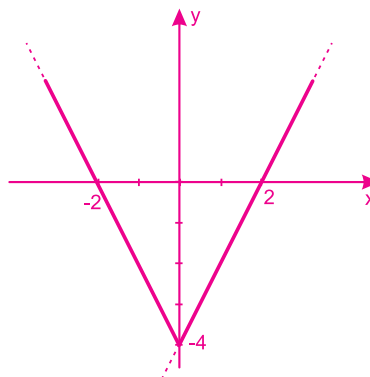


#### RESOLUÇÃO:

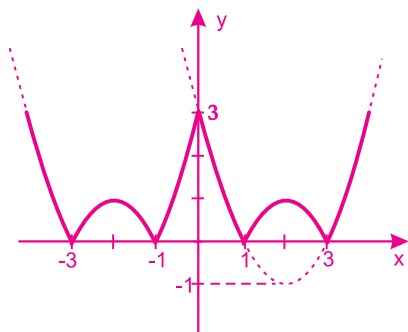
a)



b)  $g(x) = 2|x| - 4$ ,  $A = \mathbb{R}$



c)  $h(x) = |x|^2 - 4|x| + 3$ ,  $A = \mathbb{R}$



4. (FUVEST) – Seja  $f(x) = |x| - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e considere também a função composta  $g(x) = f(f(x))$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- Esboce o gráfico da função  $f$ , no desenho da folha de respostas, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
- Esboce o gráfico da função  $g$ , no desenho da folha de respostas, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
- Determine os valores de  $x$  para os quais  $g(x) = 5$ .

Gráfico de  $f$

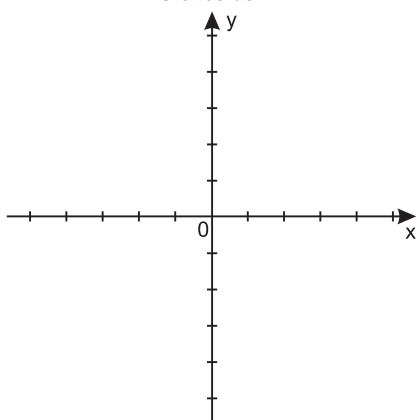
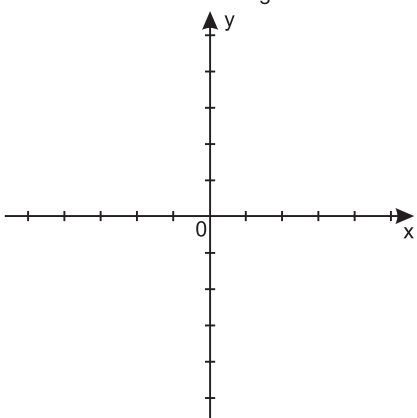


Gráfico de  $g$

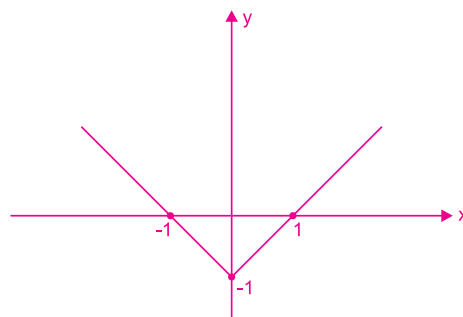


# RESOLUÇÃO:

a) Considerando a função  $f(x) = |x| - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

cujo gráfico é

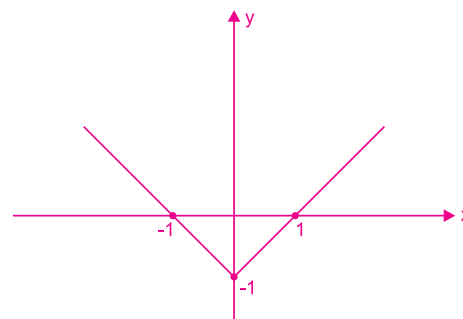


As interseções do gráfico com os eixos são os pontos  $(1; 0)$ ,  $(-1; 0)$  e  $(0; -1)$ .

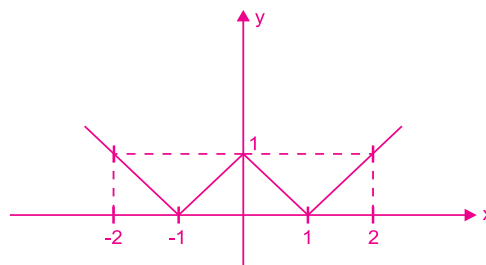
b) Sendo  $g(x) = f[f(x)]$  e  $f(x) = |x| - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , resulta

$$g(x) = f[f(x)] = |f(x)| - 1 = ||x| - 1| - 1$$

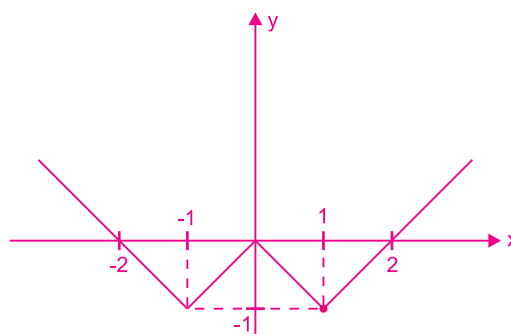
I) De acordo com o item anterior, o gráfico de  $f(x) = |x| - 1$  é



II) O gráfico de  $h(x) = ||x| - 1|$  é



III) O gráfico de  $g(x) = ||x| - 1| - 1$  é



As interseções do gráfico com os eixos coordenados são os pontos  $(2; 0)$ ,  $(0; 0)$  e  $(-2; 0)$ .

$$\begin{aligned} c) \quad g(x) = 5 &\Leftrightarrow ||x| - 1| - 1 = 5 \Leftrightarrow ||x| - 1| = 6 \Leftrightarrow |x| - 1 = 6 \text{ ou } |x| - 1 = -6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x| = 7 \text{ ou } |x| = -5 \Leftrightarrow x = \pm 7 \Leftrightarrow V = \{-7; 7\} \end{aligned}$$

Respostas: a) Gráfico e os pontos de interseção são  $(1; 0)$ ,  $(-1; 0)$  e  $(0; -1)$ .

b) Gráfico e os pontos de interseção são  $(2; 0)$ ,  $(0; 0)$  e  $(-2; 0)$

c)  $V = \{-7; 7\}$

## MÓDULO 29

### DIVISÃO EM $\mathbb{N}$ , MÚLTIPLOS E DIVISORES EM $\mathbb{Z}$ , NÚMERO PRIMO E COMPOSTO

1. (UNIFESP) – Dia 20 de julho de 2008 caiu num domingo. Três mil dias após essa data, cairá

- a) numa quinta-feira.                      b) numa sexta-feira.  
c) num sábado.                              d) num domingo.  
e) numa segunda-feira.

#### RESOLUÇÃO:

Observando que  $\begin{array}{r} 3\,000 \\ 4 \overline{) 428} \end{array} \Leftrightarrow 3\,000 = 428 \cdot 7 + 4$  concluímos que

daqui a 3 000 dias terão se passado 428 semanas, mais quatro dias. Assim sendo, se o dia 20/7/2008 foi um domingo, então 3 000 dias depois será uma QUINTA-FEIRA.

Resposta: A

2. (UFCEG) – Por segurança, atualmente, os números primos são importantes para criar mensagens por meio de códigos\* e enviá-las via Internet. Para isso, usam-se números primos que tenham muitos dígitos. Em relação a números primos, quantos números naturais n

existem de modo que  $\frac{n+10}{n}$  é primo?

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3                      e) 4

\* Sistema de sinais secretos utilizados em correspondências e comunicações.

#### RESOLUÇÃO:

$$\frac{n+10}{n} = \frac{n}{n} + \frac{10}{n} = 1 + \frac{10}{n}$$

Se  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n = 1, 2, 5, 10$ , pois n é divisor de 10. Os valores assumidos pela expressão  $\frac{n+10}{n}$  são, portanto, 11, 6, 3 e 2 dos quais 2, 3 e 11 são primos.

Resposta: D

3. (ESPM) – Um escritório possui duas salas quadradas cujos lados medem números inteiros de metros. Se a diferença entre suas áreas é de 11 m<sup>2</sup>, a soma dessas áreas é igual a:

- a) 57 m<sup>2</sup>                      b) 59 m<sup>2</sup>                      c) 61 m<sup>2</sup>                      d) 63 m<sup>2</sup>                      e) 65 m<sup>2</sup>

#### RESOLUÇÃO:

Sejam x e y inteiros as medidas dos lados das salas quadradas.

Devemos ter  $x^2 - y^2 = 11$  e, portanto,  $(x+y)(x-y) = 11 \Leftrightarrow (x+y = 11 \text{ e } x-y = 1) \text{ ou } (x+y = 1 \text{ e } x-y = 11) \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 5$ , pois  $x > 0$  e  $y > 0$ .

A soma das áreas é  $x^2 + y^2 = 6^2 + 5^2 = 61$ .

Resposta: C

4.

- a) Decomponha 120 em fatores primos;  
b) Escreva o conjunto dos divisores naturais de 120;  
c) Determine o número de divisores naturais de 600.

#### RESOLUÇÃO:

a)

|     |   |
|-----|---|
| 120 | 2 |
| 60  | 2 |
| 30  | 2 |
| 15  | 3 |
| 5   | 5 |
| 1   |   |

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

b)  $D_+(120) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$

c) Decompondo 600 em fatores primos obtém-se  $600 = 2^3 \cdot 2^1 \cdot 5^2$ .

Assim sendo, o número de divisores naturais de 600 é igual a  $(3+1)(1+1)(2+1) = 24$ .

5. (EPCAR) – Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770.

O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é:

- a) 6                      b) 8                      c) 10                      d) 12

#### RESOLUÇÃO:

Sendo n um número natural par devemos ter

$$(n-6) + (n-4) + (n-2) + n + (n+2) + (n+4) + (n+6) = 770 \Rightarrow 7n = 770 \Rightarrow n = 110.$$

O maior desses números é  $110 + 6 = 116 = 2^2 \cdot 29^1$  que tem  $(2+1)(1+1) = 6$  divisores naturais.

Resposta: A

6. (FGV)

- a) Determine todos os números naturais que satisfazem simultaneamente as inequações:  
 $10^{-1}x \geq 0,06$  e  $10^{-1}x \leq 0,425$
- b) Os sistemas de inequações são úteis para resolver antigos problemas como este, aproximadamente, do ano 250:  
 Três estudantes receberam cada um uma mesma lista de palavras sinônimas que deveriam ser escolhidas em pares. Cada palavra tinha uma única palavra sinônima correspondente. Dentro do tempo permitido, o primeiro colocado conseguiu 21 pares corretos; o segundo colocado tinha dois terços dos pares corretos e o terceiro, quatro a mais do que a metade do número de pares corretos. Qual era o total de pares corretos de palavras sinônimas?

**RESOLUÇÃO:**

a) Se  $x \in \mathbb{N}$ , então:

$$\begin{cases} 10^{-1} \cdot x \geq 0,06 \\ 10^{-1} \cdot x \leq 0,425 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,06 \cdot 10 \\ x \leq 0,425 \cdot 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,6 \\ x \leq 4,25 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 4\}$$

b) Se  $x \in \mathbb{N}$  for o número total de pares corretos, então:

$$1) \begin{cases} 21 < x \\ \frac{2x}{3} < 21 \\ \frac{1}{2}x + 4 < \frac{2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 21 \\ x < 31,5 \\ x > 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \{25; 26; 27; 28; 29; 30; 31\}$$

$$2) \frac{2x}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ é múltiplo de } 3$$

$$3) \frac{1}{2}x + 4 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ é múltiplo de } 2$$

4) De (1), (2) e (3), tem-se:  $x = 30$

Respostas: a)  $\{1; 2; 3; 4\}$   
 b) 30 pares

## MÓDULO 30

### MÁXIMO DIVISOR COMUM, MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM E PROPRIEDADES

1. (UFF)

- a) Escreva o número 306 como produto de números primos.
- b) Considere os números naturais  $a = 2^{17} \times 3^{28} \times 7^{10}$  e  $b = 2^9 \times 5^2 \times 7^{16}$ . Escreva o maior divisor comum e o menor múltiplo comum de  $a$  e  $b$  como produto de potências de números primos.
- c) Quantos divisores inteiros positivos o número  $b = 2^9 \times 5^2 \times 7^{16}$  possui?

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{array}{r|l} 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 306 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$$

$$b) \text{ mdc}(a, b) = 2^9 \cdot 7^{10} \text{ e } \text{mmc}(a, b) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^2 \cdot 7^{16}.$$

Obs.: Para obter o mdc( $a, b$ ) efetuamos o produto dos fatores primos comuns a  $a$  e  $b$  considerados com os seus menores expoentes; para obter o mmc( $a, b$ ) efetuamos o produto dos fatores primos comuns e não comuns de  $a$  e  $b$  considerados com os seus maiores expoentes.

$$c) \text{ O número de divisores positivos de } b, \\ n[D_+(b)] = (9+1)(2+1)(16+1) = 10 \cdot 3 \cdot 17 = 510$$

2. Calcular, pelo método das divisões sucessivas, o mdc (408, 300).

**RESOLUÇÃO:**

|     | 1   | 2   | 1  | 3  | 2  |
|-----|-----|-----|----|----|----|
| 408 | 300 | 108 | 84 | 24 | 12 |
| 108 | 84  | 24  | 12 | 0  |    |

Resposta:  $\text{mdc}(408, 300) = 12$

3. Calcular, por fatoração simultânea, o mmc(18, 24, 42).

**RESOLUÇÃO:**

|            |   |
|------------|---|
| 18, 24, 42 | 2 |
| 9, 12, 21  | 2 |
| 9, 6, 21   | 2 |
| 9, 3, 21   | 3 |
| 3, 1, 7    | 3 |
| 1, 1, 7    | 7 |
| 1, 1, 1    |   |

Resposta:  $\text{mmc}(18, 24, 21) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$

4. (ESPCEx) – Este ano, duas empresas patrocinarão a premiação, em dinheiro, dos alunos de uma escola pelo destaque no critério “Melhor Rendimento Escolar”. A empresa *Alfa* doará um montante de R\$ 9.600,00 e a empresa *Bravo* de R\$ 7.800,00. Cada aluno deve receber como prêmio um cheque de somente uma das empresas e todos os cheques devem ter o mesmo valor. Se todo esse montante for distribuído, o número mínimo de alunos que poderá ser contemplado nessa premiação é de

- a) 25      b) 29      c) 30      d) 32      e) 40

**RESOLUÇÃO:**

O valor de cada cheque deve ser igual, em reais, ao mdc (9600; 7800) = 600.

Assim, o número mínimo de alunos que poderá ser contemplados é igual a  $(9600 + 7800) \div 600 = 29$

Obs.:

|      | 1    | 4    | 3   |
|------|------|------|-----|
| 9600 | 7800 | 1800 | 600 |
| 1800 | 600  | 0    |     |

Resposta: B

5. (UEL) – Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s.

Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida, pela primeira vez, e quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro ciclistas, respectivamente?

- a) 5 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 13 voltas.  
b) 6 minutos, 9 voltas, 10 voltas e 12 voltas.  
c) 7 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 12 voltas.  
d) 8 minutos, 8 voltas, 9 voltas e 10 voltas.  
e) 9 minutos, 9 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

**RESOLUÇÃO:**

Os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida após mmc(40, 36, 30) segundos = 360 segundos = 6 minutos. O primeiro terá dado  $360 : 40 = 9$  voltas, o segundo  $360 : 36 = 10$  voltas e o terceiro  $360 : 30 = 12$  voltas.

Resposta: B

## MÓDULO 31

### NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI, CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE E NÚMEROS REAIS

1. Sendo  $D(a)$  o conjunto dos divisores do número inteiro  $a$ , assinale a afirmação **falsa**.

- a) o número 3 é primo, pois  $D(3) = \{1, -1, 3, -3\}$   
b) o número 9 é composto, pois  $D(9) = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$   
c) o número 35 é composto, pois  $D(35) = \{1, -1, 5, -5, 7, -7, 35, -35\}$   
d) os números 9 e 35 são primos entre si, pois  $\text{mdc}(9, 35) = 1$   
e) a fração  $\frac{26}{91}$ , é irredutível, pois  $\text{mdc}(26, 91) = 1$

**RESOLUÇÃO:**

A afirmação falsa é a alternativa e, pois  $26 = 2 \cdot 13$  e  $91 = 7 \cdot 13$  e, assim,

$$\text{mdc}(26, 91) = 13. \text{ Logo, } \frac{26}{91} = \frac{2}{7}.$$

Resposta: E

2. Considere  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = 3n + 9$  e  $y = 5n + 18$ . Lembrando que  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a; a \pm b) \forall a, b \in \mathbb{N}$  podemos afirmar que  $\text{mdc}(x, y)$  pode ser

- a) 1, 2 ou 3      b) 1, 3 ou 6      c) 1, 3 ou 9  
d) 1, 6 ou 9      e) 1, 2 ou 9

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(3n + 9, 5n + 18) = \text{mdc}(3n + 9, 2n + 9) = \text{mdc}(2n + 9, n) = \text{mdc}(n, n + 9) = \text{mdc}(n, 9).$$

Então, podemos afirmar que  $\text{mdc}(n, 9) = 1$ ,  $\text{mdc}(n, 9) = 3$  ou  $\text{mdc}(n, 9) = 9$ , que são os divisores naturais de 9.

Resposta: C

3. O número natural  $n = 166507$  é divisível por

- a) 3      b) 5      c) 7      d) 11      e) 13

**RESOLUÇÃO:**

a)  $n$  não é divisível por 3, pois a soma dos algarismos de  $n$  é  $1 + 6 + 6 + 5 + 0 + 7 = 25$ .

b)  $n$  não é divisível por 5, pois o algarismo das unidades de  $n$  é 7, portanto diferente de 0 e diferente de 5.

c)  $n$  não é divisível por 7, pois o resto da divisão de  $n$  por 7 é 5.

d)  $n$  é divisível por 11, pois sendo  $x$  a soma dos algarismos de ordem ímpar e  $y$  a soma dos algarismos de ordem par de  $n$ , temos  $x = 1 + 6 + 0 = 7$  e  $y = 6 + 5 + 7 = 18$ . Concluímos que  $|x - y| = 11$ , que é um número divisível por 11.

e)  $n$  não é divisível por 13, pois o resto da divisão de  $n$  por 13 é 3.

Resposta: D

4. Obtenha a fração geratriz de cada dízima periódica dada a seguir:

- a) 0,666...      b) 1,222...      c) 0,12333...

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{a) } 0,666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{b) } 1,222... = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 0,12333... &= \frac{12,333...}{100} = \frac{12 + \frac{3}{9}}{100} = \frac{12 + \frac{1}{3}}{100} = \\ &= \frac{\frac{37}{3}}{100} = \frac{37}{300} \end{aligned}$$

5. (UFTM) – Assinale a alternativa que apresenta um número que é real, mas não é racional.

- a)  $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$       b)  $\pi^{\frac{-1}{2}} \cdot \sqrt{\pi}$       c)  $\log_2 4$
- d)  $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$       e)  $\log_3 \frac{1}{27}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{a) } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } \pi^{\frac{-1}{2}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{c) } \log_2 4 = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{e) } \log_3 \frac{1}{27} = -3 \in \mathbb{Q}$$

**Resposta: D**

## MÓDULO 32

### SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1. O sistema de **numeração decimal**, ou de **base 10**, atualmente de uso universal, utiliza os 10 algarismos do conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e a **representação posicional**.

No sistema de numeração decimal, o numeral  $(2347)_{10}$  ou simplesmente **2347**, por exemplo, é a representação simbólica de

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

O sistema de numeração de **base b**, com  $b \in \mathbb{N}$  e  $b > 1$ , utiliza os **b** algarismos do conjunto  $\{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$  e a **representação posicional** com as mesmas características do sistema decimal.

No sistema de numeração de base 4, o numeral  $(2301)_4$ , por exemplo, é a representação simbólica de

$$2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

Com base nesse texto e em conhecimentos já adquiridos,

- a) representar  $(426)_7$  no sistema de base 10.  
b) escrever o número 2574 no sistema de base 6.

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{a) } (426)_7 = 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 196 + 14 + 6 = 216$$

Logo,  $(426)_7 = (216)_{10}$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 2574 \quad | \quad 6 \\ \quad 0 \quad | \quad 429 \quad | \quad 6 \\ \quad \quad 3 \quad | \quad 71 \quad | \quad 6 \\ \quad \quad \quad 5 \quad | \quad 11 \quad | \quad 6 \\ \quad \quad \quad \quad 5 \quad | \quad \quad \quad | \quad 1 \end{array}$$

Logo,  $(2574)_{10} = (15530)_6$

2. No sistema de base 12, os algarismos utilizados são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b. Passar o numeral 59323 do sistema decimal para o sistema de base 12.

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{array}{r} 59323 \quad | \quad 12 \\ \quad 7 \quad | \quad 4943 \quad | \quad 12 \\ \quad \quad 11 \quad | \quad 411 \quad | \quad 12 \\ \quad \quad \quad 3 \quad | \quad 34 \quad | \quad 12 \\ \quad \quad \quad \quad 10 \quad | \quad 2 \end{array}$$

$$\text{Resposta: } 59323 = (2 \text{ (10) } 3 \text{ (11) } 7)_{12} = (2 \text{ a } 3 \text{ b } 7)_{12}$$

**DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO E  
OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA**

3. (FUVEST) – Um número natural  $N$  tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de  $N$ . Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de  $N$  é igual a 8, então o algarismo das centenas de  $N$  é:

- a) 4      b) 5      c) 6      d) 7      e) 8

**RESOLUÇÃO:**

Seja  $N = "abc"$  o número de três algarismos.

Assim, o algarismo das centenas é 6, pois

$$1) \text{ "abc" } - 396 = \text{ "cba" } \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 396 = 100c + 10b + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 99a - 99c = 396 \Leftrightarrow a - c = 4$$

$$2) \begin{cases} a - c = 4 \\ a + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Resposta: C

4. (MACKENZIE) – Um número primo e positivo é formado por 2 algarismos não nulos. Se, entre esses algarismos, colocarmos um zero, o número ficará aumentado em 360 unidades. Dessa forma, a soma desses 2 algarismos pode ser

- a) 8      b) 7      c) 6      d) 9      e) 10

**RESOLUÇÃO:**

Seja  $10a + b$  um número primo positivo de 2 algarismos, com a dezenas e b unidades. Pelo enunciado, temos:

$$100a + b - (10a + b) = 360 \Leftrightarrow 90a = 360 \Leftrightarrow a = 4$$

O algarismo das dezenas é 4, e de 40 a 49 os únicos primos são 41, 43 e 47.

Assim sendo, a soma dos dois algarismos é  $4 + 1 = 5$  ou  $4 + 3 = 7$  ou  $4 + 7 = 11$ . Pode, pois, ser 7.

Resposta: B

5. (UF-TO) – Dizemos que um número palíndromo é um número que não se altera quando os algarismos que o compõe são escritos na ordem inversa. Considere um número palíndromo de cinco algarismos tal que a soma de seus algarismos é 31 e o algarismo correspondente à dezena é 2. A soma dos algarismos do próximo(seguinte) número palíndromo é:

- a) 34      b) 28      c) 32      d) 33      e) 24

**RESOLUÇÃO:**

O número considerado é da forma  $a2b2a$ , em que  $a$  e  $b$  são algarismos do Sistema Decimal de Numeração, sendo  $a \neq 0$ , com  $a + 2 + b + 2 + a = 31 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2a + b = 27 \Leftrightarrow a = 9$  e  $b = 9$ . Assim,  $a2b2a = 92929$  e o próximo número palíndromo é 93039, cuja soma dos algarismos é  $9 + 3 + 0 + 3 + 9 = 24$ .

Resposta: E

1. Sendo  $i$  a unidade imaginária, obtenha:

- a)  $(2 + 3i)(4 - 5i)$       b)  $(3 + 4i)(3 - 4i)$   
 c)  $(1 + i)^2$       d)  $(1 + i)^6 + (1 - i)^6$

**RESOLUÇÃO:**

$$a) (2 + 3i)(4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 - 10i + 12i + 15 = 23 + 2i$$

$$b) (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

$$c) (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$d) (1 + i)^6 + (1 - i)^6 = [(1 + i)^2]^3 + [(1 - i)^2]^3 = (2i)^3 + (-2i)^3 = 8i^3 - 8i^3 = 0$$

2. (UERJ) – João desenhou um mapa do quintal da sua casa onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem  $O$  na base de uma mangueira, e os eixos  $Ox$  e  $Oy$  com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto  $(x; y)$ , nesse sistema, é a representação de um número complexo  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ .

Para indicar a posição  $(x_1; y_1)$  e a distância  $d$  do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa:

$$x_1 + iy_1 = (1 + i)^9$$

Calcule:

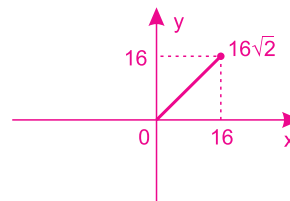
- a) as coordenadas  $(x_1; y_1)$ ;  
 b) o valor de  $d$ .

**RESOLUÇÃO:**

$$a) x_1 + y_1 i = (1 + i)^9 = (1 + i)^8 \cdot (1 + i) = [(1 + i)^2]^4 \cdot (1 + i) = (2i)^4 \cdot (1 + i) = 16(1 + i) = 16 + 16i.$$

$$\text{Logo, } (x_1; y_1) = (16; 16)$$

$$b) \text{ A distância de } (16; 16) \text{ à origem é } d = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$$



Respostas: a)  $(x; y) = (16; 16)$

$$b) d = 16\sqrt{2}$$

3. O número complexo  $z = \frac{7+4i}{1+2i}$  em que  $i^2 = -1$  é igual a

- a)  $7+2i$                       b)  $3-2i$                       c)  $3+2i$   
d)  $7-2i$                       e)  $6+2i$

**RESOLUÇÃO:**

$$z = \frac{7+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{7-14i+4i+8}{1+4} = \frac{15-10i}{5} = 3-2i$$

**Resposta: B**

4. (FUVEST) – Sabendo que  $\alpha$  é um número real e que a parte imaginária do número complexo  $\frac{2+i}{\alpha+2i}$  é zero, então  $\alpha$  é:

- a)  $-4$                       b)  $-2$                       c)  $1$                       d)  $2$                       e)  $4$

**RESOLUÇÃO:**

$$\frac{2+i}{\alpha+2i} = \frac{2+i}{\alpha+2i} \cdot \frac{\alpha-2i}{\alpha-2i} = \frac{2\alpha-4i+\alpha i-2i^2}{\alpha^2-4i^2} =$$

$$= \frac{(2\alpha+2)+(\alpha-4)i}{\alpha^2+4} = \frac{2\alpha+2}{\alpha^2+4} + \frac{\alpha-4}{\alpha^2+4} i$$

Se a parte imaginária é zero, então  $\alpha-4=0 \Leftrightarrow \alpha=4$

**Resposta: E**

## MÓDULO 34

### DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO E OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA

1. Sendo  $i$  a unidade imaginária e  $n$  um número natural, assinale a afirmação **falsa**.

- a)  $i^0 = 1$ ;  $i^1 = i$ ;  $i^2 = -1$ ;  $i^3 = -i$   
b)  $i^n = i^r$ , em que  $r = 0, 1, 2, 3$  é o resto da divisão de  $n$  por 4.  
c)  $i^n \in \{1; i; -1; -i\}$   
d)  $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0, \forall n$   
e) uma das anteriores é falsa.

**Resposta: E**

2. Obtenha

a)  $i^{2007} + i^{2009} + i^{1006} + i^{1008} =$

b)  $i^{-343} =$                       c)  $\sum_{n=5}^{18} i^n =$

**RESOLUÇÃO:**

a)  $i^{2007} + i^{2009} + i^{1006} + i^{1008} = i^3 + i^1 + i^2 + i^0 = -i + i + 1 - 1 = 0$

b)  $i^{-343} = \frac{1}{i^{343}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i$

c)  $\sum_{n=5}^{18} i^n = i^5 + i^6 + i^7 + \dots + i^{18} = i^5 + i^6 = i + (-1) = -1 + i$   
12 parcelas têm soma zero

3. (MACKENZIE) – Se  $i^2 = -1$ , então

$(1+i) \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i)^3 \cdot (1+i)^4$  é igual a

- a)  $2i$                       b)  $4i$                       c)  $8i$                       d)  $16i$                       e)  $32i$

**RESOLUÇÃO:**

$$(1+i)(1+i)^2 \cdot (1+i)^3 \cdot (1+i)^4 = (1+i)^{10} = [(1+i)^2]^5 = (1+2i+i^2)^5 =$$

$$= (2i)^5 = 32i^5 = 32i$$

**Resposta: E**

4. Resolva, em  $\mathbb{C}$ , as equações:

a)  $3x + 3i = 11 + 2xi$

b)  $x^2 - 10x + 29 = 0$

c)  $2z + \bar{z} = 12 + 5i$ , em que  $\bar{z}$  representa o conjugado de  $z$ .

#### RESOLUÇÃO:

a)  $3x + 3i = 11 + 2xi \Leftrightarrow (3 - 2i)x = 11 - 3i \Leftrightarrow x = \frac{11 - 3i}{3 - 2i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 + i \Leftrightarrow V = \{3 + i\}$

b)  $x^2 - 10x + 29 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow x = 5 \pm 2i \Leftrightarrow V = \{5 - 2i; 5 + 2i\}$

c) Sendo  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , então  $2z + \bar{z} = 12 + 5i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2yi + x - yi = 12 + 5i \Leftrightarrow 3x + yi = 12 + 5i \Leftrightarrow x = 4 \text{ e } y = 5 \text{ e, portanto, } V = \{4 + 5i\}$

5. (AFA) – Sejam  $z = x + yi$  ( $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $y \in \mathbb{R}^*$  e  $i$  a unidade imaginária),  $\bar{z}$  o conjugado de  $z$  e  $\lambda$  o lugar geométrico dos pontos  $P(x; y)$  do plano cartesiano para os quais  $z \cdot \bar{z} = 2x + 3$ .

Se  $A$  e  $B$  são os pontos de intersecção de  $\lambda$  com o eixo  $\overline{Oy}$  e se  $A'$  é o ponto de intersecção de  $\lambda$  com o eixo  $\overline{Ox}$  que possui a menor abscissa, então a área do triângulo  $A'AB$  é, em unidades de área, igual a

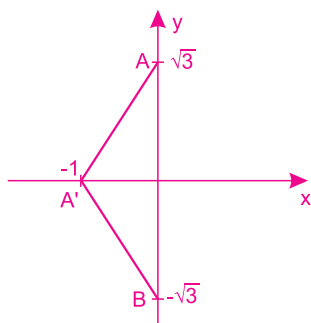
- a)  $2\sqrt{3}$       b)  $2\sqrt{2}$       c)  $\sqrt{3}$       d)  $\sqrt{2}$

#### RESOLUÇÃO:

Para  $z = x + yi$ ; resulta  $z \cdot \bar{z} = 2x + 3 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ .

Para  $x = 0$  temos  $y = \pm\sqrt{3}$  e, portanto, os pontos  $A$  e  $B$  são  $(0; \sqrt{3})$  e  $(0; -\sqrt{3})$ .

Para  $y = 0$  resulta  $x = 3$  ou  $x = -1$  e, assim,  $A'(-1; 0)$  pois  $-1$  é a menor abscissa.



A área do triângulo  $A'AB$  é  $\frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$ .

Resposta: C

## MÓDULO 35

### FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. Dado o número complexo  $z = -3\sqrt{3} + 3i$ , em que  $i^2 = -1$ , determinar

- a) o módulo de  $z$ .  
b) o argumento principal de  $z$ .  
c) a forma trigonométrica de  $z$ .

#### RESOLUÇÃO:

Para  $z = -3\sqrt{3} + 3i = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), temos  $a = -3\sqrt{3}$  e  $b = 3$

a)  $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = 6$

b)  $\begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$

c)  $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$

$z = 6 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

2. (UNESP) – Considere os números complexos  $w = 4 + 2i$  e  $z = 3a + 4ai$ , onde  $a$  é um número real positivo e  $i$  indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é  $|z|$  e a base é a parte real de  $z \cdot w$ , determine  $a$  de modo que a área do triângulo seja  $90 \text{ cm}^2$ .

#### RESOLUÇÃO:

1)  $\begin{cases} z = 3a + 4ai \\ w = 4 + 2i \end{cases} \Rightarrow zw = 4a + 22ai \Rightarrow \text{Re}(zw) = 4a$

2)  $|z| = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$

3) A área do triângulo, em centímetros quadrados, é igual a:

$$\frac{|z| \cdot \text{Re}(zw)}{2} = \frac{5a \cdot 4a}{2} = 10a^2$$

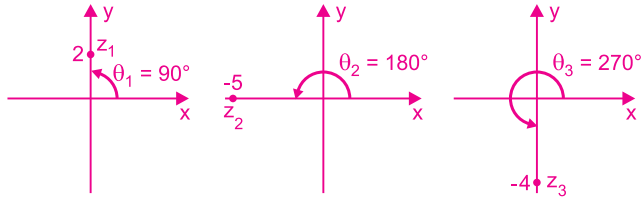
Assim:  $10a^2 = 90 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$ , pois  $a$  é positivo  
Resposta:  $a = 3 \text{ cm}$

3. Sejam, respectivamente  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  os argumentos principais dos números complexos  $z_1 = 2i$ ,  $z_2 = -5$  e  $z_3 = -4i$ . A soma  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  resulta

- a)  $180^\circ$     b)  $270^\circ$     c)  $360^\circ$     d)  $450^\circ$     e)  $540^\circ$

**RESOLUÇÃO:**

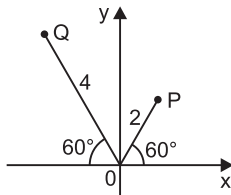
Representando no plano Argand-Gauss os afixos de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  temos:



$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 90^\circ + 180^\circ + 270^\circ = 540^\circ$$

Resposta: E

4. Na figura, os pontos P e Q são, respectivamente, os afixos dos números complexos  $z$  e  $w$ , no plano Argand-Gauss. Calculando  $|z + w| + |z - w|$  obtém-se



- a) 4    b) 8    c)  $2\sqrt{10}$     d) 40    e)  $2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{cases} z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ w = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ w = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + i\sqrt{3} \\ w = -2 + i2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z + w = -1 + 3\sqrt{3}i \\ z - w = 3 - \sqrt{3}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z + w| = \sqrt{1 + 27} \\ |z - w| = \sqrt{9 + 3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z + w| + |z - w| = \sqrt{28} + \sqrt{12} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$$

Resposta: E

## MÓDULO 36

### OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA: MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO E POTENCIAÇÃO

1. Sejam  $i$  a unidade imaginária e os números complexos

$z_1 = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$  e  $z_2 = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$ . Calcule:

- a)  $z_1 \cdot z_2$     b)  $\frac{z_1}{z_2}$     c)  $z_1^8$

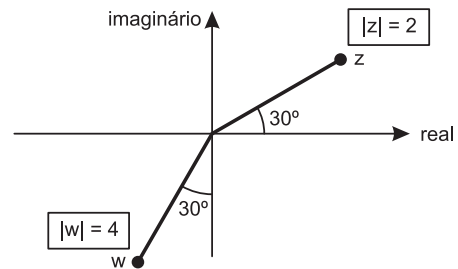
**RESOLUÇÃO:**

a)  $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2(0 + i) = 2i$

b)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1} \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$

c)  $z_1^8 = 2^8 (\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ) = 256(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 256 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128 + 128\sqrt{3}i$

2. (UFRJ) – No jogo *Batalha Complexa* são dados números complexos  $z$  e  $w$ , chamados *mira* e *alvo* respectivamente. O tiro certo de  $z$  em  $w$  é o número complexo  $t$  tal que  $tz = w$ .



Considere a mira  $z$  e o alvo  $w$  indicados na figura acima. Determine o tiro certo de  $z$  em  $w$ .

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{cases} z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \\ w = 4(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \\ t \cdot z = w \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{w}{z} = \frac{4(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)}{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)} = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

Resposta:  $t = -\sqrt{3} + i$

3. (PUC) – Dado o número complexo  $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}$ , então se  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são as respectivas imagens de  $z$ ,  $z^2$  e  $z^3$  no plano complexo, a medida do maior ângulo interno do triângulo  $P_1P_2P_3$  é
- a)  $75^\circ$     b)  $100^\circ$     c)  $120^\circ$     d)  $135^\circ$     e)  $150^\circ$

#### RESOLUÇÃO:

Dado o número complexo

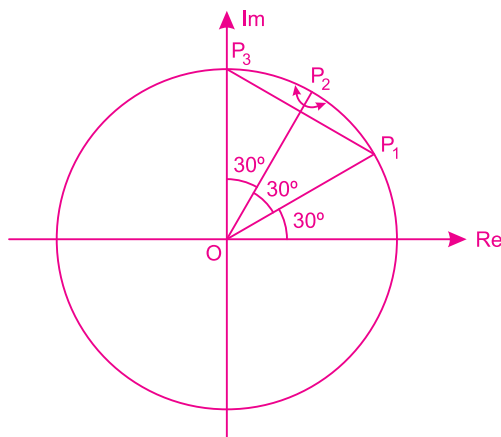
$$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

temos:

$$z^2 = \cos \left( 2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z^3 = \cos \left( 3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left( 3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

Os afixos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , que são as respectivas imagens de  $z$ ,  $z^2$  e  $z^3$ , no plano complexo, determinam a seguinte figura:



No triângulo isósceles  $OP_1P_2$ , temos:  $\widehat{OP_1P_2} = \widehat{OP_2P_1} = 75^\circ$

Como os triângulos  $OP_1P_2$  e  $OP_3P_2$  são congruentes, temos:

$$\widehat{OP_2P_3} = \widehat{OP_2P_1} = 75^\circ.$$

Portanto, o ângulo  $\widehat{P_1P_2P_3}$  (maior ângulo do triângulo  $P_1P_2P_3$ ) resulta  $75^\circ + 75^\circ = 150^\circ$ .

Resposta: E

4. (UFCG) – José, fã da Matemática, bolou a seguinte estratégia para não esquecer sua senha bancária. Escolheu o número complexo

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ e criou uma senha usando o menor inteiro positivo}$$

$n$ , que satisfaz a igualdade  $z^n = -1$ . Esse número  $n$  vale:

- a) 4.    b) 5.    c) 3.    d) 2.    e) 6.

#### RESOLUÇÃO:

A forma trigonométrica de  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  é

$$z = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \text{ e } z^n = \cos \frac{3\pi}{4} \cdot n + i \sin \frac{3\pi}{4} \cdot n.$$

Se  $z^n = -1$ , então  $\cos \frac{3\pi}{4} \cdot n = -1$  e  $\sin \frac{3\pi}{4} \cdot n = 0$  e, em con-

sequência  $\frac{3\pi}{4} \cdot n = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}K$ .

O menor inteiro positivo  $n$  vale 4 e resulta de  $k = 1$ .

Resposta: A

## MÓDULO 11

## PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Considere a função  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x-1)^x$ .
- Calcule  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  e  $f(5)$ .
  - Escreva  $f$  na forma de conjunto de pares ordenados.
  - Escreva a sequência  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  na qual  $a_n = f(n)$ . Classifique  $(a_n)$  quanto a sua monotonicidade.

## RESOLUÇÃO:

Sr. Professor: utilize esta questão para definir *sequência de números reais*.

- $f(1) = (1-1)^1 = 0^1 = 0$   
 $f(2) = (2-1)^2 = 1^2 = 1$   
 $f(3) = (3-1)^3 = 2^3 = 8$   
 $f(4) = (4-1)^4 = 3^4 = 81$   
 $f(5) = (5-1)^5 = 4^5 = 1024$
- $f = \{(1;0), (2;1), (3;8), (4;81), (5;1024), \dots\}$
- Como  $a_1 = f(1) = 0$ ,  $a_2 = f(2) = 1$ ,  
 $a_3 = f(3) = 8$ ,  $a_4 = f(4) = 81$ ,  $a_5 = f(5) = 1024$ , ..., tem-se  
 $(a_n) = (0; 1; 8; 81; 1024; \dots)$  e a sequência é estritamente crescente.

2. (GAVE-adaptado) – Considere uma sequência em que o primeiro termo é 244 e em que a lei de formação de cada um dos termos a seguir ao primeiro é:

«Adicionar dois ao termo anterior e depois dividir por três.»

Qual é o quarto termo da sequência?

- 82
- 28
- 10
- 4

## RESOLUÇÃO:

$$a_1 = 244$$

$$a_2 = \frac{a_1 + 2}{3} = \frac{244 + 2}{3} = 82$$

$$a_3 = \frac{a_2 + 2}{3} = \frac{82 + 2}{3} = 28$$

$$a_4 = \frac{a_3 + 2}{3} = \frac{28 + 2}{3} = 10$$

Resposta: C

3. A sequência  $(a_p)$  é definida pela lei de recorrência  $a_{p+1} = a_p + r$ , com  $p \in \mathbb{N}^*$  e  $a_1 = a$ .

- Escreva uma fórmula do termo  $a_n$  da sequência, em função de  $a_1$ ,  $n$  e  $r$ .
- Considerando  $a = 7$  e  $r = 3$ , calcule  $a_{12}$ .

## RESOLUÇÃO:

Atenção professor, a intenção dessa questão é introduzir os conceitos de P.A.

- $a_2 = a_1 + r$   
 $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$   
 $a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$   
 $\vdots$   
 $a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
- $a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r = a + 11r = 7 + 11 \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 40$

4. (FGV) – Seja  $f$  uma função de  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(n+1) = \frac{2 \cdot f(n) + 1}{2} \text{ e } f(1) = 2. \text{ Nessas condições, } f(101) \text{ é igual a}$$

- 49.
- 50
- 51.
- 52.
- 53

## RESOLUÇÃO:

$$\text{Observando que } f(n+1) = \frac{2 \cdot f(n) + 1}{2} = f(n) + \frac{1}{2},$$

para qualquer  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos:

$$f(1) = 2$$

$$f(2) = f(1) + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(3) = f(2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$f(4) = f(3) + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$\vdots$

com  $f(101)$  igual ao 101º termo da progressão aritmética de 1º termo 2 e razão  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Dessa forma resulta: } f(101) = 2 + 100 \cdot \frac{1}{2} = 52$$

5. (UEMS) – Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  uma progressão aritmética tal que  $a_{55} = 176$  e  $a_{33} = 242$ . Então o valor de  $a_3$  é:  
a) 348      b) 344      c) 338      d) 332      e) 321

**RESOLUÇÃO:**

$$\left. \begin{aligned} a_{55} &= a_1 + (55 - 1) \cdot r = 176 \\ a_{33} &= a_1 + (33 - 1) \cdot r = 242 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 54r = 176 \\ a_1 + 32r = 242 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ a_1 = 338 \end{cases}$$

Assim,

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot r = 338 + 2 \cdot (-3) = 332$$

Resposta: D

6. (VUNESP) – Sabe-se que o intervalo entre trens consecutivos que passam em uma determinada estação é sempre igual e constante. Assim, se o intervalo entre o 3º e o 6º trens que passaram por essa estação foi igual a 315 segundos, então o intervalo entre a passagem do 1º trem e a passagem do 10º trem por essa estação foi igual a  
a) 17 minutos e 50 segundos.      b) 17 minutos e 30 segundos.  
c) 16 minutos e 15 segundos.      d) 15 minutos e 55 segundos.  
e) 15 minutos e 45 segundos.

**RESOLUÇÃO:**

$$a_6 - a_3 = [a_1 + (6 - 1) \cdot r] - [a_1 + (3 - 1) \cdot r] = 3r = 315 \Rightarrow r = 105 \text{ segundos}$$

$$a_{10} - a_1 = a_1 + (10 - 1) \cdot r - a_1 = 9r = 9 \cdot 105 = 945 \text{ segundos} = 15\text{m e } 45\text{s}$$

Resposta: E

## MÓDULO 12

### PROPRIEDADE E SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

1. (MACKENZIE) – Se  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 11\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 187\}$ , o número de elementos de  $A \cap B$  é:  
a) 16      b) 17      c) 18      d) 19      e) 20

**RESOLUÇÃO:**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de } 11\} = \{0, 11, 22, 33, \dots\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 \leq x \leq 187\} = \{15, 16, 17, \dots, 187\}$$

e

$$A \cap B = \{22, 33, 44, \dots, 187\}$$

O número de elementos de  $A \cap B$  é 16 pois eles constituem uma progressão aritmética de razão 11, onde  $a_1 = 22$ ,  $a_n = 187$  e

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Leftrightarrow 187 = 22 + (n - 1) \cdot 11 \Leftrightarrow n = 16$$

Resposta: A

2. (UDESC) – Sejam  $x, y, z$  números reais tais que a sequência  $\left(x, 1, y, \frac{1}{4}, z\right)$  forma, nesta ordem, uma progressão aritmética, então o valor da soma  $x + y + z$  é:

- a)  $-\frac{3}{8}$       b)  $\frac{21}{8}$       c)  $\frac{15}{8}$       d) 2      e)  $-\frac{19}{8}$

**RESOLUÇÃO:**

$$y = \frac{1 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{x + y}{2} = \frac{x + \frac{5}{8}}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\frac{y + z}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{8} + z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{8}$$

$$x + y + z = \frac{11}{8} + \frac{5}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{15}{8}$$

Resposta: C

3. Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são dados respectivamente por  $(x - 5)$ ,  $x^2$  e  $5x + 1$ . Um possível valor do quinto termo dessa progressão é:

- a) 36      b) 25      c) 18      d) 12      e) 9

#### RESOLUÇÃO:

Na PA  $(x - 5; x^2; 5x + 1; \dots)$ , temos:

$$x^2 = \frac{(x - 5) + (5x + 1)}{2} \Leftrightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Para  $x = 1$ , a PA é  $(-4; 1; 6; 11; 16; \dots)$ .

Para  $x = 2$ , a PA é  $(-3; 4; 11; 18; 25; \dots)$ .

Um possível valor para o quinto termo é 25.

Resposta: B

4. O primeiro, o quarto, o oitavo e o décimo primeiro termos de uma progressão aritmética são respectivamente  $(k - 2)$ ,  $\left(k + \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left(3k + \frac{1}{2}\right)$  e

$(4k + 1)$ . A soma do sexto termo com a razão dessa progressão é:

- a) 7      b) 9      c) 10      d) 11      e) 13

#### RESOLUÇÃO:

Nesta progressão,  $a_1 + a_{11} = a_4 + a_8 \Rightarrow (k - 2) + (4k + 1) =$

$$= \left(k + \frac{5}{2}\right) + \left(3k + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 5k - 1 = 4k + 3 \Leftrightarrow k = 4$$

Desta forma

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = k - 2 = 2 \\ a_4 = k + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow a_4 - a_1 = \frac{13}{2} - 2 \Leftrightarrow 3r = \frac{9}{2} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$a_6 = a_4 + 2r = \frac{13}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

$$a_6 + r = \frac{19}{2} + \frac{3}{2} = 11$$

Resposta: D

5. (UFPE) – Um professor resolveu presentear seus cinco melhores alunos com livros de valores equivalentes a quantias diferentes. Os valores dos livros recebidos pelos alunos devem estar em progressão aritmética e a soma dos três valores maiores deve ser cinco vezes o total recebido pelos outros dois. Se cada um deve receber um livro de valor equivalente a uma quantidade inteira de reais, qual a menor quantia (positiva) que o professor vai desembolsar na compra dos livros?

- a) R\$ 90,00      b) R\$ 100,00      c) R\$ 110,00  
d) R\$ 120,00      e) R\$ 130,00

#### RESOLUÇÃO:

Sejam  $a - 2r$ ,  $a - r$ ,  $a$ ,  $a + r$ ,  $a + 2r$  os valores dos livros a serem recebidos pelos alunos. Temos  $3a + 3r = 5(2a - 3r)$  e daí  $7a = 18r$ . Como  $a$  e  $r$  são inteiros positivos e de menor valor possível, temos  $a = 18$  e  $r = 7$ , e o menor valor a ser gasto pelo professor é  $5a = 5 \cdot 18 = 90$  reais.

Resposta: A

## MÓDULO 13

### PROPRIEDADE E SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

1.

- a) Mostre que na progressão aritmética  $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}; \dots)$ ,  $a_7 + a_4 = a_1 + a_{10}$   
b) Calcule, em função de  $a_1$  e  $a_{10}$ , a soma dos dez primeiros termos da P.A.

#### RESOLUÇÃO:

Sr. Professor, utilize o item b desse exercício para comentar a fórmula da soma dos termos da P.A.

a)  $a_7 + a_4 = a_{10} - 3r + a_1 + 3r = a_1 + a_{10}$

b) Como  $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = \dots = a_5 + a_5$  tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + a_9 + a_{10} \\ S_{10} = a_{10} + a_9 + a_8 + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S_{10} = \underbrace{(a_1 + a_{10}) + (a_1 + a_{10}) + \dots + (a_1 + a_{10})}_{10 \text{ vezes}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 10 \Rightarrow S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$$

2. (UNIFESP) – Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6 000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

- a) 125 500 m.      b) 105 000 m.      c) 90 000 m.  
d) 87 500 m.      e) 80 000 m.

**RESOLUÇÃO:**

As distâncias diárias percorridas pela pessoa formam uma progressão aritmética de razão  $r = 100$  m e vigésimo primeiro termo  $a_{21} = 6\,000$  m.

Assim, em metros, temos:

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot r \Rightarrow 6\,000 = a_1 + 20 \cdot 100 \Rightarrow a_1 = 4\,000$$

A distância total percorrida nos 21 dias foi, também em metros,

$$S_{21} = \frac{(a_1 + a_{21}) \cdot 21}{2} = \frac{(4\,000 + 6\,000) \cdot 21}{2} = 105\,000$$

**Resposta: B**

3. (UNIFOR) – A sequência  $(a_n)$ , com  $n$  um número inteiro positivo, é definida, recursivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n, \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

O valor da média aritmética dos 100 primeiros termos desta sequência é:

- a) 50      b) 50,5      c) 51      d) 51,5      e) 52

**RESOLUÇÃO:**

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{2}{1}\right) \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$a_4 = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot a_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

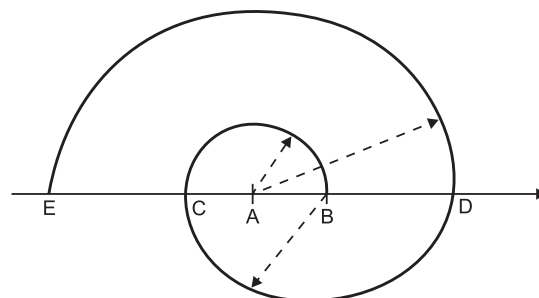
$$a_{100} = \left(\frac{100}{99}\right) \cdot a_{99} = \frac{100}{99} \cdot 99 = 100$$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2}$$

$$S_{100} = 5050 \text{ e a média dos 100 primeiros termos é } \frac{S_{100}}{100} = 50,50$$

**Resposta: B**

4. (FGV) – Chamamos de falsa espiral de dois centros aquela construída da seguinte forma: os dois centros são os pontos A e B. Traçam-se semicircunferências no sentido anti-horário, a primeira com o centro em A e raio AB, a segunda com centro em B e raio BC, a terceira com centro em A e raio AD, repetindo esse procedimento em que os centros se alternam entre A e B, como mostrado na figura abaixo.



Determine a distância entre A e B se, ao completar duzentas semicircunferências, o comprimento total dessa falsa espiral for  $100\,500\pi$  metros.

**RESOLUÇÃO:**

Seja  $AB = R$ , as duzentas semicircunferências têm raios  $R, 2R, 3R, \dots, 200R$ .

$$\text{Comprimento total da falsa espiral} = 100\,500\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot R + \pi \cdot 2R + \pi \cdot 3R + \dots + \pi \cdot 200R = 100\,500\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(R + 200R) \cdot 200}{2} = 100\,500 \Leftrightarrow R = 5 \text{ m}$$

**Resposta: 5 m**

5. (UNIVEST) – Seja  $S_7, S_8$  e  $S_9$  respectivamente iguais à soma dos 7, 8 e 9 termos iniciais de uma mesma progressão aritmética. A razão  $r$  dessa P.A. pode ser expressa pela relação:

- a)  $r = S_9 + S_7 - S_8$       b)  $r = S_9 + S_7 - 2S_8$   
c)  $r = S_9 + 2S_7 - 2S_8$       d)  $r = S_9 - S_7 + S_8$   
e)  $r = S_9 - S_7 - 2S_8$

**RESOLUÇÃO:**

$$a_8 = S_8 - S_7$$

$$s_9 = S_9 - S_8$$

$$r = a_9 - a_8 = [S_9 - S_8] - [S_8 - S_7]$$

$$r = S_9 + S_7 - 2S_8$$

**Resposta: B**

6. (UEM) – Considere os números naturais colocados ordenadamente em linhas da disposição triangular mostrada na figura e suponha que a distribuição continue, indefinidamente, obedecendo ao mesmo padrão.

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|     |     |     | 1   |     |     |     |
|     |     | 2   | 3   | 4   |     |     |
|     | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |     |
| 10  | 11  | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Sobre o exposto, é correto afirmar que

- 01) a coluna central não contém números compostos.  
 02) a linha de ordem  $k$  contém  $(2k - 1)$  números naturais,  $k = 1, 2, \dots$   
 04) a quantidade de números naturais escritos até o final da linha  $k$  é  $k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$   
 08) a soma de todos os números naturais escritos até o final da 20ª linha é 80.200.  
 16) o número natural 628 é o quarto número da 26ª linha.

**RESOLUÇÃO:**

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    |    | 1  |    |    |    |    |
|    |    |    | 2  | 3  | 4  |    |    |    |
|    |    | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |    |    |
|    | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |    |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

- 01) **Falsa:** 21 é um número composto.  
 02) **Verdadeira:** a quantidade de elementos de cada linha são os elementos da sequência  $(1, 3, 5, 7, \dots)$  cujo  $k$ -ésimo elemento é  $a_k = 1 + (k - 1) \cdot 2 = 2k - 1$   
 04) **Verdadeira:** a soma dos elementos dos  $k$  primeiros termos dessa sequência é  $s_k = \frac{[1 + (2k - 1)] \cdot k}{2} = k^2$ , que é a quantidade de números escritos até o final da  $k$ -ésima linha.  
 08) **Verdadeira:** até o final da 20ª linha foram escritos  $20^2 = 400$  números e a soma de todos é  $\frac{[1 + 400] \cdot 400}{2} = 80\,200$ .  
 16) **Falsa:** até o final da 25ª linha foram escritos  $25^2 = 625$  números. O número natural 628 é o terceiro número da 26ª linha.  
 São verdadeiras as afirmações 02, 04 e 08.  
 Resposta: 14

## MÓDULO 14

### PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

1. A sequência  $(a_p)$  é definida pela lei de recorrência  $a_{p+1} = a_p \cdot q$ , com  $p \in \mathbb{N}^*$   
 Escreva uma fórmula do termo geral  $a_n$  da sequência, em função de  $a_1$ ,  $n$  e  $q$ .

**RESOLUÇÃO:**

Atenção professor, a intenção dessa questão é introduzir os conceitos de P.G. e a fórmula do termo geral.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

2. (UEM/CVU) – Um ciclista programou seu treinamento de tal modo que percorra uma distância fixa por dia e que aumente, a cada semana, a distância diária da semana anterior em 20%. Se o objetivo do ciclista é que, ao final de 4 semanas, a distância diária percorrida seja de 25920 m, quantos quilômetros ele deve percorrer no primeiro dia?

**RESOLUÇÃO:**

As distâncias, diárias percorridas pelo ciclista durante estas quatro primeiras semanas foi

$$(x; 1,2 \cdot x; 1,2^2 \cdot x; 1,2^3 \cdot x).$$

Para que o ciclista atinja seu objetivo devemos ter

$$1,2^3 \cdot x = 25920 \Leftrightarrow 1,728 \cdot x = 25920$$

$$\Leftrightarrow x = 15000 \text{ ou seja } 15 \text{ km}$$

Resposta: 15km

3. (VUNESP) – Considere a função real  $f$ , dada pela lei  $f(x) = x^2$ . Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, tais que  $(a, b, c)$  é uma progressão geométrica de razão  $q$ , então a sequência  $(f(a), f(b), f(c))$  é uma

- a) progressão aritmética de razão  $2q$ .
- b) progressão aritmética de razão  $4q$ .
- c) progressão aritmética de razão  $q^2$ .
- d) progressão geométrica de razão  $q^2$ .
- e) progressão geométrica de razão  $q^4$ .

**RESOLUÇÃO:**

$(a; b; c)$  é uma P.G. de razão  $q$ , então  $b = aq$  e  $c = a \cdot q^2$

$$f(a) = a^2$$

$$f(b) = f(aq) = a^2q^2$$

$$f(c) = f(aq^2) = a^2q^4$$

A sequência  $(f(a), f(b), f(c)) = (a^2, a^2q^2, a^2q^4)$  é uma P.G. de razão  $q^2$ .

Resposta: D

4. (PMSC-UNESP) – Às 10 horas, Catarina descobriu uma surpresa que aconteceria na formatura. Depois de 50 minutos, no intervalo das aulas, ela contou a surpresa para 5 colegas, e a cada 50 minutos, cada um deles foi contando para 5 outros colegas, e assim aconteceu sucessivamente, até às 13h 20min. Exatamente nesse horário,

- a) 100 alunos.
- b) 125 alunos.
- c) 250 alunos.
- d) 625 alunos.
- e) 1 250 alunos

**RESOLUÇÃO:**

13h 20min é o quinto termo da sequência

(10:00; 10:50; 11:40; 12:30; 13:20; ...)

A quantidade de pessoas que fica sabendo do acontecimento a cada 50 minutos são os termos da P.G. (1; 5; 25; ...) cujo quinto termo é

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 1 \cdot 5^4 = 625$$

Resposta: D

5. Quatro números naturais formam uma P.G. crescente. Se a diferença entre o segundo e o primeiro termo, nesta ordem, é 10 e a diferença entre o quarto e terceiro termos, também nesta ordem, é 90, a razão da P.G. é

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

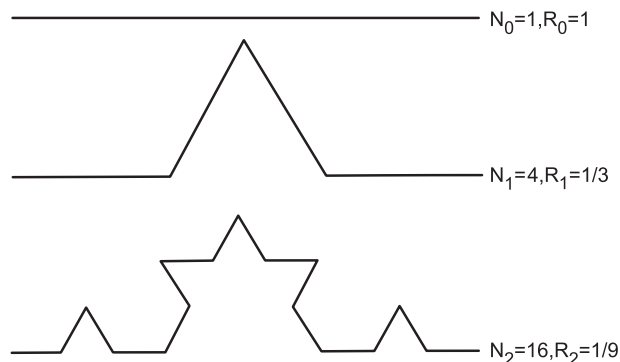
**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = 10 \\ a_4 - a_3 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q - a_1 = 10 \\ a_1q^3 - a_1q^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q^2(q-1)}{a_1(q-1)} = \frac{90}{10} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3, \text{ pois os termos são naturais.}$$

Resposta: B

6. (UNESP) – Considera-se um segmento de reta,  $N_0$ , de tamanho  $R_0 = 1$ . Ele é dividido em três partes iguais, e a parte do meio é substituída por dois segmentos de tamanho  $R_1 = 1/3$ , na forma de um triângulo equilátero, resultando em  $N_1 = 4$  segmentos de reta. Repetindo-se este procedimento para todos os segmentos de reta, obtêm-se  $N_2 = 16$  e  $R_2 = 1/9$ , tal como apresentado nas figuras.



Quais são os valores que se obtêm para  $N_3$  e  $R_3$ ? Após  $n$  repetições desse processo, qual será o comprimento  $R_n$  dos segmentos de reta e quantos segmentos de reta  $N_n$  existirão?

**RESOLUÇÃO:**

Em cada nova configuração, cada um dos  $p$  segmentos da configuração

anterior é trocado por 4 novos segmentos com medidas iguais a  $\frac{1}{3}$  das

medidas dos segmentos anteriores. Dessa maneira, o número de segmentos está em progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 4 e os comprimentos de cada segmento estão em progressão geométrica de primeiro

termo 1 e razão  $\frac{1}{3}$ .

Assim:

$$1) N_3 = 1 \cdot 4^3 = 64 \text{ e } R_3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$2) N_n = 1 \cdot 4^n = 2^{2n} \text{ e } R_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$$

$$\text{Respostas: a) } N_3 = 64 \text{ e } R_3 = \frac{1}{27}$$

$$\text{b) } N_n = 2^{2n} \text{ e } R_n = 3^{-n}$$

## MÓDULO 15

### PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: PROPRIEDADES E FÓRMULA DO PRODUTO

1. (FUVEST-2010) – Os números  $a_1, a_2, a_3$  formam uma progressão aritmética de razão  $r$ , de tal modo que  $a_1 + 3, a_2 - 3, a_3 - 3$  estejam em progressão geométrica. Dado ainda que  $a_1 > 0$  e  $a_2 = 2$ , conclui-se que  $r$  é igual a

- a)  $3 + \sqrt{3}$       b)  $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$       c)  $3 + \frac{\sqrt{3}}{4}$   
d)  $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$       e)  $3 - \sqrt{3}$

#### RESOLUÇÃO:

Se  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  é uma P.A. de razão  $r$ , com  $a_2 = 2$ , temos  $(2 - r; 2; 2 + r)$ .

Se  $(a_1 + 3; a_2 - 3; a_3 - 3)$  é uma P.G., temos

$(2 - r + 3; 2 - 3; 2 + r - 3) = (5 - r; -1; r - 1)$ , e portanto:

$$(-1)^2 = (5 - r) \cdot (r - 1) \Leftrightarrow r^2 - 6r + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = 3 + \sqrt{3} \text{ ou } r = 3 - \sqrt{3}$$

Como  $a_1 > 0$ , tem-se  $r < 2$ , resultando  $r = 3 - \sqrt{3}$

Resposta: E

2. A sequência  $(1; 1; 2; 3; 5; \dots)$  em que, a partir do terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos que o precedem é conhecido como sequência de Fibonacci.

Se do seu quinto e sétimo termo subtrairmos uma mesma quantia inteira e acrescentarmos os valores subtraído ao seu nono termo, obteremos, nessa ordem, três termos consecutivos de uma progressão geométrica. A razão dessa progressão geométrica é:

- a) 2      b) 3      c) 5      d) 6      e) 7

#### RESOLUÇÃO:

A sequência de Fibonacci é  $(1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; \dots)$

Seu quinto, sétimo e nono termo são respectivamente; 5, 13 e 34. Se o valor subtraído dos dois primeiros for  $x$  a progressão geométrica será:

$$(5 - x; 13 - x; 34 + 2x; \dots)$$

$$\text{Assim, } (13 - x)^2 = (5 - x) \cdot (34 + 2x)$$

$$169 - 26x + x^2 = 170 + 10x - 34x - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 1$$

Como  $x \in \mathbb{Z}$ , a progressão geométrica fica  $(\dots; 4; 12; 36; \dots)$  e tem razão 3.

Resposta: B

3. O lado, a diagonal de uma face e o volume de um cubo são dados, nessa ordem, por três números em progressão geométrica. A área total desse cubo é:

- a) 20      b) 48      c) 24      d) 18      e) 12

#### RESOLUÇÃO:

Seja  $\ell > 0$  a medida da aresta do cubo, temos:

$\ell, \ell\sqrt{2}$  e  $\ell^3$  como sendo três termos consecutivos de uma progressão geométrica. Assim:

$$(\ell\sqrt{2})^2 = \ell \cdot \ell^3 \Rightarrow \ell^4 - 2\ell^2 = 0 \Rightarrow \ell^2 = 2, \text{ pois } \ell \neq 0 \text{ e } 6\ell^2 = 12$$

A área total desse cubo é 12.

Resposta: E

4. O produto dos 7 primeiros termos da progressão geométrica  $(2; 4; 8; \dots)$  é:

- a)  $2^{64}$       b)  $4^{32}$       c)  $8^{16}$       d)  $64^2$       e)  $128^4$

#### RESOLUÇÃO:

$$a_7 = 2 \cdot 2^{7-1} = 128$$

$$|P_7| = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{(2 \cdot 128)^7} = \sqrt{256^7} = 16^7 = 2^{28} = 128^4$$

Como  $P_7 > 0$  temos  $P_7 = 128^4$ .

Resposta: E

5. (MACKENZIE) – Para que o produto dos termos da sequência  $(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}^2, \sqrt{3}^3, \sqrt{3}^4, \dots, \sqrt{3}^{n-1})$  seja  $3^{14}$ , deverão ser considerados, nessa sequência,
- a) 8 termos.      b) 6 termos.      c) 10 termos.  
d) 9 termos.      e) 7 termos.

#### RESOLUÇÃO:

Se o produto dos  $n$  termos da sequência,

$$(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}^2, \sqrt{3}^3, \sqrt{3}^4, \dots, \sqrt{3}^{n-1}) = (3^0, 3^{\frac{1}{2}}, 3^1, 3^{\frac{3}{2}}, \dots, 3^{\frac{n-1}{2}}), \text{ é igual a } 3^{14},$$

então

$$3^0 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{n-1}{2}} = 3^{0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n-1}{2}} = 3^{14} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n-1}{2} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{0 + \frac{n-1}{2}}{2} \right] \cdot n = 14 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow n = 8, \text{ pois } n > 0$$

Resposta: A

## MÓDULO 16

### SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E PROGRESSÃO HARMÔNICA

1. Diz a lenda que o rei, querendo retribuir o criador do jogo de xadrez, prometeu-lhe dar grãos de favos. O rei mandou que os sábios da corte calculassem quantos grãos de favos seriam necessários para colocar um favo na primeira casa do jogo, dois favos na segunda casa, quatro na terceira casa, até completar as 64 casas do jogo e que dessem todos ao seu criador.

Admitindo-se que a cada metro cúbico é possível armazenar  $2^{25}$  favos, quantos metros cúbicos seriam necessários para armazenar todos esses grãos de favos?

#### RESOLUÇÃO:

A quantidade de favos a ser colocado em cada casa do jogo de xadrez são os 64 primeiros termos da P.G.  $(1; 2; 4; 8; \dots)$ .

$$\text{Como } S_{64} = \frac{1 \cdot [2^{64} - 1]}{2 - 1} \approx 2^{64} \text{ seriam necessários } \frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39} \text{ metros}$$

cúbicos

Resposta:  $2^{39}$

2. (UF-CEARÁ) – Para todo número real positivo  $x$  e todo número natural ímpar  $n$ , a fração  $\frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \dots + x^n}$  pode ser simplificada tomando a forma

a)  $\frac{1 + x^2}{1 + x}$       b)  $\frac{1 + x^n}{1 + x}$       c)  $\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x}$       d)  $1 + x + x^2 + \dots + x^n$

#### RESOLUÇÃO:

Usando a fórmula  $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \dots + x^n} &= \frac{\frac{x^{2n} \cdot x^2 - 1}{x^2 - 1}}{\frac{x^n \cdot x - 1}{x - 1}} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{n+1} - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{(x^{n+1} + 1)(x^{n+1} - 1) \cdot (x - 1)}{(x^{n+1} - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1} \end{aligned}$$

Resposta: C

3. (UNESP) – Desejo ter, para minha aposentadoria, 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira, que rende 1% de juros ao mês, já descontados o imposto de renda e as taxas bancárias recorrentes.

Se desejo me aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em reais, que devo disponibilizar mensalmente é:

Dado:  $1,01^{361} \approx 36$

- a) 290,00      b) 286,00      c) 282,00  
d) 278,00      e) 274,00

#### RESOLUÇÃO:

30 anos equivalem a 360 meses. A primeira aplicação, de  $x$  reais, é corrigida 360 vezes resultando em  $x \cdot 1,01^{360}$

A segunda aplicação, também de  $x$  reais, é corrigida 359 vezes resultando em  $x \cdot 1,01^{359}$

⋮

A penúltima aplicação, de  $x$  reais, é corrigida 1 vez resultando em  $x \cdot 1,01$

A última aplicação, feita no mês do resgate, não sofre correção.

Desta forma, o resgate será de

$$x + x \cdot 1,01 + x \cdot 1,01^2 + \dots + x \cdot 1,01^{360} =$$

$$= \frac{x \cdot [1,01^{361} - 1]}{1,01 - 1} = \frac{x \cdot [36 - 1]}{0,01} =$$

$$= 3\,500 \cdot x = 1\,000\,000 \Rightarrow x \approx 285,71 \approx 286,00$$

Resposta: B

4. (FGV) – Seja a sequência  $3, \sqrt[2]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}, \dots$ , cujos termos são radicais de radicando 3, e o índice de cada termo é o dobro do índice do termo anterior. Calcule o produto:

- a) dos 10 primeiros termos dessa sequência.  
b) dos infinitos termos dessa sequência.

#### RESOLUÇÃO:

a) O produto dos 10 primeiros termos da sequência é

$$\begin{aligned} P_{10} &= 3 \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[512]{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{1}{512}} = \\ &= 3^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}\right)} = 3^{\left(\frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}}\right)} = \\ &= 3^{\left(\frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}\right)} = 3^{\frac{1023}{512}} = \sqrt[512]{3^{1023}}, \text{ pois } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{512} \text{ é uma} \\ &\text{progressão geométrica de 1º termo } a_1 = 1 \text{ e razão } q = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) O produto dos infinitos termos da sequência é

$$P = 3^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)} = 3^{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right)} = 3^{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = 3^2 = 9$$

Respostas: a)  $\sqrt[512]{3^{1023}}$

b) 9

5. (FMT) – O limite da soma dos termos da progressão geométrica infinita  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , de razão  $q$ , é igual a 2. Se  $S$  e  $T$  são os limites das somas infinitas  $(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots)$  e  $(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots)$ , respectivamente, então

- a)  $S = \frac{2}{1+q}$  e  $T = \frac{2}{1+q^2}$ .      b)  $S = \frac{2}{1-q}$  e  $T = \frac{2}{1+q}$ .  
c)  $S = \frac{2}{1+q}$  e  $T = \frac{2q}{1+q}$ .      d)  $S = \frac{2}{1-q}$  e  $T = \frac{2}{1+q^2}$ .  
e)  $S = \frac{2}{1-q/2}$  e  $T = \frac{2q}{1-q/2}$ .

#### RESOLUÇÃO:

$$\frac{a_1}{1-q} = 2 \Rightarrow a_1 = 2(1-q)$$

$$\frac{a_1}{1-q^2} = S = \frac{2(1-q)}{(1+q)(1-q)} \Rightarrow S = \frac{2}{1+q}$$

$$\frac{a_2}{1-q^2} = T = \frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{2(1-q)q}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow T = \frac{2q}{1+q}$$

Resposta: C

## MÓDULO 17

### SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E PROGRESSÃO HARMÔNICA

1. João pegou a calculadora de seu pai e começou a brincar, repetindo uma mesma sequência de operações várias vezes para ver o que acontecia. Uma dessas experiências consistia em escolher um número  $x_1$  qualquer, somar 5 e dividir o resultado por 2, obtendo um novo número  $x_2$ . A seguir ele somava 5 a  $x_2$  e dividia o resultado por 2, obtendo um novo número  $x_3$ . Repetindo esse processo, ele obteve uma sequência de números  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n$ .

Após repetir o processo muitas vezes, não importando com qual valor tivesse iniciado a sequência de operações, João reparou que o valor  $x_n$  se aproximava sempre do mesmo número. Que número era esse?

- a) 5      b) 0      c) 5/2      d) 1      e) 15/2

#### RESOLUÇÃO:

Conforme o enunciado a sequência  $(x_n)$  é tal que

$$x_2 = \frac{1}{2} (x_1 + 5) = \frac{x_1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} (x_2 + 5) = \frac{1}{2} \left( \frac{x_1}{2} + \frac{5}{2} + 5 \right) = \frac{x_1}{4} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4}$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (x_3 + 5) = \frac{x_1}{8} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8}$$

Após a  $(n-1)$ ésima operação temos

$$x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}} + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{5}{2^{n-1}}$$

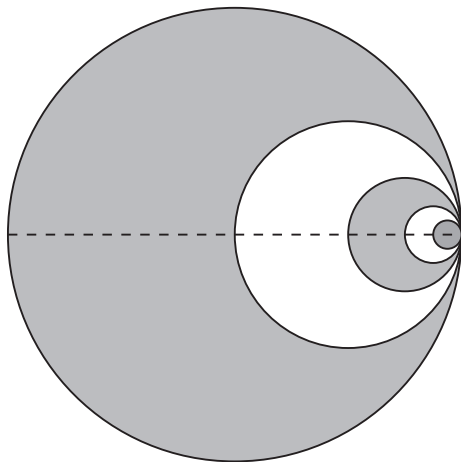
Se  $n$  crescer infinitamente  $\frac{x_1}{2^{n-1}}$  tende a zero e

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5, \text{ portanto, } x_n \text{ tende a } 5.$$

Resposta: A

2. Considere que o raio do círculo externo é  $R$  e que os raios dos círculos internos são sempre a metade dos raios dos círculos exteriores que o antecedem. A soma de todas as áreas sombreadas é:

- a)  $\pi R^2$       b)  $\frac{2}{3} \pi R^2$       c)  $\frac{3}{4} \pi R^2$   
d)  $\frac{4}{5} \pi R^2$       e)  $\frac{5}{6} \pi R^2$



#### RESOLUÇÃO:

A soma das áreas pedidas é

$$S = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 - \pi \left(\frac{R}{8}\right)^2 + \dots$$

$$S = \pi R^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots\right)$$

$$S = \pi R^2 \cdot \left[\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}\right] = \frac{4\pi R^2}{5}$$

Resposta: D

3. (U.F.PARAÍBA) – Seja  $(a_n)$  uma progressão geométrica cuja soma dos  $n$  primeiros termos é  $S_n = 3 \cdot (2)^n - 3$ . Determine o quarto termo dessa progressão.

#### RESOLUÇÃO:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 \cdot (2)^4 - 3 = 45$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3 \cdot (2)^3 - 3 = 21$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 45 - 21 = 24$$

4. (INSPER) – Seja  $S_n$  o limite da soma de uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{n}$ , cujo primeiro termo é 1. Por exemplo,

$$S_5 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$$

O produto  $S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{2008} \cdot S_{2009} \cdot S_{2010}$  é igual a

- a) 2010!      b)  $\frac{2009 \cdot 2010}{2}$       c)  $\frac{2010}{2009}$   
d) 2010      e)  $2009^{2010}$

#### RESOLUÇÃO:

$$S_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}$$

Assim,

$$S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot \dots \cdot S_{2009} \cdot S_{2010} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2008} \cdot \frac{2010}{2009} = 2010$$

Resposta: D

5. Qual é o termo da progressão harmônica

$\left(0,5; 0,25; \frac{1}{6}; 0,125 \dots\right)$  igual a 0,0125?

#### RESOLUÇÃO:

A progressão harmônica  $\left(0,5; 0,25; \frac{1}{6}; 0,125 \dots\right) =$

$= \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots\right)$  é obtida pela inversão dos termos da

PA  $(2; 4; 6; 8; \dots) = (a_n)$

O termo  $0,0125 = \frac{1}{80}$  da progressão harmônica tem a mesma ordem do

termo da PA igual a 80.

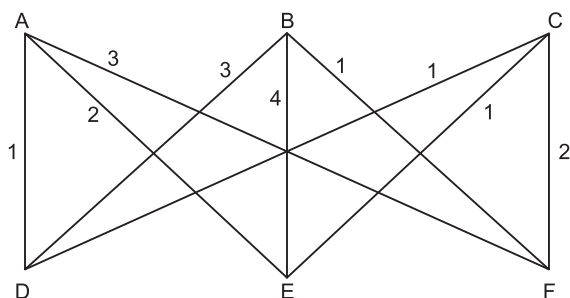
Assim,  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 80 = 2 + (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow n = 40$

Resposta: quadragésimo

## MÓDULO 18

### MATRIZES: DEFINIÇÕES E OPERAÇÕES

1. (UFAL-ADAPTADO) – A figura a seguir ilustra a rede de conexões entre os aeroportos A, B e C de uma cidade, e os aeroportos D, E e F de outra cidade. O número sobre a linha unindo os nomes de dois aeroportos representa o número de linhas aéreas voando na rota de um aeroporto ao outro. Podemos representar os aeroportos de uma cidade como as linhas de uma matriz, os aeroportos da outra como as colunas da matriz e em cada interseção linha-coluna o número de conexões entre os dois aeroportos. Se as linhas 1, 2 e 3 representam, respectivamente, os aeroportos das cidade A, B e C e as colunas 1, 2 e 3 representam, respectivamente, os aeroportos das cidades D, E e F, qual das matrizes a seguir contém as informações corretas sobre os voos entre as duas cidades?



- a)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$       e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

#### RESOLUÇÃO:

Conforme o esquema;

$$\begin{array}{l} \text{D} \quad \text{E} \quad \text{F} \\ \text{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{B} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{C} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Resposta: D

2. (CEFET) – Os elementos  $a_{ij}$  da matriz dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

representam o custo, em centenas de reais, do transporte aéreo da cidade  $i$  para a cidade  $j$ . Se o símbolo  $i \rightarrow j$  indica que a viagem é feita da cidade  $i$  para a cidade  $j$ , então a única conclusão verdadeira é:

- a) A viagem  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  é mais cara que a viagem  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ .  
b) A viagem  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  é mais barata que a viagem  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ .  
c) A viagem  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  custa R\$ 300,00.  
d) A viagem  $i \rightarrow j \rightarrow i$  nunca custa menos que R\$ 400,00.

#### RESOLUÇÃO:

a) Falsa

O custo da viagem  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  é de  $a_{12} + a_{21} = 12 + 2 = 14$  (R\$ 1400,00)

O custo da viagem  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  é de (R\$ 1500,00)

$$a_{13} + a_{34} + a_{42} = 2 + 9 + 4 = 15$$

b) Falsa

A viagem  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  custa  $a_{23} + a_{32} = 7 + 6 = 13$  (R\$ 1300,00)

c) Falsa

A viagem  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  custa  $a_{41} + a_{14} = 1 + 5 = 6$  (R\$ 600,00)

d) Verdadeira

A viagem do tipo  $i \rightarrow j \rightarrow i$  mais barata é  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , que custa

$$a_{13} + a_{31} = 2 + 2 = 4 \text{ (R\$ 400,00)}$$

Resposta: D

3. Considere a matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ , definida por  $a_{ij} = 2i + j$ . A soma dos elementos da segunda coluna da matriz  $A^t$  é:

- a) 8      b) 9      c) 11      d) 13      e) 15

#### RESOLUÇÃO:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot 1 + 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 & 2 \cdot 2 + 2 \\ 2 \cdot 3 + 1 & 2 \cdot 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da segunda coluna é  $5 + 6 = 11$

Resposta: C

4. (UNICENTRO-adaptado) – Considerando-se as matrizes X e

$$Y, \text{ tais que } X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \text{ e } 3X - Y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar que a soma dos elementos da matriz X é igual a:

- a) -10      b) -8      c) 0      d) 6      e) 10

#### RESOLUÇÃO:

$$(X + Y) + (3X - Y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \text{ cuja soma dos elementos é } 2 + 2 + 3 + (-1) = 6$$

Resposta: D

5. Sabendo-se que a matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & x^2 & 2-y \\ 49 & y & 3x \\ -1 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, ou seja, é igual à sua transposta, o valor de  $x + 2y$  é:

- a) -20      b) -1      c) 1      d) 13      e) 20

#### RESOLUÇÃO:

a) A é simétrica se, e somente se,  $A^t = A \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 5 & x^2 & 2-y \\ 49 & y & 3x \\ -1 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 49 & -1 \\ x^2 & y & 3x \\ 2-y & 3x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 49 \\ 2-y = -1 \\ 3x = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Assim,  $x + 2y = -7 + 2 \cdot 3 = -1$

Resposta: B

6. Para que valores de x, y e z a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & z & 0 \end{bmatrix}, \text{ é antissimétrica?}$$

#### RESOLUÇÃO:

Uma matriz A é antissimétrica quando  $A^t = -A$ . (A sua transposta é igual à sua oposta).

Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ x & 0 & z \\ y & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x & -y \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & -z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = 5, y = -2 \text{ e } z = -3$$

Resposta:  $x = 5, y = -2$  e  $z = -3$



## MÓDULO 11

## ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

1. (PUC) – Sendo  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ , o valor de  $\sin 15^\circ$  é:

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       b)  $\frac{1}{4}$       c)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$   
 d)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$       e)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Resposta: E

2. (MACKENZIE) – Se  $\sin(x + \pi) = \cos(x - \pi)$ , então x pode ser:

- a)  $\pi$       b)  $\frac{\pi}{2}$       c)  $\frac{3\pi}{4}$       d)  $\frac{5\pi}{4}$       e)  $\frac{7\pi}{4}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin(x + \pi) = \sin x \cdot \cos \pi + \cos x \cdot \sin \pi = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = \cos \pi \cdot \cos x + \sin \pi \cdot \sin x = -\cos x$$

$$\text{Então: } \sin(x + \pi) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow -\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\text{Onde: } x \text{ pode ser } \frac{5\pi}{4}$$

Resposta: D

3. (UEP) – O valor de  $y = \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ + \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$  é:

- a)  $y = 1$       b)  $y = 2$       c)  $y = 0$   
 d)  $y = \frac{1}{2}$       e)  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**RESOLUÇÃO:**

$$y = \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ + \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

Sendo  $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ , temos:

$$y = \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ + \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

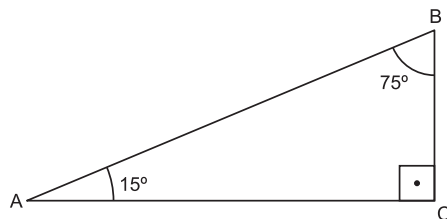
Lembrando que:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \text{ então:}$$

$$y = \cos(75^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Resposta: D

4. (UEL) – Num triângulo retângulo ABC temos os ângulos internos  $\hat{A} = 15^\circ$  e  $\hat{B} = 75^\circ$ .



O valor da razão  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  é

- a)  $2 + \sqrt{3}$       b)  $\sin(5^\circ)$       c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       d)  $\sqrt{2} + 3$       e)  $\frac{1}{2}$

**RESOLUÇÃO:**

A razão  $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$  é igual à  $\tan \hat{B} = \tan 75^\circ$

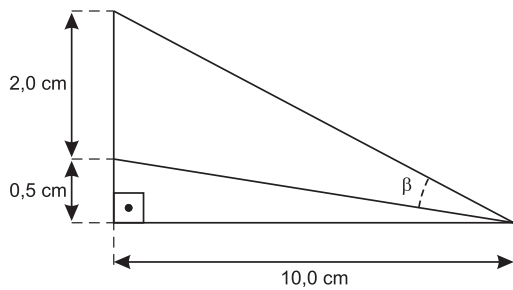
$$\text{Assim: } \tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

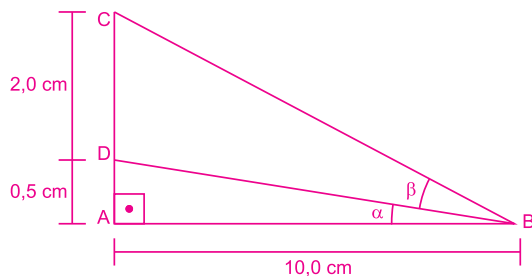
Resposta: A

5. (MACKENZIE) – Na figura,  $\text{tg } \beta$  é igual a



- a)  $\frac{16}{81}$     b)  $\frac{8}{27}$     c)  $\frac{19}{63}$     d)  $\frac{2}{3}$     e)  $\frac{1}{4}$

**RESOLUÇÃO:**



Se  $\widehat{\text{med}}(\text{ABD}) = \alpha$ , temos:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \Rightarrow \frac{2,5}{10} = \frac{\frac{0,5}{10} + \text{tg } \beta}{1 - \frac{0,5}{10} \cdot \text{tg } \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{20} + \text{tg } \beta}{1 - \frac{\text{tg } \beta}{20}} \Leftrightarrow 1 - \frac{\text{tg } \beta}{20} = \frac{1}{5} + 4 \text{tg } \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 - \text{tg } \beta = 4 + 80 \text{tg } \beta \Leftrightarrow \text{tg } \beta = \frac{16}{81}$$

**Resposta: A**

## MÓDULO 12

### FÓRMULAS DO ARCO DUPLO

1. (CEFET-Adaptado) – Assinale a alternativa que corresponde ao menor valor positivo que é solução da equação  $\text{sen}(2x) - \cos(x) = 0$

- a)  $\frac{\pi}{3}$     b)  $\frac{\pi}{6}$     c)  $\frac{2\pi}{3}$     d)  $\frac{5\pi}{6}$     e)  $\frac{\pi}{2}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\text{sen}(2x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \cdot \text{sen } x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

No intervalo de  $[0, 2\pi]$  as soluções possíveis são:

$$1^\circ) \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$2^\circ) \text{sen } x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

O menor valor positivo que é solução da equação, resulta  $x = \frac{\pi}{6}$

**Resposta: B**

2. (UNIFEI) – Sendo  $\sec x = -\frac{5}{4}$ , então  $\cos(2x)$  é igual a:

- a)  $-\frac{4}{5}$     b)  $-\frac{3}{5}$     c)  $-\frac{24}{25}$     d)  $\frac{7}{25}$     e)  $\frac{24}{25}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sec x = -\frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\text{Então } \cos(2x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

**Resposta: D**

3. (FATEC) – Se  $f$  é uma função real definida por  $f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ,

então  $f(x)$  é igual a

- a)  $\operatorname{cosec} 2x$       b)  $\sec 2x$       c)  $\operatorname{tg} 2x$   
d)  $\cos 2x$       e)  $\sin 2x$

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2 \cdot \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{\frac{2 \cdot \sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2 \cdot \sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

**Resposta: E**

4. (UEL) – Se  $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ , então o valor de  $\operatorname{tg}^2(x) + \sec^2(x)$  é:

- a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{2}{3}$       c) 1      d)  $\frac{4}{3}$       e)  $\frac{5}{3}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}, \text{ pois } \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Assim, } \operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}$$

**Resposta: E**

5. (E.E.AERONAUTICA) – Sejam  $a$  e  $b$  arcos do primeiro quadrante.

Se  $a + b = 90^\circ$ , então  $\cos(a - b)$ , em função de  $b$ , é igual a:

- a)  $\sin 2b$       b)  $\cos 2b$       c)  $\frac{\sin 2b}{2}$   
d)  $\frac{\cos 2b}{2}$       e) 1

**RESOLUÇÃO:**

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Como  $a + b = 90^\circ$  (complementares), temos:

$$\cos a = \sin b \text{ e } \sin a = \cos b$$

Assim:

$$\cos(a - b) = \sin b \cdot \cos b + \cos b \cdot \sin b = 2 \cdot \sin b \cdot \cos b = \sin(2b)$$

**Resposta: A**

6. (MACKENZIE) – Se  $\left| \frac{6 \cos x}{\sin 2x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \right| = 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sec^2 x$  vale

- a) 4      b) 2      c) 1      d) 3      e) 5

**RESOLUÇÃO:**

$$\left| \frac{6 \cos x}{\sin 2x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \right| = 0 \Leftrightarrow 6 \cos^2 x - (\operatorname{tg} x) \cdot (\sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

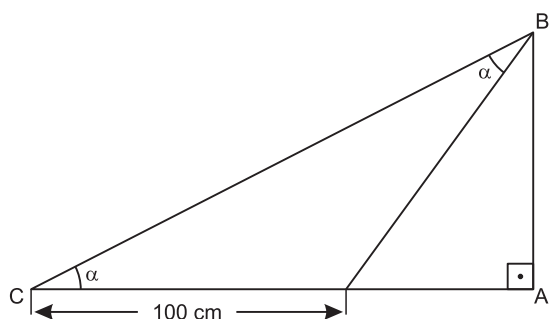
$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 3 \cdot \cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Portanto: } \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 4$$

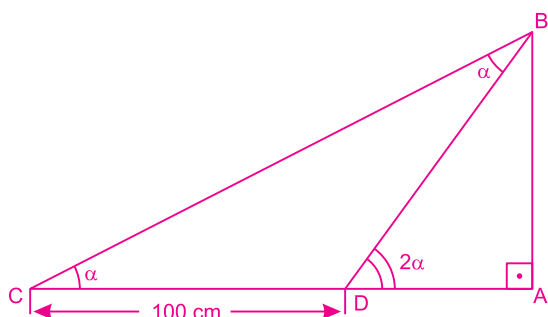
**Resposta: A**

7. (UFSC) – Na figura a seguir determine a medida do segmento AB, em cm, sabendo que  $\sin \alpha = 0,6$ .



Qual é o resultado encontrado?

**RESOLUÇÃO:**



1º)  $\triangle BCD$  é isósceles  $BD = CD = 100\text{cm}$

2º)  $\hat{A}DB = 2\alpha$

3º)  $\sin(2\alpha) = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow AB = 100 \cdot \sin(2\alpha)$

4º)  $\sin \alpha = 0,6 = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$ , pois  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  e  $\alpha$  é ângulo agudo

5º)  $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

6º)  $AB = 100 \cdot \frac{24}{25} = 96\text{cm}$

**Resposta: 96cm**

## MÓDULO 13

### FÓRMULAS DO ARCO DUPLO

1. (MACKENZIE) – Se  $y = 4 \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$ , então  $y^2$  vale

- a) 1      b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{1}{4}$       d)  $\frac{3}{4}$       e) 2

**RESOLUÇÃO:**

$$y = 4 \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ = 4 \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = 2 \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1^2 = 1$$

**Resposta: A**

2. (MACKENZIE) – Se  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{8}$ , então

$\cos x$  pode ser

- a)  $\frac{3}{8}$       b)  $-\frac{1}{8}$       c)  $-\frac{3}{4}$       d)  $-\frac{1}{4}$       e)  $\frac{5}{8}$

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin(2x) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(2x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2 x - 1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{4} \text{ ou } \cos x = -\frac{3}{4}$$

**Resposta: C**

3. (CEFET-RJ) – O maior valor possível da expressão  $(\sin 3x + \cos 3x)^2$  é

- a) 0      b) 1      c)  $\frac{3}{2}$       d) 2      e) 6

**RESOLUÇÃO:**

$$E = (\sin 3x + \cos 3x)^2 = \sin^2 3x + \cos^2 3x + 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x = 1 + \sin 6x$$

O maior valor da expressão é:  $1 + 1 = 2$

**Resposta: D**

4. (MACKENZIE) – Sendo  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  tal que  $\sin x \cdot \cos x = 0,5$ ,

se  $y = 2^{\sec 2x}$ , então é correto afirmar que:

- a)  $-1 < y < 2$ .      b)  $4 < y < 8$ .      c)  $1 < y < 4$ .  
d)  $1 < y < 16$ .      e)  $8 < y < 16$ .

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin x \cdot \cos x = 0,5 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = 1$$

Sendo  $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ \Leftrightarrow 2x \in ]0; \pi[$ , conclui-se que

$$2x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Assim:

$$1^\circ) \cos x = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \text{ e } \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 2$$

$$2^\circ) y = 2^{\sec^2 x} = 2^2 = 4$$

3º) é correto afirmar que  $1 < y < 16$ .

**Resposta: D**

5. (MACKENZIE) – Se  $\sec x = 4$ , com  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , então  $\operatorname{tg}(2x)$  é

igual a

- a)  $-\frac{4\sqrt{15}}{5}$       b)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$       c)  $\frac{2\sqrt{15}}{7}$   
d)  $\frac{\sqrt{15}}{16}$       e)  $-\frac{\sqrt{15}}{7}$

**RESOLUÇÃO:**

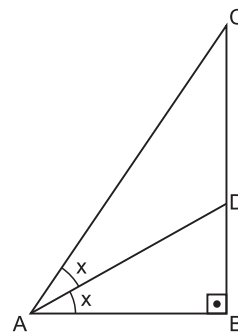
Se  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  e  $\sec x = 4$ , temos:

$$1^\circ) \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 4^2 - 1 = 15 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{15}$$

$$2^\circ) \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{1 - 15} = -\frac{\sqrt{15}}{7}$$

**Resposta: E**

6. (UFRN) – Na figura abaixo  $AB = 4$  e  $AD = 5$ .



O valor de AC é:

- a)  $\frac{100}{7}$       b)  $\frac{50}{7}$       c)  $\frac{80}{7}$       d)  $\frac{70}{5}$       e)  $\frac{105}{7}$

**RESOLUÇÃO:**

$$1^\circ) \triangle ABD: \left. \begin{array}{l} AB = 4 \\ AD = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{Então: } \cos x = \frac{4}{5}$$

$$2^{\circ}) \cos(2x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$3^{\circ}) \triangle ABC: \cos(2x) = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{AB}{\cos(2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{4}{\frac{7}{25}} \Leftrightarrow AC = \frac{100}{7}$$

Resposta: A

7. (FUVEST) – O número de soluções da equação  $\sin x = \sin 2x$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ , é

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 5

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 - 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

Assim:  $\sin x = 0$  e  $0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ e } 0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

Logo a equação tem cinco soluções, no intervalo  $[0; 2\pi]$

Resposta: E

## MÓDULO 14

### FÓRMULAS DO ARCO TRIPLO E TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

1. (FUVEST-Adaptado) – Calcular  $\sin(3x)$  e  $\cos(3x)$  em função de  $\sin x$  e  $\cos x$ , respectivamente.

**RESOLUÇÃO:**

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = \\ &= 2 \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \sin x = \\ &= 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x = \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \cdot \cos x (1 - \cos^2 x) = \\ &= 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

2. (MACKENZIE) – Se  $\cos 15^\circ$ ,  $\cos(a)$  e  $\cos 75^\circ$  formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, o valor de  $\cos(a)$  é

- a)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       b)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$       c)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       d)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**RESOLUÇÃO:**

Como  $\cos 15^\circ$ ,  $\cos(a)$  e  $\cos 75^\circ$  formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, temos:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2} = \\ &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Resposta: D

3. (FUVEST) – A medida  $x$ , em radianos, de um ângulo satisfaz  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  e verifica a equação  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ . Assim, determine  $x$ .

**RESOLUÇÃO:**

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) + 2 \cdot \sin\left(\frac{3x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) + 2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) \cdot [1 + 2 \cdot \cos x] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

Para:

$$1^{\circ}) \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = n \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{n \cdot \pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \text{ nenhuma solução é possível}$$

$$\text{com } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$2^{\circ}) \cos x = -\frac{1}{2}, \text{ a única solução possível no intervalo } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \text{ resulta}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}.$$

4. (FATEC) – Da trigonometria sabe-se que quaisquer que sejam os números reais  $p$  e  $q$ ,

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

Logo, a expressão  $\cos x \cdot \sin 9x$  é idêntica a

- a)  $\sin 10x + \sin 8x$ .      b)  $2 \cdot (\sin 6x + \sin 2x)$ .  
 c)  $2 \cdot (\sin 10x + \sin 8x)$ .      d)  $\frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x)$ .  
 e)  $\frac{1}{2} (\sin 10x + \sin 8x)$ .

#### RESOLUÇÃO:

1) Sabe-se que:

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{p-q}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{p-q}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\sin p + \sin q)$$

2) Na expressão  $\sin(9x) \cdot \cos x =$

$$= \sin \left( \frac{10x+8x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{10x-8x}{2} \right)$$

temos:  $p = 10x$  e  $q = 8x$

Portanto:  $\sin 9x \cdot \cos x =$

$$= \sin \left( \frac{10x+8x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{10x-8x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sin 10x + \sin 8x)$$

Resposta: E

5. (UFSC) – Se  $\cos(2x) = 1/3$ , onde  $x \in (0, \pi)$ , então o valor de

$$y = \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{\cos(2x)} \text{ é:}$$

- a)  $-1$       b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       c)  $\frac{3}{\sqrt{3}}$       d)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       e)  $1$

#### RESOLUÇÃO:

$$1^\circ) y = \frac{\sin(3x) - \sin x}{\cos(2x)} = \frac{2 \cdot \cos \left( \frac{3x+x}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{3x-x}{2} \right)}{\cos(2x)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos(2x) \cdot \sin x}{\cos(2x)} = 2 \cdot \sin x$$

$$2^\circ) \cos(2x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ pois } \sin x > 0$$

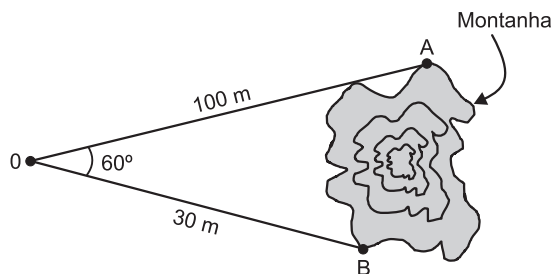
$$\text{Portanto: } y = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: D

## MÓDULO 15

### RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

1. (UNITAU) – Determinar aproximadamente a distância AB entre os pontos inacessíveis na figura, sabendo que um observador viu ambos os pontos A e B, conforme as distâncias e ângulo especificado.



- a) 79 m      b) 80 m      c) 90 m      d) 110 m      e) 37 m

#### RESOLUÇÃO:

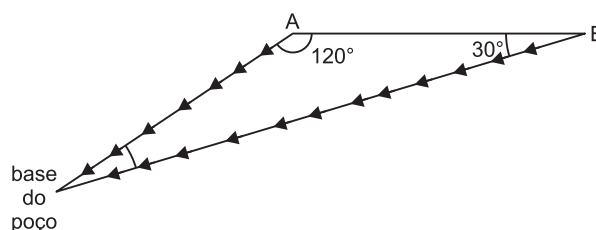
No  $\triangle OAB$ , aplicando-se Lei dos Cossenos, temos:

$$AB^2 = 30^2 + 100^2 - 2 \cdot 30 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 10000 - 3000 = 7900$$

$$\text{Portanto: } AB = \sqrt{7900} = 10 \cdot \sqrt{79} \approx 90 \text{ m}$$

Resposta: C

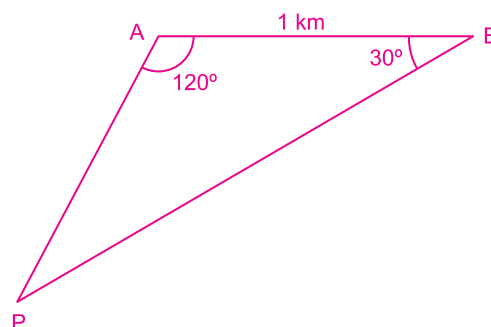
2. (UEL) – Duas plataformas marítimas (A e B) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a  $120^\circ$  e  $30^\circ$ , conforme indica a figura a seguir:



Admitindo-se que os sinais se desloquem em linha reta até a base do poço e que a distância entre a plataforma A e B, em linha reta, seja  $AB = 1 \text{ km}$ , a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é, aproximadamente, igual a:

- a) 1,7      b) 1,5      c) 1,3      d) 1,1      e) 1,0

#### RESOLUÇÃO:



A partir do enunciado, conclui-se que  $\hat{APB} = 30^\circ$  e, portanto, o  $\triangle ABP$  é isósceles,  $AP = AB = 1 \text{ km}$ . A maior distância do poço P a uma das plataformas (B), pode ser obtida, aplicando-se a Lei dos Cossenos, assim:

$$PB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PB^2 = 1 + 1 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow PB^2 = 3 \Leftrightarrow PB = \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ km}$$

Resposta: A

3. (FUVEST) – Os comprimentos dos lados de um triângulo ABC formam uma PA. Sabendo-se também que o perímetro de ABC vale 15 e que o ângulo  $\hat{A}$  mede  $120^\circ$ , então o produto dos comprimentos dos lados é igual a

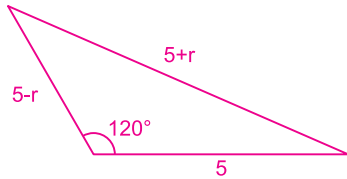
- a) 25      b) 45      c) 75      d) 105      e) 125

**RESOLUÇÃO:**

As medidas dos lados desse triângulo podem ser expressas por:  $x - r$ ,  $x$  e  $x + r$ , com  $x > 0$  e  $r > 0$ .

Assim:  $x - r + x + x + r = 15 \Leftrightarrow x = 5$

O triângulo fica:



De acordo com a lei dos cossenos, tem-se:

$$(5 + r)^2 = (5 - r)^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot (5 - r) \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 + 10r + r^2 = 25 - 10r + r^2 + 25 + 25 - 5r \Leftrightarrow$$

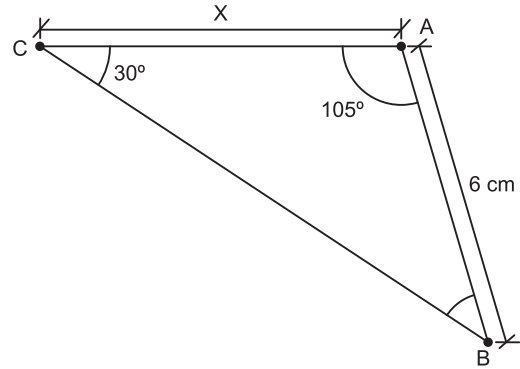
$$\Leftrightarrow 25r = 50 \Leftrightarrow r = 2$$

Logo, o produto dos comprimentos dos lados desse triângulo é igual a:

$$5 \cdot (5 - r) \cdot (5 + r) = 5 \cdot (5 - 2) \cdot (5 + 2) = 105$$

Resposta: D

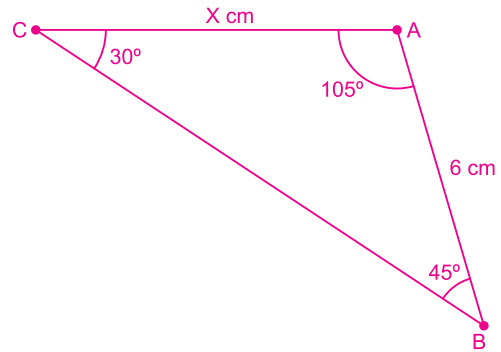
4. (FMJU) – Uma área plantada, de forma triangular, contém 3 pontos de abastecimento de água para o processo de irrigação, conforme mostra a figura, cuja escala é de 1:10.000. A distância entre os pontos A e C é, aproximadamente, igual a



Dado:  $\sqrt{2} = 1,41$

- a) 0,56 km      b) 0,78 km      c) 0,84 km  
d) 0,96 km      e) 1,84 km

**RESOLUÇÃO:**



1º) Se  $\hat{A} = 105^\circ$  e  $\hat{C} = 30^\circ$  resulta  $\hat{B} = 45^\circ$

2º) Pela lei dos senos:

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \cdot \sqrt{2} \approx 6 \cdot 1,41 = 8,46 \text{ cm}$$

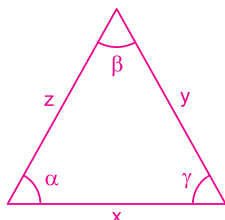
3º) Na escala 1: 10 000, a distância AC é igual a:  
 $84\,600 \text{ cm} \approx 0,84 \text{ km}$

Resposta: C

5. (FATEC) – Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Se  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 1$  e o perímetro do triângulo é 44, então a medida do maior lado desse triângulo é
- a) 5.      b) 10.      c) 15.      d) 20.      e) 25.

#### RESOLUÇÃO:

A partir do enunciado, e considerando a figura abaixo, pela lei dos senos, temos:



$$1.^{\circ}) \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{z}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{y}{z} = 1 \Leftrightarrow y = z$$

$$2.^{\circ}) \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = \frac{3}{5} \cdot x$$

Como o perímetro do triângulo é 44, temos:

$$x + y + z = 44 \Leftrightarrow x + \frac{3}{5} \cdot x + \frac{3}{5} \cdot x = 44 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3x + 3x = 44 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 20$$

O maior lado do triângulo é 20, pois os outros lados são:  $y = z = 12$

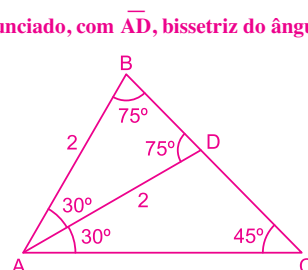
Resposta: D

6. (CEFET-RJ) – Num triângulo ABC, sabe-se que o ângulo  $\hat{A} = 60^\circ$ , que o lado AB mede 2 e a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$  tem medida 2. Determine:

- a) Os outros ângulos do triângulo ABC.  
b) A medida do lado BC.

#### RESOLUÇÃO:

- a) A partir do enunciado, com  $\overline{AD}$ , bissetriz do ângulo  $\hat{A}$ , temos:



$$1.^{\circ}) AD = AB = 2 \Rightarrow \triangle ABD \text{ é isósceles e } \hat{ABD} = \hat{ADB} = 75^\circ$$

$$2.^{\circ}) \text{ Como } \hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 75^\circ, \text{ resulta } \hat{C} = 45^\circ$$

- b) Pela Lei dos Senos; no  $\triangle ABC$ , temos:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Respostas: a)  $\hat{B} = 75^\circ$  e  $\hat{C} = 45^\circ$

b)  $\sqrt{6}$

## MÓDULO 16

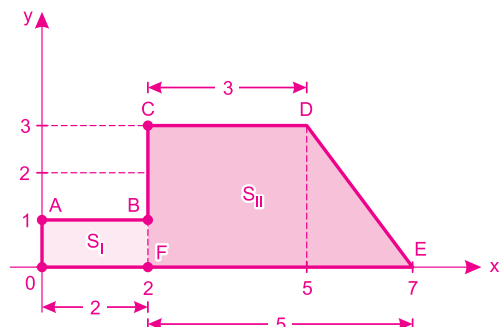
### COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONAIS

1. (UNESP) – Considere os pontos do plano  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(2,1)$ ,  $(2,3)$ ,  $(5,3)$  e  $(7,0)$ . Representando geometricamente esses pontos no plano cartesiano e ligando-os por meio de segmentos de retas obedecendo à sequência dada, após ligar o último ponto ao primeiro obtém-se uma região limitada do plano.

Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região, em  $\text{cm}^2$ , é:

- a) 9      b) 10      c) 13      d) 14      e) 15

#### RESOLUÇÃO:



Os pontos  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 1)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(2; 3)$ ,  $D(5; 3)$  e  $E(7; 0)$ , são os vértices da região cuja área  $S$  é igual à área  $S_I$  do retângulo  $OABF$ , mais a área  $S_{II}$  do trapézio  $CDEF$ , onde  $F(2; 0)$ .

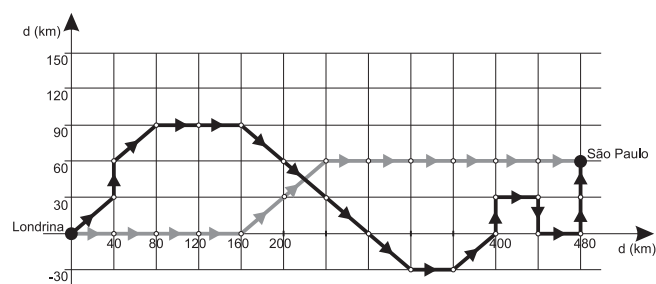
Dessa forma, temos:

$$S = S_I + S_{II} = 2 \cdot 1 + \frac{(5 + 3) \cdot 3}{2} = 2 + 12 = 14.$$

Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região é igual a  $14 \text{ cm}^2$ .

Resposta: D

2. (UEL) – Um indivíduo em Londrina telefona para um amigo em São Paulo utilizando um celular. Considere que entre Londrina e São Paulo há antenas retransmissoras nas posições indicadas por pequenos círculos na figura a seguir:



Dois sinais que percorrem os diferentes caminhos (cinza claro e cinza escuro) indicados pelas setas chegarão ao celular receptor (São Paulo) defasados no tempo.

Sabendo-se que a velocidade de propagação do sinal é da ordem da velocidade da luz, ou seja,  $v \approx 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ , a defasagem dos sinais é

- a)  $\frac{8}{30} \cdot 10^{-5} \text{ s}$       b)  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-5} \text{ s}$       c)  $\frac{8}{30} \cdot 10^{-3} \text{ s}$   
d)  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s}$       e)  $\frac{32}{30} \cdot 10^{-3} \text{ s}$

#### RESOLUÇÃO:

Lembrando que:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

temos:

1º) Consideremos o caminho 1, aquele demarcado pela cor cinza escuro. Verifica-se que a distância percorrida neste caminho é de 700 km. O tempo que este sinal demorará para chegar a São Paulo é dado por

$$\Delta t_1 = \frac{700}{3 \cdot 10^5} \text{ s} = \frac{7}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

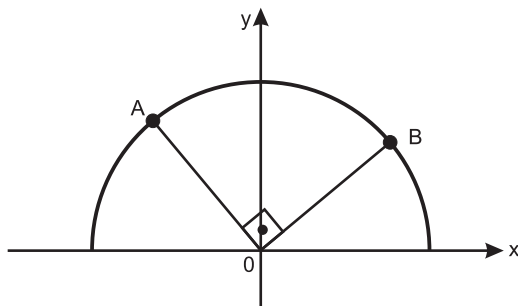
2º) O caminho 2, demarcado pela cor cinza claro, mede 500 km, de modo que o tempo que este sinal demorará para chegar a São Paulo será:

$$\Delta t_2 = \frac{500}{3 \cdot 10^5} \text{ s} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{Portanto, a defasagem será de } \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Resposta: D

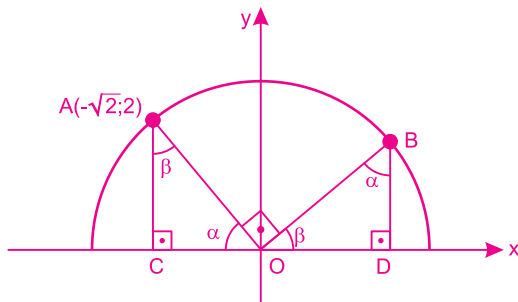
3. (MACKENZIE)



A figura mostra uma semicircunferência com centro na origem. Se o ponto A é  $(-\sqrt{2}, 2)$ , então o ponto B é

- a)  $(2, \sqrt{2})$       b)  $(\sqrt{2}, 2)$       c)  $(1, \sqrt{5})$   
 d)  $(\sqrt{5}, 1)$       e)  $(2, \sqrt{5})$

**RESOLUÇÃO:**



Se os pontos C e D são as projeções ortogonais dos pontos A e B, respectivamente, sobre o eixo das abscissas, conclui-se que:

1º) No triângulo OCA, temos  $OC = \sqrt{2}$  e  $AC = 2$ .

2º) Os triângulos OCA e BDO são congruentes.

Portanto,  $AC = OD = 2$  e  $OC = BD = \sqrt{2}$ , e como o ponto B é do 1º quadrante, as coordenadas do ponto B são  $(2; \sqrt{2})$ .

Resposta: A

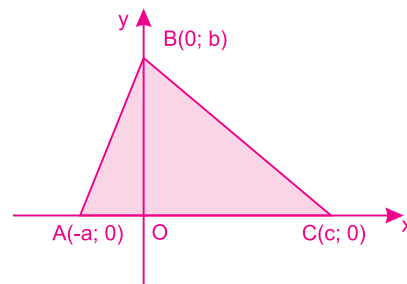
4. (FUVEST) – Sejam **a**, **b** e **c** três números estritamente positivos em progressão aritmética.

Se a área do triângulo ABC cujos vértices são A  $(-a; 0)$ , B  $(0; b)$  e C  $(c; 0)$  é igual a **b**, então o valor de **b** é:

- a) 5      b) 4      c) 3      d) 2      e) 1

**RESOLUÇÃO:**

Se **a**, **b**, **c** estão em P.A. (nessa ordem), então  $a + c = 2b$ .



$$S = \frac{AC \cdot OB}{2} \Rightarrow b = \frac{(a+c) \cdot b}{2}$$

Como  $b \neq 0$ , temos:

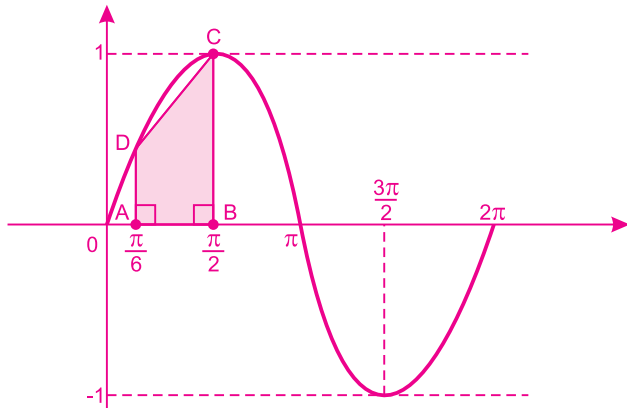
$$2 = a + c \Rightarrow 2 = 2b \Leftrightarrow b = 1$$

Resposta: E

5. (UFV) – Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = \sin x$ ,  $x \geq 0$ . Num mesmo sistema de coordenadas, considere os pontos  $A = \left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ ,  $B = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ,  $C$  e  $D$ , onde  $C$  e  $D$  estão sobre o gráfico de  $f$ , cujas abscissas são respectivamente,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{6}$ . Unindo-se esses pontos obtém-se o quadrilátero  $ABCD$ , cuja área vale:

- a)  $\frac{\pi}{4}$       b)  $\frac{\pi}{2}$       c)  $\frac{\pi}{5}$       b)  $\frac{\pi}{3}$

**RESOLUÇÃO:**



A partir do enunciado, temos  $A = \left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$  e  $B = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ , de onde se conclui  $C = \left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$  e  $D = \left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$ , pois  $C$  e  $D$  pertencem ao gráfico da função  $y = \sin x$ .

O quadrilátero  $ABCD$  resulta um trapézio cuja área é igual a

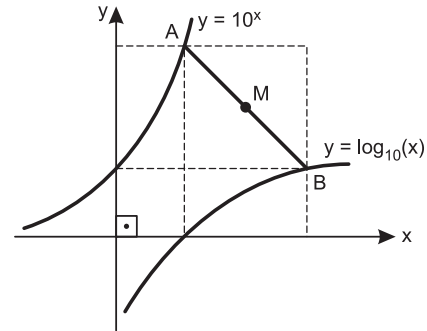
$$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD) \cdot AB}{2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Resposta: A

## MÓDULO 17

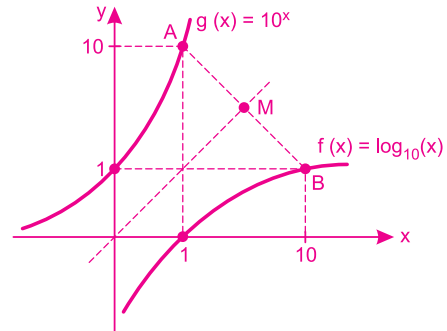
### PONTO MÉDIO – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

1. (UNIFESP) – Considere os gráficos das funções definidas por  $f(x) = \log_{10}(x)$  e  $g(x) = 10^x$ , conforme figura (fora de escala).



Dê as coordenadas de  $M$ , ponto médio do segmento  $AB$ .

**RESOLUÇÃO:**



Se  $x = 1 \rightarrow y = 10^1 = 10 \rightarrow A(1; 10)$

Se  $y = 1 \rightarrow y = \log_{10}x \Leftrightarrow x = 10 \rightarrow B(10; 1)$

Como  $M$  é ponto médio de  $\overline{AB}$ , temos:

$$M\left(\frac{1+10}{2}; \frac{10+1}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

2. (ESC.ESP. AERONÁUTICA) – Num triângulo ABC, o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  é  $M(4, 3)$ . Se as coordenadas de B são ambas iguais a 2, então as coordenadas de A são

- a) (7, 5)    b) (6, 4)    c) (5, 3)    d) (3, 4)    e) (6, 5)

**RESOLUÇÃO:**

Se  $M(4, 3)$  é ponto médio do lado  $\overline{AB}$ , em que  $B(2; 2)$ , temos:

$$\frac{x_A + 2}{2} = 4 \Leftrightarrow x_A = 6$$

$$\frac{y_A + 2}{2} = 3 \Leftrightarrow y_A = 4$$

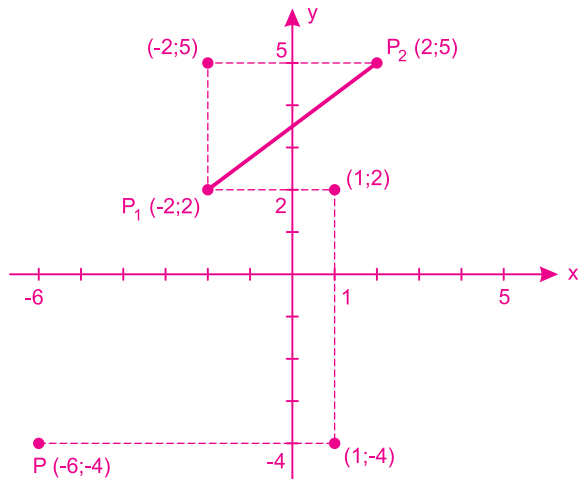
Portanto, o ponto A tem coordenadas (6; 4).

Resposta: B

3. (MACKENZIE) – Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, com os eixos graduados em quilômetros, uma lancha sai do ponto  $(-6, -4)$ , navega 7 km para leste, 6 km para o norte e 3 km para oeste, encontrando um porto. Depois continua a navegação, indo 3 km para norte e 4 km para leste, encontrando um outro porto. A distância, em quilômetros, entre os portos é

- a) 7    b)  $3\sqrt{5}$     c)  $2\sqrt{3}$     d)  $\sqrt{7}$     e) 5

**RESOLUÇÃO:**



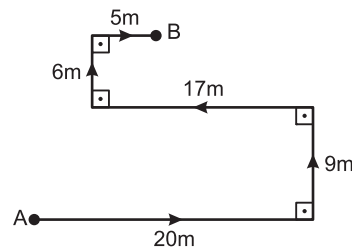
A lancha sai do ponto  $P(-6; -4)$ , encontra o primeiro porto em  $P_1(-2; 2)$  e o segundo porto em  $P_2(2; 5)$ .

Assim, a distância, em quilômetros, entre os dois portos é a distância de  $P_1$  a  $P_2$ .

$$P_1P_2^2 = P_1A^2 + AP_2^2 \Rightarrow P_1P_2^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow P_1P_2 = 5$$

Resposta: E

4. (PUC) – A figura abaixo mostra a trajetória percorrida por uma pessoa para ir do ponto A ao ponto B, caminhando em um terreno plano e sem obstáculos.

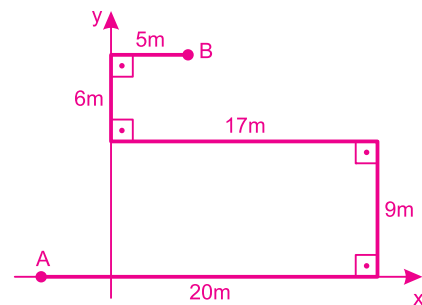


Se ela tivesse usado o caminho mais curto para ir de A a B, teria percorrido

- a) 15 m    b) 16 m  
c) 17 m    d) 18 m  
e) 19 m

**RESOLUÇÃO:**

Tomando-se eixos coordenados (de modo conveniente), podemos obter os pontos A  $(-3; 0)$  B  $(5; 15)$



O caminho mais curto para ir de A a B é a distância entre os dois pontos.

$$d = \sqrt{(5 + 3)^2 + (15 - 0)^2} = \sqrt{289} = 17$$

Resposta: C

5. (FGV) – No plano cartesiano, o ponto P que pertence à reta de equação  $y = x$  e é equidistante dos pontos A  $(-1, 3)$  e B  $(5, 7)$  tem abscissa igual a:

- a) 3,1    b) 3,3    c) 3,4    d) 3,5    e) 3,2

**RESOLUÇÃO:**

Se P pertence à reta de equação  $y = x$ , então  $P(x; x)$ . Como P é equidistante dos pontos A e B, temos:

$$\begin{aligned} PA = PB &\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (x - 3)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (x - 7)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = x^2 - 10x + 25 + x^2 - 14x + 49 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 20x = 64 \Leftrightarrow x = 3,2 \end{aligned}$$

Resposta: E

6. (ESPM) – No plano cartesiano, tem-se um ponto P (a, b) pertencente à reta de equação  $x - y = 1$ . Para que a distância desse ponto até a origem O (0,0) seja menor que  $\sqrt{5}$ , deve-se ter:

- a)  $-2 < a < -1$       b)  $-1 < a < 2$       c)  $0 < a < 3$   
d)  $-3 < a < -2$       e)  $2 < a < 3$

**RESOLUÇÃO:**

1º) Como o ponto P(a,b) pertence à reta  $x - y = 1$ , temos  $a - b = 1$ , isto é,  $b = a - 1$

$$2º) \quad d < \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2 + (a-1)^2} < \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 - 2a + 1 < 5 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 2$$

Resposta: B

## MÓDULO 18

### ALINHAMENTO DE 3 PONTOS – CURVAS

1. (UNESP) – Sejam P = (a,b), Q = (1,3) e R = (-1,-1) pontos do plano. Se  $a + b = 7$ , determine P de modo que P, Q e R sejam colineares.

**RESOLUÇÃO:**

1) Se P = (a;b), Q(1;3) e R = (-1; -1) são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a - b + 1 = 0$$

2) Como  $a + b = 7$ , então:  $a + b + 2a - b + 1 = 7 + 0 \Leftrightarrow a = 2$

Assim:  $2 + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 5$

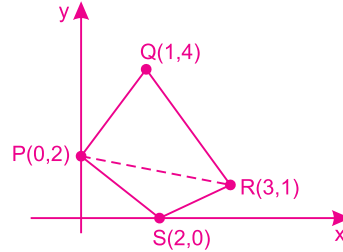
Resposta: P = (2; 5)

2. (CEFET) – Um quadrilátero tem seus vértices nos pontos P(0; 2), Q(1; 4), R(3; 1), e S(2; 0). A área desse quadrilátero é, em unidades de área,

- a)  $13/2$  unidades.      b)  $15/2$  unidades.      c)  $9/2$  unidades.  
d)  $11/2$  unidades.      e) 4 unidades.

**RESOLUÇÃO:**

No plano cartesiano, temos



No cálculo das áreas dos triângulos, resulta:

$$1º) \quad A_{\Delta PQR} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{7}{2}$$

$$2º) \quad A_{\Delta PRS} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = 2$$

$$\text{Portanto, } A_{PQRS} = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$$

Resposta: D

3. (ESPM) – Os pontos A(x; x + 1), B(0; x) e C(x - 1; 1) são vértices de um triângulo de área 4 situado no primeiro quadrante do plano cartesiano. A medida do lado AB é igual a:

- a)  $\sqrt{5}$       b)  $\sqrt{10}$       c)  $\sqrt{17}$       d)  $\sqrt{2}$       e)  $\sqrt{3}$

**RESOLUÇÃO:**

$$A_{\Delta ABC} = \left| \frac{\begin{vmatrix} x & x+1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} \right| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+1) \cdot (x-1) - x \cdot (x-1) - x = \pm 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 1 - x^2 + x - x = \pm 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \pm 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Como o  $\Delta ABC$ , é do 1º quadrante, temos:  $x = 3$ .

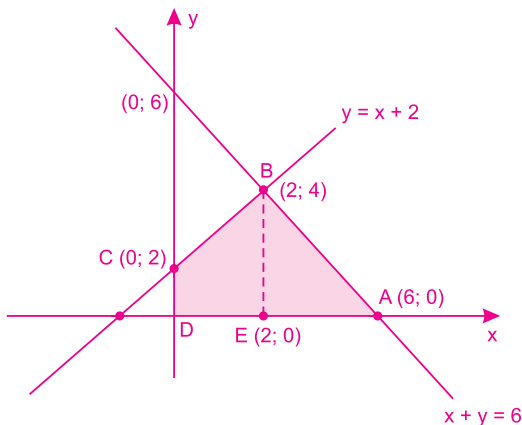
Então A(3; 4), B(0; 3) e o lado  $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

**Resposta: B**

4. (MACKENZIE) – Os gráficos de  $y = x + 2$  e  $x + y = 6$  definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um quadrilátero de área

- a) 12      b) 16      c) 10      d) 8      e) 14

**RESOLUÇÃO:**



$$1) \begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow B(2, 4)$$

2) A área S do quadrilátero A(6, 0), B(2, 4), C(0, 2) e D(0, 0) é igual à área  $S_1$  do trapézio EBCD somada com a área  $S_2$  do triângulo ABE. Logo:

$$S = \frac{4+2}{2} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 4}{2} = 6 + 8 = 14$$

**Resposta: E**

5. (FGV) – No plano cartesiano, a reta de equação  $x - y = 0$  determina, na circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ , uma corda cujo comprimento vale

- a)  $\sqrt{2}$       b)  $\sqrt{3}$       c) 2      d)  $\sqrt{5}$       e)  $\sqrt{6}$

**RESOLUÇÃO:**

A interseção da reta com a circunferência é obtida pela solução do sistema determinado pelas suas equações, assim:

$$\begin{cases} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), resulta:

$$x^2 + x^2 - 4x - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Como  $x = y$ , os pontos de interseção resultam A(1;1) e B(2;2), que determinam uma corda cujo comprimento vale:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

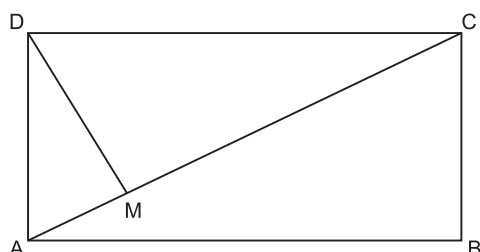
**Resposta: A**

## MÓDULO 11

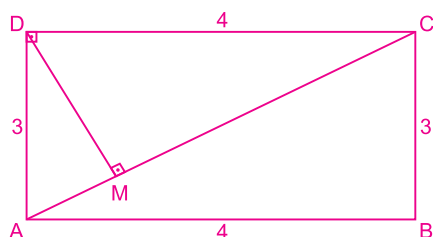
## RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

1. (CESGRANRIO) – No retângulo ABCD de lados  $AB = 4$  e  $BC = 3$ , o segmento  $\overline{DM}$  é perpendicular à diagonal  $\overline{AC}$ . O segmento  $\overline{AM}$  mede:

- a)  $\frac{3}{2}$     b)  $\frac{12}{5}$     c)  $\frac{5}{2}$     d)  $\frac{9}{5}$     e) 2



RESOLUÇÃO:



1º) No triângulo retângulo BAC, tem-se  $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

2º) No triângulo retângulo DAC, tem-se  $(AD)^2 = AC \cdot AM$

$$\text{Assim, } 3^2 = 5 \cdot AM \Leftrightarrow AM = \frac{9}{5}$$

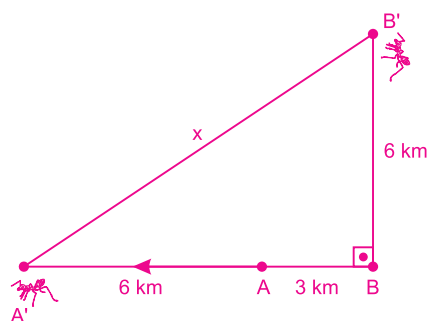
Resposta: D

2. (PUC-RJ) – Ao meio dia, a formiga A está 3 km a oeste da formiga B. A formiga A está se movendo para o oeste a 3 km/h e a formiga B está se movendo para o norte com a mesma velocidade. Qual a distância, em quilômetros, entre as duas formigas às 14h desse mesmo dia?

- a)  $\sqrt{17}$     b) 17    c)  $\sqrt{51}$     d)  $\sqrt{117}$     e) 117

RESOLUÇÃO:

Cada formiga, em duas horas, percorrerá 6 km (ver figura)

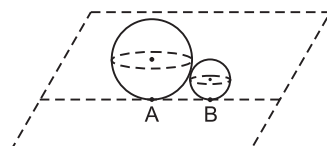


$$\text{Logo } x^2 = 6^2 + 9^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{117} \text{ km}$$

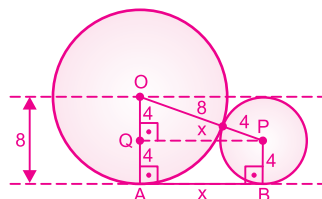
Resposta: D

3. (FUVEST) – No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:

- a) 8    b)  $6\sqrt{2}$   
c)  $8\sqrt{2}$     d)  $4\sqrt{3}$   
e)  $6\sqrt{3}$



RESOLUÇÃO:



$$x^2 + 4^2 = 12^2 \Leftrightarrow$$

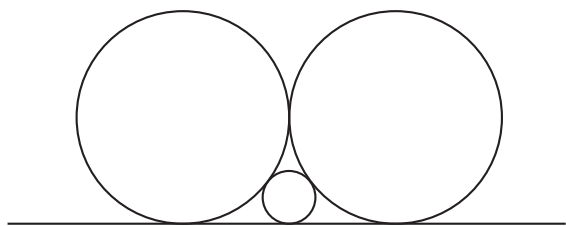
$$\Leftrightarrow x^2 = 144 - 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{128} \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$$

Resposta: C

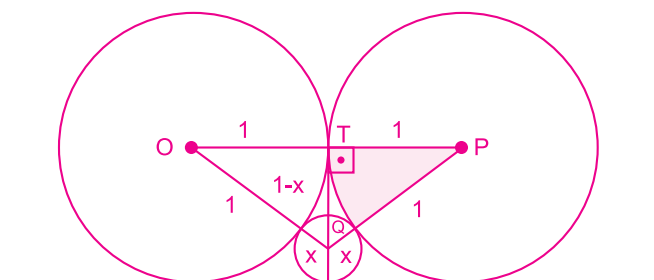
4. (UFMG) – Nesta figura, estão representadas três circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta tangente às três circunferências:



Sabe-se que o raio de cada uma das duas circunferências maiores mede 1cm. Então é correto afirmar que a medida do raio da circunferência menor, em centímetros, é igual a:

- a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{1}{4}$       c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       d)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**RESOLUÇÃO:**



Seja  $x$  a medida, em centímetros, do raio da circunferência menor, no triângulo retângulo TPQ, tem-se:

$$TP = 1, TQ = 1 - x, QP = 1 + x \text{ e } (QP)^2 = (TP)^2 + (TQ)^2$$

Assim:

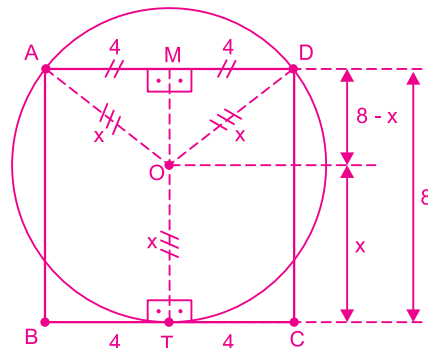
$$(1 + x)^2 = 1^2 + (1 - x)^2 \Leftrightarrow 1 + 2x = 1 + 1 - 2x \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Resposta: B

5. (UFTM) – A partir de um quadrado ABCD de lado medindo 8 cm, desenha-se uma circunferência que passa pelos vértices A e D e é tangente ao lado  $\overline{BC}$ . A medida do raio da circunferência desenhada, em cm, é:

- a) 4      b) 5      c)  $4\sqrt{2}$       d) 6      e)  $5\sqrt{2}$

**RESOLUÇÃO:**



No triângulo retângulo MOD, onde  $OD = x$ ,  $MD = 4$  e  $OM = 8 - x$ , de acordo com o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(OD)^2 = (OM)^2 + (MD)^2$$

$$\text{Assim: } x^2 = (8 - x)^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 - 16x + x^2 + 16 \Leftrightarrow 16x = 80 \Leftrightarrow x = 5$$

Resposta: B

## MÓDULO 12

### RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS QUAISQUER

1. Em um triângulo ABC, têm-se  $AB = 3$ ,  $AC = 6$  e  $BC = 7$ . Esse triângulo é

- a) equilátero      b) isósceles      c) retângulo  
d) acutângulo      e) obtusângulo

**RESOLUÇÃO:**

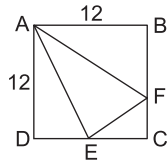
$$\left. \begin{array}{l} (AB)^2 = 9 \\ (AC)^2 = 36 \\ (BC)^2 = 49 \end{array} \right\} \Rightarrow (AB)^2 + (AC)^2 = 45$$

$$\text{Portanto: } (BC)^2 > (AB)^2 + (AC)^2$$

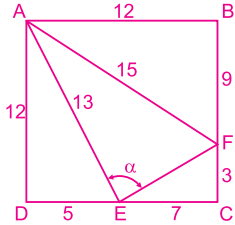
Resposta: E

2. (FUVEST) – No quadrado ABCD de lado 12, temos  $AE = 13$  e  $CF = 3$ .

O ângulo  $\widehat{AEF}$  é agudo, reto ou obtuso? Justifique.



**RESOLUÇÃO:**  
Agudo, pois:



$$(AF)^2 = 15^2 \Leftrightarrow (AF)^2 = 225$$

$$(AE)^2 = 13^2 \Leftrightarrow (AE)^2 = 169$$

$$(EF)^2 = 7^2 + 3^2 \Leftrightarrow (EF)^2 = 58$$

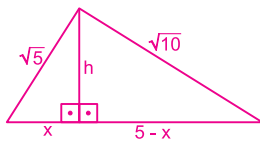
Como  $225 < 169 + 58$ ,

então  $\alpha < 90^\circ$

3. (FUVEST) – Os lados de um triângulo medem  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{10}$  e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

- a)  $\sqrt{1}$     b)  $\sqrt{2}$     c)  $\sqrt{3}$     d)  $\sqrt{5}$     e)  $\sqrt{15}$

**RESOLUÇÃO:**

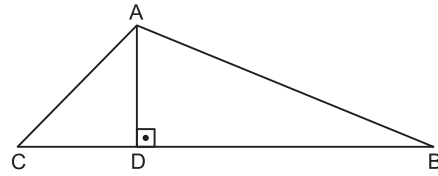


$$\left. \begin{array}{l} x^2 + h^2 = 5 \\ (5-x)^2 + h^2 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - (5-x)^2 = -5 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Assim, } 2^2 + h^2 = 5 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = \sqrt{1}$$

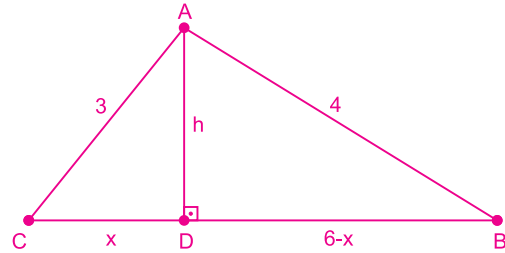
Resposta: A

4. (FUVEST) – Na figura abaixo, tem-se  $AC = 3$ ,  $AB = 4$  e  $CB = 6$ . O valor de  $CD$  é



- a)  $17/12$     b)  $19/12$     c)  $23/12$     d)  $25/12$     e)  $29/12$

**RESOLUÇÃO:**



Se  $h$  é altura do triângulo ACB relativa ao lado CB, e se  $x$  é a medida de CD, então

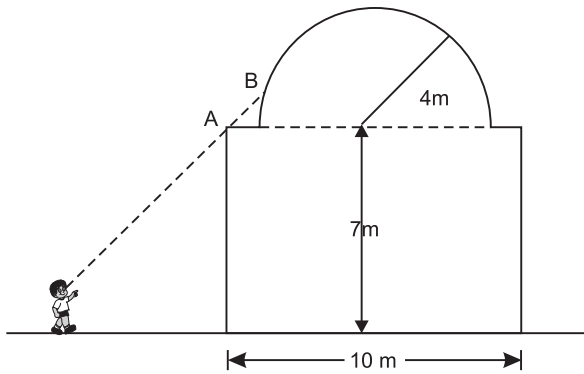
1) No triângulo ADC, tem-se  $h^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 - x^2$

2) No triângulo ADB, tem-se  $h^2 + (6-x)^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 12x - 20 - x^2$

Logo,  $12x - 20 - x^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{29}{12}$

Resposta: E

5. (UFJF-MG) – Uma mesquita possui uma abóboda semiesférica de 4m de raio, cujo centro dista 7m do chão e 5m das paredes laterais. A figura a seguir representa um corte em perfil, em que um menino, afastado 6m da parede lateral, mirando em A, vê o ponto B na abóboda.

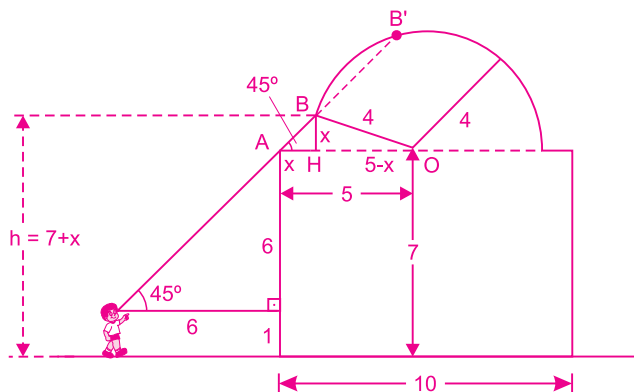


Considerando-se os olhos do menino a 1m do chão e desprezando-se a espessura das paredes, conclui-se que a altura do ponto B em relação ao chão, em metros é igual a:

- a)  $\frac{(21 - \sqrt{7})}{2}$       b)  $\frac{(19 - \sqrt{7})}{2}$       c)  $\frac{(17 - \sqrt{7})}{2}$   
 d)  $\frac{(8 + \sqrt{7})}{2}$       e) 8

**RESOLUÇÃO:**

Seja  $x$  a altura BH do triângulo ABO relativa ao lado AO e  $h$  a altura do ponto B em relação ao chão.



No triângulo retângulo HBO, de acordo com o teorema de Pitágoras,

$$\text{tem-se } x^2 + (5 - x)^2 = 4^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}, \text{ pois:}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Assim: } h = 7 + x \Leftrightarrow h = 7 + \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{19 - \sqrt{7}}{2}$$

Resposta: B

1. (UNESP) – Definir baricentro de um triângulo.

**RESOLUÇÃO:**

É o ponto de intersecção das medianas do triângulo.

2. (ESAM) – O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado altura. O ponto de intersecção das três retas suportes das alturas do triângulo é chamado

- a) baricentro.      b) incentro.      c) circuncentro.  
 d) ortocentro.      e) mediano.

**RESOLUÇÃO:**

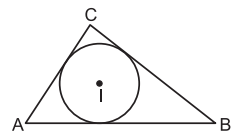
O ponto de intersecção das retas suportes das três alturas de um triângulo é o ORTOCENTRO do referido triângulo.

Resposta: D

3. Na figura ao lado, o ponto I é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.

Pode-se afirmar que

- a) I é o baricentro do triângulo ABC.  
 b) I é o ortocentro do triângulo ABC.  
 c) I é o ponto de intersecção das medianas do triângulo ABC.  
 d) I é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC.  
 e) I é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo ABC.

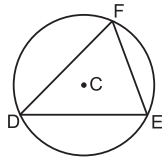


**RESOLUÇÃO:**

I é o incentro do triângulo ABC e, portanto, trata-se do ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC.

Resposta: D

4. Na figura ao lado, o ponto C é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo DEF.



Pode-se afirmar que

- a) C é o baricentro do triângulo DEF.
- b) C é o incentro do triângulo DEF.
- c) C é o ponto de intersecção das medianas do triângulo DEF.
- d) C é o ponto de intersecção das alturas do triângulo DEF.
- e) C é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo DEF.

#### RESOLUÇÃO:

C é o circuncentro do triângulo DEF e, portanto, trata-se do ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo DEF.

Resposta: E

5. Os quatro pontos notáveis de um triângulo são alinhados. Esse triângulo é, necessariamente,

- a) isósceles
- b) acutângulo
- c) retângulo
- d) obtusângulo
- e) equilátero

#### RESOLUÇÃO:

Os quatro pontos notáveis de um triângulo isósceles são sempre alinhados, pois as retas suportes da mediana, altura, bissetriz e mediatriz relativas à base são coincidentes.

Resposta: A

6. Assinale a afirmação **falsa**.

- a) Os pontos notáveis de um triângulo equilátero são coincidentes.
- b) O incentro de qualquer triângulo é sempre um ponto interno.
- c) O ortocentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.
- d) O circuncentro de um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.
- e) O baricentro de qualquer triângulo é o ponto médio de cada mediana.

#### RESOLUÇÃO:

O baricentro de qualquer triângulo não é o ponto médio de cada mediana, pois o baricentro, invariavelmente, divide cada mediana na razão 2:1.

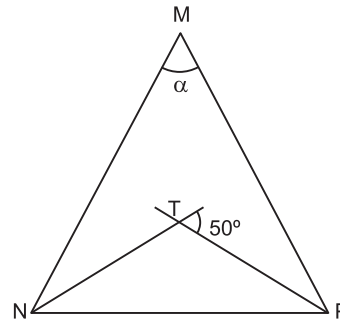
Resposta: E

## MÓDULO 14

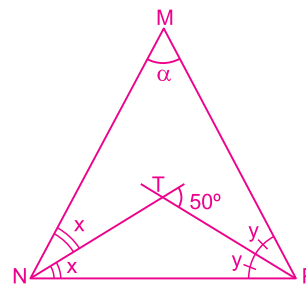
### PONTOS E SEGMENTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

1. (MACKENZIE) – Se, na figura, T é o incentro do triângulo MNP, a medida do ângulo  $\alpha$  é

- a)  $45^\circ$
- b)  $50^\circ$
- c)  $60^\circ$
- d)  $70^\circ$
- e)  $80^\circ$



#### RESOLUÇÃO:



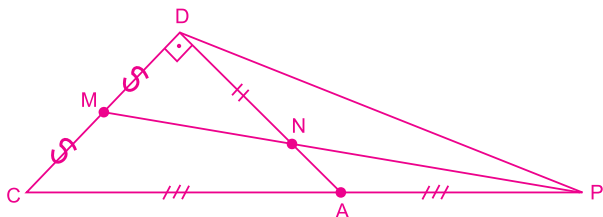
$$x + y = 50^\circ \quad \text{e} \quad \alpha + 2x + 2y = 180^\circ$$

$$\text{Assim, } \alpha + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 80^\circ$$

Resposta: E

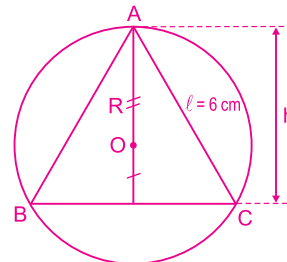
The diagram shows a rhombus  $ABCD$  with vertices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , and  $D$ . A line segment  $MN$  is drawn, where  $M$  is on side  $CD$  and  $N$  is on side  $AD$ . The line segment  $MN$  is extended to a point  $P$  on the extension of side  $CA$ . The area of triangle  $DMN$  is shaded gray.

**RESOLUÇÃO:**


$$\text{Assim, DN} = \frac{2}{3} \cdot \text{DA} \Leftrightarrow \text{DN} = \frac{2}{3} \cdot 6 \Leftrightarrow \text{DN} = 4\text{cm}$$

a)  $\sqrt{3}$ .    b)  $2\sqrt{3}$ .    c) 4.    d)  $3\sqrt{2}$ .    e)  $3\sqrt{3}$ .

**RESOLUÇÃO:**

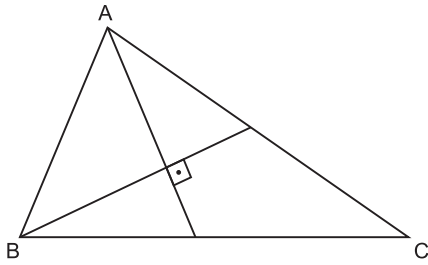

$$1) \quad h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{3}\text{cm}$$

$$2) \quad OA = \frac{2}{3} \cdot h$$

$$\text{Logo: } R = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3}\text{cm} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

**Resposta: B**

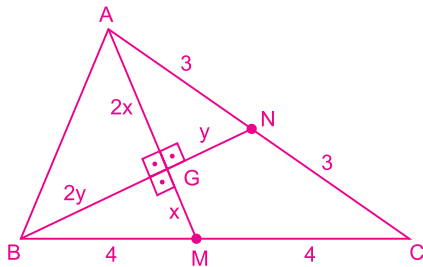
4. (CFT-CE) – No triângulo ABC da figura a seguir, as medianas que parte de A e de B são perpendiculares.



Se  $BC = 8$  e  $AC = 6$ , então  $AB$  é igual a:

- a)  $3\sqrt{6}$     b)  $4\sqrt{3}$     c)  $12\sqrt{7}$     d)  $2\sqrt{5}$     e)  $4\sqrt{2}$

**RESOLUÇÃO:**



1º) Nos triângulos GAN e GBM, tem-se:

$$(2x)^2 + y^2 = 3^2 \text{ e } x^2 + (2y)^2 = 4^2$$

$$\text{Assim: } 5x^2 + 5y^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$$

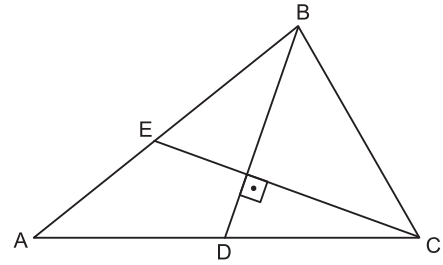
2º) No triângulo retângulo GAB, tem-se:

$$(AB)^2 = (2x)^2 + (2y)^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\text{Assim: } (AB)^2 = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{5}$$

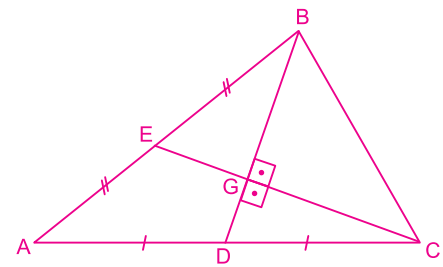
**Resposta: D**

5. (FGV-SP) – As medianas  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  do triângulo ABC indicado na figura são perpendiculares,  $BD = 8$  e  $CE = 12$ . Assim, a área do triângulo ABC é



- a) 96.    b) 64.    c) 48.    d) 32.    e) 24.

**RESOLUÇÃO:**



1º) G é baricentro do triângulo ABC, e portanto

$$CG = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm.}$$

Assim, a área do triângulo CBD, em  $\text{cm}^2$ , é

$$S_{\text{CBD}} = \frac{BD \cdot CG}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$$

2º) Como os triângulos ABD e CBD, tem mesma área, a área do triângulo ABC, em  $\text{cm}^2$ , é:

$$S_{\text{ABC}} = 2 \cdot S_{\text{CBD}} = 2 \cdot 32 = 64$$

**Resposta: B**

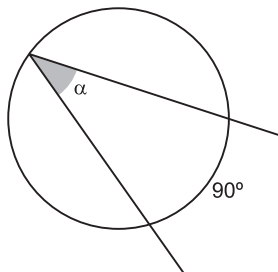
## MÓDULO 15

### ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Nos exercícios de 1 a 3, determinar o valor de  $\alpha$ , associando-o com as seguintes alternativas:

- a)  $40^\circ$    b)  $45^\circ$    c)  $50^\circ$    d)  $80^\circ$    e)  $85^\circ$

1.

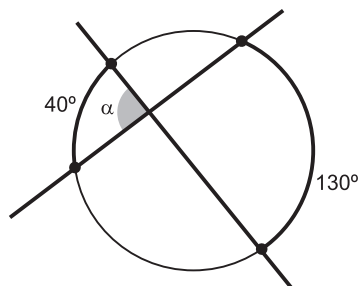


**RESOLUÇÃO:**

$$\alpha = \frac{90^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

**Resposta: B**

2. (MACKENZIE)

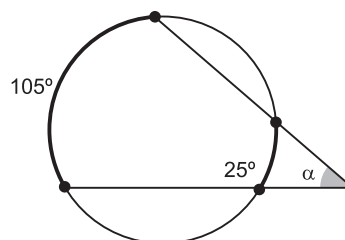


**RESOLUÇÃO:**

$$\alpha = \frac{40^\circ + 130^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 85^\circ$$

**Resposta: E**

3.

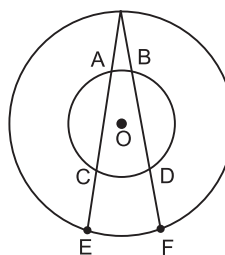


**RESOLUÇÃO:**

$$\alpha = \frac{105^\circ - 25^\circ}{2} \Leftrightarrow \alpha = 40^\circ$$

**Resposta: A**

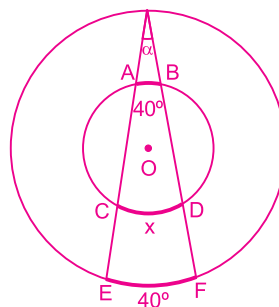
4. (MACKENZIE) – Na figura, as circunferências têm o mesmo centro O e os menores arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{EF}$  são tais que  $\widehat{AB} = \widehat{EF} = 40^\circ$ .



A medida do menor arco  $\widehat{CD}$  é

- a)  $50^\circ$    b)  $70^\circ$    c)  $65^\circ$   
d)  $60^\circ$    e)  $80^\circ$

**RESOLUÇÃO:**

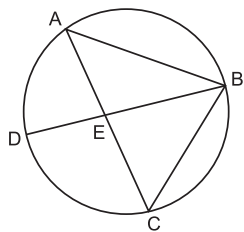


$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{40^\circ}{2} \\ \alpha &= \frac{x - 40^\circ}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - 40^\circ}{2} = \frac{40^\circ}{2} \Rightarrow x = 80^\circ$$

**Resposta: E**

5. (UFMG) – Observe a figura.

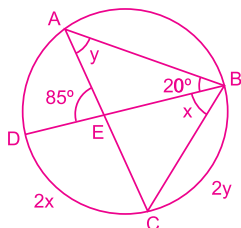


Nessa figura,  $\overline{BD}$  é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ , e os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{AED}$  medem, respectivamente,  $20^\circ$  e  $85^\circ$ .

Assim sendo, o ângulo  $\widehat{CBD}$  mede

- a)  $25^\circ$    b)  $35^\circ$    c)  $30^\circ$    d)  $40^\circ$

**RESOLUÇÃO:**



$$1^\circ) y + 20^\circ = 85^\circ \Leftrightarrow y = 65^\circ$$

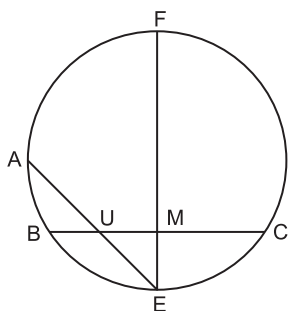
$$2^\circ) 2x + 2y = \widehat{BD} \Leftrightarrow 2x + 2y = 180^\circ$$

$$\text{Assim, } 2x + 130^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 50^\circ \Leftrightarrow x = 25^\circ$$

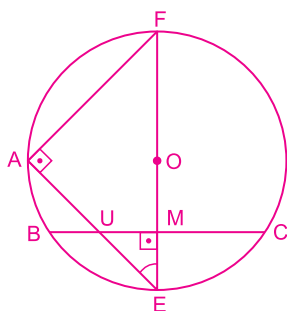
**Resposta: A**

6. (FGV-2011) – Na figura, a corda  $\overline{EF}$  é perpendicular à corda  $\overline{BC}$ , sendo M o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Entre B e C toma-se U, sendo que o prolongamento de  $\overline{EU}$  intercepta a circunferência em A. Em tais condições, para qualquer U distinto de M, o triângulo EUM é semelhante ao triângulo



- a) EFC.   b) AUB.   c) FUM.  
d) FCM.   e) EFA.

**RESOLUÇÃO:**



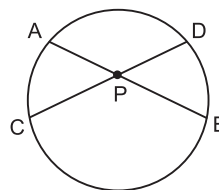
Como M é ponto médio de  $\overline{BC}$  e  $\overline{EF}$  é perpendicular a  $\overline{BC}$ , em M, podemos concluir que EF é um diâmetro e, portanto, o triângulo EFA é retângulo em A. Os triângulos EUM e EFA são semelhantes, pois são triângulos retângulos e têm o ângulo E em comum.

**Resposta: E**

## MÓDULO 16

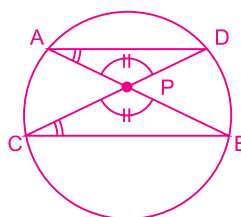
### POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

1. Com os dados da figura, provar que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**RESOLUÇÃO:**

**Demonstração:**

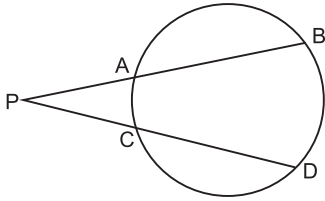


Os triângulos PAD e PCB são semelhantes pelo critério (AA~).

$$\text{Assim: } \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow$$

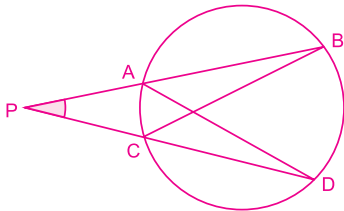
$$\Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

2. Com os dados da figura, prove que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**RESOLUÇÃO:**

**Demonstração:**

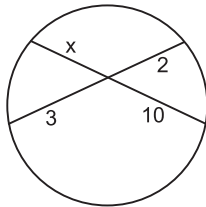


Os triângulos PAD e PCB são semelhantes pelo critério (AA~).

Assim:  $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

3. (FUVEST) – O valor de  $x$ , na figura abaixo, é

- a) 20/3
- b) 3/5
- c) 1
- d) 4
- e) 15



**RESOLUÇÃO:**

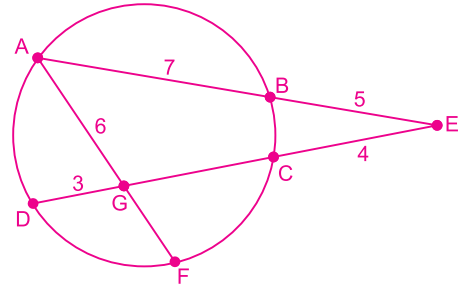
$x \cdot 10 = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$

**Resposta: B**

4. (ITA) – Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos  $\overline{EA}$  e  $\overline{ED}$  interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e C e D, respectivamente. A corda  $\overline{AF}$  da circunferência intercepta o segmento  $\overline{ED}$  no ponto G. Se  $EB = 5$ ,  $BA = 7$ ,  $EC = 4$ ,  $GD = 3$  e  $AG = 6$ , então GF vale

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

**RESOLUÇÃO:**



1) Pela potência do ponto E, tem-se:

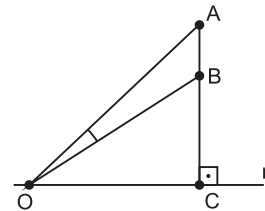
$EA \cdot EB = EC \cdot ED \Leftrightarrow 12 \cdot 5 = 4 \cdot (4 + 3 + GC) \Leftrightarrow GC = 8$

2) Pela potência do ponto G, tem-se:

$GA \cdot GF = GC \cdot GD \Leftrightarrow 6 \cdot GF = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow GF = 4$

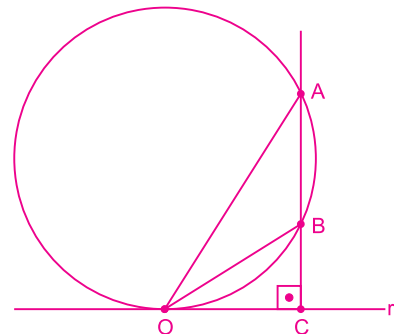
**Resposta: D**

5. (UNIFESP) – Na figura, o segmento AC é perpendicular à reta  $r$ . Sabe-se que o ângulo  $\widehat{AOB}$ , com O sendo um ponto da reta  $r$ , será máximo quando O for o ponto onde  $r$  tangencia uma circunferência que passa por A e B. Se AB representa uma estátua de 3,6 m sobre um pedestal BC de 6,4 m, a distância OC, para que o ângulo  $\widehat{AOB}$  de visão da estátua seja máximo, é



- a) 10 m
- b) 8,2 m
- c) 8 m
- d) 7,8 m
- e) 4,6 m

**RESOLUÇÃO:**

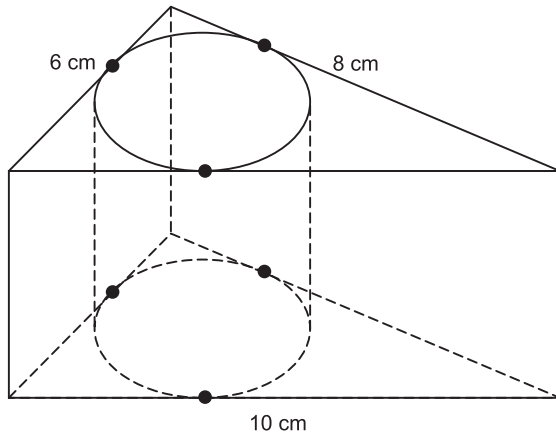


Calculando a potência do ponto C em relação à circunferência da figura, tem-se:  $(CO)^2 = CB \cdot CA$

Assim,  $(OC)^2 = 6,4 \cdot 10 \Leftrightarrow (OC)^2 = 64 \Leftrightarrow OC = 8$

**Resposta: C**

6. (ENEM-2011) – Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

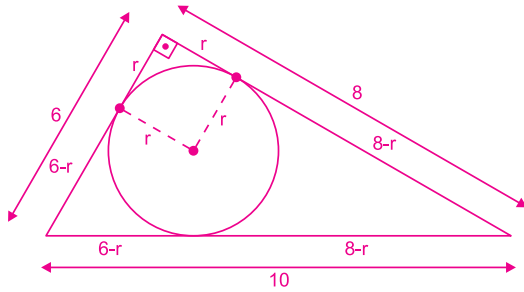


O raio da perfuração da peça é igual a

- a) 1 cm.      b) 2 cm.      c) 3 cm.  
d) 4 cm.      e) 5 cm.

#### RESOLUÇÃO:

Se  $r$  for o raio da perfuração da peça, já que o triângulo de dimensões 6, 8 e 10 é retângulo, temos:



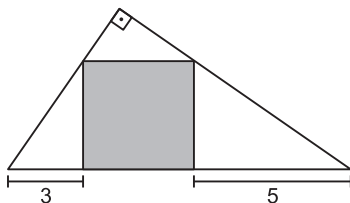
$$(6 - r) + (8 - r) = 10 \Leftrightarrow r = 2$$

Resposta: B

## MÓDULO 17

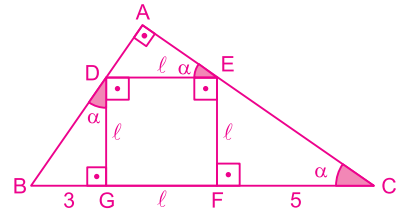
### ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

1. (MACKENZIE-2011) – A área do quadrado assinalado na figura é igual a



- a) 15      b) 20      c) 12      d) 18      e) 16

#### RESOLUÇÃO:



Os triângulos BDG e ECF são semelhantes, pois  $\hat{BDG} \cong \hat{ECF}$  (ambos medem  $\alpha$ ) e  $\hat{BGD} \cong \hat{EFC}$  (ambos são retos). Assim:

$$\frac{BG}{EF} = \frac{DG}{CF} \Leftrightarrow \frac{3}{\ell} = \frac{\ell}{5} \Leftrightarrow \ell^2 = 15$$

Desta forma, a área do quadrado DEFG é igual a 15 unidades de área.

Resposta: A

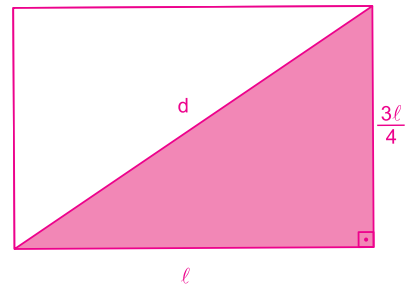
2. (FGV-2011) – O monitor de um *notebook* tem formato retangular

com a diagonal medindo  $d$ . Um lado do retângulo mede  $\frac{3}{4}$  do

outro. A área do monitor é dada por:

- a)  $0,50d^2$       b)  $0,46d^2$       c)  $0,52d^2$   
d)  $0,48d^2$       e)  $0,44d^2$

#### RESOLUÇÃO:



De acordo com o enunciado, sendo  $\ell$  e  $\frac{3\ell}{4}$  as medidas dos lados, temos:

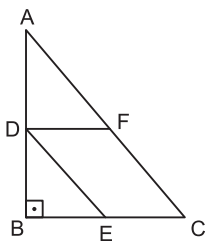
$$\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 + \ell^2 = d^2 \Leftrightarrow \frac{25\ell^2}{16} = d^2 \Leftrightarrow \ell^2 = \frac{16d^2}{25}$$

A área do monitor é:

$$\frac{3\ell}{4} \cdot \ell = \frac{3\ell^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16d^2}{25} = \frac{12d^2}{25} = 0,48d^2$$

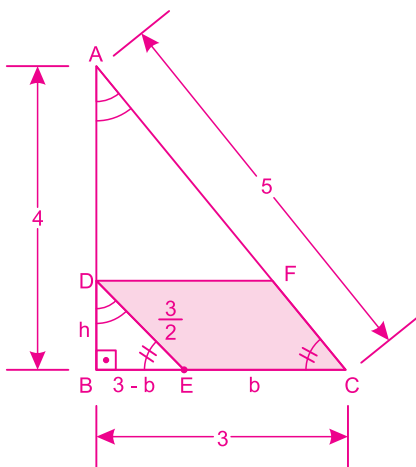
Resposta: D

3. (FUVEST) – Na figura, o triângulo ABC é retângulo com catetos  $BC = 3$  e  $AB = 4$ . Além disso, o ponto D pertence ao cateto  $\overline{AB}$ , o ponto E pertence ao cateto  $\overline{BC}$  e o ponto F pertence à hipotenusa  $\overline{AC}$ , de tal forma que DECF seja um paralelogramo. Se  $DE = 3/2$ , então a área do paralelogramo DECF vale



- a)  $\frac{63}{25}$     b)  $\frac{12}{5}$     c)  $\frac{58}{25}$     d)  $\frac{56}{25}$     e)  $\frac{11}{5}$

**RESOLUÇÃO:**



Sendo  $EC = b$  e  $DB = h$ , da semelhança entre os triângulos retângulos BED e BCA, tem-se:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BA}$$

Logo:

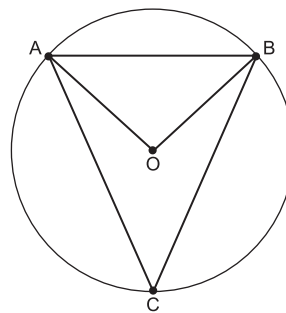
$$\frac{3-b}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{h}{4} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{21}{10} \\ h = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Assim, sendo S a área do paralelogramo DECF, tem-se:

$$S = b \cdot h \Leftrightarrow S = \frac{21}{10} \cdot \frac{6}{5} \Leftrightarrow S = \frac{63}{25}$$

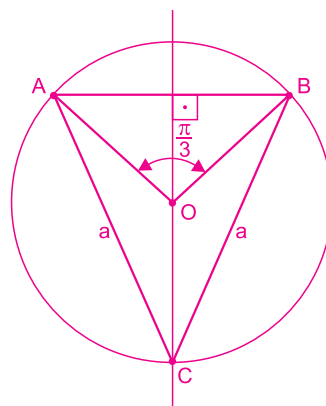
Resposta: A

4. (FUVEST) – Na figura, os pontos A, B, C pertencem à circunferência de centro O e  $BC = a$ . A reta  $\overleftrightarrow{OC}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  e o ângulo  $\widehat{AOB}$  mede  $\pi/3$  radianos. Então, a área do triângulo ABC vale



- a)  $\frac{a^2}{8}$     b)  $\frac{a^2}{4}$     c)  $\frac{a^2}{2}$     d)  $\frac{3a^2}{4}$     e)  $a^2$

**RESOLUÇÃO:**



I) O ângulo  $\widehat{ACB}$  é inscrito e o ângulo  $\widehat{AOB}$  é central, assim:

$$\text{med}(\widehat{ACB}) = \frac{\text{med}(\widehat{AOB})}{2} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

II) O é o circuncentro do triângulo ABC e  $\overleftrightarrow{OC} \perp \overline{AB}$ . Conclui-se assim que a reta  $\overleftrightarrow{OC}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e, portanto,  $AC = BC = a$

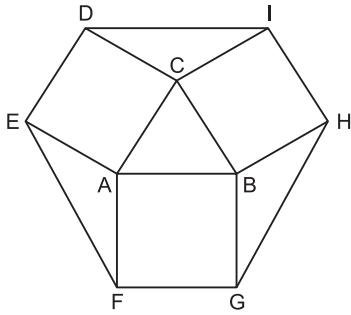
III) A área S do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ACB})}{2}, \text{ assim:}$$

$$S = \frac{a \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} \Leftrightarrow S = \frac{a \cdot a \cdot \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow S = \frac{a^2}{4}$$

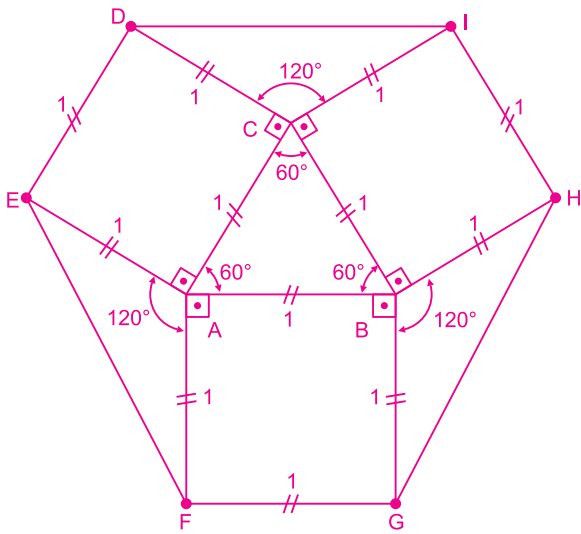
Resposta: B

5. (FUVEST-2011) – Na figura, o triângulo ABC é equilátero de lado 1, e ACDE, AFGB e BHIC são quadrados. A área do polígono DEFGHI vale



- a)  $1 + \sqrt{3}$       b)  $2 + \sqrt{3}$       c)  $3 + \sqrt{3}$   
d)  $3 + 2\sqrt{3}$       e)  $3 + 3\sqrt{3}$

**RESOLUÇÃO:**



Sejam:

$S$  a área do polígono DEFGHI

$S_1$  a área do triângulo equilátero ABC

$S_2$  a área de cada um dos quadrados congruentes: ACDE, AFGB e BHIC

$S_3$  a área de cada um dos triângulos isósceles congruentes: AEF, BGH e CID

De acordo com o enunciado, tem-se:

$$\text{I) } S_1 = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{II) } S_2 = 1^2 \Leftrightarrow S_2 = 1$$

$$\text{III) } S_3 = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ}{2} \Leftrightarrow S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{IV) } S = S_1 + 3 \cdot S_2 + 3 \cdot S_3$$

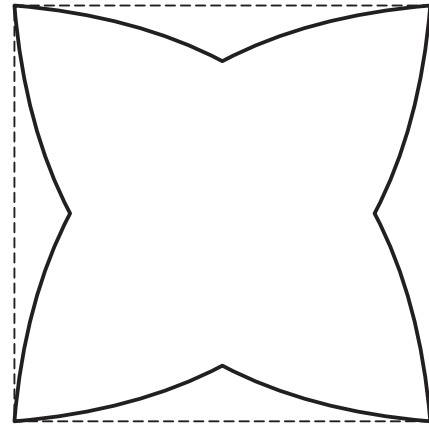
$$\text{Assim: } S = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S = 3 + \sqrt{3}$$

Resposta: C

## MÓDULO 18

### ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES

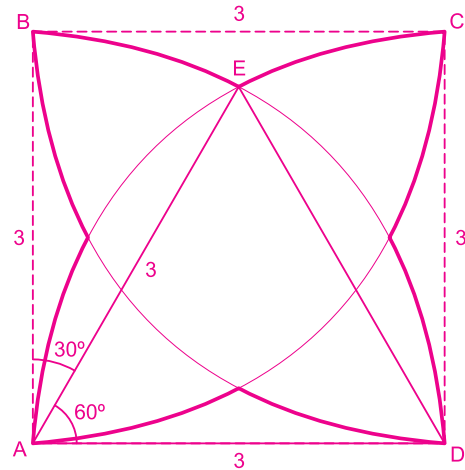
1. (MACKENZIE-2010)



Os arcos da figura foram obtidos com centros nos vértices do quadrado de lado 3. Considerando  $\pi = 3$ , a soma das medidas desses arcos é

- a) 10      b) 12      c) 14      d) 16      e) 18

**RESOLUÇÃO:**



1) Na figura, o triângulo AED é equilátero e tem lado medindo 3.

2)  $\widehat{BAE} = 90^\circ - \widehat{EAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

3) A medida do arco  $\widehat{BE}$  é tal que

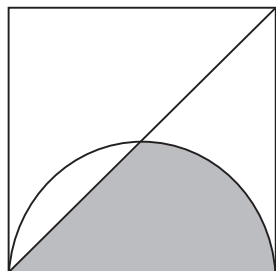
$$\widehat{BE} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

4) A soma dos oito arcos assinalados é  $8 \cdot \frac{3}{2} = 12$

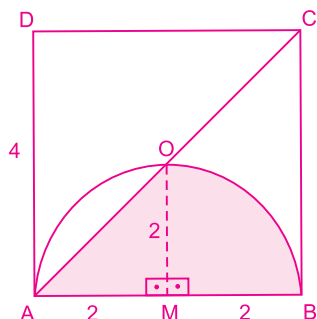
Resposta: B

2. (FUVEST) – Na figura seguinte, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então a área da região hachurada é

- a)  $\frac{\pi}{2} + 2$
- b)  $\pi + 2$
- c)  $\pi + 3$
- d)  $\pi + 4$
- e)  $2\pi + 1$



**RESOLUÇÃO:**



A semicircunferência e a diagonal  $\overline{AC}$  passam pelo centro O do quadrado ABCD de lado 4.

Assim, a área S da região hachurada é igual à soma das áreas do triângulo retângulo MOA e do setor circular MOB, ou seja,

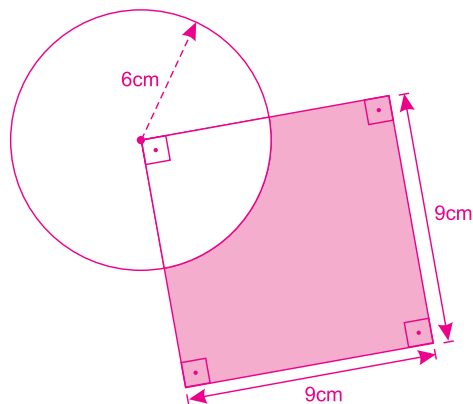
$$S = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 \Leftrightarrow S = \pi + 2$$

**Resposta: B**

3. (FGV-2011) – Em um mesmo plano estão contidos um quadrado de 9 cm de lado e um círculo de 6 cm de raio, com centro em um dos vértices do quadrado. A área da região do quadrado não interceptada pelo círculo, em  $\text{cm}^2$ , é igual a

- a)  $9(9 - \pi)$ .
- b)  $9(4\pi - 9)$ .
- c)  $9(9 - 2\pi)$ .
- d)  $3(9 - 2\pi)$ .
- e)  $6(3\pi - 9)$ .

**RESOLUÇÃO:**

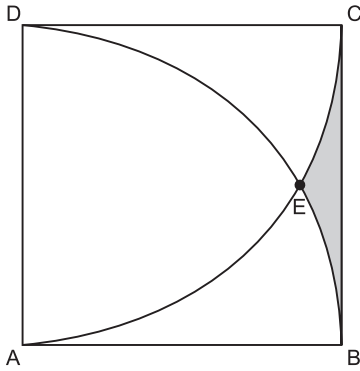


- 1) A área do círculo de raio 6 cm é  $\pi \cdot (6 \text{ cm})^2 = 36\pi \text{ cm}^2$
- 2) A área do quadrado de lado 9 cm é  $(9 \text{ cm})^2 = 81 \text{ cm}^2$
- 3) A área da região do quadrado não interceptada pelo círculo, em centímetros quadrados, é:

$$81 - \frac{1}{4} \cdot 36\pi = 81 - 9\pi = 9(9 - \pi)$$

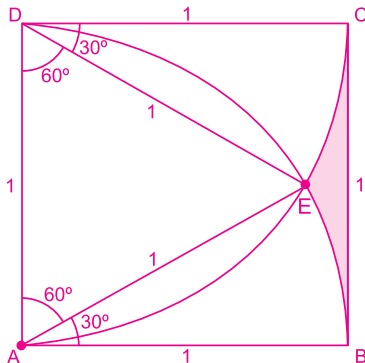
**Resposta: A**

4. (FUVEST) – Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. Logo, a área da região hachurada é



- a)  $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$       b)  $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c)  $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$       d)  $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 e)  $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

**RESOLUÇÃO:**



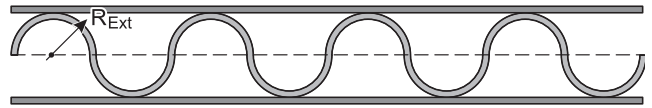
Para calcular a área  $S$  da região assinalada, devemos calcular a área de um quadrado de lado 1 e desta área devemos subtrair a área de um triângulo equilátero de lado 1 e a área ocupada por dois setores circulares congruentes com ângulo central de  $30^\circ$  e raio 1.

Assim:

$$S = 1^2 - \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2 \Leftrightarrow S = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: C

5. (UNESP-2011) – O papelão utilizado na fabricação de caixas reforçadas é composto de três folhas de papel, coladas uma nas outras, sendo que as duas folhas das faces são “lisas” e a folha que se intercala entre elas é “sanfonada”, conforme mostrado na figura.



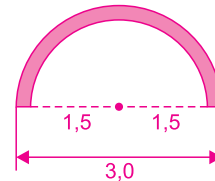
O fabricante desse papelão compra o papel em bobinas, de comprimento variável. Supondo que a folha “sanfonada” descreva uma curva composta por uma sequência de semicircunferências, com concavidades alternadas e de raio externo ( $R_{Ext}$ ) de 1,5 mm, determine qual deve ser a quantidade de papel da bobina que gerará a folha “sanfonada”, com precisão de centímetros, para que, no processo de fabricação do papelão, esta se esgote no mesmo instante das outras duas bobinas de 102 m de comprimento de papel, que produzirão as faces “lisas”.

Dado:  $\pi \approx 3,14$ .

- a) 160 m e 07 cm.      b) 160 m e 14 cm.  
 c) 160 m e 21 cm.      d) 160 m e 28 cm.  
 e) 160 m e 35 cm.

**RESOLUÇÃO:**

Cada semicircunferência cobre uma distância de 3 mm, como mostra a figura seguinte, com valores em milímetros.



Para cobrir uma distância de 102 m, são necessárias

$$\frac{102 \text{ m}}{3 \text{ mm}} = \frac{102\,000 \text{ mm}}{3 \text{ mm}} = 34\,000 \text{ semicircunferências, ou seja, } 17\,000$$

circunferências.

Desta forma, a quantidade de papel da bobina que gerará a folha “sanfonada” é de

$$17\,000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1,5 \text{ mm} = 17\,000 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 15 \text{ mm} = 160\,140 \text{ mm} = 160,14 \text{ m, ou seja, } 160 \text{ m e } 14 \text{ cm.}$$

Resposta: B