EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 21 – Logaritmos: Definição

1. **(UEPB)** – A função $f(x) = \log_x (4 - x^2)$ tem domínio igual a:

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$

e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

Resolução

Os valores de x pertencentes ao domínio de f são tais que

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ x > 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2 \text{ e } x \neq 1.$$

Resposta: D

2. A magnitude de um terremoto é medida na escala Richter. Considere que as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $M_1 - M_2 = \dfrac{2}{3} \log\left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)$, onde E_1 e E_2 são as medidas das quantidades de energia liberada pelos terremotos.

Em 1955, ocorreu um terremoto no norte de Mato Grosso e, em 2004, um outro na ilha de Sumatra, na costa da Indonésia, que liberaram as quantidades de energia E_1 e E_2, respectivamente. Admitindo-se que E_1 foi equivalente à milésima parte de E_2 e que o terremoto ocorrido na ilha de Sumatra teve magnitude $M_2 = 9$, qual a magnitude M_1 do terremoto ocorrido no norte de Mato Grosso?

a) 6 b) 7 c) 5 d) 4 e) 3

Resolução

(I) $E_1 = \dfrac{1}{1000} \cdot E_2 \Leftrightarrow \dfrac{E_1}{E_2} = 10^{-3}$

(II) $M_1 - M_2 = \dfrac{2}{3} \log \dfrac{E_1}{E_2}$ e $M_2 = 9$

De (I) e (II) concluímos que

$$M_1 - 9 = \frac{2}{3} \log 10^{-3} \Leftrightarrow M_1 - 9 = \frac{2}{3} \cdot (-3) \Leftrightarrow M_1 = -2 + 9 = 7$$

Resposta: B

Módulo 22 – Propriedades dos Logaritmos

3. **(ESAM)** – Se

$$x = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) + \log_2\left(\frac{4}{3}\right) + \log_2\left(\frac{5}{4}\right) + \ldots + \log_2\left(\frac{10}{9}\right),$$

então x é igual a

01) 2 02) $\log_2 5$ 03) $\log_2 6$

04) 3 05) $\log_2 10$

Resolução

$$x = \log_2 \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{9} = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 5$$

Resposta: 02

4. A expressão $\dfrac{(\log_2 36) \cdot (\log_3 36)}{\log_2 36 + \log_3 36}$ resulta igual a

a) 1 b) 2 c) $\log_2 9$

d) $\log_6 9$ e) $\log_6 18$

Resolução

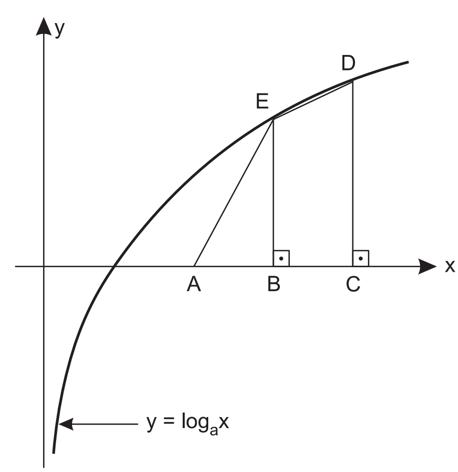
$$\frac{(\log_2 36) \cdot (\log_3 36)}{\log_2 36 + \log_3 36} = \frac{(\log_2 36) \cdot (\log_3 36)}{\dfrac{1}{\log_{36} 2} + \dfrac{1}{\log_{36} 3}} =$$

$$= \frac{(\log_2 36) \cdot (\log_3 36)}{\dfrac{\log_{36} 3 + \log_{36} 2}{(\log_{36} 2) \cdot (\log_{36} 3)}} = \frac{1}{\log_{36} 6} = \log_6 36 = 2$$

Resposta: B

Módulo 23 – Função Logarítmica

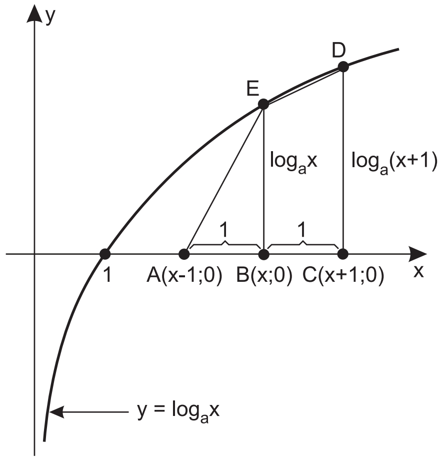
5. **(FUVEST)** – Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x, 0)$, $C = (x + 1, 0)$ e $A = (x - 1, 0)$. Então, o valor de x, para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE, é



a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ b) $1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\dfrac{1}{2} + \sqrt{5}$

d) $1 + \sqrt{5}$ e) $\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

Resolução



$A_{BCDE} = 3\,A_{ABE} \Rightarrow \dfrac{\log_a x + \log_a(x+1)}{2}\,.\,1 = 3\,.\,\dfrac{1\,.\,\log_a x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a x(x+1) = \log_a x^3 \Rightarrow x^2 + x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois $x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Observação: Se $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, então $x - 1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} < 1$.

Assim, o ponto A encontra-se à esquerda do ponto de abscissa 1.

Resposta: A

6. **(FGV)** – A reta definida por x=k, com k real, intersecta os gráficos de $y = \log_5 x$ e $y = \log_5 (x + 4)$ em pontos de distância $\dfrac{1}{2}$ um do outro. Sendo $k = p + \sqrt{q}$, com p e q inteiros, então p + q é igual a

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

Resolução

De acordo com o enunciado, temos:

$\log_5(k+4) - \log_5 k = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{k+4}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{k+4}{k} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}\,k - k = 4 \Leftrightarrow k = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} \Leftrightarrow k = 1 + \sqrt{5}$

Portanto: p = 1, q = 5 e p + q = 6

Resposta: A

Módulo 24 – Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

7. **(UFF)** – *Beremiz e seu mestre Nô-Elim eram apaixonados pela rainha das ciências, a Matemática, e toda vez que se reuniam para conversar sobre ela, o faziam de modo enigmático. Certa vez, Beremiz fez a seguinte pergunta ao seu mestre.*

– *Qual é o número, maior que a unidade, cujo logaritmo decimal da sua raiz quadrada é igual à raiz quadrada do seu logaritmo decimal?*

– *Usando propriedades do logaritmo e um pouco mais de sabedoria, você será capaz de responder a sua questão. – respondeu o mestre.*

Considerando o texto acima, responda:
Qual é o número procurado por Beremiz?

Resolução

Sendo x > 1 o número real procurado temos, de acordo com o enunciado:

$\log_{10}\sqrt{x} = \sqrt{\log_{10} x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_{10} x = \sqrt{\log_{10} x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\log_{10}^2 x = \log_{10} x \Leftrightarrow \log_{10}^2 x - 4\log_{10} x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10} x(\log_{10} x - 4) = 0 \Leftrightarrow \log_{10} x = 0$ ou $\log_{10} x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10^0 = 1$ ou $x = 10^4 = 10000$

Resposta: O número procurado por Beremiz é 10000.

8. **(FUVEST)** – Os números reais x e y são soluções do sistema

$$\begin{cases} 2\,.\,\log_2 x - \log_2(y-1) = 1 \\ \log_2(x+4) - \dfrac{1}{2}\log_2 y = 2 \end{cases}$$

Então $7(\sqrt{y} - x)$ vale

a) – 7 b) – 1 c) 0 d) 1 e) 7

Resolução

$$\begin{cases} 2\,.\,\log_2 x - \log_2(y-1) = 1 \\ \log_2(x+4) - \dfrac{1}{2}\log_2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x^2}{y-1}\right) = 1 \\ \log_2\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{y}}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y-1} = 2 \\ \dfrac{x+4}{\sqrt{y}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2y - 2 \\ x + 4 = 4\sqrt{y} \end{cases}$$

Supondo x > 0 e y > 1, a solução do sistema é:

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \dfrac{9}{7} \\ x = \dfrac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow 7(\sqrt{y} - x) = 7\,.\left(\dfrac{9}{7} - \dfrac{8}{7}\right) = 1$$

Resposta: D

Módulo 25 – Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

9. O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem $-1 < \log_{2/3}(2x-1) < 1$ pode ser expresso por

a) $]10; 15[$ b) $]4; 9[$ c) $\left]\dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{4}\right[$

d) $\left]\dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{3}\right[$ e) $\left]\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{2}\right[$

Resolução

$-1 < \log_{2/3}(2x-1) < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} > 2x - 1 > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} + 1 > 2x > \dfrac{2}{3} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} < 2x < \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{6} < x < \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow V = \left]\dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{4}\right[$

Resposta: C

10. **(FUVEST)** – O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x+5) - \log_2(3x-1) > 1$ é o intervalo:

a) $]-\infty, -5/2[$ b) $]7/4, \infty[$ c) $]-5/2, 0[$

d) $]1/3, 7/4[$ e) $]0, 1/3[$

Resolução

$\log_2(2x+5) - \log_2(3x-1) > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x+5}{3x-1}\right) > 1 \text{ e } 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x+5}{3x-1} > 2 \text{ e } 3x - 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \dfrac{7}{4} \text{ e } x > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{4}$

Resposta: D

Módulo 26 – Logaritmos Decimais

11. Sejam **a** o número de algarismos de $x = 3^{1000}$ e **b** o número de algarismos de $y = 3^{10000}$. Considerando $\log 3 = 0{,}477\alpha$, em que α é algarismo do sistema decimal de numeração, podemos concluir que

a) $b = 10a$ b) $a = 478$ e $b = 4771$

c) $a > 478$ e $4771 \leqslant b \leqslant 4780$ d) $a = 477$ e $b = 4770$

e) $a = 478$ e $4771 \leqslant b \leqslant 4780$

Resolucão

I) $x = 3^{1000} \Leftrightarrow \log x = \log 3^{1000} \Leftrightarrow \log x = 1000 \,.\, \log 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log x = 1000 \,.\, 0{,}477\alpha \Leftrightarrow \log x = 477{,}\alpha$
Portanto $a = 477 + 1 = 478$

II) Analogamente ao item anterior, concluímos que $\log y = 477\alpha$, em que α é algarismo do Sistema Decimal de Numeração.

$\alpha = 0 \Rightarrow \log y = 4770 \Rightarrow b = 4770 + 1 = 4771$
$\alpha = 9 \Rightarrow \log y = 4779 \Rightarrow b = 4779 + 1 = 4780$
Assim, $4771 \leqslant b \leqslant 4780$

Resposta: E

12. **(UNESP)** – A temperatura média da Terra começou a ser medida por volta de 1870 e em 1880 já apareceu uma diferença: estava (0,01) °C (graus Celsius) acima daquela registrada em 1870 (10 anos antes). A função $t(x) = (0{,}01).2^{(0{,}05)x}$, com t(x) em °C e x em anos, fornece uma estimativa para o aumento da temperatura média da Terra (em relação àquela registrada em 1870) no ano (1880 + x), $x \geqslant 0$. Com base na função, determine em que ano a temperatura média da Terra terá aumentado 3 °C. (Use as aproximações $\log_2(3) = 1{,}6$ e $\log_2(5) = 2{,}3$)

Resolução

Para t(x) = 3, tem-se:
$(0{,}01) \,.\, 2^{(0{,}05)x} = 3 \Leftrightarrow 2^{(0{,}05)x} = 300 \Leftrightarrow (0{,}05)x = \log_2 300 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (0{,}05)x = \log_2 3 + 2\log_2 5 + \log_2 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (0{,}05)x = 1{,}6 + 4{,}6 + 2 \Leftrightarrow (0{,}05)x = 8{,}2 \Leftrightarrow x = 164$
Assim, a temperatura média da Terra terá aumentado 3°C no ano (1880 + x) = (1880 + 164) = 2044

Resposta: ano de 2044

Módulo 27 – Módulo de um Número Real

13. **(FGV)** – O conjunto dos valores assumidos pela expressão algébrica $\dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab}$ sendo a e b dois números reais diferentes de zero, é:

a) $\{-3, -1, 1, 3\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{-1, 3\}$

d) $\{-3, 1\}$ e) $\{-3, 3\}$

Resolução

Lembrando que $\dfrac{|x|}{x} = 1$ se $x > 0$ e $\dfrac{|x|}{x} = -1$ se $x < 0$, temos:

1) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + 1 - 1 = 1$

2) $a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + (-1) - (-1) = 1$

3) $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (1) - (-1) = 1$

4) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (-1) - (+1) = -3$

Então, sendo a e b dois números reais diferentes de zero, a expressão algébrica $\dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab}$ resulta 1 ou – 3.

Resposta: D

14. O conjunto-verdade, em $\mathbb{R}$, da equação
$\sqrt[3]{(2x-5)^3} + \sqrt{(x-20)^2} = 20$ é

a) Ø b) $\mathbb{R}$ c) {15} d) {5} e) {5;15}

Resolução

$\sqrt[3]{(2x-5)^3} + \sqrt{(x-20)^2} = 20 \Leftrightarrow 2x - 5 + |x - 20| = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + |x - 20| = 25$

20	
$x \leqslant 20$	$x \geqslant 20$
$2x - x + 20 = 25$	$2x + x - 20 = 25$
$x = 5$	$3x = 45$
$V_1 = \{5\}$	$x = 15 \notin [20; +\infty[$
	$V_2 = \varnothing$

$V = V_1 \cup V_2 = \{5\}$

Resposta: D

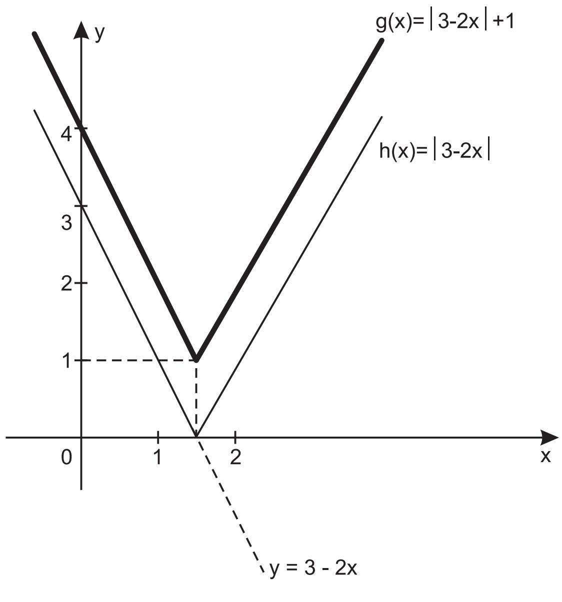
Módulo 28 – Propriedades e Gráficos da Função Modular

15. **(UFSCar)** – Considere as funções reais f e g, definidas por $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ e $g(x) = |3 - 2x| + 1$. Determine o domínio da função f e a imagem da função g.

Resolução

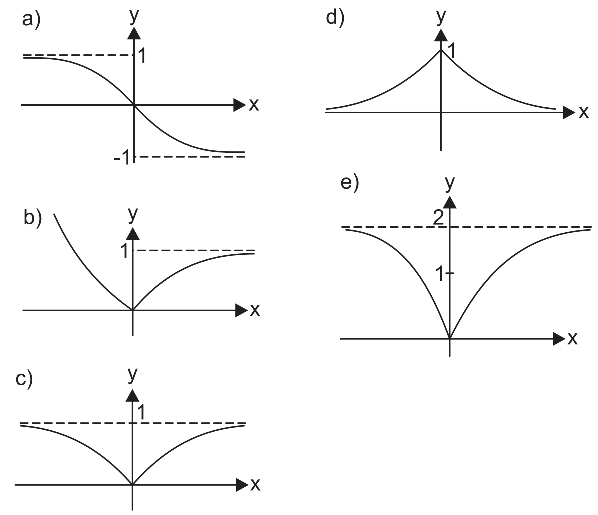
Sendo $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ e $g(x) = |3 - 2x| + 1$, temos:

Condição de existência para f(x): $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$



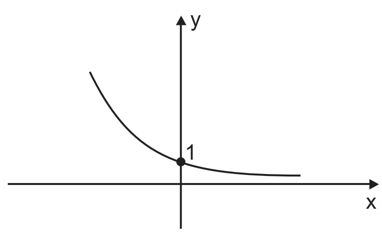
Resposta: D(f) = {x ∈ ℝ | x > 2}
Im(g) = {y ∈ ℝ | y ⩾ 1}

16. **(FUVEST)** – Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é

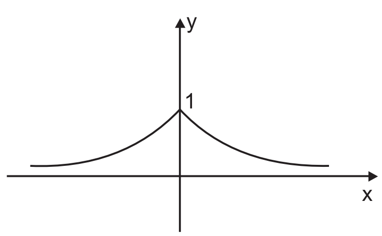


Resolução

1) O gráfico da função g: ℝ → ℝ definida por $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ é

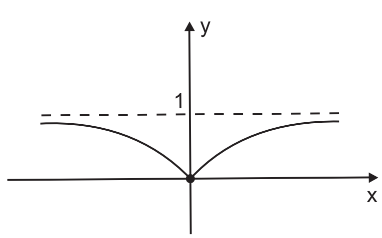


2) O gráfico da função h: ℝ → ℝ definida por $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



3) O gráfico da função f: ℝ → ℝ definida por

$f(x) = 1 - 2^{-|x|} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



Resposta: C

Módulo 29 – Divisão em $\mathbb{N}$, Múltiplos e Divisores em $\mathbb{Z}$, Número Primo e Composto

17. **(UFTM)** – Numa certa ilha tropical, o clima é extremamente regular e ao mesmo tempo esquisito; sempre chove às quartas-feiras, sextas-feiras e domingos, e nos demais dias da semana sempre faz sol. Uma família que conhece essa particularidade do clima pretende passar 30 dias de férias nessa ilha e gostaria de pegar a maior quantidade possível de dias com sol durante sua estadia. Então, o melhor dia da semana para chegar à ilha é

a) sábado. b) terça-feira. c) domingo.
d) segunda-feira. e) quinta-feira.

Resolução

O melhor dia da semana para essa família chegar à ilha é segunda-feira, pois como $30 = 4 \cdot 7 + 2$, concluimos que ela passará, de férias, quatro semanas completas e mais dois dias. Para pegar a maior quantidade de dias de sol ela deve escolher dois dias consecutivos com sol, o que ocorre apenas na segunda e terça feiras.

Resposta: D

18. **(MACKENZIE)** – Um fazendeiro comprou vacas de duas raças diferentes, a um custo total de R\$ 10000,00. Se cada vaca de uma das raças custou R\$ 250,00 e cada uma da outra raça custou R\$ 260,00, o total de vacas compradas pelo fazendeiro foi

a) 25 b) 30 c) 32 d) 41 e) 39

Resolução

Seja x o número de vacas cujo preço unitário é R\$ 250,00 e y o número de vacas cujo preço unitário é R\$ 260,00.

De acordo com o enunciado, devemos ter:

$250 \cdot x + 260 \cdot y = 10\,000 \Leftrightarrow 25 \cdot x + 26 \cdot y = 1000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1000 - 26 \cdot y}{25} = 40 - \frac{26 \cdot y}{25}$$

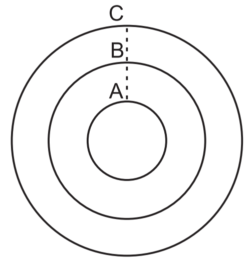
Para $\dfrac{26 \cdot y}{25}$ resultar um número natural não-nulo e menor que 40, é necessário $y = 25$ e, consequentemente, $x = 14$.

Portanto $x + y = 39$

Resposta: E

Módulo 30 – Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum e Propriedades

19. **(VUNESP)** – Um brinquedo de parque de diversões é composto por cadeiras dispostas em três círculos concêntricos que giram no mesmo sentido, com velocidade diferentes. Alberto, Bruno e Carlos estão sentados, respectivamente, nas cadeiras A, B e C, alinhadas.



Quando o brinquedo é acionado, Alberto completa uma volta em 32 segundos; Bruno, em 40 segundos e Carlos, em 60 segundos. O menor número de voltas que Alberto deve dar para eles estarem alinhados novamente nessa posição é

a) 15 voltas. b) 14 voltas.
c) 13 voltas. d) 12 voltas.
e) 10 voltas.

Resolução

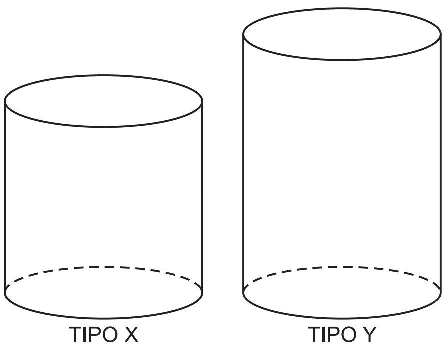
As três cadeiras estarão alinhadas novamente, pela primeira vez, após um tempo t, em segundos, tal que

$t = \text{mmc}(32, 40, 60) = 480$.

Assim, Alberto terá dado $\dfrac{480}{32} = 15$ voltas.

Resposta: A

20. **(FUVEST)** – Uma empresa de construção dispõe de 117 blocos de tipo X e 145 blocos de tipo Y. Esses blocos têm a seguinte características: todos são cilindros retos, o bloco X tem 120 cm de altura e o bloco Y tem 150 cm de altura.



A empresa foi contratada para edificar colunas, sob as seguintes condições: cada coluna deve ser construída sobrepondo blocos de um mesmo tipo e todas elas devem ter a mesma altura. Com o material disponível, o número máximo de colunas que podem ser construídas é de

a) 55 b) 56 c) 57 d) 58 e) 59

Resolução

O número máximo de colunas será obtido para a mínima altura possível de cada coluna, que deve ser igual a 600 cm, pois $\text{mmc}(120, 150) = 600$.

Assim sendo, as colunas com blocos do tipo X deverão ter

$\dfrac{600}{120} = 5$ blocos e as com blocos do tipo Y, deverão ter

$\dfrac{600}{150} = 4$ blocos.

Portanto, os números máximos de colunas que podem ser construídas são 23 do tipo X e 36 do tipo Y, pois $117 = 5 \cdot 23 + 2$ e $145 = 4 \cdot 36 + 1$, resultando, assim o total de $23 + 36 = 59$ colunas.
Resposta: E

Módulo 31 – Números Primos entre Si, Critérios de Divisibilidade e Números Reais

21. Julgue as afirmações abaixo.
a) ( ) o número 3 é primo, pois $D(3) = \{1, -1, 3, -3\}$
b) ( ) o número 4 é composto, pois $D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$
c) ( ) o número 9 é composto, pois $D(9) = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$
d) ( ) os números 4 e 9 são primos entre si, pois mdc $(4,9) = 1$
e) ( ) os números 3 e 9 não são primos entre si, pois mdc $(3,9) = 3$
f) ( ) $\text{mdc}(24,54) = \text{mdc}(24,30) = \text{mdc}(24,6) = 6$

Resolução
Todas são verdadeiras. Lembrar que (item f)
$\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(a, a \pm b) = \text{mdc}(b, a \pm b),\ a, b \in \mathbb{Z}^*$

22. Mostre, através de exemplos, que existem números reais e irracionais α e β tais que
a) $\alpha + \beta$ é irracional b) $\alpha \cdot \beta$ é irracional
$\alpha + \beta$ é racional $\alpha \cdot \beta$ é racional

Resolução

a) $\begin{cases} \alpha = 0{,}101101110\ldots \\ \beta = 0{,}202202220\ldots \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0{,}30330333\ldots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\begin{cases} \alpha = 0{,}101101110\ldots \\ \beta = 0{,}010010001\ldots \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 0{,}111\ldots = \dfrac{1}{9} \in \mathbb{Q}$

b) $\begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \sqrt{6} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \beta = \sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$

Módulo 32 – Sistemas de Numeração

23. **(FGV)** – Considere, no sistema de numeração decimal, o número n formado por 3 algarismos distintos e diferentes de zero. Se triplicarmos o algarismo das centenas e dobrarmos o das dezenas, obteremos outro número, p, tal que $p = n + 240$. O número de possíveis valores de n é:
a) 5 b) 8 c) 7 d) 4 e) 6

Resolução
Seja $n = abc$, um número de três algarismos, não nulos, do sistema de numeração decimal.
O número p proposto é da forma $p = (3a)(2b)c$, em que $(3a)$ é o algarismo das centenas, $(2b)$ o das dezenas e *c* o algarismo das unidades de *p*.
Assim, $n = 100 \cdot a + 10b + c$
$p = 100 \cdot (3a) + 10 \cdot (2b) + c = 300a + 20b + c$ e
$p = n + 240 \Rightarrow 300a + 20b + c = 100a + 10b + c + 240 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 200a + 10b = 240 \Rightarrow 20a + b = 24 \Leftrightarrow a = 1$ e $b = 4$, pois *a* e *b* são algarismos.
Os possíveis valores de *n* são: 142, 143, 145, 146, 147, 148 e 149, num total de 7 números.
Resposta: C

24. **(IME)** – Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Resolução

$\begin{cases} P = N1 = 10N + 1 \\ Q = 1N = 10^5 + N \\ P = 3Q \end{cases} \Rightarrow 10N + 1 = 3(10^5 + N) \Leftrightarrow$

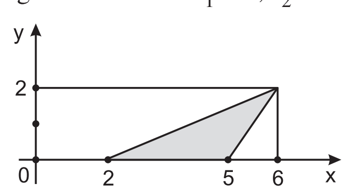
$\Leftrightarrow 10N + 1 = 300000 + 3N \Leftrightarrow 7N = 299999 \Leftrightarrow N = 42\underline{8}57$
Resposta: E

Módulo 33 – Definição de Número Complexo e Operações na Forma Algébrica

25. Sendo **i** a unidade imaginária, a expressão
$2 + 3i + (3 + i).(4 - i)$ resulta igual a:
a) $13 + 4i$ b) $15 + 4i$ c) $15 + 3i$
d) $13 + 3i$ e) $12 + 5i$

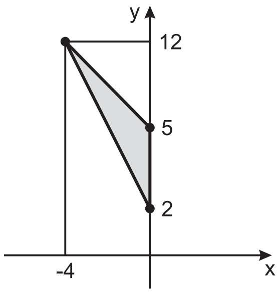
Resolução
$2 + 3i + (3 + i).(4 - i) = 2 + 3i + 12 - 3i + 4i - i^2 =$
$= 2 + 3i + 12 - 3i + 4i + 1 = 15 + 4i$
Resposta: B

26. **(UNIFESP)** – Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$.



A área do triângulo de vértices $w_1 = iz_1$, $w_2 = iz_2$ e $w_3 = 2iz_3$ é:
a) 8 b) 6 c) 4 d) 3 e) 2

Resolução
$z_1 = 2 \rightarrow w_1 = i \cdot z_1 = 2\,i$
$z_2 = 5 \rightarrow w_2 = i \cdot z_2 = 5\,i$
$z_3 = 6 + 2i \rightarrow w_3 = 2i \cdot z_3 = 2i \cdot (6 + 2i) = -4 + 12i$



A área do triângulo fica

$$A = \frac{3\,.\,4}{2} = 6$$

Resposta: B

Módulo 34 – Definição de Número Complexo e Operações na Forma Algébrica

27. **(UFSCar)** – Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a1} + i^{a2} + i^{a3} + \dots i^{a10}$ é igual a:

a) 9i ou – 9i   b) – 9 + i ou – 9 – i
c) 9 + i ou 9 – i   d) 8 + i ou 8 – i
e) 7 + i ou 7 – i

Resolução

1) Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}, ...)$ for uma PG de razão 2, então
$i^{a1} + i^{a2} + i^{a3} + ... + i^{a10} = i^{a1} + (i^{a1})^2 + (i^{a1})^4 + ... + (i^{a1})^{512}$

2) Se a_1 for um número inteiro ímpar, então $a_1 = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$

3) $i^{a1} = i^{2k+1} = i^{2k}\,.\,i = \pm 1\,.\,i = \pm i$

4) $i^{a1} + i^{a2} + i^{a3} + ... + i^{a10} = (\pm i)^1 + (\pm i)^2 + (\pm i)^4 + ... +$
$+ (\pm i)^{512} = \pm i - \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1}_{\text{8 parcelas}} = \pm i + 7$

Resposta: E

28. Sendo **i** a unidade imaginária, a expressão $\displaystyle\sum_{n=5}^{18} i^n$ resulta:

a) – 1   b) 1   c) 0   d) – 1 + i   e) 1 – i

Resolução

$$\sum_{n=5}^{18} i^n = \overbrace{i^5 + i^6 + \underbrace{i^7 + \dots + i^{18}}_{\text{12 parcelas têm soma zero}}}^{18-4=14\text{ parcelas}} = i^5 + i^6 = i^1 + i^2 = i - 1 = -1 + i$$

Resposta: D

Módulo 35 – Forma Trigonométrica

29. **(FGV)** – O ponto P é o afixo de um número complexo z e pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que o argumento de z é 60°, pode-se afirmar que:

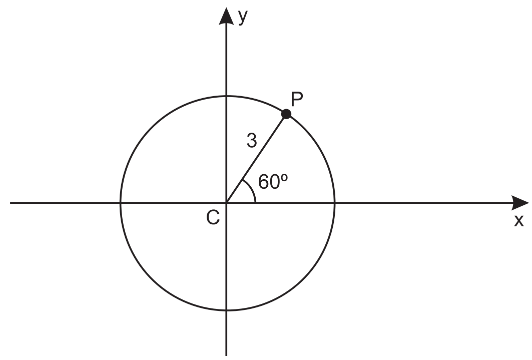
a) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ b) $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

e) $z = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$

Resolução

A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ tem centro C(0;0) e raio 3.



Considerando que P tem coordenadas (x;y) e é afixo de $z = x + yi$, tem-se:

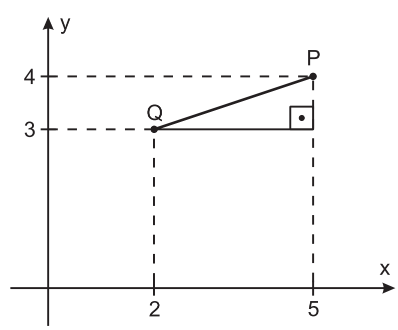
$z = 3\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

Resposta: B

30. Sendo P e Q, respectivamente, os afixos dos números complexos $z_1 = 5 + 4i$ e $z_2 = 2 + 3i$, no plano Argand-Gauss, podemos concluir que a medida de $\overline{PQ}$ é

a) $|z_1| + |z_2|$ b) $|z_1 + z_2|$ c) $|z_1| - |z_2|$
d) $|z_1 - z_2|$ e) $|z_1\,.\,z_2|$

Resolução



$PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-3)^2}$ e $z_1 - z_2 = (5-2) + (4-3)i \Rightarrow$
$\Rightarrow PQ = |z_1 - z_2|$

Resposta: D

31. **(UNIFESP)** – Os números complexos z_1, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde a é um número real positivo, representam no plano complexo vértices de um triângulo equilátero. Dado que $|z_2 - z_1| = 2$, o valor de a é:

a) 2   b) 1   c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$

Resolução

Se z_1, z_2 e z_3 representam os vértices de um triângulo equilátero, $z_2 = 2i$, $z_3 = a\sqrt{3} + ai$ e $|z_2 - z_1| = 2$, então:

$|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| = 2 \Rightarrow |a\sqrt{3} + ai - 2i| = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a\sqrt{3})^2 + (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 4a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 1$, pois $a > 0$

Resposta: B

Módulo 36 – Operações na Forma Trigonométrica: Multiplicação, Divisão e Potenciação

32. Se P e Q são os afixos dos números complexos z . i e $\dfrac{z}{i}$, sendo z = a + bi (a, b $\in \mathbb{R}^*_+$), então a medida do segmento $\overline{PQ}$ é

a) $|a| + |b|$ b) $|a + b|$ c) $a^2 + b^2$

d) $2\sqrt{a^2 + b^2}$ e) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Resolução

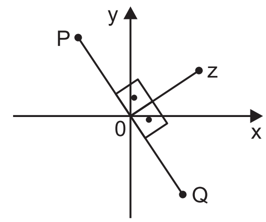
$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, com $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, pois $a, b \in \mathbb{R}^*_+$.

Como $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ temos

$$z \cdot i = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ e}$$

$$\frac{z}{i} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

No plano Argand-Gauss



$$PQ = OP + OQ = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Resposta: D

33. **(FUVEST)** – Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual $\mathbf{z^n}$ é um número real?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Resolução

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = 2^n \cdot \left[\cos\left(n\,\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n\,\pi}{6} = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Se $n \geq 1$, então n = 6, 12, 18, ...

Resposta: C

EXERCÍCIOS-TAREFA

Módulo 21 – Logaritmos: Definição

1. Calcular pela definição:

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 81$ c) $\log_4 64$ d) $\log_8 32$

e) $\log_9 27$ f) $\log_8 (4\sqrt{2})$ g) $\log_{27} (9\sqrt{3})$

2. O valor de $\log_{\frac{1}{4}} 32$ é:

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $-\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) – 1 e) $-\dfrac{5}{2}$

3. **(MOJI)** – O logaritmo de 7776 no sistema de base 6 vale:

a) 6 b) 5 c) 3 d) 2,5

e) não pode ser determinado sem tabela apropriada.

4. **(UNIFOR)** – Qual é o valor de $[\log_5 (25 \log_2 32)]^3$?

5. **(ITA)** – A expressão $\log_2 16 - \log_4 32$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{1}{2 \cdot \log_4 2}$ d) 4 e) 1

6. **(MAUA)** – Achar o valor da expressão:

$$M = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} - \log_2 \frac{1}{4} - \log_5 5$$

7. $\operatorname{Log}_\pi \pi^{1000}$ é igual a:

a) π b) 10^3 c) 3π d) π^3 e) 100

8. **(CESULON)** – Resolvendo a equação $\log_3(2x - 7) = 4$, obtemos:

a) S = {40} b) S = {41} c) S = {42}

d) S = {43} e) S = {44}

9. **(UNIFOR)** – Seja m um número real que satisfaz a equação $\log_2(x^2 - 1) = 3$. Nestas condições, o valor de m + 1 é

a) 10 ou – 8 b) 4 ou – 2 c) 9

d) 5 e) 3

10. A solução da equação $x^{\log_x(x + 3)} = 7$ é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 7

11. **(UNESP)** – O valor de x na equação $\log_{3\sqrt{3}} x = \dfrac{1}{3}$ é

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{3}}$. b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$. c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\sqrt[3]{3}$. e) $\sqrt{3}$.

12. **(PUC)** – Se x e y são números reais tais que $\log_8 2^x = y + 1$ e $\log_3 9^y = x - 9$, então x – y é igual a

a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 15

Módulo 22 – Propriedades dos Logaritmos

1. **(FEBRA)** – O valor de log 25 + log 5 + log 4 + log 2 é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

2. **(UNIP)** – O valor de $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12)$ é:

a) 1 b) $\dfrac{3}{2}$ c) 2 d) $\dfrac{5}{2}$ e) 1,4

3. **(FEFISA)** – Se $\log_3 b - \log_3 a = 4$, o quociente $\dfrac{b}{a}$ vale:

a) 12 b) 64 c) 81 d) 243 e) 27

4. **(CESGRANRIO)** – Se $\log_{10}123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10}1{,}23$ é:

a) 0,0209 b) 0,09 c) 0,209
d) 1,09 e) 1,209

5. **(MACKENZIE)** – Se log m = 2 – log 4, então, m vale:

a) 0,04 b) 1,5 c) 20 d) 25 e) 200

6. $\log_c a = 3$, $\log_c b = 4$ e $y = \dfrac{a^3 \cdot \sqrt{b \cdot c^2}}{2}$ então o valor de $\log_c y$ será:

a) 7 b) 5 c) 4 d) 3 e) 1

7. Dados $\log_2 3 = a$ e $\log_3 5 = b$, obtém-se, para a expressão $\log_3 2 + \log_3 25 \cdot \log_5 2$, o valor

a) 3 b) a (1 + 5b) c) $\dfrac{1 + ab}{2}$ d) $\dfrac{3}{a}$ e) $\dfrac{5}{b}$

8. O valor de $x = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$ é:

a) 2 b) 1/2 c) 1/4 d) 4 e) – 2

9. **(UNICID)** – Se $\log_{10}2 = m$ e $\log_{10}3 = n$, podemos afirmar que o $\log_5 6$ é:

a) $\dfrac{2\,mn}{1 - m}$ b) $\dfrac{m + n}{1 + m}$ c) $\dfrac{m + n}{mn}$

d) $\dfrac{m + n}{1 - m}$ e) $\dfrac{3\,mn}{1 + m}$

10. **(MACKENZIE)** – Se $\log_5 81 = k$, então $\log_3 \sqrt{15}$ vale:

a) $\dfrac{k + 4}{2}$ b) $\dfrac{k + 4}{k}$ c) $\dfrac{k + 2}{2k}$

d) $\dfrac{k + 4}{2k}$ e) $\dfrac{k + 2}{4k}$

11. **(FUVEST)** – Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a

a) $\dfrac{2}{p}$ b) 2p c) $2 + p^2$ d) 2 + 2p e) $\dfrac{2 + 2p}{p}$

12. **(UNESP)** – O nível sonoro N, medido em decibéis (dB), e a intensidade I de um som, medida em watt por metro quadrado (W/m^2), estão relacionados pela expressão:

$$N = 120 + 10.\log_{10}(I).$$

Suponha que foram medidos em certo local os níveis sonoros, N_1 e N_2, de dois ruídos com intensidades I_1 e I_2, respectivamente.
Sendo $N_1 - N_2 = 20$ dB, a razão $\dfrac{I_1}{I_2}$ é:

a) 10^{-2}. b) 10^{-1}. c) 10. d) 10^2. e) 10^3.

Módulo 23 – Função Logarítmica

1. **(MACKENZIE)** – O domínio da função definida por $f(x) = \sqrt[3]{\log(x^2 + x + 7)}$ é o conjunto:

a) Ø b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -23\}$
e) $\mathbb{R}$

2. **(AFA)** – No conjunto dos números reais, o campo de definição da função $f(x) = \log_{(x+1)}(2x^2 - 5x + 2)$ é dado por

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ ou } x = 1\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < 1 \text{ e } x \neq \dfrac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < 0 \text{ e } x \neq 0\right\}$

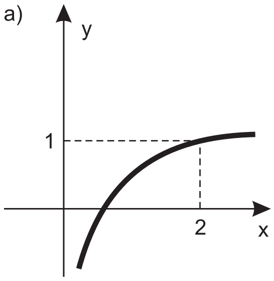
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

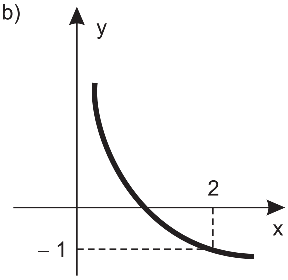
e) ∅

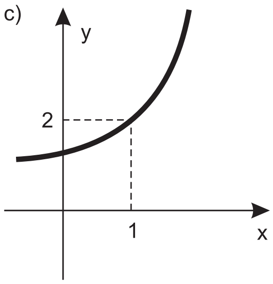
3. O domínio da função $y = \sqrt{\log_{10} x}$ é:

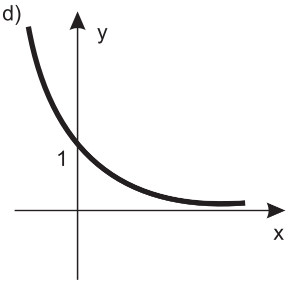
a) $[1, +\infty[$ b) $]-\infty, +\infty[$ c) $]0, +\infty[$
d) $]1, +\infty[$ e) $[0, 1]$

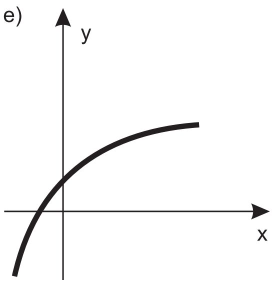
4. Qual dos gráficos abaixo MELHOR representa a função dada por $y = \log_2 x$?

a)


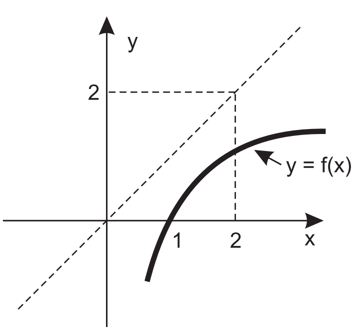
b)


c)


d)


e)


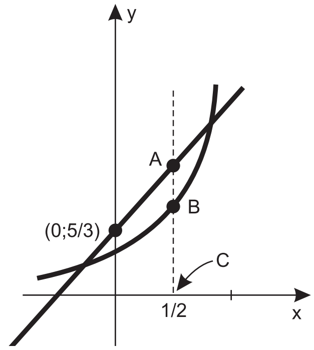
5. **(UFSM)**



A função cujo gráfico é representado pela figura é

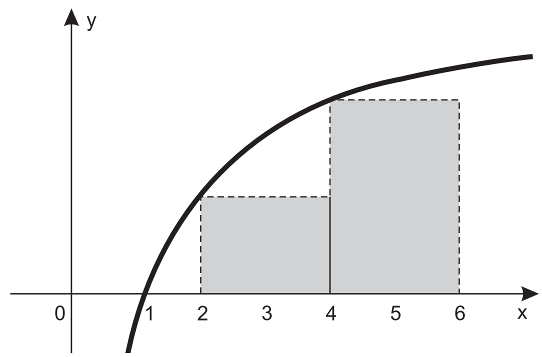
a) $f(x) = \log_a x$; $a > 1$
b) $f(x) = a^x$; $0 < a < 1$
c) $f(x) = a/x$; $a > 0$
d) $f(x) = a^x$; $a > 1$
e) $f(x) = \log_a x$; $0 < a < 1$

6. **(VUNESP)** – A figura mostra os gráficos de uma função exponencial $\mathbf{y = a^x}$ e da reta que passa pelo ponto $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ e tem coeficiente angular igual a $\dfrac{10}{7}$. Pelo ponto $C = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ passou-se a perpendicular ao eixo x, que corta os gráficos, respectivamente, em **B** e **A**.



Supondo-se que **B** esteja entre **A** e **C**, conforme mostra a figura, e que a medida do segmento AB é dada por $\dfrac{8}{21}$, determine o valor de **a**.

7. **(FIC/FACEM)** – Se a curva da figura representa o gráfico da função $y = \log x$, com $x > 0$, então o valor da área hachurada é igual a:



a) log 12
b) 3 . log 2
c) log 4
d) log 6
e) log 64

8. **(MACKENZIE)** – A função real definida por $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, é tal que $f(f(x)) = 8x^4$. Então o número real a vale:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) 2 c) 4 d) $\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$

9. **(UNIP)** – O número de raízes reais da equação $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = -x^2 + 4$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

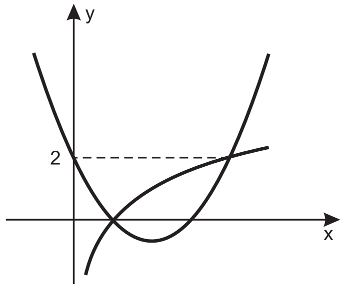
10. **(GV)** – Dada a expressão $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x - x^2}$, então:

a) o maior valor da expressão é 1
b) o menor valor da expressão é 1
c) o menor valor da expressão é 1/16
d) o maior valor da expressão é 1/4
e) o menor valor da expressão é 1/4

11. **(MACKENZIE)** – Os pontos (1,2) e (5,10) pertencem ao gráfico de $f(x) = a.b^{\log_2 x}$. O valor de a + b é

a) 3. b) 4. c) 6. d) 8. e) 5.

12. **(MACKENZIE)** – Se na figura temos os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$, então $g\left(f\left(\dfrac{1}{8}\right)\right)$ é igual a



a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

13. **(FGV)** – Daqui a t anos, o número de habitantes de uma cidade será $N = 40\,000\,(1{,}02)^t$. O valor de t para que a população dobre em relação à de hoje é:

a) $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}02}$ b) 50 c) (log 2)(log 1,02)

d) $2 \cdot \dfrac{\log 2}{\log 1{,}02}$ e) 2(log 2)(log 1,02)

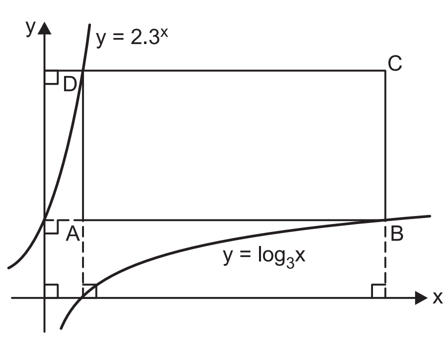
14. **(UNESP)** – Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:
altura: $H(t) = 1 + (0{,}8).\log_2 (t + 1)$

diâmetro do tronco: $D(t) = (0{,}1).\ 2^{\frac{t}{7}}$

com H(t) e D(t) em metros e t em anos.

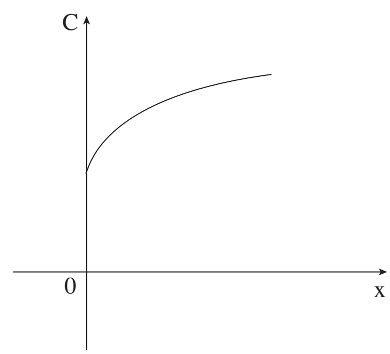
a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.
b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

15. **(UNIFESP)** – Com base na figura, o comprimento da diagonal AC do quadrilátero ABCD, de lados paralelos aos eixos coordenados, é:



a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) 8 d) $4\sqrt{5}$ e) $6\sqrt{3}$

16. **(UFBA)** – O custo de produção diária e a receita pela venda de um determinado produto fabricado por uma empresa, em milhares de reais, são dados, respectivamente, pelas funções $C: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ e $R: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, com $C(x) = 2 + \log_2(x+1)$ e $R(x) = 2^x - 1$, sendo x o número de centenas de unidades produzidas.
Com base nessas informações, é correto afirmar:
(01) As funções C e R são crescentes.
(02) R é a função inversa de C.
(04) Para uma receita igual a R$ 7 000,00, o custo é igual a R$ 4 000,00.
(08) Se a produção é de 100 unidades, então um aumento de 200% na produção acarretará um aumento de 100% no custo.
(16) A função lucro, definida por L = R – C, satisfaz a condição L(0) =L(1), mas não é uma função constante.
(32) A figura abaixo representa um esboço do gráfico da função C.



Módulo 24 – Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

1. **(UEL)** – Considere as soluções reais de $3^{x^2} . 3^{7x} . 3^{12} = 1$. A diferença entre a maior e a menor dessas raízes é
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

2. **(FACCEBA)** – O produto das soluções da equação $9^{(x-4)(x-2)} = 729$ é
a) 1 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3. A solução da equação real $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$ é
a) $x = 0$ b) $x = \log_3 4$ c) $x = 1$
d) $x = \log_4 3$ e) $x = \log_2 5$

4. **(UNICASTELO)** – O valor de x que satisfaz à equação $2e^{2x} - 4e^x + 2 = 0$ é:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

5. **(MACKENZIE)** – A solução real da equação $4^x + 6^x = 2 . 9^x$ está no intervalo:
a) $-1 \le x \le 1$ b) $2 \le x \le 3$ c) $3 \le x \le 4$
d) $-4 \le x \le -3$ e) $20 \le x \le 30$

6. **(UNICAMP)** – Determine o dobro da soma das raízes da equação $8 \cdot 2^{2x-3} - 6 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$

7. Os valores de x que satisfazem $\log x + \log(x-5) = \log 36$ são:
a) 9 e – 4 b) 9 e 4 c) – 4 d) 9 e) 5 e – 4

8. **(U.E.PONTA GROSSA)** – O conjunto solução da equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = x^{\log_x 5}$ é dado por:
a) S = {– 6} b) S = {– 6, 6} c) S = {0, 6}
d) S = Ø e) S = {6}

9. **(ESSAP)** – A solução da equação $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$ é
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

10. **(ITA)** – A soma de todos os valores de x que satisfazem à equação abaixo:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1, \text{ é:}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

11. **(F.C.AGRÁRIAS-PA)** – O valor de x na equação abaixo é:

$$5\sqrt{3^{2x+1}} - \frac{9}{\sqrt{3^{2x-x}}} + 6 = 2\sqrt{3^{2x+3}}$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) – 3

12. **(MACKENZIE)** – O produto das raízes da equação $4x - x^{\log_2 x} = 0$ vale:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

13. A soma das soluções da equação $16 \cdot x^{\log_2 x} = x^5$ é:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 12 e) 18

14. **(ITA)** – Se x é um número real positivo, com $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{3}$, satisfazendo

$$\frac{2 + \log_3 x}{\log_{x+2} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1 + \log_3 x} = \log_x(x+2)$$

então x pertence ao intervalo I, onde
a) $I = \left]0, \frac{1}{9}\right[$ b) $I = \left]0, \frac{1}{3}\right[$ c) $I = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$
d) $I = \left]1, \frac{3}{2}\right[$ e) $I = \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

15. **(MACKENZIE)** – Se $\frac{2}{3}\log_b 27 + 2\log_b 2 - \log_b 3 = -1$, $0 < b \neq 1$, o valor de b é
a) 2. b) $\frac{1}{12}$. c) $\frac{1}{9}$. d) 3. e) $\frac{1}{8}$.

16. **(MACKENZIE)** – Se $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ e x satisfaz a igualdade $f(x) \cdot g(x) = \frac{3}{2}$, então $\log_2 x$ é igual a

a) 2. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) – 1. e) $-\frac{1}{2}$.

17. **(FATEC)** – A raiz real k da equação

$$6.2^{3x-1} + \frac{4}{2^{3x-1}} = 2^{3x} + 8 \text{ é tal que}$$

a) $k > \frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{10} < k \leq \frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5} < k \leq \frac{3}{10}$

d) $\frac{1}{10} < k \leq \frac{1}{5}$ e) $k \leq \frac{1}{10}$

18. **(PUC)** – Se log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o número real que satisfaz a equação $3^{2x} = 2^{3x+1}$ está compreendido entre
a) – 5 e 0 b) 0 e 8 c) 8 e 15
d) 15 e 20 e) 20 e 25

19. **(FUVEST)** – Se x é um número real, x > 2 e $\log_2(x-2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:
a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $4 - \sqrt{3}$ c) $2 + 2\sqrt{3}$
d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) $2 + 4\sqrt{3}$

20. **(FGV)** – Uma instituição financeira oferece um tipo de aplicação tal que, após t meses, o montante relativo ao capital aplicado é dado por $M(t) = C2^{0,04t}$, onde C > 0. O menor tempo possível para quadruplicar uma certa quantia aplicada nesse tipo de aplicação é
a) 5 meses. b) 2 anos e 6 meses.
c) 4 anos e 2 meses. d) 6 anos e 4 meses.
e) 8 anos e 5 meses.

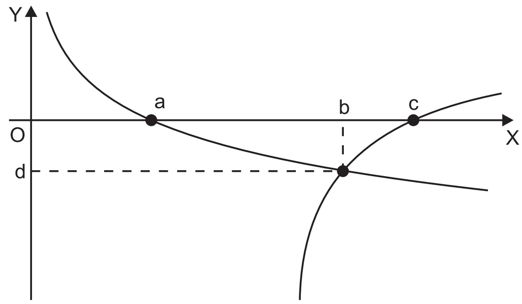
21. **(UNESP)** – Considere as funções $f(x) = \log_3(9x^2)$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, definidas para todo x > 0.

a) Resolva as duas equações: f(x) = 1 e g(x) = – 3.

b) Mostre que $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$.

22. **(UFRN)** – Se $\log_5 x + \log_5 y = 3$, com x e y inteiros maiores que 1, então:
a) x . y = 15 b) x + y = 20
c) x . y = 25 d) x + y = 30

23. **(UFOP)** – Sejam as funções $f:]\sqrt{5}, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}_+^* \to R$, definidas por $f(x) = \log_2(x - \sqrt{5})$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, cujos gráficos estão representados no plano XY.



Calcule a, b, c e d.

Módulo 25 – Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

1. **(AFA)** – O conjunto-solução da inequação
$2^{2x+2} - (0,75)2^{x+2} < 1$ é

a) Ø b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{4} < x < 1\right\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

2. **(PUC-MG)** – A soma dos inteiros positivos que satisfazem a desigualdade $\dfrac{1}{32} < 4^{n-1} < 16$ é:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

3. **(GV)** – Resolver a inequação $2^{\left(\frac{4}{x^2+3x+2}\right)} \geq 4$

4. **(UF.UBERLÂNDIA)** – O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação

$\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^{(3x+1)} . 4^{(1+2x-x^2)} \geq \left(\dfrac{1}{8}\right)^{(x-1)}$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{5} \leq x \leq 1\right\}$ b) Ø

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

5. O conjunto de todos os x para os quais
$\log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 5x + 24) > \log_{\frac{1}{2}} 18$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 8\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2 \text{ ou } 7 < x < 9\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$

6. **(GV)** – Os valores de x para os quais
$\log_{10} x + \log_{10}(x+3) < 1$ são:

a) $x > -5$ b) $x > 2$ c) $0 < x < 2$
d) $x < -5$ ou $x > 2$ e) $-5 < x < 2$

7. **(UNIP)** – O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação
$\log_{0,4}\log_2(0,5)^{x-5} \leq \log_{0,4}(x+2)$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

8. **(FUVEST)** – Se $\log_{10}x \leq \log_2 4 \log_4 6 \log_6 8 - 1$, então:

a) $0 < x \leq 10^2$ b) $10^2 \leq x < 10^4$
c) $10^4 < x \leq 10^6$ d) $10^6 < x \leq 10^8$
e) $x \geq 10^8$

9. **(FEI)** – Resolva a inequação:
$\log_{1/2}(x-1) - \log_{1/2}(x+1) < \log_{1/2}(x-2) + 1$

10. **(PUC)** – Resolvendo a inequação $1 \leq \log_{10}(x-1) \leq 2$, com $x > 1$, encontramos:

a) $10 \leq x \leq 100$ b) $10 < x < 100$ c) $11 \leq x \leq 101$
d) $9 \leq x \leq 99$ e) $9 < x < 99$

11. **(PUCCAMP)** – As soluções reais da inequação
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(\log_5(x+3))} > 1$ são todos os números tais que

a) $-3 < x < -2$ b) $x > -3$ c) $x > -2$
d) $x < -2$ e) $0 < x < 3$

12. **(MACKENZIE)** – O menor valor natural de n para o qual se tem $\dfrac{2 . 4 . 6 . 8 . \ldots . 2n}{1 . 2 . 3 . \ldots . n} > \sqrt{\log 10^{100}}$ é

a) 2 b) 3 c) 4 d) 10 e) 100

13. **(FUVEST)** – O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x+5) - \log_2(3x-1) > 1$ é o intervalo:

a) $]-\infty, -5/2[$ b) $]7/4, \infty[$ c) $]-5/2, 0[$
d) $]1/3, 7/4[$ e) $]0, 1/3[$

14. **(UNESP)** – Dada a inequação $(3^{x/2})^{x-1} \geq \left(\dfrac{3}{9}\right)^{x-3}$, o conjunto verdade V, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$.

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ e } x \geq 2\}$.

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$.

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$.

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$.

15. **(UNESP)** – Considere as funções $f(x) = -5 + \log_2(1-x)$, definida para $x < 1$, e $g(x) = x^2 - 4x - 4$, definida para todo x real.

a) Resolva a inequação $f(x) \le g(4)$ e a equação $g(x) = f(7/8)$.

b) Determine o domínio da função composta fog, isto é, os valores de x . R para os quais fog está definida. Determine também em qual valor de x a composta fog atinge seu valor máximo.

Módulo 26 – Logaritmos Decimais

1. Sendo log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477 calcule:

a) log 200 b) log 0,002 c) log 6
d) log 60 e) log 1,5 f) $\log_2 81$

2. Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0{,}30103$ e $\log_{10} 3 = 0{,}47712$, podemos deduzir que $\log_{10} 12$ é:

a) 0,77815 b) 1,07918 c) 1,30103
d) 1,80618 e) 1,90848

3. Calcular o logaritmo decimal de $\sqrt[10]{3200}$, conhecendo log 2 = 0,3010.

4. **(PUC)** – Sendo log 3 = 0,4771213 e log 2 = 0,3010300, então os valores de x e y, do sistema:

$$\begin{cases} 2 \log x - \log y = 0{,}7269987 \\ \log x + 2 \log y = 1{,}5563026 \end{cases}$$ são respectivamente:

a) 2 e 3 b) 4 e 2 c) 3 e 5 d) 2 e 5 e) 4 e 3

5. **(UERJ)** – Em uma calculadora científica de 12 dígitos quando se aperta a tecla **log**, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Depois de digitar 42 bilhões, o números de vezes que se deve apertar a tecla **log** para que, no visor, apareça ERRO pela primeira vez é

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

6. **(GV)** – Consultando uma tabela de logaritmos decimais encontramos para mantissa dos números 2738 e 2739, respectivamente, os números 0,437433 e 0,437592. Então o logaritmo decimal de 27385 é:

a) 6,393122 b) 4,943122 c) 5,401322
d) 4,437513 e) 5,177513

7. **(U. PASSO FUNDO)** – O preço de um imóvel varia, em R$, no decorrer do tempo, obedecendo à equação:
$T = 15000\ (4/5)^t$. Após quanto tempo, o imóvel valerá R$ 10000,00?

a) t = log (5/6) b) t = – log (2/15)
c) t = log (2/3) / log (4/5) d) t = log (4/5) / log (2/3)
e) t = log (4/5) . log (2/3)

8. **(ALFENAS)** – Suponha que o preço de um automóvel sofra uma desvalorização de $\frac{1}{5}$ ao ano. Depois de quantos anos aproximadamete seu preço cairá para cerca da metade do preço do novo (fazendo-se $\log_{10} 2 = 0{,}30$)?

a) 2 anos. b) 3 anos. c) 5 anos. d) 6 anos. e) 8 anos.

9. **(UFRJ)** – Uma calculadora eletrônica pode escrever números inteiros de até oito dígitos. Quando uma operação cujo resultado é maior ou igual a 100.000.000 é realizada, aparece no visor o símbolo **"E"**, que indica a incapacidade da máquina de fazer aquele cálculo.
Uma pessoa digitou o número 5 na máquina e, em seguida, efetuou a operação **"multiplicação por 2"** diversas vezes, até aparecer o símbolo **"E"** no visor.
Sabendo que $\log_{10} 2 \approx 0{,}301$, determine o número de vezes que a operação foi realizada.

10. Se log x = 1,565257 então:

a) $10^{-1} < x < 10^0$ b) $10^0 < x < 10$
c) $10^{-2} < x < 10^{-1}$ d) $10 < x < 10^2$
e) $10^2 < x < 10^3$

11. **(MACKENZIE)** – Se $\log_7 193{,}5 = x$, então:

a) 0 < x < 1 b) 1 < x < 2 c) 2 < x < 3
d) 3 < x < 4 e) 4 < x < 5

12. Sendo log 2 = 0,3010 e log3 = 0,4771, o valor mais próximo de $\log \sqrt{216}$ é:

a) 3,3343 b) 2,3343 c) 1,3343
d) 1,1671 e) 0,1680

13. **(MACKENZIE)** – Adotando-se log2 = 0,3, o valor de x real que satisfaz a equação $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x - \frac{1}{2}} = 0$ pertence ao intervalo

a)] – 1; 0 [b)] 1; 2 [c)] 2; 3 [

d) $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ e) $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

14. **(PUC)** – Um número N é obtido triplicando-se a base e o expoente de 2^y, em que $y \in \mathbb{R}$. Se N é igual ao produto de 2^y por x^y, qual é o valor de log x? (Use: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)

a) 2,04 b) 2,08 c) 2,12 d) 2,26 e) 2,28

15. **(UNICAMP)** – Um capital de R$12.000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

a) O capital acumulado após 2 anos.

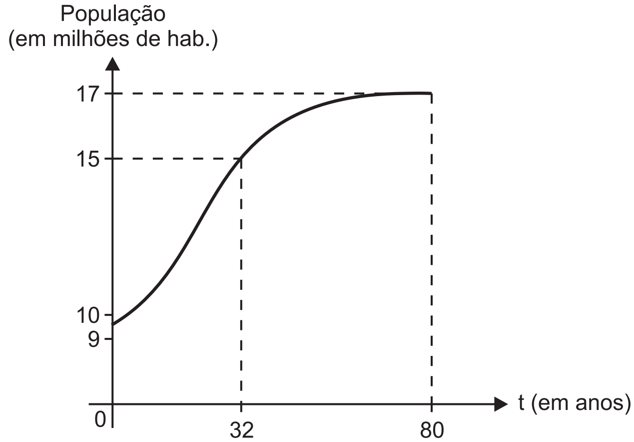
b) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

[Se necessário, use $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$].

16. **(UFSCar)** – Em notação científica, um número é escrito na forma $p.10^q$, sendo p um número real tal que $1 \le p < 10$, e q um número inteiro. Considerando log 2 = 0,3, o número 2^{255}, escrito em notação científica, terá p igual a

a) $\sqrt{10}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\sqrt{2}$. d) 1,2. e) 1,1.

17. **(UNESP)** – A função $p(t) = 9 + \dfrac{8}{1 + 12 \times 3^{-(0,1)t}}$ expressa, em função do tempo t (em anos), aproximadamente, a população, em milhões de habitantes, de um pequeno país, a partir de 1950 (t = 0). Um esboço do gráfico dessa função, para $0 \le t \le 80$, é dado na figura.



(gráfico fora de escala)

a) De acordo com esse modelo matemático, calcule em que ano a população atingiu 12 milhões de habitantes. (Use as aproximações $\log_3 2 = 0,6$ e $\log_3 5 = 1,4$.)

b) Determine aproximadamente quantos habitantes tinha o país em 1950. Com base no gráfico, para $0 \le t \le 80$, admitindo que p(80) = 17, dê o conjunto solução da inequação $p(t) \ge 15$ e responda, justificando sua resposta, para quais valores de k a equação p(t) = k tem soluções reais.

18. **(UFTM)** – Adotando-se log 5 = p e log 6 = q, o zero da função $f(x) = 9.4^x - 6.2^x + 1$ é igual a

a) $1 + \dfrac{q}{p-1}$ b) $1 + \dfrac{q}{1-p}$ c) $\dfrac{q}{4(p-q)}$

d) $\dfrac{q}{4(q-p)}$ e) $-p^2 . q$

Módulo 27 – Módulo de um Número Real

1. **(FAAP)** – O conjunto solução da inequação $|x^2 - 6x + 5| < -5$ é

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 6\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6\}$

c) $S = \varnothing$ d) $S = \mathbb{R}_-$ e) $\mathbb{R}$

2. Para $x \in \mathbb{R}$, determinando-se o conjunto solução da equação $|x + 5| = |2x - 11|$ verifica-se que:

a) o produto dos elementos que pertencem ao conjunto solução é (– 256).

b) o produto dos elementos que pertencem ao conjunto solução é 32.

c) o conjunto solução é unitário e o elemento que pertence ao conjunto é par.

d) a soma dos elementos que pertencem ao conjunto solução é 16.

e) a soma dos elementos que pertencem ao conjunto solução é zero.

3. O conjunto solução da equação $|3x - 2| = 3x - 2$, no universo $\mathbb{R}$, é:

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}_+$ c) $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$

d) $\left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$ e) $\left]-\infty; \dfrac{2}{3}\right]$

4. **(UNEMAT)** – O conjunto de todos os x para os quais $|2x - 4| > x$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{4}{3} < x < 4\right\}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{4}{3} \text{ ou } x > 4\right\}$. d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \ge 4\}$.

5. **(PUC-RIO)** – O conjunto dos números reais que satisfazem a inequação $|x + 2| \le 2x + 5$ é:

a) $x \ge -3$ b) $x \ge -2$ c) $x \ge -7/3$

d) $x \le -7/3$ e) $x \le -2$

6. **(CESGRANRIO)** – Determine o conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \le x + 2$

7. **(FUVEST)** – Sendo x um número real, $(1 + x)(1 - |x|) \ge 0$ se e somente se:

a) $|x| \le 1$ b) $x \le 1$ c) $|x| \ge 1$

d) $x \ge 1$ e) $x \le -1$

8. Resolver a inequação $|x^2 - 4| < 3x$

9. **(MACKENZIE)** – O conjunto solução da inequação $\dfrac{1 - x^2}{1 - |x|} > 2x^2$ é:

a)] – 1, 0] b) [0, 1 [c)] – 1, 1 [

d) $\mathbb{R}_+$ e) $\mathbb{R}_-$

10. **(CESUPA)** – Considere os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x - |x - 1| = 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 5| < 4\}$.
A intersecção entre A e B corresponde ao

a) conjunto vazio b) intervalo]1/3; 3[

c) conjunto {3; 5/3} d) intervalo]5/3; 3[

e) conjunto {5/3}

11. **(MACKENZIE)** – A soma dos valores de x que satisfazem a igualdade $|x^2 - x - 2| = 2x + 2$ é

a) 1 b) 3 c) – 2 d) 2 e) – 3

Módulo 28 – Propriedades e Gráficos da Função Modular

1. **(FEI)** – Os valores reais de x, que satisfazem à inequação $|2x - 1| < 3$, são tais que:

a) $x < 2$ b) $x > -1$ c) $\frac{1}{2} < x < 2$

d) $x > 2$ e) $-1 < x < 2$

2. **(PUC-RIO)** – Se $|2x - 3| \le 5$ então:

a) $x \le -1$ b) $x \le 2$ c) $-1 \le x \le 4$

d) $x \le -1$ ou $x \ge 2$ e) $x \ge 4$

3. O conjunto verdade de $|x^2 - 5x + 5| < 1$ é:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

4. **(MACKENZIE)** – O número de soluções reais da equação $\left|4 - \sqrt[4]{x^4}\right| = 4$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

5. **(UNIP)** – O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, do sistema $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \le 0 \\ |x - 2| < 3 \end{cases}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 6\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 1\}$

6. Se $\left|1 - \frac{x - 1}{2}\right| \le 4; \forall x \in \mathbb{R}$, então:

a) $x \ge 15$ b) $-5 \le x \le 11$ c) $x \le -10$

d) $12 < x \le 20$ e) $-7 \le x < 6$

7. **(UF. GOIÁS)** – Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + |x|$ e faça o que se pede:

a) mostre que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 2x \text{ se } x \ge 0 \end{cases}$

b) resolva a equação $f(x + 2) - x = 3$

8. Esboçar o gráfico da função $f: [-1, 0[\cup]0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$

9. **(UFG)** – Esboce o gráfico da função definida por $f(x) = x \,.\, |x + 2|$

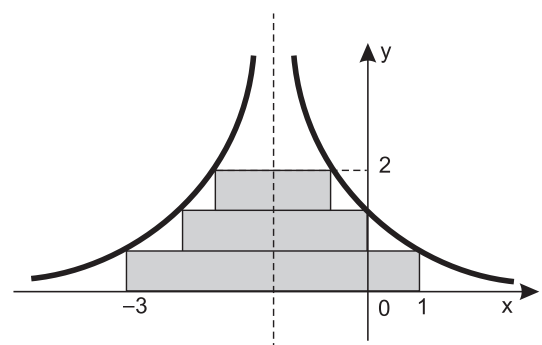
10. Construir o gráfico cartesiano da função f, definida por $f(x) = \frac{x + |x|}{|x|}$

11. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1| + |x - 3| - 4$.

12. **(UFG)** – Esboce o gráfico de $|y| + x = |x|$

13. **(GV)** – Esboce o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2}$

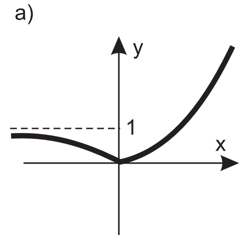
14. **(MACKENZIE)** – Na figura, temos o gráfico da função de $\mathbb{R} - \{-1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{|x + 1|}$. A área da região assinalada vale:



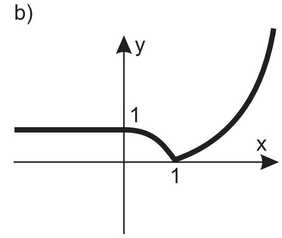
a) $\frac{7}{2}$ b) 4 c) $\frac{9}{2}$ d) 5 e) $\frac{11}{2}$

15. O gráfico que melhor representa a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2^x - 2|$ é:

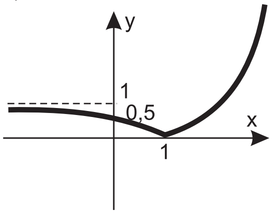
a)



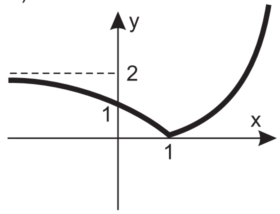
b)



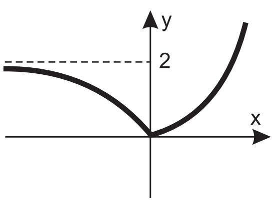
c)



d)

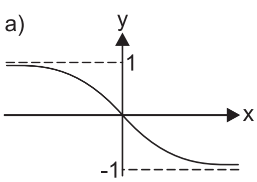


e)

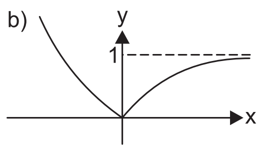


16. **(FUVEST)** – Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:

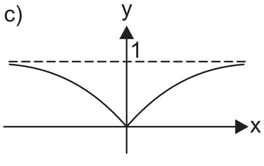
a)



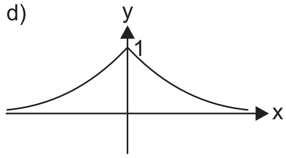
b)



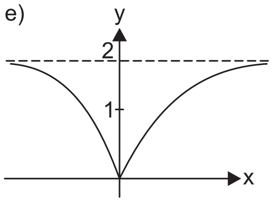
c)



d)



e)



17. **(FUVEST)** – O conjunto dos pontos (x,y), do plano cartesiano que satisfazem $t^2 - t - 6 = 0$, onde $t = |x - y|$, consiste de

a) uma reta. b) duas retas. c) quatro retas.
d) uma parábola. e) duas parábolas.

Módulo 29 – Divisão em ℕ, Múltiplos e Divisores em ℤ, Número Primo e Composto

1. Ao dividir **x** por **y** obteve-se quociente **5** e resto **2**; ao dividir **x** por **y + 1** obteve-se quociente e resto iguais a **4**. Calcular **x + y**.

2. **(GV)** – A soma de dois números é **224**. Dividindo-se o maior por **18**, encontra-se o mesmo quociente que o da divisão do menor por **14**. Sabendo que as duas divisões são **exatas**, a soma do maior com a metade do menor é:

a) 165 b) 215 c) 180 d) 175 e) 180

3. **(GV)** – Numa divisão o quociente é **8** e o resto é **24**. Sabe-se que a soma do dividendo, do divisor, do quociente e do resto é **344**. Então, a diferença entre o dividendo e o divisor é:

a) 127 b) – 127 c) 100 d) 248 e) – 248

4. **(PUC)** – O conjunto

$$A = \left\{ x \mid x = \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

equivale:
a) ao conjunto dos quadrados dos naturais.
b) ao conjunto dos pares positivos.
c) ao conjunto dos quadrados dos números ímpares.
d) ao conjunto vazio.
e) ao conjunto dos naturais não nulos.

5. **(FUVEST)** – O número **143** é:
a) quadrado de um número natural.
b) produto de dois números pares.
c) primo.
d) divisível por 13.
e) um divisor de 1431.

6. Assinale a falsa:
a) O número **31** é primo.
b) O número **169** é composto.
c) O número **8** tem **8** divisores inteiros.
d) Se o resto da divisão de **a** $\in \mathbb{N}$ por **b** $\in \mathbb{N}^*$ é **4**, então o resto da divisão de **a + 1** por **b** é **5**.
e) Se o resto da divisão de **a** $\in \mathbb{N}$ por **b** $\in \mathbb{N}^*$ é **4**, então o resto da divisão de **a – 1** por **b** é **3**.

7. Calcular o número de divisores de **1200**.

8. **(MACKENZIE)** – Dos números abaixo, o único que pode ser escrito como o produto de quatro números naturais consecutivos é

a) 512 b) 748 c) 926 d) 1 350 e) 1 680

9. **(MACKENZIE)** – A soma dos fatores primos distintos do número $1{,}26 \times 10^6$ é

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17 e) 19

10. **(PUC)** – Um grupo de pessoas, entre elas Mali, está sentado em torno de uma grande mesa circular. Mali abre uma caixa com 21 bombons, se serve de apenas um deles e, em seguida, a caixa é passada sucessivamente para as pessoas ao redor da mesa, de modo que cada uma se sirva de um único bombom e passe a caixa com os bombons restantes para a pessoa sentada à sua direita. Se Mali pegar o primeiro e o último bombom, considerando que todos podem ter se servido da caixa mais do que uma vez, o total de pessoas sentadas nessa mesa poderá ser

a) 3 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

11. **(UNICAMP)** – Sabe-se que o número natural *D*, quando dividido por 31, deixa resto $r \in N$ e que o mesmo número *D*, quando dividido por 17, deixa resto $2r$.
a) Qual é o maior valor possível para o número natural *r*?
b) Se o primeiro quociente for igual a 4 e o segundo quociente for igual a 7, calcule o valor numérico de *D*.

12. **(UNIFESP)** – Um número inteiro positivo m dividido por 15 dá resto 7. A soma dos restos das divisões de m por 3 e por 5 é
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

13. **(UNESP)** – Considere o número inteiro 3 600, cuja fatoração em primos é $3\,600 = 2^4.3^2.5^2$. Os divisores inteiros e positivos de 3 600 são os números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$ e $\gamma \in \{0,1,2\}$. Determine:
a) o número total de divisores inteiros e positivos de 3 600 e quantos desses divisores são também divisores de 720.
b) quantos dos divisores inteiros e positivos de 3 600 são pares e quantos são quadrados perfeitos.

Módulo 30 – Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum e Propriedades

1. Determine o **mdc** e **mmc** dos números **36**, **40**, **56**.

2. Sejam os números $\mathbf{A = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5}$ e $\mathbf{B = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2}$. O **mdc** e **mmc** entre **A** e **B** valem, respectivamente:
a) $2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$ e $2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$
b) $2 \,.\, 5^2$ e $2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$
c) $2 \,.\, 3 \,.\, 5$ e $2^3 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$
d) $2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$ e $2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$
e) $2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2$ e $2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$

3. Dados quatro números **12**, **27**, **125**, **x** cujo mínimo múltiplo comum é **a** e dados quatro números **6**, **108**, **225**, **x** cujo mínimo múltiplo comum é **b**, sendo **x** número primo, então, pode-se concluir que:
a) **a > b**
b) **a < b**
c) conforme o valor de **x**, pode-se ter **a = b**.
d) conforme o valor de **x**, pode-se ter **a < b**.
e) desconhecendo-se **x**, nada se pode concluir.

4. **(UNB)** – Dados três números ímpares distintos, o seu:
a) mmc é sempre par
b) mdc é sempre diferente de 1
c) mmc é sempre ímpar
d) mdc pode ser par
e) mdc é sempre 1

5. **(FUVEST)** – Sejam **a** e **b** o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de **360** e **300**, respectivamente. Então o produto **ab** vale:
a) $2^4 3^4 5^3$
b) $2^5 3^2 5^2$
c) $2^5 3^3 5^3$
d) $2^6 3^3 5^2$
e) $2^6 3^4 5^2$

6. Um divisor comum de $\mathbf{x^2 - 4}$; $\mathbf{x^2 + 3x + 2}$; $\mathbf{x^2 + x - 2}$ é:
a) x + 1 b) 2x + 1 c) x + 2
d) x – 2 e) 2x – 1

7. **(MACKENZIE)** – A soma de dois números inteiros positivos, a e b, é 43. Sabendo-se que mdc(a,b).mmc(a,b)=190, o valor absoluto da diferença desses números é
a) 25 b) 33 c) 41 d) 49 e) 57

8. **(UNESP)** – Um grande arranjo de flores deve ser formado com 800 rosas, 750 hortênsias e 600 cravos, sendo composto de ramos, todos os ramos com o mesmo número de rosas, o mesmo número de hortênsias e o mesmo número de cravos. Nestas condições,
a) qual o maior número de ramos que pode ser formado?
b) quantas flores de cada qualidade tem cada ramo?

9. **(UNESP)** – Uma faixa retangular de tecido deverá ser totalmente recortada em quadrados, todos de mesmo tamanho e sem deixar sobras. Esses quadrados deverão ter o maior tamanho (área) possível. Se as dimensões da faixa são 105 cm de largura por 700 cm de comprimento, o perímetro de cada quadrado, em centímetros, será:
a) 28. b) 60. c) 100. d) 140. e) 280.

Módulo 31 – Números Primos entre Si, Critérios de Divisibilidade e Números Reais

1. **(UNA)** – Dos conjuntos abaixo, qual não apresenta números primos entre si?
a) {3, 4, 6} b) {2, 5, 15} c) {3, 6, 9}
d) {2, 3, 7} e) {3, 5, 8}

2. Determinando-se a fração irredutível e decimal $\mathbf{\dfrac{a}{b}}$, sabendo-se que $\mathbf{\dfrac{a+2}{b} = 0{,}31}$ verifica-se que:
a) b – a < 68 b) b – a < 70 c) b – a < 72
d) b – a > 74 e) b – a > 76

3. **(MACKENZIE)** – Os números
(2 + 100!); **(3 + 100!)**; ...; **(100 + 100!)**
a) são todos divisíveis por 100
b) são todos ímpares
c) são todos inteiros consecutivos não primos
d) formam uma progressão aritmética de razão 100!
e) formam uma progressão aritmética de razão 100

4. **(UNB)** – Se **x**, **y**, **z** são três números inteiros positivos e
$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \quad \text{então:}$$
a) (a + b + c) é sempre um número par
b) (a + b + c) é sempre um número ímpar
c) (a + b + c) é sempre um múltiplo de 3.

d) $(a + b + c)$ é sempre um múltiplo de 5.
e) $(a + b + c)$ é sempre um múltiplo de 7.

5. O máximo divisor comum entre **a + 4** e **a**, sendo $a \in \mathbb{N}^*$ é:
a) 1 b) 2 c) 2 ou 4 d) 1 ou 4 e) 1 ou 2 ou 4

6. **(PUCC)** – Dois livros, um dos quais tem **256** páginas e outro, **160** páginas, são formados por fascículos com o mesmo número de páginas (superior a **10** e inferior a **50**). Cada fascículo:
a) pode ter 32 páginas b) pode ter 24 páginas
c) tem 16 páginas d) tem 18 páginas
e) tem 22 páginas

7. **(PUCC)** – No conjunto dos números naturais, considere um número **n**, que dividido por **3**, deixa resto **2**; dividido por **4** deixa resto **3** e dividido por **5** deixa resto **4**. Conclua que o menor valor de **n** pertence ao intervalo:
a) $30 < n < 50$ b) $50 < n < 80$ c) $80 < n < 110$
d) $110 < n < 140$ e) $130 < n < 180$

8. Considere-se o número de **9** algarismos, dos quais o algarismo das unidades é **n** e todos os demais são iguais a **2**. (Isto é: o número **22222222n)**.
O valor de **n** a fim de que este número seja divisível por **6** é:
a) 2 ou 8 b) 2 ou 7 c) 0 ou 6
d) 3 ou 9 e) 4

9. **(UNICAMP)** – Sejam a e b números inteiros e seja N(a, b) a soma do quadrado da diferença entre a e b com o dobro do produto de a por b.
a) Calcule N(3, 9).
b) Calcule N(a, 3a) e diga qual é o algarismo final de N(a,3a) para qualquer $a \in \mathbb{Z}$.

Módulo 32 – Sistemas de Numeração

1. A soma dos **3** algarismos de um número é **9**; a diferença entre o algarismo das dezenas e das unidades é **6**; a razão entre o algarismo das dezenas e das centenas é **2**. Determinar o número.

2. Os números $\mathbf{10^p}$ e $\mathbf{100^p}$ (sendo **p** um número inteiro positivo) têm, respectivamente:
a) p e 10p algarismos b) p e 2p algarismos
c) p + 1 e 2p + 1 algarismos d) p + 1 e 2(p + 1) algarismos
e) p +1 e 2p algarismos.

3. Um número tem dois algarismos, sendo **x** o das unidades e **y** o das dezenas. Se colocarmos o algarismo **2** a direita desse número, o novo número será:
a) yx + 2 b) x + y + 2 c) 200 + 10y + x
d) 100x + 10y + 2 e) 100y + 10x + 2

4. **(FEI)** – Para que valores de **n** o número $\mathbf{P_n = \sum_{i=0}^{n} 10^i}$ é divisível por **3**?

5. **(PUCC)** – A um aluno propuseram o seguinte problema:
Um número é tal que:
a) multiplicado por **3/4**, diminui de **5** unidades.
b) dividido por **4/5**, aumenta de **5** unidades.
c) adicionando-se-lhe **10** unidades, obtém-se outro número que é **3/2** do número dado.
O aluno respondeu que o problema é impossível porque, embora as partes **a** e **b** fossem possíveis, o mesmo não se verifica em relação ao item **c**.
Responda você:
a) O aluno errou porque o problema só é possível em relação às partes (a) e (c).
b) O aluno acertou na resposta que deu.
c) O aluno errou porque o problema é possível.
d) O aluno errou porque o problema só se verifica em relação às partes (b) e (c).
e) O aluno errou porque (c) é incompatível com (b).

6. **(PUCC)** – Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das unidades é o dobro do das dezenas. Invertendo-se a ordem dos algarismos obtém-se outro número que é **27** unidades maior do que o primeiro. Podemos afirmar que:
a) A diferença entre os dois números é exatamnete, 3/4 do primeiro.
b) A diferença entre os algarismos é 5.
c) A soma dos algarismos é 8.
d) Não existe esse número.
e) n.d.a.

7. **(PUCC)** – Um número **N**, de **4** algarismos é tal que:
O algarismo das centenas é igual à soma do algarismo das dezenas com o dos milhares. A soma dos algarismos das dezenas e das unidade é igual ao algarismo das centenas aumentado do triplo do dos milhares.
A soma dos algarismos das centenas e dos milhares é igual a **8**.
A soma dos algarismos das unidades, das dezenas e dos milhares é **11**. Podemos afirmar que:
a) $1846 < N < 1998$ b) $N > 1998$ c) $N < 1750$
d) $1750 < N < 1846$ e) $1800 < N < 1900$

8. Assinale a falsa:
a) $(311)_4 = (110101)_2$ b) $(10000)_2 = 16$
c) $(1101)_2 = (15)_8$ d) $(1000)_2 = 8$
e) $(134)_5 = (113)_6$

9. Ao multiplicar dois números positivos, um dos quais é maior que o outro em **36** unidades, o aluno cometeu um erro, diminuindo de **8** unidades o algarismo das dezenas do produto. Em seguida, com objetivo de tirar a prova da operação reali-

zada, dividiu o produto pelo menor dos fatores e encontrou quociente **53** e resto **4**. Assinale entre as escolhas abaixo aquela que representa o produto entre os dois números.

a) 1197 b) 1045 c) 1357 d) 1120 e) 1276

10. **(PUC)** – Para a orientação dos maquinistas, ao longo de uma ferrovia existem placas com a indicação da quilometragem. Um trem percorre essa ferrovia em velocidade constante e, num dado instante, seu maquinista observa uma placa em que o número indicador da quilometragem tinha 2 algarismos. Após 30 minutos, ele passa por uma outra em que, curiosamente, os algarismos assinalados eram os mesmos da primeira, só que escritos na ordem inversa. Decorridos 30 minutos de sua passagem pela segunda placa, ele passa por uma terceira em que o número marcado tinha os mesmos algarismos das anteriores mas na mesma ordem dos da primeira e com um zero intercalado entre eles. Nessas condições, a velocidade desse trem, em quilômetros por hora, era

a) 72 b) 90 c) 100 d) 116 e) 120

11. **(FUVEST)** – Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

12. **(UFTM)** – XYZ4 e X4YZ representam dois números inteiros positivos de quatro algarismos. Se X4YZ excede XYZ4 em 288 unidades, então Z – Y é igual a

a) – 3. b) – 1. c) 1. d) 3. e) 5.

Módulo 33 – Definição de Número Complexo e Operações na Forma Algébrica

1. O produto $\mathbf{(5 + 7i)\ (3 - 2i)}$ vale:

a) $1 + 11i$ b) $1 + 31i$ c) $29 + 11i$
d) $29 - 11i$ e) $29 + 31i$

2. Se $\mathbf{f(z) = z^2 - z + 1}$, então $\mathbf{f(1 - i)}$ é igual a:

a) i b) $-i + 1$ c) $i - 1$ d) $i + 1$ e) $-i$

3. Os números reais de **x** e **y** que satisfazem a equação $\mathbf{2x + (y - 3)i = 3y - 4 + xi}$ são tais que:

a) $x + y = 7$ b) $x - y = 3$ c) $xy = 10$
d) $\dfrac{x}{y} = 3$ e) $y^x = 32$

4. Dados os complexos $\mathbf{z_1 = a + 8ai}$ e $\mathbf{z_2 = -4 + bi}$, determine **a**, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{z_1 + z_2}$ seja imaginário puro.

5. Para que o produto $\mathbf{(a + i)\ .\ (3 + 2i)}$ seja um número real, o valor real de **a** deve ser:

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) $-\dfrac{3}{2}$ e) 3

6. **(FUVEST)** – Sendo **i** a unidade imaginária $\mathbf{(i^2 = -1)}$ pergunta-se: quantos números reais **a** existem para os quais $\mathbf{(a + i)^4}$ é um número real?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) infinitos

7. O número complexo $\dfrac{\mathbf{1 + 3i}}{\mathbf{1 - 2i}}$ é equivalente a:

a) $-1 + i$ b) $1 - i$ c) $-5 + 5i$
d) $-\dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{3}i$ e) $\dfrac{5}{3} - \dfrac{5}{3}i$

8. $\dfrac{\mathbf{5 + i}}{\mathbf{7 - 2i}}$ é igual a:

a) $\dfrac{33}{53} + \dfrac{17}{53}i$ b) $\dfrac{5}{7} - \dfrac{1}{2}i$ c) $\dfrac{35}{53} - \dfrac{5}{2}i$
d) $\dfrac{6}{7} - \dfrac{6}{2}i$ e) $-\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{7}i$

9. **(VUNESP)** – Sendo **i** a unidade imaginária, o valor de $\left(\dfrac{\mathbf{1 + i}}{\mathbf{1 - i}}\right)^{\mathbf{4}}$ é

a) -1 b) $-i$ c) $2i$ d) i e) 1

Módulo 34 – Definição de Número Complexo e Operações na Forma Algébrica

1. O valor de $\dfrac{\mathbf{i^{246} + i^{121}}}{\mathbf{i^{34}}}$ é:

a) i b) $2i$ c) $-i$ d) $1 - i$ e) 2

2. **(MACKENZIE)** – O número $\mathbf{(1 + i)^{10}}$ é igual a:

a) $32i$ b) $-32i$ c) $32 + 10i$
d) $\sqrt{2} + 10i$ e) $\sqrt{2} - 10i$

3. Sendo **i** a unidade imaginária o valor de $\mathbf{i^{10} + i^{-100}}$ é:

a) zero b) i c) $-i$ d) 1 e) -1

4. A potência $\mathbf{(1 - i)^{16}}$ equivale a:

a) 8 b) $16 - 4i$ c) $16 - 16i$
d) $256 - 16i$ e) 256

5. **(CONVESU)** – Sejam **u** e **v** dois complexos tais que $\mathbf{u^2 - v^2 = 6}$ e $\mathbf{\bar{u} + \bar{v} = 1 - i}$ ($\bar{u}$ e $\bar{v}$ conjugados de **u** e **v**). Então **u – v** é igual a:

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) $3 + 3i$ d) $3 - 3i$ e) $2 + 2i$

6. Determinar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{x+i}{x-i}}$

7. Se a soma dos valores complexos $\mathbf{z + 2\bar{z} + 3z + 4\bar{z}}$ é $\mathbf{320 + 28i}$ ($\mathbf{\bar{z}}$ é o conjugado de **z**), então:

a) $z = 10 - 2i$ b) $z = 10 + 2i$ c) $z = 32 - 14i$
d) $z = 32 - 2i$ e) $z = 2 + 14i$

8. Se **z** é um número complexo e $\mathbf{\bar{z}}$ o seu conjugado, então, o número de soluções da equação $\mathbf{\bar{z} = z^2}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

9. **(MACKENZIE)** – Considere os complexos $u = 4 + i$, $v = 2 + 3i$ e $w = 6 + 4i$, cujos afixos, em relação a um sistema de eixos perpendiculares, são, respectivamente, P, Q e R. Sendo O a origem do sistema, a área do quadrilátero OPRQ é

a) 8 b) 9 c) 15 d) 12 e) 10

10. **(FATEC)** – Se i é a unidade imaginária, a soma $2 + 4 \,.\, i^2 + 6 \,.\, i^4 + ... + 100 \,.\, i^{98}$ é um número

a) primo. b) divisível por 4. c) múltiplo de 6.
d) negativo. e) quadrado perfeito.

11. **(FUVEST)** – Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

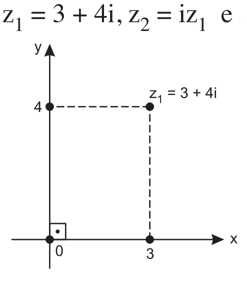
a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

12. **(UFSCar)** – Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + i^{a_3} + \ldots + i^{a_{10}}$ é igual a

a) 9i ou – 9i. b) – 9 + i ou – 9 – i.
c) 9 + i ou 9 – i. d) 8 + i ou 8 – i.
e) 7 + i ou 7 – i.

13. **(UNIFESP)** – Dados os números complexos $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = iz_1$ e $z_3 = -iz_1$, calcule:



a) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta determinado pelos pontos z_2 e z_3.

b) a altura do triângulo de vértices z_1, z_2 e z_3, com relação ao vértice z_1.

Módulo 35 – Forma Trigonométrica

1. Se **z** é um número complexo tal que $\mathbf{z \,.\, \bar{z} = 24}$, então o módulo de **z** é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{6}$ c) 5 d) 12 e) 24

2. **(MACKENZIE)** – A solução da equação $\mathbf{|z| + z = 2 + i}$ é um número complexo de módulo:

a) $\dfrac{5}{4}$ b) $\sqrt{5}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$

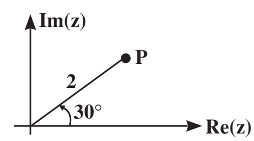
3. O argumento do número complexo $\mathbf{z = -2\sqrt{3} + 2i}$ é:

a) 120° b) 150° c) 210° d) 300° e) 330°

4. Seja **z** o produto dos números complexos $\mathbf{\sqrt{3} + i}$ e $\mathbf{\dfrac{3}{2}(1 + \sqrt{3}\, i)}$. Então o módulo e o argumento de **z** são, repectivamente:

a) 4 e 30° b) 12 e 80° c) $\sqrt{6}$ e 90°
d) 6 e 90° e) 12 e 30°

5. Na figura ao lado, o ponto **P** é a imagem do número complexo **z**, no plano de Argand Gauss. Então, **z** é igual a:



a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

6. **(MACK)** – A forma trigonométrica do número complexo $\mathbf{i - \sqrt{3}}$ é:

a) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ d) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

e) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$

7. **(MACKENZIE)** – Se o complexo **z** é tal que $\mathbf{2z - \bar{z} + 6i = 3}$, então $|\mathbf{z}|$ é:

a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{7}$

8. **(UFSM)** – Seja $\mathbf{z = a + bi}$ um número complexo, com $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^*$. A área do polígono, cujos vértices são $\mathbf{z_1 = z}$, $\mathbf{z_2 = \bar{z}}$, $\mathbf{z_3 = -z}$ e $\mathbf{z_4 = bi}$, é igual a:

a) ab b) $\dfrac{3}{2}$ ab c) 2 ab d) 3 ab e) 6 ab

9. **(MACKENZIE)** – Se z=x+yi ($i^2 = -1$) é tal que $|z + i| = |z + 2|$, então os pontos de coordenadas (x;y), x e y reais, percorrem

a) uma hipérbole. b) uma circunferência. c) uma elipse.
d) uma reta. e) uma parábola.

10. **(PUC)** – Considere a equação matricial

$$\begin{bmatrix} i & 1-i \\ 0 & -i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

em que i é a unidade imaginária. Os números complexos x e y que satisfazem essa equação são tais que a medida do argumento principal de x + y é

a) 120° b) 135° c) 225° d) 240° e) 330°

11. **(FGV)** – O ponto P é o afixo de um número complexo z e pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, Sabendo-se que o argumento de z é 60°, pode-se afirmar que

a) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i.$ b) $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,i.$

c) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$ d) $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i.$

e) $z = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,i.$

12. **(UNIFESP)** – Os números complexos z_1, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde a é um número real positivo, representam no plano complexo vértices de um triângulo equilátero. Dado que $|z_2 - z_1| = 2$, o valor de a é:

a) 2. b) 1. c) $\sqrt{3}$. d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. e) $\dfrac{1}{2}$.

13. **(UNESP)** – Considere os números complexos z = 2 – i e w = –3 –i, sendo i a unidade imaginária.

a) Determine z.w e $|w - z|$.
b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, de modo que os números complexos z, w e t = bi sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

14. **(UNESP)** – Seja o número complexo z = 10 + 10i, no qual $i = \sqrt{-1}$. A forma trigonométrica que representa este número é

a) $10\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $10\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $10\sqrt{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

d) $10\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $10\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

Módulo 36 – Operações na Forma Trigonométrica: Multiplicação, Divisão e Potenciação

De **1** a **3**

Dados $\mathbf{z_1 = 2(\cos 30° + i \,.\, \text{sen}\, 30°)}$, $\mathbf{z_2 = \cos 10° + i \,.\, \text{sen}\, 10°}$ e $\mathbf{z_3 = 4\,(\cos 60° + i \,.\, \text{sen}\, 60°)}$, calcular

1. $\mathbf{z_1 \,.\, z_3}$ 2. $\mathbf{z_2^6}$ 3. $\mathbf{z_3 \div z_1}$

4. O módulo e o argumento do complexo $\mathbf{(\sqrt{3} + i)^8}$ são, respectivamente:

a) 4^4 e $\dfrac{4\pi}{3}$ b) 2^8 e $\dfrac{8\pi}{3}$ c) 4^8 e $\dfrac{8\pi}{9}$

d) 3^8 e $\dfrac{5\pi}{4}$ e) 2^4 e $\dfrac{3\pi}{4}$

5. Dado o número complexo $\mathbf{z = \cos\dfrac{\pi}{16} + i \,.\, \text{sen}\dfrac{\pi}{16}}$, o valor de $\mathbf{z^{12}}$ é:

a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\sqrt{2} + i$ d) $-1 + i\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

6. **(CESGRANRIO)** – O menor **n > 0**, de modo que $\left(\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i}\right)^{\mathbf{n}}$ seja real positivo, é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 8 e) 12

7. **(MACKENZIE)** – Sendo $i^2 = -1$, o módulo do número complexo z, solução da equação $2z + \overline{z} = 6 + 9i$, é

a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt{19}$

8. **(UNICAMP)** – Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|\ (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = x/|z|$ e $\text{sen}\,\theta = y/|z|$. Essa forma de representar os números complexos não nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:
$[|z|\ (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^k = |z|^k\ (\cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta)$ que é válida para todo $k \in \mathbb{Z}$ .Use essas informações para:

a) Calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$

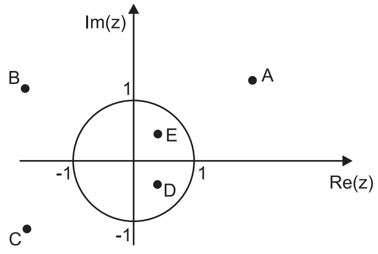
b) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de

$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{15}$.

9. **(UFTM)** – Dados os números complexos não nulos $z = a + bi$ e $w = i\ .\ z$. Sendo α e β os argumentos, respectivamente de z e w, com $0 \le \alpha < 2\pi$ e $0 \le \beta < 2\pi$, pode-se afirmar que $\beta - \alpha$ é igual a

a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) π c) $\dfrac{\pi}{2}$ d) $\dfrac{3\pi}{2}$ e) $\dfrac{3\pi}{4}$

10. **(UFTM)** – Em relação ao número complexo $z = a + bi$, sabe-se que $a < 0$, $b < 0$ e $|z| < 1$. Nessas condições, dos pontos indicados na figura, aquele que pode representar o afixo de z^2 é



a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 11 – Progressões Aritméticas

1. **(UNIMONTE)** – O número 6 é o primeiro elemento de uma sequência. O próximo é obtido calculando-se o quadrado do número anterior e, a seguir, somando-se seus algarismos e adicionando-se 1 à soma, isto é, $6^2 = 36 \to 3 + 6 = 9 \to 9 + 1 = 10$. Repetimos esse processo e encontramos o terceiro número da sequência e, assim, sucessivamente. Qual o 1010º elemento dessa sequência?

a) 2 b) 5 c) 8 d) 10

Resolução

1) $a_1 = 6$
2) $a_2 = 10$
3) $a_3 = 2$, pois $10^2 = 100 \to 1 + 0 + 0 = 1$ e $1 + 1 = 2$
4) $a_4 = 5$, pois $2^2 = 4 \to 4 + 1 = 5$
5) $a_5 = 8$, pois $5^2 = 25 \to 2 + 5 = 7$ e $7 + 1 = 8$
6) $a_6 = 11$, pois $8^2 = 64 \to 6 + 4 = 10$ e $10 + 1 = 11$
7) $a_7 = 5$, pois $11^2 = 121 \to 1 + 2 + 1 = 4$ e $4 + 1 = 5$

A partir desse os termos se repetem e a sequência é $(a_n) = (6; 10; 2; 5; 8; 11; 5; 8; 11; \ldots)$ e seu 1010º termo é o 1007º termo da sequência (5; 8; 11; 5; 8; 11; …) que vale 8 pois 1007 dividido por 3 deixa resto 2.

Resposta: C

2. **(U.E.Paraíba)** – Durante 160 dias consecutivos, a programação de uma TV Educativa apresentará, dentre outras atrações, aulas de *Matemática* e aulas de *Literatura*, conforme indicam respectivamente as progressões (2, 5, 8, …, 158) e (7, 12, 17, …, 157), cujos termos representam as ordenações dos dias no respectivo período. Nesse caso, o número de vezes, em que haverá aula de *Matemática* e aula de *Literatura* no mesmo dia, é igual a:

a) 14 b) 9 c) 11 d) 15 e) 10

Resolução

Haverá aula de matemática e Literatura nos dias cuja ordenação são termos comuns às duas progressões. O primeiro termo comum às duas é 17.

Os demais termos formam uma PA de razão mmc(3;5) = 15. Tal progressão possui 10 termos, a saber (17; 32; 47; 62; 77; 92; 107; 122; 137; 152)

Resposta: E

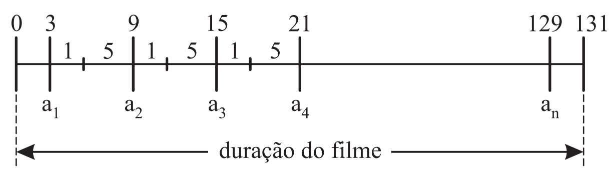
Módulo 12 – Propriedade e Soma dos Termos de uma PA

3. Uma emissora de televisão exibirá um filme de longa metragem sem intervalos comerciais e com 2 horas e 11 minutos de duração, incluindo os créditos. Para evitar pirataria a emissora pretende inserir, ao longo da apresentação, e no canto superior direito da tela, o seu logotipo. Como de costume, no começo e no final da transmissão a emissora reserva alguns minutos para apresentar o nome do filme e os créditos e, desta forma, a primeira inserção ocorre no quarto e a última no anti-penúltimo minuto. Se cada inserção ocorre sempre no início de cada minuto da apresentação, tem duração de 60 segundos e o intervalo entre o término de uma e o início da seguinte deverão ser iguais e inferior a seis minutos, o número mínimo de inserções que a emissora deverá fazer é:

a) 19 b) 20 c) 21 d) 22 e) 23

Resolução

Como o intervalo entre as inserções deverá ser inteira e menor que 6 minutos poderá ser, no máximo, de 5 minutos. O esquema mostra o que ocorrerá.



As inserções ocorreram no início do (3; 9; 15; 21; …; 129) minutos, como se vê no esquema acima. Nessa progressão aritmética de razão 6 temos

$a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r \Rightarrow 129 = 3 + (n - 1) \,.\, 6 \Leftrightarrow n = 22$

Observe que o intervalo entre as interseções também poderia ser de 2 minutos e, neste caso, teríamos 43 inserções.

Resposta: D

4. **(UNESC-SC)** – Sobre Progressão Aritmética, propriedades e generalidades, analise as afirmações a seguir:

I. Existem 81 múltiplos de 11 entre 100 e 1000.
II. Sabendo que 1, (3 + x) e (17 – 4x) são termos consecutivos de uma P.A., o valor de **x** é 2.
III. O quarto termo da P.A. (a – b, 5a – 2b, …) é $a_4 = 13a - 4b$.
IV. Dada a P.A.(82, 76, 70,…), o número 22 ocupa a 11ª posição.

É(são) correta(s):

a) apenas III. b) somente II e III.
c) somente I e IV. d) I – II – III – IV.
e) apenas II.

Resolução

I. São múltiplos de 11 entre 100 e 1000:

110, 121, 132, 143, …, 990, num total de 81 números, pois

$990 = 110 + (n - 1) \cdot 11 \Leftrightarrow n = 81$

II. $3 + x = \dfrac{1 + (17 - 4x)}{2} \Leftrightarrow 6 + 2x = 18 - 4x \Leftrightarrow x = 2$

III. A razão da P.A.$(a - b; 5a - 2b; \ldots)$ é

$r = (5a - 2b) - (a - b) = 4a - b$. Seu quarto termo é

$a_4 = (a - b) + 3(4a - b) = 13a - 4b$

IV) Na P.A. (82, 76, 70,…) tem-se $a_n = 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow 82 + (n - 1) \cdot (-6) = 22 \Leftrightarrow 6n = 66 \Leftrightarrow n = 11$

Todas estão corretas.

Resposta: D

Módulo 13 – Propriedade e Soma dos Termos de uma PA

5. **(UFMT)** – Em uma clínica ortodôntica são atendidos 30 clientes diários de segunda a sexta-feira. Para redimensionar a estrutura física, a clínica passará a atender da seguinte maneira: dois clientes no primeiro dia do mês, quatro no segundo, seis no terceiro, oito no quarto e assim sucessivamente. Considerando que essa clínica atende 20 dias por mês, o número de clientes atendidos, em um mês, será reduzido em

a) 35% b) 30% c) 40% d) 25% e) 70%

Resolução

O número de clientes atendidos na clínica são os termo da PA(2;4;6;8; …).

No vigésimo dia útil são atendidos

$a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot 2 = 2 + 19 \cdot 2 = 40$ e nos 20 dias serão

atendidos $S_{20} = \dfrac{(2 + 40) \cdot 20}{2} = 420$ clientes.

Considerando que a clínica trabalha de segunda a sexta e atende 30 clientes por dia, em 20 dias atende $20 \cdot 30 = 600$ clientes.

Haverá uma redução de $\dfrac{600 - 420}{600} = 0{,}30 = 30\%$

Resposta: B

6. **(UFC)** – Seja f uma função polinomial de primeiro grau, crescente e tal que $f(f(x)) = 9x + 8$, para todo x real. Sabendo-se que 2, 5, 8, …, 44 é uma progressão aritmética de razão 3, o valor numérico de $f(2) + f(5) + f(8) + \ldots + f(44)$ é:

a) 1020 b) 1065 c) 1110 d) 1185 e) 1260

Resolução

Se f é uma função do primeiro grau então é do tipo $f(x) = ax + b$.

Como $f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b =$

$= a^2x + (ab + b) = 9x + 8, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ ab + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2, \text{ pois f é crescente} \end{cases}$$

Assim, $f(x) = 3x + 2$ e $f(2) + f(5) + f(8) + \ldots + f(44) =$

$= 8 + 17 + 26 + \ldots + 134 = \dfrac{(8 + 134) \cdot 15}{2} = 1065$, pois a sequência (2; 5; 8; …; 44) possui 15 termos.

Resposta: B

Módulo 14 – Progressões Geométricas

7. **(UFJF)** – Uma progressão aritmética e uma geométrica têm o número 2 como primeiro termo. Seus quintos termos também coincidem e a razão da PG é 2. Sendo assim, a razão da PA é:

a) 8 b) 6 c) $\dfrac{32}{5}$ d) 4 e) $\dfrac{15}{2}$

Resolução

Sendo $(2; 2 + r; 2 + 2r; 2 + 3r; 2 + 4r; \ldots)$ a progressão aritmética e $(2; 4; 8; 16; 32; \ldots)$ a progressão geométrica, e tendo todas o mesmo quinto termo, então $2 + 4r = 32 \Rightarrow r = \dfrac{15}{2}$

Resposta: E

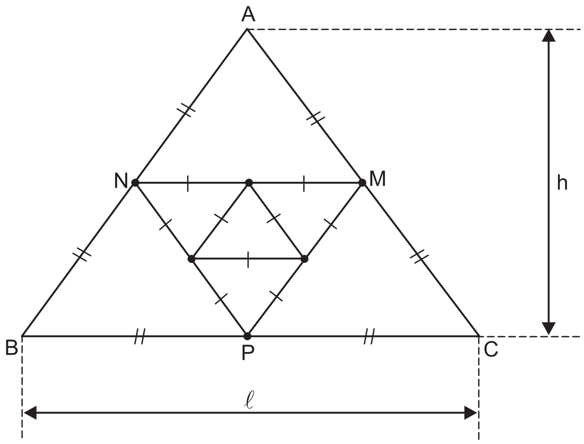
8. **(UNESP)** – Considere um triângulo equilátero T_1 de área $16\sqrt{3}\ cm^2$. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo equilátero T_2, que tem os pontos médios dos lados de T_1 como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo equilátero T_3, e assim por diante, indefinidamente.

Determine:

a) as medidas do lado e da altura do triângulo T_1, em centímetros;

b) as áreas dos triângulos T_2 e T_7, em cm^2.

Resolução



a) O lado ℓ e a altura h do triângulo equilátero T_1, representado na figura por ABC, em cm, são tais que:

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ e } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 8 \text{ e } h = 4\sqrt{3}$$

b) As áreas dos triângulos T_1, T_2, T_3, …. formam uma progressão geométrica de primeiro termo

$AT_1 = 16\sqrt{3}$ cm^2 e razão

$$\frac{A_{T_2}}{A_{T_1}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Desta forma,

$$A_{T_2} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4} = 4\sqrt{3}\text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$A_{T_7} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 16\sqrt{3}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{\sqrt{3}}{256}\text{ cm}^2$$

Respostas: a) 8 cm e $4\sqrt{3}$ cm

b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e $\frac{\sqrt{3}}{256}$ cm^2

Módulo 15 – Progressão Geométrica: Propriedades e Fórmula do Produto

9. Se da sequência (11; 18; 27; …) subtrairmos os respectivos termos de uma progressão aritmética de primeiro termo e razão iguais obteremos uma progressão geométrica de termos estritamente positivos. O quinto termo dessa sequência é:

a) $\frac{109}{2}$ b) 55 c) $\frac{111}{2}$ d) 56 e) $\frac{113}{2}$

Resolução

Sendo (x; 2x; 3x; …) a tal progressão aritmética, a progressão geométrica será (11 – x; 18 – 2x; 27 – 3x; …)

Dessa forma, $(18 - 2x)^2 = (11 - x) \cdot (27 - 3x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 324 - 72x + 4x^2 = 297 - 33x - 27x + 3x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 9$

Para x = 3 a P.A. é (3; 6; 9; …) e a P.G. é (8; 12; 18; …). O quinto termo da sequência dada e a soma dos quintos termos da P.A. e da P.G., portanto $a_5 = \frac{81}{2} + 15 = \frac{111}{2}$

Para x = 9 os termos da P.G. não seriam estritamente positivos.

Resposta: C

10. Se a sequência (a; b; a + b) é uma progressão aritmética e a sequência (3^a; 729; 3^b) é uma progressão geométrica, o valor de **a** é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução

Da P.A.(a; b; a + b) temos

$$b = \frac{a + (a + b)}{2} \Rightarrow b = 2a \quad (I)$$

Da P.G.(3^a; 729; 3b) temos

$3^a \cdot 3^b = 729^2 \Leftrightarrow 3^{a+b} = (36)^2 \Leftrightarrow 3^{a+b} = 3^{12} \Leftrightarrow a + b = 12$ (II)

De (I) e (II) temos a = 4 e b = 8

Resposta: D

11. Se o produto dos sete primeiros termos de uma progressão geométrica é 128, o quarto termo vale:

a) 2 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Resolução

Atenção, a intenção deste exercício é mostrar que se pode trabalhar com o produto dos termos da P.G. sem usar a fórmula.

$P_7 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot \ldots \cdot a_1q^6 =$

$= a_1^7 \cdot q^{1+2+3+\ldots+6} = a_1^7 \cdot q^{21} = (a_1q^3)^7 = 128 \Rightarrow a_1q^3 = 2$, e, portanto, $a_4 = 2$.

Resposta: A

Módulo 16 – Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica e Progressão Harmônica

12. **(FUVEST)** – Sejam a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, números estritamente positivos tais que $\log_2 a_1, \log_2 a_2, \log_2 a_3, \log_2 a_4, \log_2 a_5$, formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$. Se $a_1 = 4$, então o valor da soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ é igual a

a) $24 + \sqrt{2}$ b) $24 + 2\sqrt{2}$ c) $24 + 12\sqrt{2}$

d) $28 + 12\sqrt{2}$ e) $28 + 18\sqrt{2}$

Resolução

Como estão em P.A. de razão $\dfrac{1}{2}$:

$\log_2 a_{i+1} = \log_2 a_i + \dfrac{1}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_{i+1} = a_i \,.\, \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1, \ldots, a_5$ formam uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_5 = a_1 \dfrac{(1 - (\sqrt{2})^5)}{1 - \sqrt{2}} =$

$= 4 \,.\, \dfrac{1 - 4\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \,.\, \dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 4 \,.\, \dfrac{(-7 - 3\sqrt{2})}{1 - 2} = 28 + 12\sqrt{2}$

Resposta: D

13. **(UFSCar)** – O conjunto-solução da equação

$\text{sen}\left(\dfrac{8\pi}{9} + \dfrac{8\pi}{27} + \dfrac{8\pi}{81} \ldots\right) = \cos x$, com $x \in [0, 2\pi[$, é

a) $\left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ b) $\left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$ c) $\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$ e) $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução

Os números $\dfrac{8\pi}{9}; \dfrac{8\pi}{27}; \dfrac{8\pi}{81}; \ldots$ são termos de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo

$\dfrac{8\pi}{9}$ e razão $\dfrac{1}{3}$ e, portanto, $\dfrac{8\pi}{9} + \dfrac{8\pi}{27} + \dfrac{8\pi}{81} + \ldots =$

$= \dfrac{\dfrac{8\pi}{9}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{4\pi}{3}$

Assim sendo, para $x \in [0; 2\pi]$, temos:

$\text{sen}\left(\dfrac{8\pi}{9} + \dfrac{8\pi}{27} + \dfrac{8\pi}{81} + \ldots\right) = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3} = \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$

Resposta: B

Módulo 17 – Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica e Progressão Harmônica

14. **(FGV)** – Duas sequências:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots)$ são tais que:

$$\begin{cases} y_1 = 1; y_2 = 4 \\ x_n = \dfrac{y_n}{y_{n+1}} \\ \text{A sequência } (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \text{ é uma progressão} \\ \text{geométrica de razão 2} \end{cases}$$

Escreva os 6 primeiros termos da sequência $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots)$.

Resolução

I) Se $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ e $x_n = \dfrac{y_n}{y_{n+1}}$ então

$x_1 = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{4}$

II) Se $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ é uma P.G. de razão 2 e $x_1 = \dfrac{1}{4}$ então $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 4, \ldots$

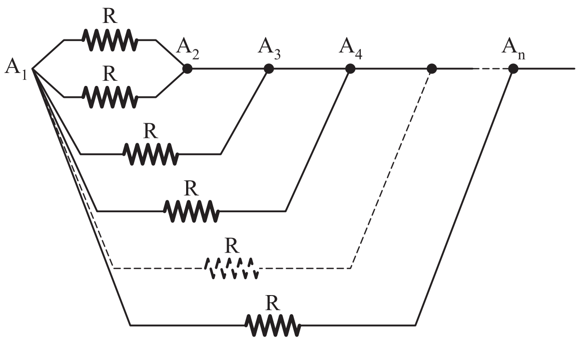
III) $x_n = \dfrac{y_n}{y_{n+1}} \Leftrightarrow y_{n+1} = \dfrac{y_n}{x_n}$ e, portanto:

$y_3 = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}} = 8$; $y_4 = \dfrac{y_3}{x_3} = \dfrac{8}{1} = 8$;

$y_5 = \dfrac{y_4}{x_4} = \dfrac{8}{2} = 4$ e $y_6 = \dfrac{y_5}{x_5} = \dfrac{4}{4} = 1$

Resposta: (1; 4; 8; 8; 4; 1; …)

15. Lembrando que na associação de dois resistores em parelelo, a resistência resultante e o produto dividido pela soma dos resistores, mostre que na configuração abaixo a resistência total R_{1n} entre os pontos A_1 e A_n com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, são termos de uma progressão harmônica.



Resolução

$R_{12} = \dfrac{R \,.\, R}{R + R} = \dfrac{R}{2}$

$R_{13} = \dfrac{R_{12} \,.\, R}{R_{12} + R} = \dfrac{\dfrac{R}{2} \,.\, R}{\dfrac{R}{2} + R} = \dfrac{R}{3}$

$$R_{14} = \frac{R_{13} \, . \, R}{R_{13} + R} = \frac{\frac{R}{2} \, . \, R}{\frac{R}{2} + R} = \frac{R}{4}$$

de forma análoga

$$R_{1n} = \frac{R_{1(n-1)} \, . \, R}{R_{1(n-1)} + R} = \frac{\frac{R}{n-1} \, . \, R}{\frac{R}{n-1} + R} = \frac{R}{n}$$

A sequência $\left(\frac{R}{2}; \frac{R}{3}; \frac{R}{4}; \; \dots \frac{R}{n} \right)$ é uma progressão harmônica, pois $\left(\frac{2}{R}; \frac{3}{R}; \frac{4}{R}; \; \dots \frac{n}{R} \right)$ é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{R}$.

Módulo 18 – Matrizes: Definições e Operações

16. **(FGV)** – Na matriz indicada, a soma dos elementos de uma linha qualquer é igual à soma dos elementos de uma coluna qualquer.

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

O menor número de elementos dessa matriz que devem ser modificados para que todas as seis somas (somas dos elementos das três linhas e das 3 colunas) sejam diferentes umas das outras é

a) 0. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resolução

A troca de um elemento altera as somas dos elementos das filas a que ele pertence, mantendo-as iguais entre si, porém diferentes das demais.

A troca de dois elementos (em filas e colunas diferentes) geram três pares do tipo (linha, coluna) cuja soma dos elementos da linha e da coluna são iguais, porém diferentes das demais.

Para diferenciar a soma dos elementos da linha e da coluna de cada par, há a necessidade de trocar mais dois elementos. No total, o número mínimo de elementos a serem trocados é 4.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boxed{10} & 9 & 2 \\ 8 & \boxed{12} & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{10} & 9 & 2 \\ 8 & \boxed{12} & 6 \\ 3 & \boxed{14} & 7 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \boxed{10} & 9 & 2 \\ 8 & \boxed{12} & 6 \\ \boxed{16} & \boxed{14} & 7 \end{bmatrix},$$

Da matriz A para B, foram trocados dois elementos e as somas na linha 1 e na coluna 1, por exemplo, são iguais.

Da matriz A para C, foram trocados três elementos e as somas dos elementos na linha 1 e coluna 1 continuam iguais.

Da matriz A para D, foram trocados quatro elementos e as somas em todas as linhas e colunas são diferentes.

17. A matriz $A(a_{ij})_{2\times3}$, definida por $a_{ij} = 2i - j$ e a matriz $B = (b_{ij})_{3\times2}$, definida por $b_{ij} = i \, . \, j$ são tais que $C = A + B^t$. O elemento da segunda linha e segunda coluna de C vale:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Resolução

Se $A = (a_{ij})_{2\times3}$ e $a_{ij} = 2i - j$, então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $B = (b_{ij})_{3\times2}$ e $b_{ij} = i \, . \, j$, então

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$C = A + B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$C_{22} = 6$

Resposta: B

18. **(UDESC)** – Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & x & 2y-3 \\ 2 & x^2-2y+1 & -2y \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$ determinar os valores numéricos de x e y tais que seja verdadeira a igualdade $A^t = A$.

Resolução

Se $A^t = A$, então A é simétrica. Portanto,

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y - 3 = -1 \\ -2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = 1$$

Módulo 11 – Progressões Aritméticas

1. Escrever os quatro primeiros termos das progressões aritméticas definidas por:

a) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

b) $a_n = -3 + (n - 1) \cdot 2; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Para a P.A. (3, 9, 15, ...) o 15º termo é:
a) 57 b) 73 c) 85 d) 87 e) 93

3. **(AVARÉ)** – Na progressão aritmética em que $a_3 = 7$ e $a_{20} = -27$, o valor da razão é:
a) 3 b) – 3 c) 2 d) – 2 e) – 4

4. **(PUC)** – Sendo 47 o 17º termo de uma P.A. e 2,75 a razão, o valor do primeiro termo é:
a) – 1 b) 1 c) 2 d) 0 e) 3

5. **(ULBRA)** – O primeiro termo de uma progressão aritmética em que o sétimo termo é $7\sqrt{3}$ e a razão é $2\sqrt{3}$, é:
a) $-5\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $7\sqrt{3}$ e) zero

6. Em uma progressão aritmética $a_3 + a_7 = 28$ e $a_{10} = 29$. Nessas condições, a_4 é igual a:
a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

7. **(U.E. FEIRA DE SANTANA)** – Numa progressão aritmética em que a soma do 7º e 12º termos é igual a 52 e a soma do 5º e 23º termos é igual a 70, o primeiro termo é
a) 2 b) 5 c) 7 d) 9 e) 23

8. Interpolando-se 7 termos aritméticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma progressão aritmética cujo quinto termo vale
a) 45 b) 52 c) 54 d) 55 e) 57

9. **(F.F. RECIFE)** – Se os ângulos internos de um triângulo estão em P.A. e o menor deles é a metade do maior, então o maior mede:
a) 60° b) 80° c) 70° d) 50° e) 40°

10. **(AFA)** – Os ângulos internos de um pentágono são os cinco primeiros termos de uma progressão aritmética. O 3º termo, em graus, dessa progressão vale:
a) 54 b) 108 c) 162 d) 216 e) 184

11. **(MACKENZIE)** – O enésimo termo da P.A. 1,87; 3,14; 4,41; ... é:
a) $1{,}27\,n^2 + 0{,}6$ b) $1{,}27\,n + 0{,}6$ c) $1{,}27 + 0{,}6\,n$
d) $1{,}27 - 0{,}6\,n$ e) $1{,}27 + n$

12. **(CEFET-BA)** – Uma montadora de automóveis produz uma quantidade fixa de 5000 carros ao mês e outra, no mesmo tempo, produz 600, para atender ao mercado interno. Em janeiro de 1995 ambas as montadoras farão um contrato de exportação. Mensalmente, a primeira e a segunda montadoras deverão aumentar, respectivamente, em 100 e 200 unidades. O número de meses necessários para que as montadoras produzam a mesma quantidade de carros é:
a) 44 b) 45 c) 48 d) 50 e) 54

Módulo 12 – Propriedade e Soma dos Termos de uma PA

1. **(MACKENZIE)** – O valor de r para que a sequência (r – 1, 3r – 1, r – 3, ...) seja uma P.A. é:
a) –1 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$ e) 2

2. **(F.F. RECIFE)** – A sequência (3y, y + 1, 5...) é uma progressão aritmética. Sua razão é:
a) – 3 b) 3 c) 5 d) – 5 e) 7

3. **(PUC)** – Os números que exprimem o lado, a diagonal e a área de um quadrado estão em P.A., nessa ordem. O lado do quadrado mede:
a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 1$ c) $1 + \sqrt{2}$
d) 4 e) $2\sqrt{2}$

4. **(U.F. VIÇOSA)** – Os números reais, **a**, **b** e **c** estão em progressão aritmética de razão **r** e **a < b < c**. O valor de **a – 2b + c** é:
a) r b) – r c) a d) 0 e) b

5. **(FATEC)** – Seja a sequência M = (3x; 2x + 1; x + 3; ...) onde $x \in \mathbb{R}$. É verdade que:
a) M é uma Progressão Aritmética qualquer que seja x.
b) Não existe x que torne M uma Progressão Aritmética.
c) M é uma Progressão Aritmética para x = –1.
d) M é uma Progressão Aritmética para x = 0.
e) M é uma Progressão Aritmética de razão 2.

6. **(PUC)** – Três números positivos estão em progressão aritmética. A soma deles é 12 e o produto 18. O termo do meio é:
a) 2 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

7. **(U. CAXIAS DO SUL)** – Sabendo que a sequência $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1...)$ é uma P.A., então o décimo termo da P.A. $(5 - 3x, x + 7, ...)$ é:

a) 62 b) 40 c) 25 d) 89 e) 56

8. **(UFSC)** – Numa P.A. de n termos, a soma do primeiro com o de ordem n é 120. A soma do sexto termo com o de ordem n – 5 é:

a) 120 b) 60n c) 90 d) $\dfrac{120\,(n+1)}{n}$ e) 120n

9. **(UNIMEP)** – O valor de x na igualdade:

$3^x = 3^1.3^2.3^3\ldots3^{50}$ é:

a) 50 b) 150 c) 2550 d) 2250 e) 1275

10. **(U.F. OURO PRETO)** – A soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por:

a) n^2 b) 2n c) $\dfrac{n}{2}$ d) 2n – 1 e) n^3

11. **(UNESP)** – Em 05 de junho de 2004, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez, foi:

a) 15. b) 16. c) 17. d) 18. e) 26.

Módulo 13 – Propriedade e Soma dos Termos de uma PA

1. **(UF. PELOTAS)** – Numa Olimpíada de Matemática, envolvendo alunos de 2º grau, foi proposto o seguinte problema: "Em certa Progressão Aritmética, a soma dos termos de ordem ímpar é 140 e a soma dos termos de ordem par é 161; a soma de dois termos equidistantes dos extremos é 43. Calcule o número de termos dessa Progressão Aritmética."

2. **(UNICID)** – A soma dos 11 primeiros termos de uma progressão aritmética é 1474. O sexto termo dessa progressão é:

a) 126 b) 130 c) 134 d) 138 e) 142

3. **(FATES)** – A soma dos múltiplos de 5 entre 100 e 2000, isto é, 105 + 110 + 115 + ... + 1995, vale:

a) 5870; b) 12985; c) 2100 . 399;
d) 2100 . 379; e) 1050 . 379.

4. **(UNIP)** – A soma dos 11 primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é 176. Se $a_{11} = a_1 + 30$ então, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

a) $a_n = 3n - 2$ b) $a_n = 2n - 3$ c) $a_n = n + 3$
d) $a_n = 2n + 3$ e) $a_n = 3n + 2$

5. **(F. IBERO AMERICANA)** – A soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 100 e 200 é

a) 5000 b) 3950 c) 4000 d) 4950 e) 4500

6. **(CEFET)** – A soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 100 e 250 é igual a:

a) 3325 b) 3850 c) 3500 d) 3825 e) 3675

7. **(VUNESP-PR)** – Seja uma progressão aritmética (P.A.) de 1º termo igual a 1 e razão x. O valor de x para que a soma dos termos dessa P.A. seja 176 e o último termo 31 é

a) $x = -3$ b) $x = -\dfrac{1}{3}$ c) $x = \dfrac{1}{3}$
d) $x = 3$ e) $x = 11$

8. Um cinema possui 20 poltronas na primeira fila, 24 poltronas na segunda fila, 28 na terceira fila, 32 na quarta fila e as demais fileiras se compõem na mesma sequência. Quantas filas são necessárias para a casa ter 800 lugares?

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

9. **(FAMECA)** – Em uma progressão aritmética, a soma dos **n** primeiros termos é dada por $\mathbf{S_n = 2n^2 + 3n}$. A razão da progressão é:

a) 5 b) 14 c) 9 d) 4 e) 2

10. **(U.E. PONTA GROSSA)** – A soma dos termos de uma P.A. é dada por $\mathbf{S_n = n^2 - n, n = 1, 2, 3, ...}$

Então o 10º termo da P.A. vale:

a) 18 b) 90 c) 8 d) 100 e) 9

11. A soma dos **n** primeiros termos de uma P.A. é $\mathbf{n^2 + 4n}$. Então, o termo geral desta P.A. é:

a) 5 + 2n b) 2n + 3 c) n + 4
d) n + 6 e) 7 + 3n

12. **(MACKENZIE)** – Se as dimensões de um paralelepípedo reto retângulo de volume 15 estão em progressão aritmética e a maior delas é 3, a soma dessas dimensões é

a) $\dfrac{25}{8}$ b) $\dfrac{19}{6}$ c) $\dfrac{9}{2}$ d) $\dfrac{15}{2}$ e) $\dfrac{21}{4}$

13. **(MACKENZIE)** – A soma de todos os termos, que são menores que 12, da P.A. $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{4}...\right)$ é

a) 120 b) 144 c) 150 d) 160 e) 140

14. **(PUC)** – Sobre as casas de um grande tabuleiro de xadrez devem ser colocados grãos de arroz, em quantidades que obedeçam a uma lei de formação sequencial, conforme é mostrado na figura seguinte.

3	6	9	12	15	18	21	24
48	45	42	39	36	33	30	27
51	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	?

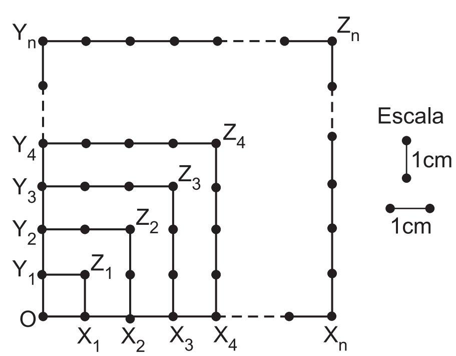
A quantidade de grãos de arroz que devem ser colocados na casa em que se encontra o ponto de interrogação é um número compreendido entre

a) 170 e 175 b) 175 e 180 c) 180 e 185
d) 185 e 190 e) 190 e 195

15. **(PUC)** – Considere as sequências (1, 4, 7, 10, …, 67) e (8, 12, 16, 20, …, 104). O número de termos comuns a essas duas progressões é

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

16. **(UNESP)** – Considere a figura, onde estão sobrepostos os quadrados $OX_1Z_1Y_1$, $OX_2Z_2Y_2$, $OX_3Z_3Y_3$, $OX_4Z_4Y_4$,..., $OX_nZ_nY_n$,..., $n \geq 1$, formados por pequenos segmentos medindo 1 cm cada um. Sejam A_n e P_n a área e o perímetro, respectivamente, do n-ésimo quadrado.



a) Mostre que a sequência (P_1, P_2, ..., P_n,...) é uma progressão aritmética, determinando seu termo geral, em função de n, e sua razão.

b) Considere a sequência (B_1, B_2,..., B_n,...), definida por $B_n = \dfrac{A_n}{P_n}$. Calcule B_1, B_2 e B_3. Calcule, também, a soma dos 40 primeiros termos dessa sequência, isto é, $B_1 + B_2 + ... + B_{40}$.

17. **(UFMT)** – Em uma clínica ortodôntica são atendidos 30 clientes diários de segunda a sexta-feira. Para redimensionar a estrutura física, a clínica passará a atender da seguinte maneira: dois clientes no primeiro dia do mês, quatro no segundo, seis no terceiro, oito no quarto e assim sucessivamente. Considerando que essa clínica atende 20 dias por mês, o número de clientes atendidos, em um mês, será reduzido em

a) 35% b) 30% c) 40% d) 25% e) 70%

Módulo 14 – Progressões Geométricas

1. A razão da P.G. $\dfrac{5-\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{7-6\sqrt{2}}{4}$, ... é:

a) $3-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+3$ c) $1+\sqrt{2}$
d) $1-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}-1$

2. O 21º termo da sequência (1; 2; 4; 8; 16; 32; ...) é um número:

a) menor que 100 b) entre 100 e 1000
c) entre 1 000 e 100 000 d) entre 100 000 e 1 000 000
e) entre 1 000 000 e 1 050 000

3. **(PUCC)** – Dada a progressão geométrica 1, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, ... , determine seu 11º termo.

4. Numa cultura de bactérias o número de indivíduos triplica a cada hora. Se, inicialmente, o número de indivíduos é igual a 9, ao final de 12 horas será igual a

a) 3^9 b) 3^{10} c) 3^{11} d) 3^{13} e) 3^{14}

5. **(CEFET-PR)** – Em uma progressão geométrica, o quinto termo é 24 e o oitavo termo é 3. A razão entre o sexto termo e o décimo é:

a) 4 b) 8 c) 1/8 d) 16 e) 1/16

6. Seja T_n o termo geral de uma sequência de triângulos equiláteros, com $n \in \mathbb{N}^*$. O primeiro termo T_1 tem lado de medida x. Cada termo tem como medida dos lados a metade da medida dos lados do termo anterior. Dessa forma, a medida da altura do triângulo T_3 é

a) $\dfrac{x}{4}$ b) $\sqrt{3}\,x$ c) $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{8}$

7. **(FUVEST)** – A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se v for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0,7)^7v$ b) $(0,3)^7v$ c) $(0,7)^8v$
d) $(0,3)^8v$ e) $(0,3)^9v$

8. O número de termos da P.G. $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, ..., 729\right)$ é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 81 e) 4

9. Inserindo 5 meios positivos entre 4 e 2916, nesta ordem, obtém-se uma P.G. de razão:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

10. Determine a razão da progressão geométrica, onde $a_4 + a_6 = 160$ e $a_5 + a_7 = 320$.

11. Em uma P.G. de cinco termos, a soma dos dois primeiros é 32 e a soma dos dois últimos é 864. O terceiro termo da P.G. é:
a) 72 b) 54 c) 84 d) 27 e) 81

12. **(UNESP)** – No início de janeiro de 2004, Fábio montou uma página na internet sobre questões de vestibulares. No ano de 2004, houve 756 visitas à página. Supondo que o número de visitas à página, durante o ano, dobrou a cada bimestre, o número de visitas à página de Fábio no primeiro bimestre de 2004 foi
a) 36. b) 24. c) 18. d) 16. e) 12.

13. **(UNESP)** – Considere um triângulo equilátero T_1 de área $16\sqrt{3}$ cm^2. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo equilátero T_2, que tem os pontos médios dos lados de T_1 como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo equilátero T_3, e assim por diante, indefinidamente.
Determine:
a) as medidas do lado e da altura do triângulo T_1, em centímetros;
b) as áreas dos triângulos T_2 e T_7, em cm^2.

Módulo 15 – Progressão Geométrica: Propriedades e Fórmula do Produto

1. O segundo termo de uma P.G. crescente tal que $a_1 = 8$ e $a_3 = 18$ é igual a:
a) 10 b) 11 c) 12 d) 14 e) 15

2. **(PUC)** – Se a sequência (4x, 2x + 1, x – 1, ...) é uma P.G., então o valor de x é:
a) $-\frac{1}{8}$ b) – 8 c) – 1 d) 8 e) $\frac{1}{8}$

3. **(UNIV.CAXIAS DO SUL)** – Sabendo que a sucessão (x – 2, x + 2, 3x – 2, ...) é uma P.G. crescente, então o quarto termo é
a) 27 b) 64 c) 32 d) 16 e) 54

4. A sequência $(2x + 5, x + 1, \frac{x}{2}, ...)$, com $x \in \mathbb{R}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo desta sequência é
a) 2 b) 3^{-10} c) 3 d) 3^{10} e) 3^{12}

5. **(FAAP)** – Dados os números 1, 3 e 4, nesta ordem, determinar o número que se deve somar a cada um deles para que se tenha uma progressão geométrica.

6. Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Então, a medida da base vale:
a) 4 b) 8 c) 16 d) 1 e) 2

7. As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem. A área do quadrado será:
a) 256 b) 64 c) 16 d) 243 e) 729

8. Calcular o produto dos 21 primeiros termos da P.G. (2, 6, 18, ...).

9. Determinar o produto dos **n** primeiros termos da sequência $(n, n^2, n^3, n^4, ...)$ $(n > 0)$.

10. **(FUVEST)** – Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a
a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Módulo 16 – Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica e Progressão Harmônica

1. A soma dos 20 primeiros termos da progressão (1, 2, 4, 8, ...) é
a) $16^5 - 1$ b) 2^{20} c) 524288 d) 2^{19} e) $4^{10} + 1$

2. A soma dos n primeiros termos da P.G.$(2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3^3; 2^3 \cdot 3^4; ...)$ é:

a) $\frac{18}{5} \cdot (6^n - 1)$ b) $6^n \cdot \frac{18}{5}$ c) $6^{n-1} \cdot \frac{18}{5}$

d) $\frac{108^n}{5}$ 1 e) $\frac{18}{5} \cdot 6^{n+1}$

3. Suponhamos que uma determinada doença da cultura de milho se propague da seguinte forma: uma planta doente contamina outras três plantas sadias no período de uma semana e morre. Por sua vez, essas plantas contaminadas contaminam outras de igual forma. Se ocorrer o aparecimento de uma planta contaminada em uma cultura, o número de plantas contaminadas (incluindo as plantas que morrerem), após quatro semanas, será de:
a) 121 b) 91 c) 122 d) 243 e) 242

4. Quantos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$ devemos somar para que a soma seja $\frac{1023}{512}$?

5. **(F.I.A.)** – Numa progressão geométrica, tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. A soma dos oito primeiros termos é
a) – 1700 b) – 850 c) 850 d) 1700 e) 750

6. **(AFA)** – Numa progressão geométrica, com n termos, $a_1 = 2$, $a_n = 432$ e $S_n = 518$, tem-se
a) $q < n$ b) $q = n$ c) $q > n$ d) $q < a_1$ e) $q = a_1$

7. Uma bola é abandonada de uma altura de 10 metros e, cada vez que bate no chão, ela sobe exatamente a metade da altura de onde se encontrava anteriormente. Calcule a distância percorrida por essa bola até chocar-se pela nona vez com o solo.

8. **(UEMT)** – A soma dos termos da progressão geométrica $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{9}\right)$ é:

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{9}{20}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{20}$ e) $\frac{3}{5}$

9. A série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{10^n}$ converge para:

a) 2 b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{2}{10}$ d) $\frac{30}{9}$ e) $\frac{20}{9}$

10. Na progressão geométrica, de termos não nulos, (a_1; a_2; a_3; ...) onde o primeiro termo é igual à soma de todos os demais, o valor da razão é:

a) –1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

11. **(U.E.FEIRA DE SANTANA)** – A solução da equação

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + ... = 60$ é

a) 15 b) 40 c) 120 d) 600 e) 2400

12. **(PUC)** – Se x é um número real positivo menor que 1 e se vale a igualdade $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \frac{3}{2}$, então o valor de x é:

a) 0,1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{10}$ d) 3 e) $\frac{1}{3}$

13. **(UFRN)** – Se a soma dos termos da P.G. infinita 3x; 2x; $\frac{4x}{3}$; ... é igual a 288, o valor de x é:

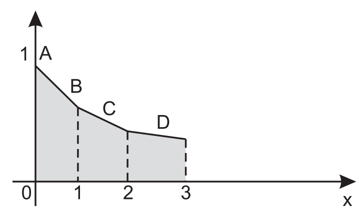
a) 12 b) 14 c) 16 d) 24 e) 32

14. **(MACKENZIE)** – Se o produto

$\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}} \ldots$ tem infinitos fatores, cujos expoentes estão em progressão geométrica, seu valor é

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$

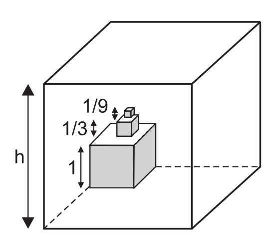
15. **(FGV)** – No gráfico seguinte estão representados os três primeiros trapézios de uma sequência infinita. Pelos vértices A, B, C, D ... desses trapézios passa o gráfico de uma função exponencial $f(x) = a^x$. Se a área total dos infinitos trapézios dessa sequência é $\frac{5}{6}$, então



a) $f(x) = 3^x$.
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
d) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
e) $f(x) = (-2)^x$.

16. **(UNICAMP)** – Suponha que, em uma prova, um aluno gaste para resolver cada questão, a partir da segunda, o dobro de tempo gasto para resolver a questão anterior. Suponha ainda que, para resolver todas as questões, exceto a última, ele tenha gasto 63,5 minutos e para resolver todas as questões, exceto as duas últimas, ele tenha gasto 31,5 minutos. Calcule:
a) O número total de questões da referida prova.
b) O tempo necessário para que aquele aluno resolva todas as questões da prova.

17. **(UNIFESP)** – No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, e assim por diante, conforme mostra a figura.



O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é:

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{7}{3}$ d) 2 e) $\frac{3}{2}$

Módulo 17 – Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica e Progressão Harmônica

1. **(MACK)** – Se f (n), $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência definida por:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = f(n) + 3, \text{ então } f(200) \text{ é:} \end{cases}$$

a) 597 b) 600 c) 601 d) 604 e) 607

2. **(VUNESP)** – Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156kg. recolhe-se a um spa onde se anunciam perdas de peso de até 2,5kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) Encontre uma fórmula que espresse o peso mínimo, P_n, que essa pessoa poderá atingir após n semanas.

b) Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no spa para sair de lá com menos de 120 Kg de peso.

3. **(FUVEST)** – Seja A o conjunto dos 1993 primeiros números inteiros estritamente positivos.

a) Quantos múltiplos inteiros de 15 pertencem ao conjunto A?

b) Quantos números de A não são múltiplos inteiros nem de 3 nem de 5?

4. **(ITA)** – A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão q é 12. Se ambas as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $q = r^2$, podemos afirmar que a soma dos quatro primeiros termos da progressão geométrica será:

a) $\dfrac{623}{11}$ b) $\dfrac{129}{32}$ c) $\dfrac{35}{3}$ d) $\dfrac{765}{64}$ e) 13

5. Interpolando **p** termos, $p \in \mathbb{N}$ e $p > 1$, entre os números **1** e $\mathbf{p^2}$, obtém-se uma P.A. de razão:

a) $\dfrac{p^2-1}{p+2}$ b) $\dfrac{p^2+1}{p-1}$ c) $\sqrt{p}+1$

d) $p+2$ e) $p-1$

6. Dada uma P.A. onde $a_p = a$, $a_q = b$, com $q > p$, a_{p+q} vale:

a) $\dfrac{bq-pa}{q-p}$ b) $a+b$ c) $\dfrac{b-a}{q-p}$

d) $\dfrac{bq+pa}{q-p}$ e) $\dfrac{q-p}{b-a}$

7. **(GV)** – Quantos termos devemos tomar na progressão aritmética – 7, – 3, …a fim de que a soma valha 3150?

a) 40 b) 39 c) 43 d) 41 e) 42

8. **(UF. OURO PRETO)** – A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = \dfrac{3n^2+n}{2}$.

Então, a soma do sexto termo com o sétimo dessa progressão é igual a:

a) 37 b) 39 c) 40 d) 41 e) 43

9. **(VUNESP)** – Os números $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{3}$; x formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. Então x vale

a) 9 b) 3 c) $\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt{3}$

10. **(VUNESP)** – Sejam a, b e c três números reais estritamente positivos e tais que $a < b + c$. Se a, b, c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, prove que:

a) $q^2 + q - 1 > 0$; b) $q > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

11. **(UNICAMP)** – Dada uma progressão geométrica cujos termos satisfazem as relações:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 5 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 10, \text{ determine a razão q.} \end{cases}$$

12. **(UEL)** – Uma progressão aritmética de n termos tem razão igual a 3. Se retirarmos os termos de ordem impar, os de ordem par formarão uma progressão

a) aritmética de razão 2 d) geométrica de razão 3

b) aritmética de razão 6 e) geométrica de razão 6

c) aritmética de razão 9

13. **(F.F. RECIFE)** – A soma dos termos de ordem par de uma P.G. infinita é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 20. O 3º termo da progressão é:

a) 13/4 b) 15/4 c) 11/3 d) 12/5 e) 10/3

14. **(VUNESP)** – A sequência de números reais a, b, c, d forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é 110; a sequência de números reais a, b, e, f forma, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma d + f é igual a

a) 96 b) 102 c) 120 d) 132 e) 142.

15. **(VUNESP)** – Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, ...)$ uma progressão geométrica de razão $q \neq 0$. Então $(a_1 + q; a_2 + q^2; a_3 + q^3; \ldots; a_n + q^n; ...)$ é uma progressão:

a) aritmética, de razão q. b) aritmética, de razão 2.q.

c) geométrica, de razão $a_1 + q$. d) geométrica, de razão q^2.

e) geométrica, de razão q.

16. **(ITA)** – Seja (a, b, c, d, e, ...) uma progressão geométrica de razão a, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Se a soma dos 5 primeiros termos é igual a $13a + 12$ e x é um número real positivo diferente de 1 tal que

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2}$$

então x é igual a:

a) 3^3 b) 2^3 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

17. **(ITA)** – Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma dos $(n - 1)$ primeiros termos é igual a $2(1 + q)(1 + q^2)$ então

a) $a_1 + q = 16$ b) $a_1 + q = 12$ c) $a_1 + q = 10$
d) $a_1 + q + n = 20$ e) $a_1 + q + n = 11$

18. **(MACKENZIE)** – Sendo $S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ $(0 < x < 1)$, pode-se afirmar que:

a) $S = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$ b) $S = \dfrac{x}{(1 - x)^2}$ c) $S = \dfrac{2}{(2 - x)^2}$

d) $S = \dfrac{1}{(2 - x)^2}$ e) $S = \dfrac{x}{(2 - x)^2}$

19. **(FUVEST)** – Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, respectivamente, 4, – 4 e – 9 aos primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, um dos termos da progressão aritmética é

a) 9 b) 11 c) 12 d) 13 e) 15

20. **(UNESP)** – Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4 cm. Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes. A soma dos perímetros da infinidade de triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original, é igual a

a) 16 cm. b) 18 cm. c) 20 cm.
d) 24 cm. e) 32 cm.

21. **(UFPE)** – Um boato se espalha da seguinte maneira: no primeiro dia, apenas uma pessoa tem conhecimento dele; no segundo, ela conta a outras três pessoas, e, a cada dia que passa, todas as pessoas que sabem do boato contam-no para três novas pessoas. Assim, a sequência formada pelo número de pessoas que sabem do boato, em termos dos dias que passam, é dada por 1, 4, 16, 64, ... Em uma cidade com 1,5 milhão de habitantes, quantos dias serão necessários para que todas as pessoas sejam informadas do boato? (Aproxime sua resposta para o menor inteiro maior ou igual ao valor obtido. Dados: use a aproximação $\log_2(1{,}5 \cdot 10^6) \cong 20{,}52$.)

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

Módulo 18 – Matrizes: Definições e Operações

1. A transposta da matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ com $a_{ij} = 2i + 3j$ é:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. **(UFBA)** – A matriz 2 x 3, com $\begin{cases} aij = 2i - j, \text{ se } i \neq j \\ a_{ij} = i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$, é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. **(UFBA)** – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o valor de $2B - \dfrac{1}{2}A$ é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

4. **(PUC)** – Da equação matricial

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix}$$ resulta:

a) $x = y = z = t = 1$ b) $x = 1, y = 2, z = t = 0$

c) $x = 1, y = 1, z = 3, t = 2$ d) $x = 2, y = 0, z = 2, t = 3$

e) $x = \dfrac{3}{2}, y = 2, z = 0, t = -2$

5. **(U.F.CEARÁ)** – Sejam as matrizes $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $(2 - n) \cdot I + n \cdot P_1 = P_2$, então $n^2 - 2n + 7$ é igual a:

a) 6 b) 7 c) 10 d) 15 e) 16

6. Da equação $X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ concluímos que:

a) $X = I$ b) $X = 0$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. **(PUC)** – Se $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

então, os valores de **a**, **b** e **c**, são respectivamente:

a) 1,1,1 b) 0,0,0 c) 2,2,2 d) 4,4,4 e) 5,5,5

8. Se uma matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$, ela é chamada matriz antissimétrica. Sabe-se que M é antissimétrica e:

$$M = \begin{bmatrix} 4+a & a_{12} & a_{13} \\ a & b+2 & a_{23} \\ b & c & 2c-8 \end{bmatrix}$$

Os termos a_{12}, a_{13} e a_{23} de M, valem respectivamente:

a) – 4, – 2 e 4 b) 4, 2 e – 4 c) 4, – 2 e – 4

d) 2, – 4 e 2 e) 2, 2 e 4

9. **(PUC)** – Se $A = \begin{pmatrix} 25 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$

então a matriz X tal que $A + B - C - X = 0$ é:

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 31 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -31 \\ -6 \\ -17 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

10. **(PUC)** – Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

então a matriz X, de ordem 2, tal que $\dfrac{X - A}{2} = \dfrac{B + X}{3} + C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 30 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$

11. **(MACKENZIE)** – O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. O traço da matriz $A = (a_{i,j})_{3x3}$, tal que $a_{i,j} = i^j$, é:

a) 3^3. b) 2^5. c) 5^2. d) 4^3. e) 2^6.

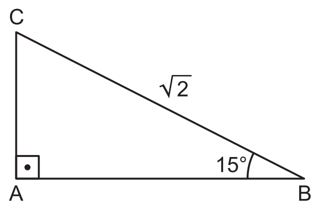
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 11 – Adição e Subtração de Arcos

1. **(ESPM)** – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $\sqrt{2}$ e forma 15° com um de seus catetos. A soma das medidas dos catetos é igual a:

a) 2 b) 3 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} + 1$ e) $\sqrt{3} + 1$

Resolução



I) $\text{sen } 15° = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \sqrt{2}\,\text{sen}(45° - 30°) \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

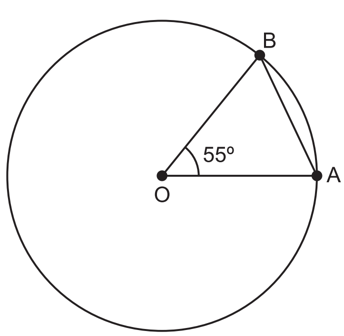
II) $\cos 15° = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{2}\cos(45° - 30°) \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

III) De I e II, temos: $AC + AB = \sqrt{3}$

Resposta: C

2. **(MACKENZIE)** – A circunferência da figura tem raio $\sqrt{2}$ e centro O. Se sen 10° + cos 10° = a, a área do triângulo OAB é igual



a) $a\sqrt{2}$

b) $2a^2$

c) $2a\sqrt{2}$

d) $a^2\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.\,a$

Resolução

Lembrando que

$\text{sen } 55° = \text{sen}(10° + 45°) = \text{sen } 10°\,.\,\cos 45° + \text{sen } 45°\,.\,\cos 10° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\text{sen } 10° + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\cos 10° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,(\text{sen } 10° + \cos 10°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,a$$

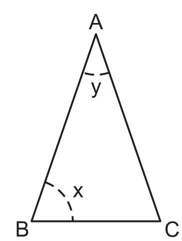
A área do triângulo OAB é igual a:

$$S = \frac{OA\,.\,OB\,.\,\text{sen } 55°}{2} = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.\,a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,a$$

Resposta: E

Módulo 12 – Fórmulas do Arco Duplo

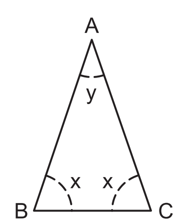
3. **(MACKENZIE)** – No triângulo ABC, temos AB = AC e $\text{sen } x = \dfrac{3}{4}$. Então cos y é igual a



a) $\dfrac{9}{16}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{7}{9}$

d) $\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{3}{16}$

Resolução



$y + 2x = 180° \Rightarrow y = 180° - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y = -\cos(2x) = -(1 - 2\,\text{sen}^2 x) =$

$= 2\,\text{sen}^2 x - 1$

Portanto, $\cos y = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{8}$

Resposta: D

4. **(FATEC)** – Se f é uma função real definida por

$f(x) = \dfrac{2\text{ tg } x}{1 + \text{tg } 2x}$, então f(x) é igual a

a) cosec 2x b) sec 2x c) tg 2x

d) cos 2x e) sen 2x

Resolução

$$f(x) = \frac{2\,.\,\text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{2\,.\,\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} =$$

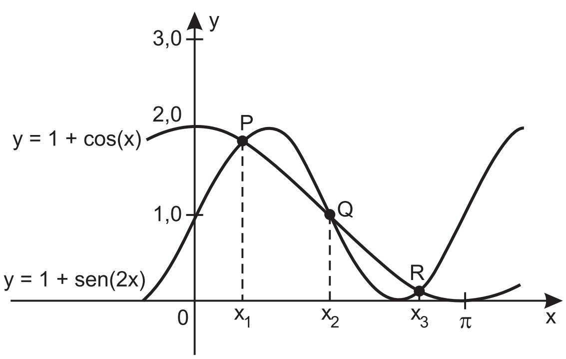
$$= \frac{\frac{2 \,.\, \text{sen } x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2 \,.\, \text{sen } x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{2 \,.\, \text{sen } x}{\cos x} \,.\, \cos^2 x = 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x = \text{sen } 2x$$

Resposta: E

Módulo 13 – Fórmulas do Arco Duplo

5. **(UNESP)** – A figura representa parte dos gráficos das funções $f(x) = 1 + \text{sen}(2x)$ e $g(x) = 1 + \cos(x)$.



Se x_1, x_2 e x_3 são, respectivamente, as abscissas dos pontos P, Q e R de intersecção dos gráficos das funções f(x) e g(x) no intervalo $[0,\pi]$, a soma $x_1 + x_2 + x_3$ é:

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

Resolução

A partir do gráfico, obtêm-se

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \text{sen}(2x) \\ g(x) = 1 + \cos x \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow 1 + \text{sen}(2x) = 1 + \cos x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x\,(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos

$x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ e $x_3 = \frac{5\pi}{6}$

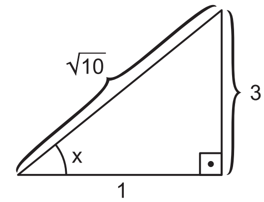
Portanto, $x_1 + x_2$

Resposta: C

6. **(UNIFESP)** – Se x é a medida de um arco do primeiro quadrante e se sen x = 3 cos x, então sen (2x) é igual a:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução



Se sen x = 3 . cos x ⇔ tg x = 3 e x pertence ao 1º quadrante, então

$\text{sen } x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ e $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Portanto, sen (2x) = 2 . sen x . cos x =

$= 2 \,\frac{3}{\sqrt{10}} \,.\, \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$

Resposta: B

Módulo 14 – Fórmulas do Arco Triplo e Transformação em Produto

7. **(FUVEST-Adaptado)** – Calcular sen (3x) e cos (3x) em função de sen x e cos x, respectivamente.

Resolução

$\text{sen}(3x) = \text{sen}(2x + x) = \text{sen } 2x \,.\, \cos x + \cos 2x \,.\, \text{sen } x =$

$= 2 \text{ sen } x \,.\, \cos x \,.\, \cos x \,.\, \cos x + (1 - 2 \text{ sen}^1 x) \text{ sen } x =$

$= 2 \text{ sen } x \,.\, (1 - \text{sen}^1 x) + (1 - 2 \text{ sen}^1 x) \,.\, \text{sen } x =$

$= 3 \,.\, \text{sen } x - 4 \,.\, \text{sen}^3 x$

$\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos 2x - \cos x - \text{sen } 2x \,.\, \text{sen } x =$

$= (2 \cos^1 x - 1) \,.\, \cos x - 2 \,.\, \text{sen } x \,.\, \cos x \,.\, \text{sen } x =$

$= (2 \cos^2 x - 1) \,.\, \cos x - 2 \,.\, \cos x\,(1 - \cos^2 x) =$

$= 4 \,.\, \cos^3 x - 3 \,.\, \cos x.$

8. **(FUVEST)** – Os números reais $\text{sen } \frac{\pi}{12}$; sen a; $\text{sen } \frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen a é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

$$\text{sen } a = \frac{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} =$$

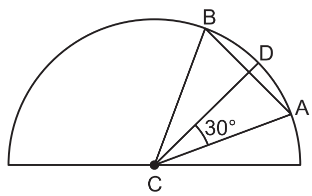
$$= \frac{2 \,.\, \text{sen}\left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) . \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right)}{2} =$$

$$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Resposta: D

Módulo 15 – Relações Trigonométricas em um Triângulo Qualquer

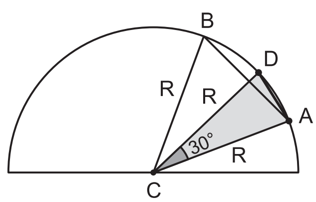
9. **(FUVEST)** – Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:



a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$

d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$ e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

Resolução



No triângulo ACD, tem-se (Lei dos Cossenos):

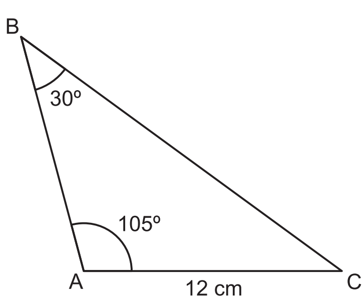
$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \,.\, R \,.\, R \,.\, \cos 30° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AD)^2 = 2R^2 - 2R^2 \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AD)^2 = R^2 \,.\, (2 - \sqrt{3}) \Rightarrow AD = R \,.\, \sqrt{2-\sqrt{3}}$

Resposta: A

10. **(MACKENZIE)** – Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1:10 000, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:



a) 2,3 km b) 2,1 km c) 1,9 km
d) 1,4 km e) 1,7 km

Resolução

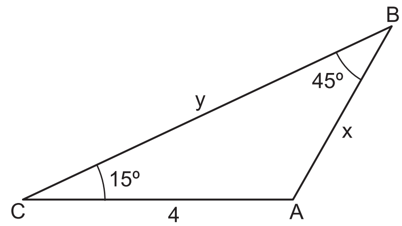
No triângulo ABC do mapa, resulta $A\hat{C}B = 45°$, e aplicando a lei dos senos a ele, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow AB \cong 17 \text{ cm}$$

Sendo o mapa em escala 1:10000, que significa 1 cm do mapa equivaler a 10000 cm na realidade, resulta que a distância entre as ilhas A e B é igual a 170000 cm = 1,7 km.

Resposta: E

11. **(FAC. MED. TRIÂNGULO MINEIRO)** – Se sen 15° = a, os valores de x e y na figura são, respectivamente,



a) $4a\sqrt{2}$ e $2\sqrt{6}$

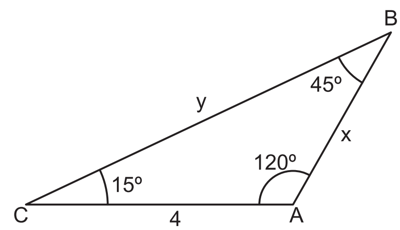
b) $2a\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$

c) a e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $a\sqrt{6}$ e $2a\sqrt{3}$

e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $6\sqrt{2}$

Resolução



Pela Lei dos Senos, temos:

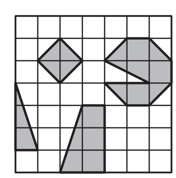
$$\frac{4}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 15°} = \frac{y}{\text{sen } 120°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{a} = \frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = 4 \,.\, \sqrt{2} \,.\, a \text{ e } y = 2\sqrt{6}$$

Resposta: A

Módulo 16 – Coordenadas Cartesianas Ortogonais

12. **(UNESP)** – Considere um quadrado subdividido em quadradinhos idênticos, todos de lado 1, conforme a figura. Dentro do quadrado encontram-se 4 figuras geométricas, destacadas em cinza.



A razão entre a área do quadrado e a soma das áreas das 4 figuras é

a) 3. b) 3,5. c) 4. d) 4,5. e) 5.

Resolução

Sendo S_1, S_2, S_3, S_4 as áreas das figuras destacadas em cinza e S a área do quadrado, temos:

a) $S_1 = \dfrac{2 \,.\, 2}{2} = 2$ b) $S_2 = \dfrac{1 \,.\, 3}{2} = \dfrac{3}{2}$

c) $S_3 = \dfrac{(2+1) \,.\, 3}{2} = \dfrac{9}{2}$ d) $S_4 = 5 \,.\, 1^2 + \dfrac{2 \,.\, 1}{2} = 6$

e) $S = 7^2 = 49$

Assim,

$$\frac{S}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{49}{2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + 6} = \frac{49}{14} = 3{,}5$$

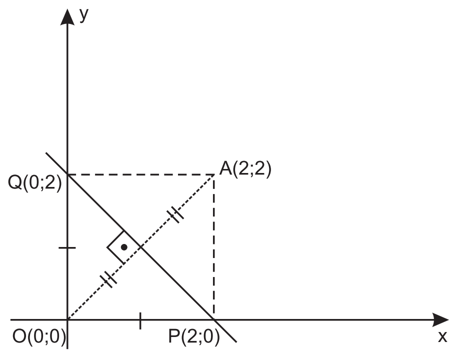
Resposta: B

13. **(MACKENZIE)** – Em um sistema cartesiano ortogonal são dados os pontos P = (2,0) e Q = (0,2). O ponto A, simétrico da origem em relação à reta PQ, tem coordenadas

a) (2; 2) b) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

d) (2; 1) e) (1; 2)

Resolução



Os pontos P, A, Q e O são vértices de um quadrado cujo lado mede 2. O ponto A é diagonalmente oposto à origem e tem coordenadas (2;2).

Resposta: A

14. **(UNIFESP)** – Considere o sistema de equações $\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$ em que c é uma constante real. Para que a solução do sistema seja um par ordenado no interior do primeiro quadrante (x > 0, y > 0) do sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem em (0, 0), é necessário e suficiente que

a) $c \neq -1$. b) $c < -1$. c) $c < -1$ ou $c > \frac{3}{2}$.

d) $\frac{3}{2} < c$. e) $-1 < c < \frac{3}{2}$.

Resolução

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (c+1)x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{c+1} \\ y = \dfrac{3-2c}{c+1} \end{cases}$$

1) Se $x = \dfrac{5}{c+1} > 0$, então $c + 1 > 0 \Leftrightarrow c > -1$

2) Se $y = \dfrac{3-2c}{c+1} > 0$, então $3 - 2c > 0$, pois $c > -1$

Logo, $c < \dfrac{3}{2}$

De (1) e (2), concluímos que $-1 < c < \dfrac{3}{2}$

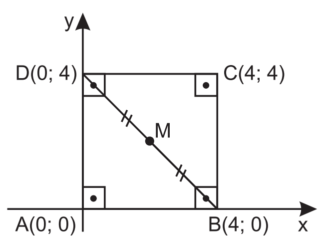
Resposta: E

Módulo 17 – Ponto Médio – Distância entre Dois Pontos

15. **(VUNESP)** – Os pares ordenados A(0;0), B(4;0), C(4;4) e D(0;4) são vértices de um quadrado. O ponto M divide o segmento BD em dois segmentos congruentes. Então M é:

a) (2;2) b) (0;4) c) (5;6) d) (2;4) e) (1;1)

Resolução



ABCD é um quadrado e o ponto M é ponto médio da diagonal $\overline{BD}$, assim:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2;2)$$

Resposta: A

16. **(UNI.FED.PELOTAS)** – Na arquitetura, a Matemática é usada a todo momento. A Geometria é especialmente necessária no desenho de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir as medidas desses espaços.

Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A (8, 4), B (4, 6) e C (2, 4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C, é colocado um suporte para luminárias.

Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento,

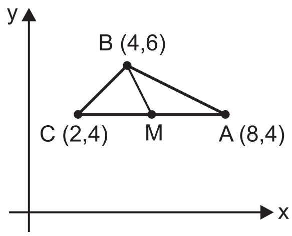
a) $\sqrt{37}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\sqrt{5}$.

d) $\sqrt{13}$. e) $\sqrt{17}$.

Resolução

Se M é o ponto médio de $\overline{AC}$, então: M(5,4)

Assim: $MB = \sqrt{(5-4)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{5}$



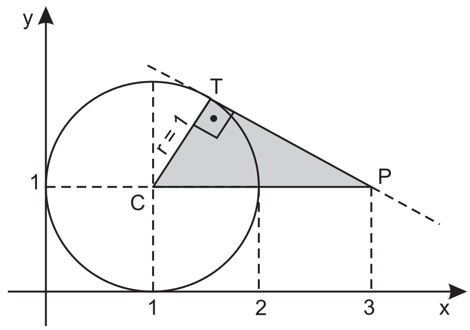
Resposta: C

17. **(FUVEST)** – Uma reta passa pelo ponto P(3; 1) e é tangente à circunferência de centro C(1; 1) e raio 1 num ponto T. Então a medida do segmento PT é:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

Resolução

A partir do enunciado, temos:



$$\left.\begin{array}{l} PC = 2 \\ TC = 1 \\ PT^2 + TC^2 = PC^2 \end{array}\right\} \Rightarrow PT^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow PT = \sqrt{3}$$

Resposta: A

Módulo 18 – Alinhamento de 3 pontos – Curvas

18. **(FEI)** – Se os pontos A = (k; 0); B = (2; – 6) e C = (1; 3) são os vértices de um triângulo, então, necessariamente:

a) $k = \dfrac{4}{3}$ b) $k = \dfrac{3}{4}$ c) $k \neq \dfrac{4}{3}$

d) $k \neq -\dfrac{4}{3}$ e) $k = -\dfrac{4}{3}$

Resolução

Se A, B e C são vértices de um triângulo, então necessariamente

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -6k + 6 + 6 - 3k \neq 0 \Leftrightarrow 9k \neq 12 \Leftrightarrow k \neq \frac{4}{3}$$

Resposta: C

19. **(VUNESP)** – Num surto de dengue, o departamento de saúde de uma cidade quer que seus técnicos visitem todas as casas existentes na região limitada por um triângulo de vértices nos três focos em que a doença foi encontrada. Para facilitar essa ação, colocou o mapa da cidade sobre um plano cartesiano, com escala 1:1km, e verificou que os focos se localizavam sobre os pontos (2,5), (– 3,4) e (2,– 3). Como cada especialista será responsável por 2 km^2 de área nessa região triangular, o número de técnicos necessários e suficientes será igual a:

a) 20 b) 18 c) 16 d) 12 e) 10

Resolução

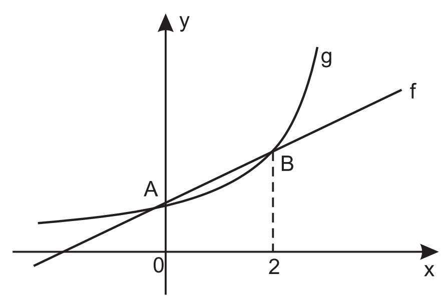
Os 3 focos constituem um triângulo cuja área é igual a:

$$A_\Delta = \left| \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{2} \right| = \left| \frac{40}{2} \right| = 20 \text{ km}^2$$

Como cada especialista será responsável por 2 km^2 de área, o número de técnicos necessários e suficientes será 10.

Resposta: E

20. **(FATEC)** – Na figura abaixo, os pontos A e B são as intersecções dos gráficos das funções f e g.



Se $g(x) = (\sqrt{2})^x$, então f(10) é igual a

a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) 9

Resolução

I) Os pontos $A(0, y_A)$ e $B(2; y_B)$ pertencem ao gráfico da função $g(x) = (\sqrt{2})^x$. Assim, $\begin{cases} g(0) = y_A \\ g(2) = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 1 \\ y_B = 2 \end{cases}$ e, portanto, A(0;1) e B(2;2)

II) O gráfico da função f é uma reta, que contém os pontos A, B e P(10;y), onde y = f(10). Sendo A, B e P alinhados, temos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

Portanto y = f(10) = 6.

Resposta: C

Módulo 11 – Adição e Subtração de Arcos

1. **(PUC)** – O valor de sen 1200° é igual a:

a) cos 60° b) – sen 60° c) cos 30°
d) – sen 30° e) cos 45°

2. **(PUC)** – Sendo 75° = 45° + 30°, o valor de sen 75° é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3. Calcular y = sen 105° – cos 75°.

4. **(PUC)** – Calcular: $\frac{\text{tg}(x+y) - \text{tg } y}{1 + \text{tg}(x+y) \cdot \text{tg } y}$

5. Calcular sen x, sabendo-se que $x + y = \frac{\pi}{4}$ e $\text{sen } y = \frac{3}{5} \cdot \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. **(PUC)** – Se tg (x + y) = 33 e tg x = 3, então tg y é igual a:

a) 0,2 b) 0,3 c) 0,4 d) 0,5 e) 0,6

7. **(MAUÁ)** – Determinar $0 \le x, y < 2\pi$ que verifique

$$\begin{cases} \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = 2 \\ \text{sen } x + \cos y = 2 \end{cases}$$

8. **(FEI)** – Se $\cos x = \frac{3}{5}$, calcular $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

9. **(PUC)** – Calcular

$E = \text{sen}(-x) + \text{sen}(\pi + x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x.$

10. **(PUC-RS)** – Se $\text{tg } x = \frac{1}{3}$ e $\text{tg } y = \frac{1}{5}$ então tg (x – y) é igual a:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $-\frac{1}{15}$

Módulo 12 – Fórmulas do Arco Duplo

1. **(UEL)** – Se $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ e **x** é um arco do 2º quadrante, então cos(2x) é igual a

a) 1 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{4}$

2. **(UN. FED. LAVRAS)** – Se $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ e $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, o valor de sen x, é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

3. Se $\text{sen } a = \frac{4}{5}$, calcular:

a) sen 2a b) cos 2a

4. **(USF)** – A soma das soluções da equação $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, no intervalo $[0, \pi]$ é

a) $\frac{7\pi}{6}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{3}$

5. **(PUC-RS)** – O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \text{sen } x \\ \cos x & \text{sen } x & 1 \\ 1 & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ é igual a

a) cos 2x b) sen 2x c) 1 – sen x
d) 1 + cos x e) $-\text{sen}^2 x$

6. **(FATEC)** – Se $\cos x = \frac{3}{4}$, calcular cos 4x.

7. **(POLI)** – A expressão
y = (sen x + cos x + 1)(sen x + cos x – 1) é idêntica a:
a) sen x b) cos x c) sen 2x d) cos 2x e) 1

8. **(MACKENZIE)** – Se y = 3 + sen x . cos x, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, então, o maior valor que **y** pode assumir é:

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{13}{4}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $\frac{7}{2}$ e) 4

9. **(POLI)** – A solução da equação $\text{sen } x = \frac{1}{\cos x}$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot 2 \cdot \pi\}$

e) Ø

10. **(MED. ABC)** – Se $\text{sen } a - \cos a = \frac{1}{5}$, então sen 2a vale:

a) $\frac{7}{25}$ b) $\frac{24}{25}$ c) $-\frac{12}{15}$ d) $-\frac{14}{25}$ e) 1

11. **(UNIFESP)** – Se x é a medida de um arco do primeiro quadrante e se sen x = 3 cos x, então sen (2x) é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. b) $\dfrac{3}{5}$. c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$.

d) $\dfrac{4}{5}$. e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

12. **(UFTM)** – Sendo f uma função real definida por

$f(x) = \sqrt{\dfrac{0,5}{1 + \text{sen } x \cdot \cos x}}$, sua imagem é o intervalo real

a) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$ b) $[1, \sqrt{3}]$ c) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

d) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ e) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 2\right]$

Módulo 13 – Fórmulas do Arco Duplo

1. **(FUVEST)** – Calcular o valor de
$y = (\text{sen } 22° \ 30' + \cos 22° \ 30°)^2$.

2. **(MAUÁ)** – Determine **x**, no intervalo aberto (0; 5π), que satisfaça a equação: 2 . cos(2x) – cos x = 3.

3. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Sejam **f** e **g** funções definidas por f(x) = cos 2x e g(x) = $\text{sen}^2 x - 1$. Então, f(x) + g(x) é:
a) $-\cos^2 x - 1$ b) sen x . (2 . cos x + sen x) – 1
c) $-\text{sen}^2 x$ d) $\text{sen}^2 x$ e) 0

4. **(FGV)** – Se $\text{tg}\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ então tg a vale:

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) 2 d) 1 e) –2

5. **(FEI)** – Calcular sen 2x sabendo-se que tg x + cotg x = 3.

6. **(FAAP)** – Resolver a equação:

$\text{sen}^3 x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos^3 x = \dfrac{1}{4}$

7. **(POLI)** – Calcular:

$y = \text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\dfrac{14\pi}{3}\right)$

8. O período e o valor máximo da função
$y = \text{sen } x \cdot \cos^3 x - \text{sen}^3 x \cdot \cos x$, são respectivamente:

a) $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{1}{4}$ b) π e $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$

d) π e $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\pi}{4}$ e 1

9. **(FEI)** – Resolver a equação
$\text{sen } x \cdot \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

10. **(MACKENZIE)** – A expressão

$\log_a \text{sen } x + \log_{a^2}(1 - \text{sen}^2 x)$ com $0 < a \neq 1$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ pode ser escrita como:

a) $\log_a\left(\dfrac{\text{sen } 2x}{2}\right)$ b) $\log_a\left(\dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x}{2}\right)$

c) $\log_a (\text{sen } x)$ d) $\log_a(\text{sen}^2 x)$

e) $\log_a \text{sen } x^2$

11. **(MACKENZIE)** – A soma das soluções da equação $\sec^2 2x - 2\text{tg}^2 2x - 1 = 0$, no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ é

a) π. b) $\dfrac{3\pi}{2}$. c) 3π. d) $\dfrac{5\pi}{2}$. e) 2π.

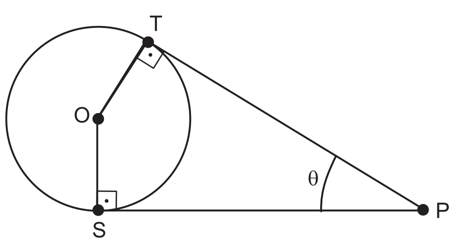
12. **(FATEC)** – Se f é uma função real definida por

$f(x) = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$, então f(x) é igual a

a) cosec 2x b) sec 2x c) tg 2x
d) cos 2x e) sen 2x

13. **(UNESP)** – Seja a expressão: f(x) = sen(2x) – cotg(x), considerando o conjunto dos reais.
a) Encontre o valor de f(x) para $x = \dfrac{5\pi}{6}$.
b) Resolva a equação: f(x) = 0.

14. **(UNIFESP)** – Um observador, em P, enxerga uma circunferência de centro O e raio 1 metro sob um ângulo θ, conforme mostra a figura.



a) Prove que o ponto O se encontra na bissetriz do ângulo θ.
b) Calcule tg(θ), dado que a distância de P a O vale 3 metros.

Módulo 14 – Fórmulas do Arco Triplo e Transformação em Produto

1. **(FUVEST)** – Expresse sen(3α) em função de sen α.

2. **(UFC)** – Expresse cos 3x em função de cos x.

3. **(PUCCAMP)** – Sabendo-se que

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \,.\, \text{sen } \dfrac{p+q}{2} \,.\, \cos \dfrac{p-q}{2}$ e

$\cos p - \cos q = -2 \,.\, \text{sen } \dfrac{p+q}{2} \,.\, \text{sen } \dfrac{p-q}{2}$,

simplificar a expressão $E = \dfrac{\text{sen } 6x + \text{sen } 2x}{\cos 6x - \cos 2x}$

4. Simplificar $y = \dfrac{\cos 6x + \cos 4x}{\text{sen } 6x - \text{sen } 4x}$

5. Simplificando-se y = cos 80° + cos 40° – cos 20°, obtém-se:

a) 0 b) sen 20° c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) –1

6. **(FEI)** – A expressão sen x + cos x pode ser escrita na forma M . sen (x + a), onde:

a) $M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $a = \dfrac{\pi}{4}$ b) $M = \sqrt{2}$ e $a = \dfrac{\pi}{4}$

c) $M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $a = \dfrac{\pi}{2}$ d) $M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e a = 0

e) nda

7. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Transformar em produto y = 1 + cos a.

8. **(ITA)** – Transformar em produto y = sen 3x + sen x.

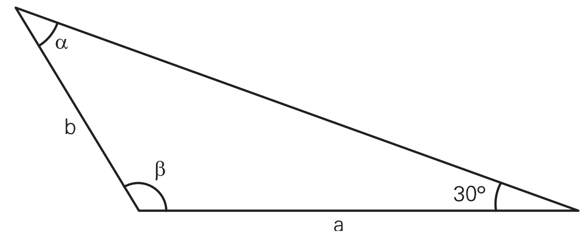
9. **(JUIZ DE FORA)** – Simplificar $y = \dfrac{\text{sen } 30° - \text{sen } 80°}{\text{sen } 10° + \text{sen } 40°}$

10. **(JUIZ DE FORA)** – Transformar em produto a expressão y = 2 . sen x + sen 2x

Módulo 15 – Relações Trigonométricas em um Triângulo Qualquer

1. **(CEFET-PR)** – A medida do ângulo **β** na figura a seguir, na qual a = 2 cm e b = $\sqrt{2}$ cm, é:

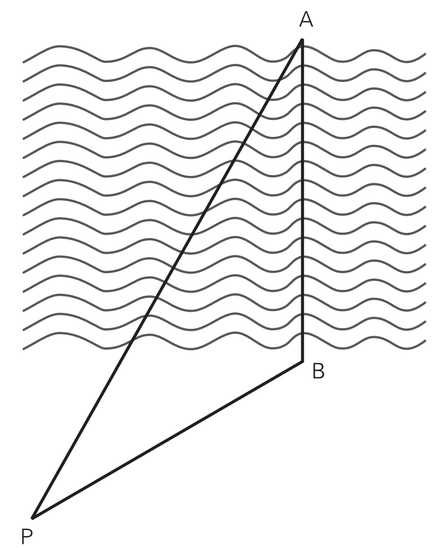
a) 150° b) 135° c) 120° d) 105° e) 100°



2. **(UEL)** – Sobre uma circunferência **λ**, de centro **O** e raio r = $2\sqrt{3}$ cm, são marcados dois pontos **A** e **B** que determinam em λ uma corda de 6 cm de comprimento. A medida, em radianos, do menor dos ângulos $A\hat{O}B$ é:

a) $\dfrac{5\pi}{6}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{\pi}{6}$

3. A figura mostra o trecho de um rio onde se deseja construir uma ponte AB. De um ponto **P**, a 100 m de **B**, mediu-se o ângulo $A\hat{P}B$ = 45° e do ponto **A**, mediu-se o ângulo $P\hat{A}B$ = 30°. Calcular o comprimento da ponte.



4. Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo do qual se conhecem um lado AB = 10 m e o ângulo oposto $\hat{C}$ = 60°.

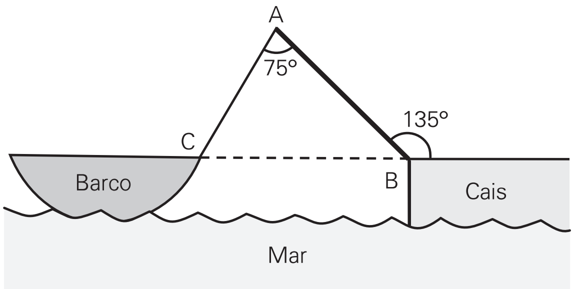
5. Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120°. Determinar a medida do terceiro lado.

6. **(U. MARÍLIA)** – O lado **c** de um triângulo ABC no qual a = 20; B = 45° e C = 30° é:

a) $c = \dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ b) $c = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{40\sqrt{2}}$ c) $c = \dfrac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

d) $c = \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ e) $c = \dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

7. **(UNIRIO)**

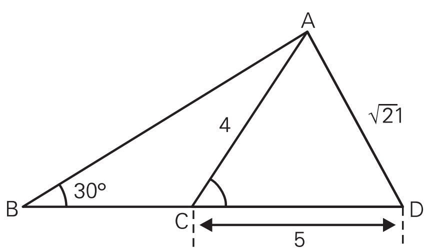


Um barco está preso por uma corda ($\overline{AC}$) ao cais, através de um mastro ($\overline{AB}$) de comprimento 3 m, como mostra a figura. A distância, em metros, da proa do barco até o cais ($\overline{BC}$) é igual a:

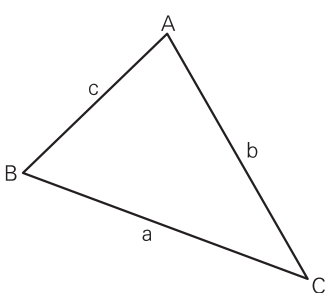
a) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ e) $\sqrt{6}$

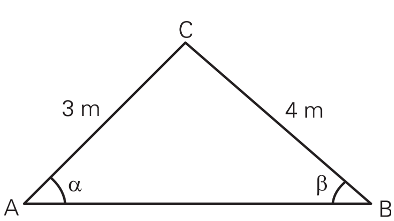
8. **(MACKENZIE)** – Na figura, a área do triângulo ABC é:
a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $10\sqrt{3}$



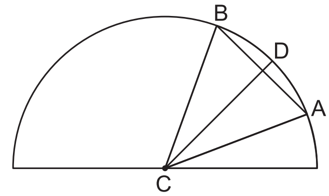
9. **(FEI)** – Calcular **c**, sabendo que a = 4, b = $3\sqrt{2}$, $\hat{C} = 45°$.



10. **(MAUÁ)** – Num triângulo ABC temos AC = 3 m, BC = 4 m e $\alpha = B\hat{A}C$. Se AB = 3 m, calcule cos α.



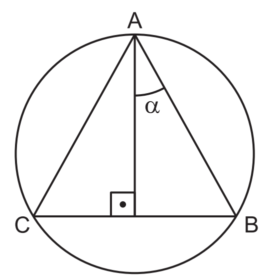
11. **(FUVEST)** – Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semi-circunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:



a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{3-\sqrt{3}}$ c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$

d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$ e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$

12. **(FUVEST)** – Na figura a seguir, o triângulo ABC inscrito na circunferência tem AB = AC. O ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a altura do triângulo ABC em relação a $\overline{BC}$ é α. Nestas condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo da figura é dado, em função de α, pela expressão:

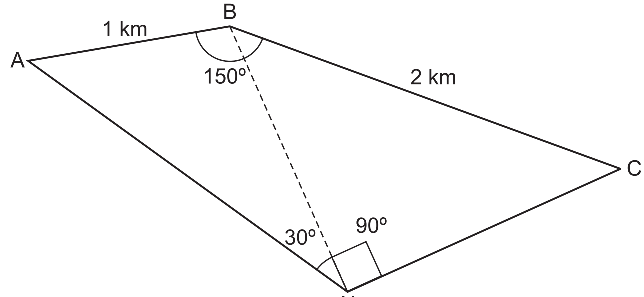


a) $\dfrac{2}{\pi}\cos^2\alpha$ b) $\dfrac{2}{\pi}\text{sen}^2 2\alpha$ c) $\dfrac{2}{\pi}\text{sen}^2 2\alpha \cos\alpha$

d) $\dfrac{2}{\pi}\text{sen}\alpha \cos 2\alpha$ e) $\dfrac{2}{\pi}\text{sen}2\alpha \cos^2\alpha$

13. **(UNICAMP)** – O quadrilátero convexo ABCD, cujos lados medem, consecutivamente, 1, 3, 4 e 6 cm, está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R.
a) Calcule o raio R da circunferência.
b) Calcule o volume do cone reto cuja base é o círculo de raio R e cuja altura mede 5 cm.

14. **(UNICAMP)** – Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.
b) Calcule o comprimento do segmento NB.

Módulo 16 – Coordenadas Cartesianas Ortogonais

1. Representar no sistema de eixos cartesianos ortogonais os pontos: A(3; 4), B(–1; 2), C(– 3; – 4), D(4; – 2), E(3; 0), F(0; – 3) e G(0; 0).

2. Determinar **a** e **b**, para que o ponto P(a; b) pertença:
a) ao eixo Ox.
b) ao eixo Oy.
c) ao 4º quadrante.
d) à bissetriz dos quadrantes pares.

3. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Se a < 0 e b > 0, os pontos P(a; – b) e Q(b; – a) pertencem respectivamente aos quadrantes:
a) 4º e 2º b) 1º e 3º c) 3º e 4º
d) 3º e 1º e) 2º e 3º

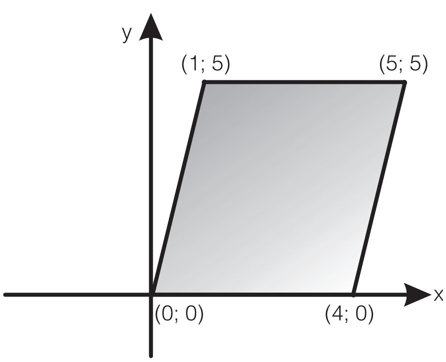
4. Se os pontos (0; 0), (a; 0), (a; b) e (0; b) com a > b > 0 forem ligados na ordem dada, por linhas retas, qual é a figura formada? Qual a área? Onde fica o centro?

5. **(MACKENZIE)** – Os pontos A(0; 0) e B(1; 0) são vértices de um triângulo equilátero ABC, situado no 1º quadrante. O vértice **C** é dado por:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

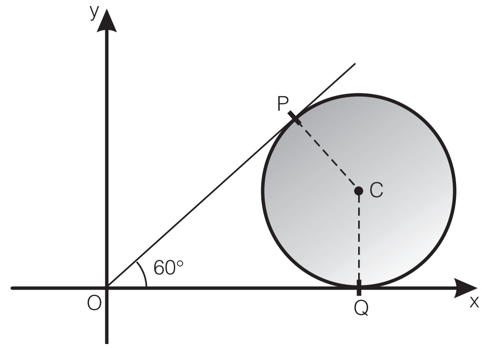
d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. **(UNA)** – A área do quadrilátero abaixo vale:



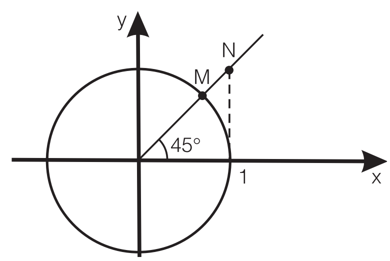
a) 10ua.
b) 15ua.
c) 20ua.
d) 25ua.
e) 30ua.

7. **(UN.ESTÁCIO DE SÁ)** – Observe atentamente a figura:



Sabendo que o segmento $\overline{\mathbf{OP}}$ **= 3cm**, podemos afirmar que o centro **C** da circunferência é:
a) $(3; \sqrt{3})$ b) $(\sqrt{3}; 3)$ c) $(3 - \sqrt{3}; 3)$
d) $(3; 3 - \sqrt{3})$ e) $(3 + \sqrt{3}; 3 - \sqrt{3})$

8. **(MACKENZIE)** – Considere a figura abaixo.



O comprimento do segmento MN é:

a) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ b) $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2} + 1$

d) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2} - 1$

9. **(FUVEST)** – Uma das diagonais de um quadrado tem extremidades A(1; 1) e C(3; 3). As coordenadas dos outros dois vértices são:
a) (2; 3) e (3; 2) b) (3; 1) e (1; 3) c) (1; 3) e (3; 2)
d) (5; 2) e (4; 1) e) (3; 5) e (5; 3)

10. **(CEFET-PARANÁ)** – Considere G(1; 0) o centro de uma circunferência de raio 1uc. Marca-se sobre a circunferência, a partir da origem do sistema cartesiano ortogonal, 6 (seis) pontos de forma que os consecutivos sempre sejam equidistantes. Com base nessas informações, concluímos que a área do polígono definido pelos pontos que não pertencem ao 4º quadrante é, em unidades de área, igual a:

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

d) 2 e) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Módulo 17 – Ponto Médio – Distância entre Dois Pontos

1. Achar as distâncias entre os seguintes pares de pontos:

A e B	B e E	C e G
A e C	B e F	D e E
A e D	C e D	E e F

Dados: A(4; 3) B(5; 0) C(0; 4) D(2; –3)
E(– 4; 2) F(0; 0) G(– 6; – 4)

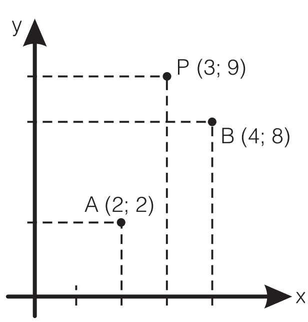
2. **(U.P.F.)** – A distância entre os pontos **P** e **Q** é 8 unidades. Se **P(x; – 8)** e se **Q** pertence ao eixo **x** e tem abscissa igual a 3, então **x** será igual a:
a) – 3 b) 6 3 c) 3 d) 6 6 e) 6 9

3. **(PUC-MG)** – Seja P = (– 1; a) um ponto do 2º quadrante. O valor de **a**, para que a distância do ponto Q = (a; – 2) ao ponto **P** seja 5, é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) 2

4. O triângulo A(2; – 2), B(– 3; – 1), C(1; 6) é:
a) retângulo b) equilátero c) isósceles
d) não existe e) escaleno

5. **(UN.EST.MATO GROSSO)** – Um topógrafo, que se encontrava no portão de saída da escola, foi chamado para medir a distância entre o local em que se encontrava até o latão de lixo reciclável (M), equidistante de 2 latões A e B de lixo não reciclável da escola. As coordenadas são A(2; 2), B(4; 8) e o local do topógrafo P(3; 9). Considerando todas as coordenadas em metros, calcule a distância do portão de saída (P) com o ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, o local do latão de lixo reciclável.



a) 2 m b) 3 m c) 5 m d) 4 m e) 1 m

6. **(FUVEST)** – Determinar o ponto **P** equidistante da origem e dos pontos A(1; 0) e B(0; 3).

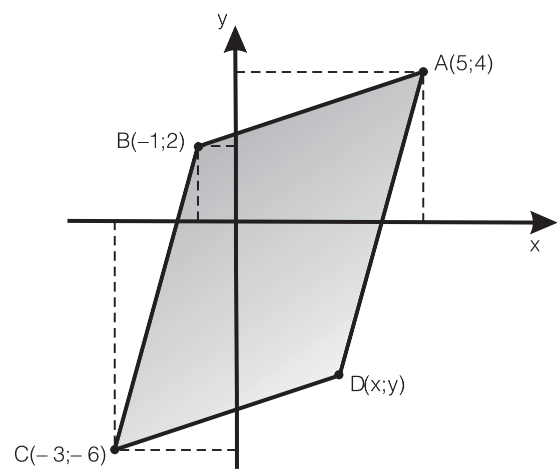
7. **(UN.EST.CEARÁ)** – Se (2; 5) é o ponto médio do segmento de extremos (5; y) e (x; 7), então o valor de x + y é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

8. Os vértices de um triângulo são os pontos A(3; 8), B(2; – 1) e C(6; – 3). Determinar o comprimento da mediana AM.

a) $2\sqrt{17}$ b) 11 c) 10 d) $3\sqrt{11}$ e) $\sqrt{101}$

9. **(FUVEST)** – Dados os pontos A(1; – 4), B(1; 6) e C(5; 4) e sabendo-se que $AB^2 = BC^2 + AC^2$, então a soma das coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos **A**, **B** e **C** é:
a) 2 b) 1 c) 3 d) 4 e) 5

10. **(F.CARLOS CHAGAS)** – Determinar o ponto D, no paralelogramo abaixo:



a) (1; – 1) b) (2; – 2) c) (2; – 4)
d) (3; – 2) e) (3; – 4)

11. **(MACKENZIE)** – Em um sistema cartesiano ortogonal são dados os pontos P = (2;0) e Q = (0;2). O ponto A, simétrico da origem em relação à reta PQ, tem coordenadas

a) (2;2) b) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

d) (2;1) e) (1;2)

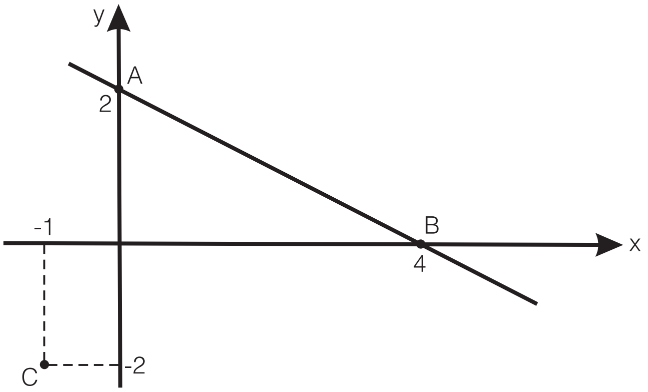
12. **(MACKENZIE)** – Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio r. Se, num sistema de coordenadas cartesianas, A = (1; 3), B = (5; 7) e C = (5;1), então r é igual a

a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 3 d) $\frac{10}{3}$ e) $\sqrt{10}$

Módulo 18 – Alinhamento de 3 pontos – Curvas

1. Os pontos A(4; – 1), B(8; 1) e C(– 2; – 4) são alinhados?

2. A área do triângulo ABC da figura é:



a) – 18 b) – 9 c) 9 d) 15 e) 18

3. **(MAUÁ)** – Achar a área do quadrilátero ABCD, dados A(2; 5), B(7; 1), C(3; – 4) e D(– 2; – 3).

4. **(UMG)** – Determinar o perímetro e a área do triângulo A(1; 3), B(4; 7) e C(6; 5).

5. Determinar o valor inteiro de **x**, sabendo-se que os pontos A(7; 5), B(3; – 4) e C(x; 6) formam um triângulo de 29 unidades de área.

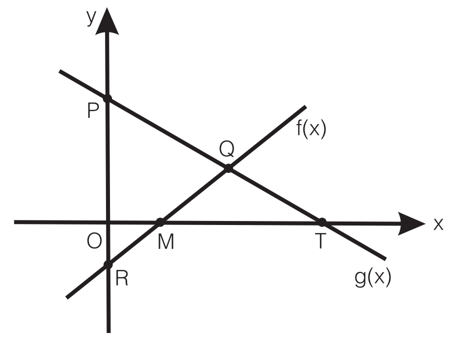
6. **(U.V.RIO DOS SINOS)** – Se a reta 3mx + y – 6 = 0 forma com os eixos coordenados um triângulo retângulo situado no 1º quadrante cuja área é 9u.a. (unidades de área), então o valor de **m** é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) 3 e) 6

7. **(UN.FED.FLUMINENSE)** – A reta y – 2x + 5 = 0 tangencia, no ponto **M**, a circunferência **C** de equação $x^2 + y^2 = 5$. A reta y = – x + p intercepta **C** nos pontos **M** e **Q**. Determine:

a) o valor de **p**;
b) as coordenadas dos pontos **M** e **Q**.

8. **(UNIVEST)**



No gráfico acima estão representadas as funções f(x) = x – 1 e g(x) = 3 – x, que se interceptam no ponto **Q**. A razão entre as áreas dos triângulos **MQT** e **RQP** pode ser expressa pela fração:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{2}$

9. **(FGV)** – A área do trapézio determinado pelas retas de equações x = 3, y = 5; y = x + 1 e pelo eixo y é:

a) 7,5 b) 7 c) 6,5 d) 6 e) 5,5

10. **(UNICAMP)** – Considere no plano xy, as retas y = 1, y = 2x – 5 e x – 2y + 5 = 0.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo ABC?

11. **(MACKENZIE)** – Se os pontos A = (a,0), B = (0,2b) e C = (a+b,0) são vértices de um triângulo de área 2b, então o valor de b é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12. **(UNESP)** – O valor da área S do triângulo de vértices A, B e C no plano cartesiano, sendo A = (6;8), B = (2;2), C = (8;4), é igual a

a) 5,4. b) 12. c) 14. d) 28. e) 56,3.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

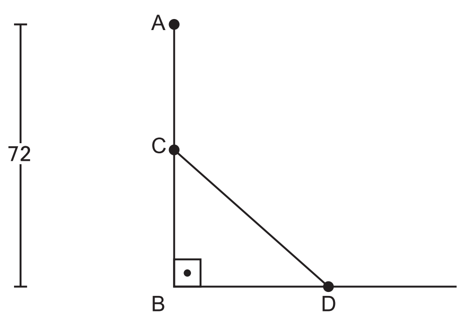
Módulo 11 – Relações Métricas nos Triângulos Retângulos

1. **(PUC)** – Dois navios navegavam pelo Oceano Atlântico, supostamente plano: X, à velocidade constante de 16 milhas por hora, e Y à velocidade constante de 12 milhas por hora. Sabe-se que às 15 horas de certo dia Y estava exatamente 72 milhas ao sul de X e que, a partir de então, Y navegou em linha reta para o leste, enquanto que X navegou em linha reta para o sul, cada qual mantendo suas respectivas velocidades. Nessas condições, às 17 horas e 15 minutos do mesmo dia, a distância entre X e Y, em milhas, era

a) 45 b) 48 c) 50 d) 55 e) 58

Resolução

Sendo A e B, respectivamente, as posições dos navios X e Y às 15 horas de um certo dia, e C e D, respectivamente, as posições dos navios X e Y às 17 horas e 15 minutos do mesmo dia, ou seja, 2 horas e 15 minutos mais tarde $\left(\frac{9}{4} \text{ de hora}\right)$, temos:



I) Com velocidades constantes de 16 milhas por hora e 12 milhas por hora, respectivamente, os navios X e Y percorrem AC e BD. Assim, temos:

$$AC = \frac{9}{4} \cdot 16 = 36 \text{ milhas}$$

$$BD = \frac{9}{4} \cdot 12 = 27 \text{ milhas}$$

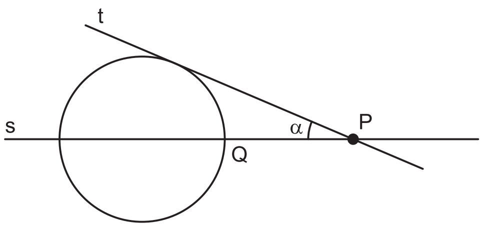
II) No triângulo retângulo BCD, temos:

$(CD)^2 = (BD)^2 + (BC)^2$, com $BC = AB - AC = 36$

Assim, $(CD)^2 = 27^2 + 36^2 \Rightarrow CD = 45$ milhas

Resposta: A

2. **(FUVEST)** – Na figura abaixo, a reta s passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando-a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta t passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta s. Se $PQ = 2R$, então $\cos \alpha$ vale

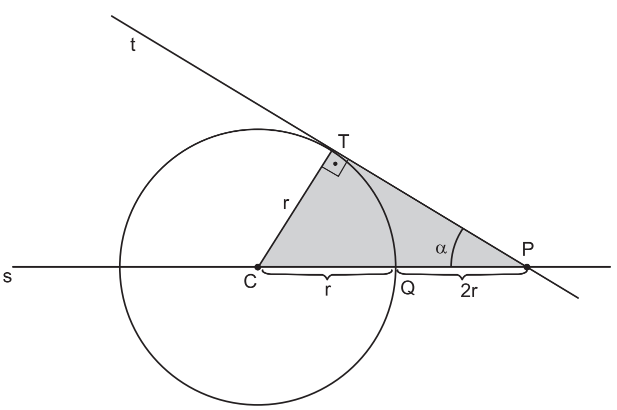


a) $\sqrt{2}/6$ b) $\sqrt{2}/3$ c) $\sqrt{2}/2$

d) $2\sqrt{2}/3$ e) $3\sqrt{2}/5$

Resolução

Se T é o ponto de tangência da reta *t* com a circunferência, a partir do enunciado, temos a figura a seguir:



No triângulo retângulo PTC, temos:

1º) $PT^2 + r^2 = (3r)^2 \Leftrightarrow PT^2 = 8r^2 \Leftrightarrow PT = 2\sqrt{2} \cdot r$

2º) $\cos \alpha = \dfrac{PT}{PC} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot r}{3r} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Resposta: D

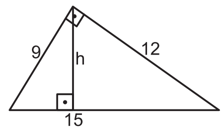
Módulo 12 – Relações Métricas nos Triângulos Quaisquer

3. **(FEI)** – Se, em um triângulo, os lados medem 9 cm, 12 cm e 15 cm, então a altura relativa ao maior lado mede

a) 8,0 cm b) 7,2 cm c) 6,0 cm

d) 5,6 cm e) 4,8 cm

Resolução

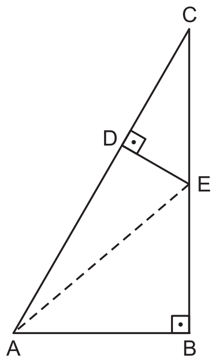


$$9 \cdot 12 = 15 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{36}{5} \Rightarrow \boxed{h = 7,2}$$

Resposta: B

4. **(FUVEST)** – Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é

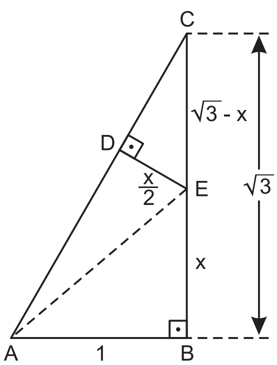


a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Resolução



1) $(AC)^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow AC = 2$

2) $\dfrac{DE}{BA} = \dfrac{CE}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

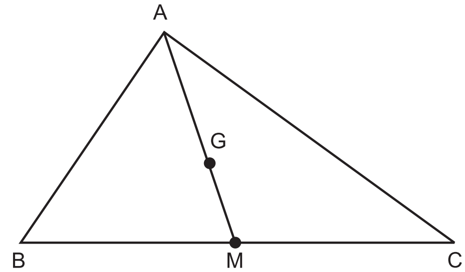
3) $(AE)^2 = 1^2 + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AE)^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AE = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

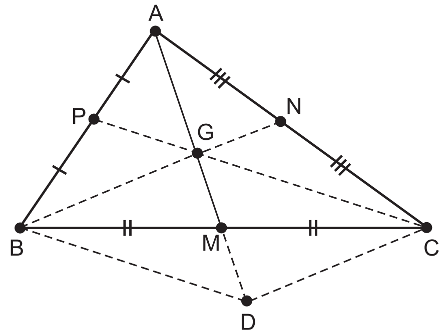
Resposta: C

Módulo 13 – Lugares Geométricos

5. No triângulo ABC da figura seguinte, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ e **G** é o seu baricentro. Prove que AG = 2 . GM



Resolução



Sejam N e P os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, e D um ponto da reta $\overleftrightarrow{AM}$ tal que AG = GD(I).

Assim, $\overline{GN}$ é base média no triângulo ADC e $\overline{PG}$ é base média no triângulo ABD.

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{GN} \;//\; \overline{CD} \Rightarrow \overline{BG} \;//\; \overline{CD} \\ \overline{PG} \;//\; \overline{BD} \Rightarrow \overline{GC} \;//\; \overline{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{BGCD é paralelogramo} \Rightarrow$$

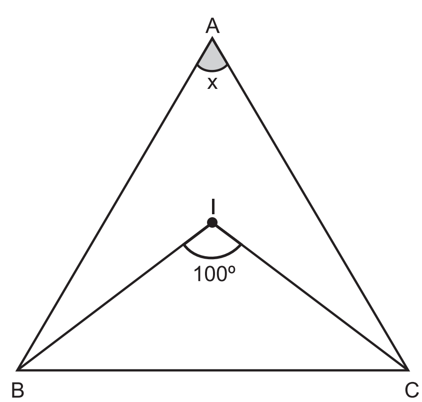
$$\Rightarrow GM = MD \Rightarrow GM = \frac{GD}{2} \Rightarrow GD = 2 \cdot GM \text{ (II)}$$

De (I) e (II), tem-se finalmente: AG = 2 . GM

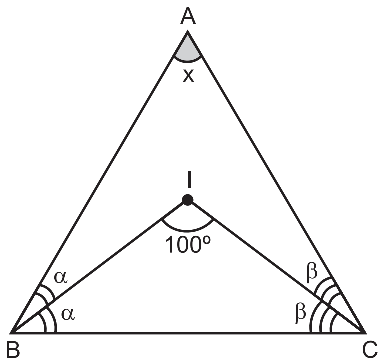
De modo análogo, pode-se provar que:

$\boxed{BG = 2 \cdot GN}$ e $\boxed{CG = 2 \cdot GP}$

6. Sendo **I** o incentro do triângulo, determine o valor da medida do ângulo $B\hat{A}C$.



Resolução



1º) $\overrightarrow{BI}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$ e $\overrightarrow{CI}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$

2º) $\alpha + \beta + 100° = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 80°$

3º) $x + 2\alpha + 2\beta = 180° \Leftrightarrow x + 2\,(\alpha + \beta) = 180°$

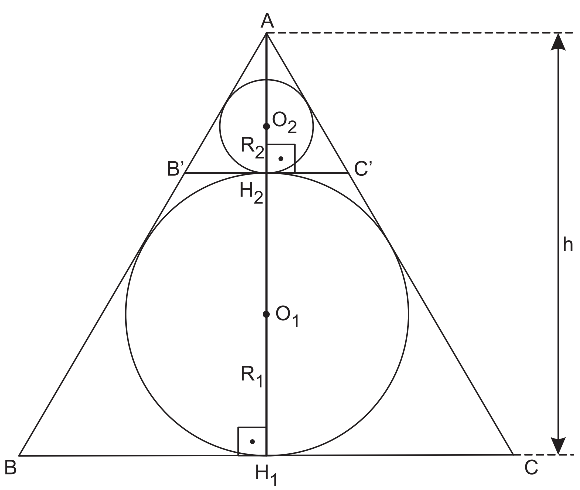
Assim: $x + 2 \,.\, 80° = 180° \Leftrightarrow x = 20°$

Resposta: 20°

Módulo 14 – Pontos e Segmentos Notáveis no Triângulo

7. **(ITA)** – Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Resolução



Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1 e C_2, respectivamente. Como o triângulo ABC é equilátero, temos:

$R_1 = \dfrac{h}{3}$ e, portanto, $AH_2 = \dfrac{h}{3}$

O triângulo AB'C' é equilátero, pois é semelhante ao triângulo ABC e, portanto,

$$R_2 = \frac{1}{3} \,.\, AH_2 = \frac{1}{3} \,.\, \frac{h}{3} = \frac{h}{9}$$

Logo,

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{3h - h}{9h} = \frac{2}{9}$$

Resposta: $\boldsymbol{\dfrac{R_1 - R_2}{h} = \dfrac{2}{9}}$

8. **(UNIFEI)** – Se um triângulo equilátero de lado $\ell = \sqrt{75}$ cm está inscrito num círculo, então o raio deste círculo mede:

a) $\sqrt{3}$ cm
b) 3 cm
c) $\sqrt{5}$ cm
d) 5 cm
e) $5\sqrt{3}$ cm

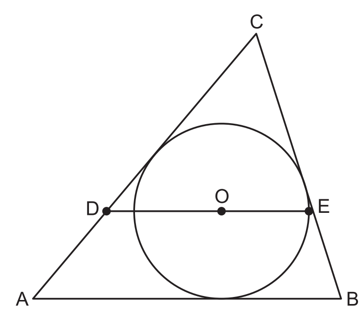
Resolução

De acordo com a propriedade do baricentro, pode-se concluir que o raio R do círculo circunscrito, equivale a dois terços da altura do triângulo equilátero. Assim:

$$R = \frac{2}{3} \,.\, h = \frac{2}{3} \,.\, \frac{\sqrt{75} \,.\, \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Resposta: D

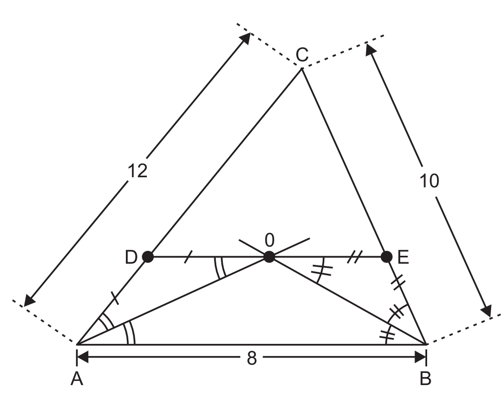
9. Na figura seguinte, o centro O da circunferência inscrita no triângulo ABC pertence ao segmento $\overline{DE}$, que é paralelo ao lado AB. Se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ medem, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 12 cm, então o perímetro do triângulo CDE é igual a:



a) 15 cm
b) 18 cm
c) 20 cm
d) 22 cm
e) 24 cm

Resolução

O é incentro do $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AO} \text{ é bissetriz de } C\hat{A}B \\ \overrightarrow{BO} \text{ é bissetriz de } A\hat{B}C \end{cases}$



assim: DA = DO e OE = BE

O perímetro do triângulo CDE é dado por:

CD + DO + OE + EC = CD + DA + BE + EC =

= CA + BC = 12 + 10 = 22

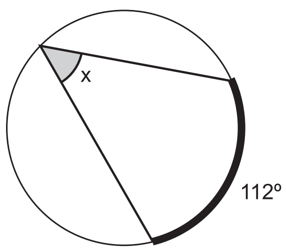
Resposta: D

Módulo 15 – Ângulos na Circunferência

De acordo com os dados das figuras, calcular **x** nos exercícios de 10 a 12, associando-o com:

a) 35° b) 56° c) 65° d) 80° e) 140°

10.



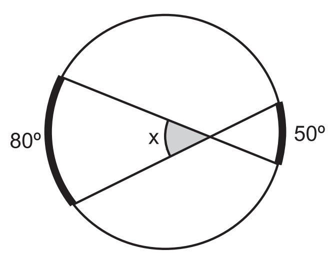
Resolução

x é ângulo inscrito

Assim: $x = \dfrac{112°}{2} \Leftrightarrow x = 56°$

Resposta: B

11.



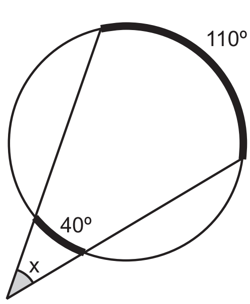
Resolução

x é ângulo excêntrico interior

Assim: $x = \dfrac{80° + 50°}{2} \Leftrightarrow x = 65°$

Resposta: C

12.



Resolução

x é ângulo excêntrico exterior

Assim: $x = \dfrac{110° - 40°}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{70°}{2} \Leftrightarrow x = 35°$

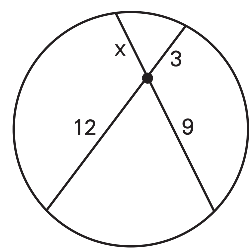
Resposta: A

Módulo 16 – Potência de um Ponto em Relação a uma Circunferência

De acordo com os dados das figuras, calcular **x** nos exercícios de 13 a 15, associando-o com:

a) 4 b) 12 c) $5\sqrt{7}$ d) 15 e) 20

13.

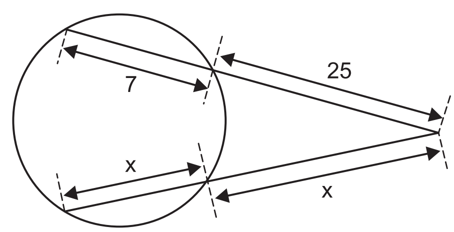


Resolução

$x \,.\, 9 = 12 \,.\, 3 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4$

Resposta: A

14.

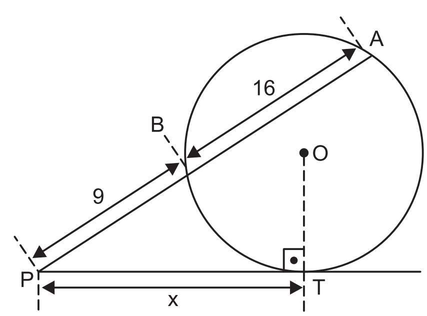


Resolução

$x \,.\, (x + x) = 25 \,.\, (25 + 7) \Leftrightarrow 2x^2 = 25 \,.\, 32 \Leftrightarrow x^2 = 25 \,.\, 16 \Leftrightarrow x = 20$

Resposta: E

15.



Resolução

$x^2 = 9 \,.\, (9 + 16) \Leftrightarrow x^2 = 9 \,.\, 25 \Leftrightarrow x = 15$

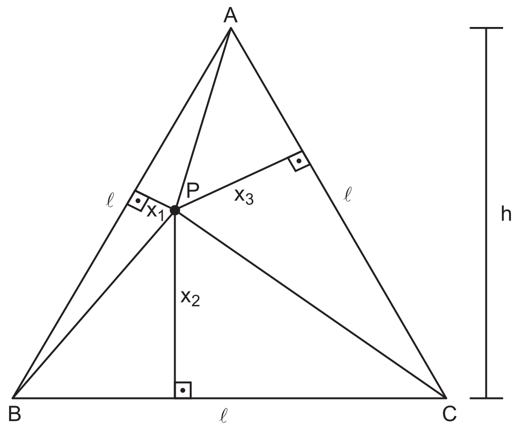
Resposta: D

Módulo 17 – Área das Figuras Planas

16. **(FUVEST)** – A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é

a) $5\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{3}$

Resolução



Considere o triângulo equilátero ABC de lado ℓ e altura h e $x_1 + x_2 + x_3 = 9$

Assim, sendo S a área do triângulo ABC, temos

$S = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{ACP} \Leftrightarrow$

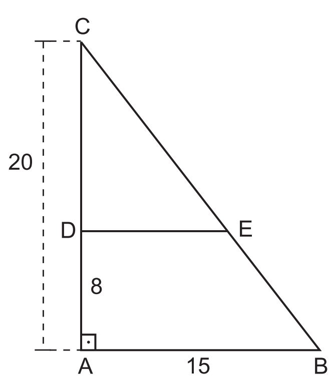
$$\Leftrightarrow \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot x_1}{2} + \frac{\ell \cdot x_2}{2} + \frac{\ell \cdot x_3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow h = 9$$

Como $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, vem: $9 = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{18}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ell = 6\sqrt{3}$

Resposta: B

17. **(UNESP)** – A figura representa um triângulo retângulo de vértices A, B e C, onde o segmento de reta DE é paralelo ao lado AB do triângulo.



Se AB = 15 cm, AC = 20 cm e AD = 8 cm, a área do trapézio ABED, em cm^2, é

a) 84. b) 96. c) 120. d) 150. e) 192.

Resolução

Como $\overline{DE} // \overline{AB}$ temos:

$C\hat{D}E = C\hat{A}B = 90°$

Assim, os triângulos CDE e CAB são semelhantes e, portanto:

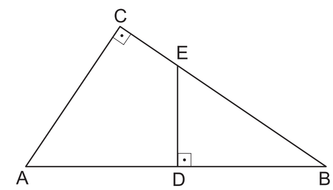
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \frac{DE}{15\text{ cm}} = \frac{12\text{ cm}}{20\text{ cm}} \Leftrightarrow DE = 9\text{ cm}$$

Logo, sendo S a área do trapézio ABED, em centímetros quadrados, temos:

$$S = \frac{(AB + DE) \cdot AD}{2} = \frac{(15 + 9) \cdot 8}{2} = 96$$

Resposta: B

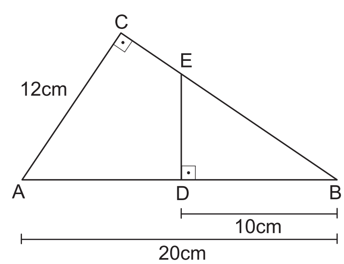
18. **(UNIFESP)** – Na figura, o ângulo C é reto, D é ponto médio de AB, DE é perpendicular a AB, AB = 20 cm e AC = 12 cm.



A área do quadrilátero ADEC, em centímetros quadrados, é

a) 96. b) 75. c) 58,5. d) 48. e) 37,5.

Resolução



I) No ΔABC, temos em cm, $(BC)^2 + (AC)^2 = (AB)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 400 - 144 \Rightarrow BC = 16$

II) Os triângulos ABC e EBD são semelhantes.

Dessa forma

$$\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{ED}{12} = \frac{10}{16} \Leftrightarrow ED = \frac{15}{2}$$

III) A área S do quadrilátero ADEC é a área do triângulo ABC menos a área do triângulo BDE.

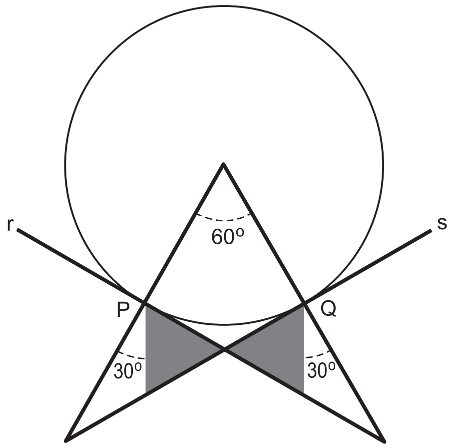
Dessa forma, em cm^2, temos:

$$S = \frac{BC \cdot AC}{2} - \frac{BD \cdot ED}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{16 \cdot 12}{2} - 10 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = 58{,}5$$

Resposta: C

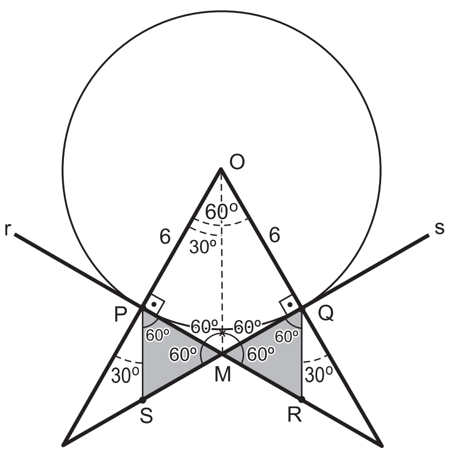
19. **(MACKENZIE)** – Na figura, a circunferência de raio 6 é tangente às retas r e s nos pontos P e Q. A área da região sombreada é



a) $8\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{2} + 2$ c) $6\sqrt{3}$

d) $8\sqrt{3} - 4$ e) $4\sqrt{3} + 4$

Resolução



No ΔOPM, retângulo em P, temos $OP = 6$ e $P\hat{O}M = 30°$. Assim,

$$\frac{PM}{OP} = \text{tg } 30° \Rightarrow \frac{PM}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow PM = 2\sqrt{3}$$

Os triângulos PMS e QMR são côngruos e equiláteros, pois $S\hat{P}M = P\hat{M}S = R\hat{Q}M = Q\hat{M}R = 60°$ e $\overline{PM} \cong \overline{QM}$.

A área A da região sombreada é:

$$A = 2 \,.\, A_{\Delta PSM} = 2 \,.\, \frac{(2\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

Resposta: C

Módulo 18 – Área das Figuras Circulares

20. **(UNIFESP)** – Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura I, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura II.

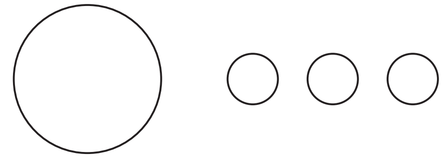


Figura I Figura II

Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por

a) S = 3s. b) S = 4s. c) S = 6s.
d) S = 8s. e) S = 9s.

Resolução

Sendo R o raio do círculo de área S e r o raio de cada círculo menor de área s, de acordo com o enunciado, tem-se:

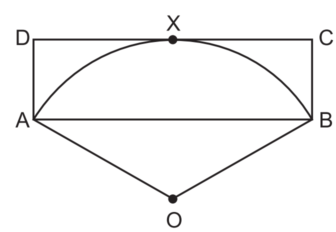
1) $2\pi R = 2\pi r + 2\pi r + 2\pi r \Leftrightarrow R = 3r \Leftrightarrow \dfrac{R}{r} = 3$

2) $\dfrac{S}{s} = \left(\dfrac{R}{r}\right)^2$

Assim: $\dfrac{S}{s} = 3^2 \Leftrightarrow S = 9.s$

Resposta: E

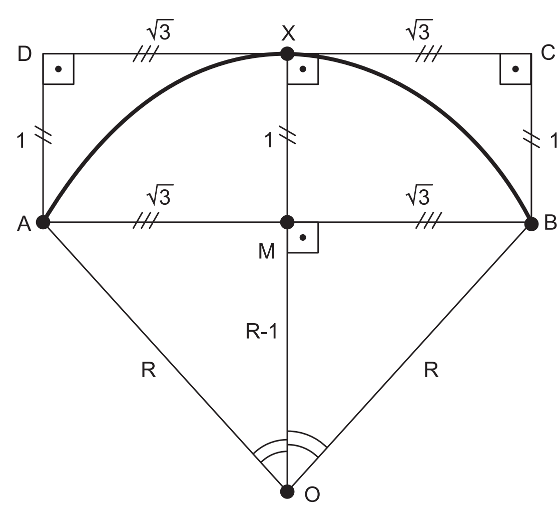
21. **(FUVEST)** – Na figura, OAB é um setor circular com centro em O, ABCD é um retângulo e o segmento $\overline{CD}$ é tangente em X ao arco de extremos A e B do setor circular. Se $AB = 2\sqrt{3}$ e $AD = 1$, então a área do setor OAB é igual a



a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{4\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{3}$ e) $\dfrac{7\pi}{3}$

Resolução

Sejam M o ponto médio de $\overline{AB}$ e R = OB = OX = OA o raio do setor



No triângulo retângulo MOB, tem-se:

1º) $(OB)^2 = (OM)^2 + (MB)^2 \Leftrightarrow R^2 = (R-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow R = 2$

2º) $\text{sen}(M\hat{O}B) = \dfrac{MB}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Assim: $M\hat{O}B = 60°$

O ângulo central do setor $(A\hat{O}B)$ é tal que:

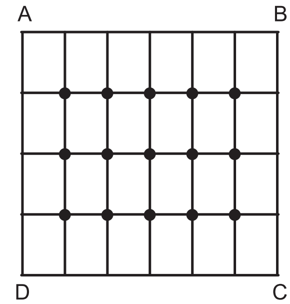
$A\hat{O}B = 2 \,.\, M\hat{O}B = 2 \,.\, 60° = 120°$

Logo a área S do setor OAB é dada por:

$S = \dfrac{120°}{360°} \,.\, \pi R^2 = \dfrac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, 2^2 = \dfrac{4\pi}{3}$

Resposta: C

22. **(FATEC)** – Na figura a seguir tem-se o quadrado ABCD, cujo lado mede 30 cm. As retas verticais dividem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em 6 partes iguais; as retas horizontais dividem os lados AD e BC em 4 partes iguais. Considere o maior número possível de círculos que podem ser construídos com centros nos pontos assinalados, raios medindo 5 cm e sem pontos internos comuns. Se do quadrado forem retirados todos esses círculos, a área da região remanescente, em centímetros quadrados, será igual a



a) $150.(6 - \pi)$

b) $160.(4 - \pi)$

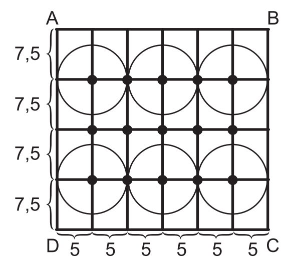
c) $180.(5 - \pi)$

d) $180.(4 - \pi)$

e) $300.(3 - \pi)$

Resolução

O maior número possível de círculos que podem ser construídos com centros nos pontos assinalados, raios medindo 5 cm e sem pontos internos comuns é igual a seis, conforme figura a seguir:



Se do quadrado forem retirados todos esses seis círculos, a área S da região remanescente, em centímetros quadrados é:

$S = 30^2 - 6 \,.\, \pi \,.\, 5^2$

$S = 150 \,.\, (6 - \pi)$

Resposta: A

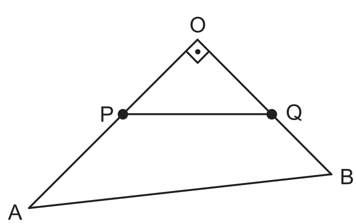
EXERCÍCIOS-TAREFA

Módulo 11 – Relações Métricas nos Triângulos Retângulos

1. **(FUVEST)** – Em um triângulo retângulo, OAB retângulo em **O**, com AO = a e OB = b, são dados os pontos **P** em $\overline{AO}$ e **Q** em $\overline{OB}$ de tal maneira que AP = PQ = QB = x. Nestas condições, o valor de **x** é:

a) $\sqrt{ab} - a - b$ b) $a + b - \sqrt{2ab}$ c) $\sqrt{a^2 + b^2}$

d) $a + b + \sqrt{2ab}$ e) $\sqrt{ab} + a + b$



2. **(FUVEST)** – Qual é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujo perímetro é igual a 2?

3. **(PUC-SP)** – A diagonal de uma tela retangular de TV mede 22 polegadas. Quais são as dimensões da tela, também em polegadas, sabendo que a razão entre elas é $\dfrac{3}{4}$?

a) 13,2 e 17,6 b) 14,2 e 18,4 c) 12,6 e 16,4

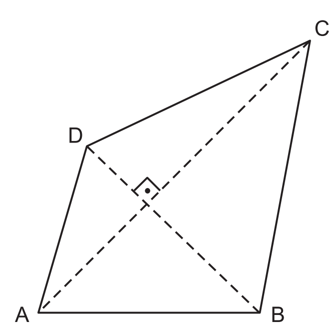
d) 15,5 e 19,5 e) 11,8 e 15,2

4. **(FUVEST)** – Uma escada de 25 dm de comprimento se apoia num muro do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

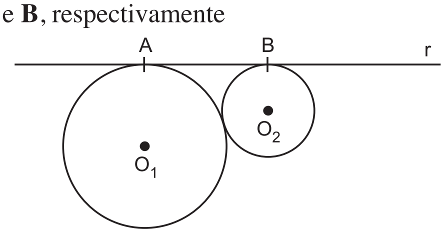
5. **(UEPA)** – No quadrilátero ABCD abaixo, tem-se: AB = 4 cm, BC = 5 cm, CD = 6 cm e $\overline{AC}$ perpendicular à $\overline{BD}$. A medida do lado $\overline{AD}$ vale:

a) 7 cm b) 3 cm c) $3\sqrt{2}$ cm

d) $3\sqrt{5}$ cm e) $3\sqrt{3}$ cm



6. **(UNIFOR)** – Na figura a seguir têm-se as circunferências de centros O_1 e O_2, tangentes entre si e tangentes à reta **r** nos pontos **A** e **B**, respectivamente



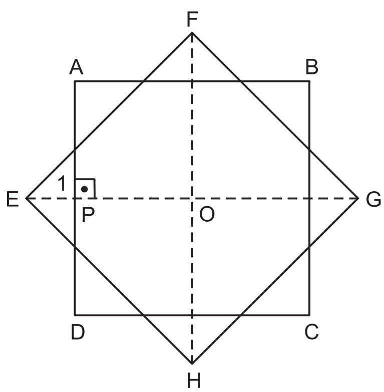
Se os raios das circunferências medem 18 cm e 8 cm, então o segmento $\overline{AB}$ mede, em centímetros:

a) 20 b) 22 c) 23 d) 24 e) 26

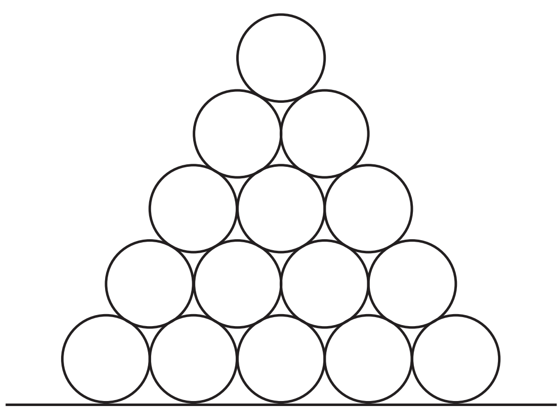
7. **(FUVEST)** – Na figura seguinte, os quadrados ABCD e EFGH têm, ambos, lado **a** e centro **O**. Se EP = 1, então **a** é:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) 2 e) $\dfrac{2}{\sqrt{2} - 1}$



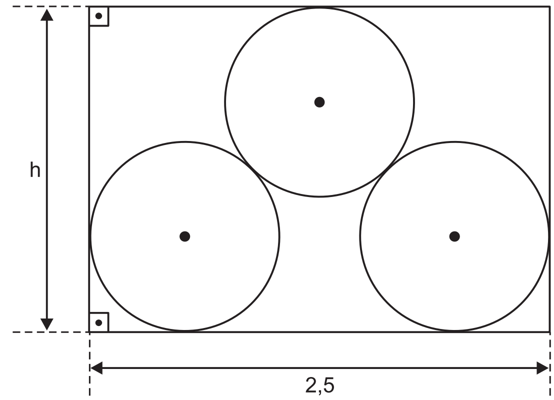
8. **(UNICAMP)** – 15 toras de madeira de 1,5 m de diâmetro são empilhadas segundo a figura abaixo. Calcule a altura da pilha.



9. **(FUVEST)** – Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura a seguir. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a algura **h**, em metros, é:

a) $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$ b) $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$ c) $\dfrac{1 + \sqrt{7}}{4}$

d) $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ e) $1 + \dfrac{\sqrt{7}}{4}$



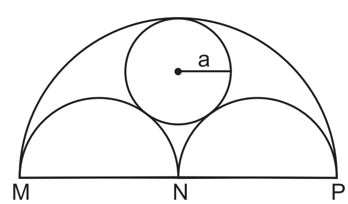
10. **(FUVEST)** – Uma folha de papel de dimensões 6 x 8 é dobrada de modo que dois vértices diagonalmente opostos coincidam. Determine o comprimento do vinco.

11. **(FUVEST)** – O triângulo ABC é retângulo no vértice **A**. As medidas dos catetos são **b** e **c** e a altura relativa à hipotenusa mede **h**. Prove que a igualdade abaixo é verdadeira.

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

12. **(MACKENZIE)** – A circunferência de raio **a** é tangente às duas semicircunferências menores e à semicircunferência maior. Se $\overline{MN} = \overline{NP} = R$, então **a** é igual a:

a) $R\sqrt{2}/2$ b) $R\sqrt{3}/2$ c) R/4 d) R/3 e) R/2

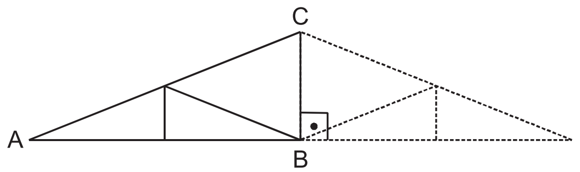


13. **(UNICAMP)** – Dois navios partiram ao mesmo tempo, de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Trinta minutos após a partida, a distância entre os dois navios era de 15 km e, após mais 15 minutos, um dos navios estava 4,5 km mais longe do porto que o outro.

a) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

b) Qual a distância de cada um dos navios até o porto de saída, 270 minutos após a partida?

14. **(MACKENZIE)** – A figura a seguir representa uma estrutura de construção chamada tesoura de telhado. Sua inclinação é tal que, a cada metro deslocado na horizontal, há um deslocamento de 40 cm na vertical. Se o comprimento da viga AB é 5 m, das alternativas abaixo, a que melhor aproxima o valor do comprimento da viga AC, em metros, é



a) 5,4. b) 6,7. c) 4,8. d) 5,9. e) 6,5.

Módulo 12 – Relações Métricas nos Triângulos Quaisquer

1. Os lados de um triângulo ABC medem: AB = 15, BC = 13 e AC = 14. A projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$ mede:

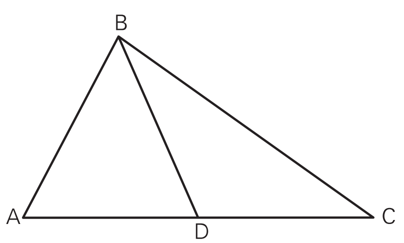
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

2. Os lados de um triângulo escaleno tem as suas medidas, em centímetros, expressas por números inteiros consecutivos e seu perímetro é de 42 centímetros. Dentre as três alturas desse triângulo, aquela que não é a maior nem a menor mede, em centímetros:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 11

3. **(FUVEST)** – Na figura AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, $B\hat{A}C = 30°$, e BD = DC. A medida de BC, em cm, é:

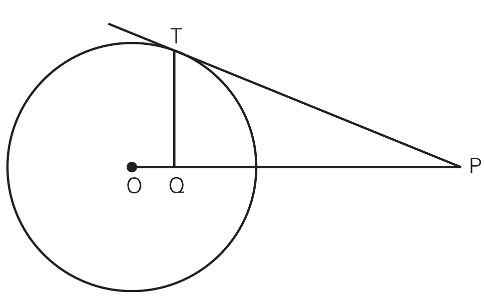
a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$



4. **(FUVEST)** – Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{15}$

5. **(UFMG)** – Observe esta figura:



Nesta figura, o círculo tem centro **O** e raio 6 e OP = 16. A reta PT é tangente ao círculo em **T** e o segmento TQ é perpendicular à reta OP.

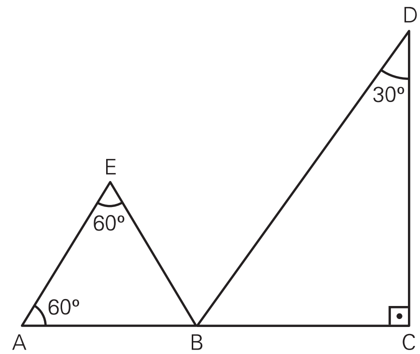
Assim sendo, o comprimento do segmento QP é:

a) 13,75 b) 13,85 c) 14,25 d) 14,5

6. **(FATEC)** – Consideremos um triângulo de vértices **A**, **B** e **C**, tal que AC = 5 e BC = 10. Se **D** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e AD = DC, então AB é igual a:

a) $5\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{6}$ c) $5\sqrt{7}$ d) $6\sqrt{5}$ e) $7\sqrt{5}$

7. **(FATEC)** – Na figura abaixo, além das medidas dos ângulos indicados, sabe-se que B é ponto médio de $\overline{AC}$ e AC = 2 cm.



A medida de $\overline{DE}$, em centímetros, é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 1,5 e) $\sqrt{3}$

8. **(CESGRANRIO)** – Em um triângulo ABC, AB = 3, BC = 4 e $A\hat{B}C = 60°$. O lado $\overline{AC}$ mede:

a) 5 b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{37}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3}$

9. **(CESGRANRIO)** – Se 4 cm, 5 cm e 6 cm são as medidas dos lados de um triângulo, então o cosseno do seu menor ângulo vale:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

10. **(PUC-SP)** – **a**, **b** e **c** são as medidas dos lados de um triângulo ABC. Então se

a) $a^2 < b^2 + c^2$, o triângulo ABC é retângulo.
b) $a^2 = b^2 + c^2$, o lado **a** mede a soma das medidas de **b** e **c**.
c) $a^2 > b^2 + c^2$, o ângulo oposto ao lado que mede **a** é obtuso.
d) $b^2 = a^2 + c^2$, **a** é hipotenusa e **b** e **c** são catetos.
e) nenhuma das anteriores é correta.

11. **(FEI)** – Num triângulo cujos lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm, a projeção do lado de 4 cm sobre o de 5 cm mede:

a) 2,0 cm b) 1,5 cm c) 1,0 cm
d) 0,5 cm e) 2,5 cm

12. **(FUND. CARLOS CHAGAS-SP)** – **a** e **b** são números reais, tais que a > b > 0. O triângulo cujos lados medem: $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$ e 2ab é sempre:

a) triângulo retângulo b) triângulo acutângulo
c) triângulo obtusângulo d) triângulo isósceles
e) triângulo equilátero

13. **(FUVEST)** – Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.
Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

Módulo 13 – Lugares Geométricos

1. O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de duas retas concorrentes desse plano é:
a) uma circunferência;
b) uma mediatriz;
c) duas retas concorrentes e não perpendiculares;
d) duas retas concorrentes e perpendiculares;
e) uma semirreta (bissetriz).

2. Considere duas retas **r** e **s** paralelas distintas e uma reta **t** transversal às duas. O número de pontos do plano das paralelas equidistantes das retas **r**, **s** e **t** é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3. O número de pontos que constituem o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das retas suportes dos lados de um triângulo desse plano é:
a) 1 ponto b) 2 pontos c) 4 pontos
d) infinitos pontos e) nenhum ponto.

4. **(UNIV. ESTADUAL DO PARÁ)** – O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de dois pontos **A** e **B** do mesmo plano é:
a) a mediana do segmento $\overline{AB}$
b) uma circunferência que passa pelos pontos A e B
c) o circuncentro de um triângulo que tenha $\overline{AB}$ para um de seus lados
d) a mediatriz do segmento $\overline{AB}$
e) o ponto médio do segmento $\overline{AB}$

5. Um ponto **P** equidista dos vértices de um triângulo ABC. O ponto **P** é:
a) o baricentro do triângulo ABC
b) o incentro do triângulo ABC
c) o circuncentro do triângulo ABC
d) o ortocentro do triângulo ABC
e) um ex-incentro do triângulo ABC

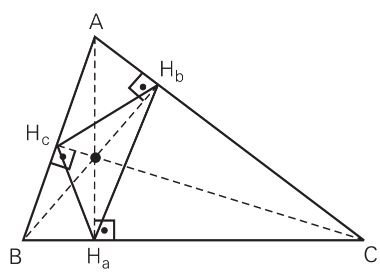
6. Um ponto **Q** pertencente à região interna de um triângulo DEF equidista dos lados desse triângulo. O ponto **Q** é:
a) o baricentro do triângulo DEF
b) o incentro do triângulo DEF
c) o circuncentro do triângulo DEF
d) o ortocentro do triângulo DEF
e) um ex-incentro do triângulo DEF

7. Qual dos pontos notáveis de um triângulo pode ser um de seus vértices?
a) baricentro b) incentro c) circuncentro
d) ortocentro e) ex-incentro

8. Qual dos pontos notáveis de um triângulo pode ser o ponto médio de um de seus lados?
a) baricentro b) incentro c) circuncentro
d) ortocentro e) ex-incentro

9. Quais pontos notáveis de um triângulo nunca se posicionam externamente em relação à sua região triangular?
a) baricentro e ortocentro b) incentro e circuncentro
c) baricentro e circuncentro d) incentro e ortocentro
e) baricentro e incentro

10. Chama-se **triângulo órtico** ao triângulo cujos vértices são os "pés" das alturas nos lados, conforme ilustra a figura a seguir. Demonstra-se que "as alturas de um triângulo acutângulo são bissetrizes do triângulo órtico correspondente". Portanto, o ortocentro de um triângulo acutângulo ABC, para seu triângulo órtico $H_aH_bH_c$ é:



a) baricentro b) incentro c) circuncentro
d) ortocentro e) ex-incentro

11. **(UNITAU)** – O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:
a) mediana b) mediatriz c) bissetriz
d) altura e) base

12. **(ESAM)** – O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta do lado oposto é denominada altura. O ponto de intersecção das três retas suportes das alturas do triângulo é chamado:
a) baricentro b) incentro c) circuncentro
d) ortocentro e) mediano

Módulo 14 – Pontos e Segmentos Notáveis no Triângulo

1. **O** e **B** são respectivamente o ortocentro e o baricentro de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. A medida, em centímetros do segmento $\overline{OB}$ é igual a:

a) $\frac{5}{3}$ b) 3 c) $\frac{10}{3}$ d) 4 e) 5

2. **O** e **C** são respectivamente o ortocentro e o circuncentro de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{OC}$, é igual a:

a) $\dfrac{5}{3}$ b) 3 c) $\dfrac{10}{3}$ d) 4 e) 5

3. **O** e **I** são respectivamente o ortocentro e o incentro de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. A medida, em centímetros, do segmento $\overline{OI}$, é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 3 d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

4. **(CESESP-SP)** – Dentre os quatro centros principais de um triângulo qualquer, há dois deles que podem se situar no seu exterior, conforme o tipo de triângulo. Assinale a alternativa em que os mesmos são citados.
a) o baricentro e o ortocentro.
b) o baricentro e o incentro.
c) o circuncentro e o incentro.
d) o circuncentro e o ortocentro.
e) o incentro e o ortocentro.

5. **(PUC-SP)** – Uma circunferência de raio 1 tangencia os lados de um ângulo de 60°. A distância entre o centro dessa circunferência e o vértice do ângulo é igual a:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

6. A razão entre as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a uma mesmo triângulo equilátero, nessa ordem é igual a:

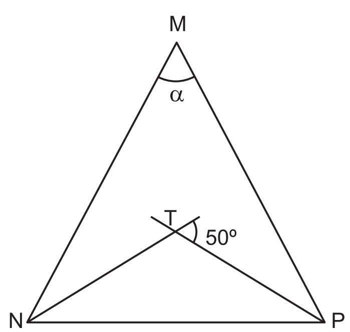
a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{2}{3}$

d) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ e) $\dfrac{3}{4}$

7. **(MACKENZIE)** – O lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede $2\sqrt{3}$. O raio da circunferência é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{3}$ d) 4 e) $3\sqrt{3}$

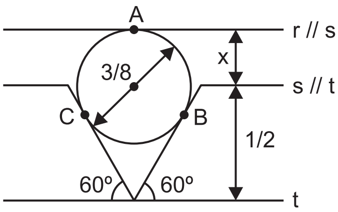
8. **(MACKENZIE)** – Se, na figura, **T** é o incentro do triângulo MNP, a medida do ângulo α é:
a) 45° b) 50° c) 60° d) 70° e) 80°



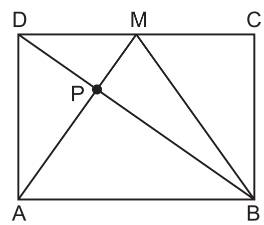
9. **(UNESP)** – Sejam **A**, **B**, **C** pontos distintos no interior de um círculo, sendo **C** o centro do mesmo. Se construirmos um triângulo inscrito no círculo com um lado passando por **A**, outro por **B** e outro por **C** podemos afirmar que este triângulo:
a) é acutângulo b) é retângulo c) é obtusângulo
d) não é isósceles e) pode ser equilátero

10. Na figura seguinte onde as retas **r**, **s** e **t** são todas paralelas, se **A**, **B** e **C** são pontos de tangência, então **x** é igual a:

a) $\dfrac{1}{32}$ b) $\dfrac{1}{16}$ c) $\dfrac{3}{32}$ d) $\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{3}{16}$



11. Na figura seguinte, ABCD é um retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Se AB = 6, então AP é igual a:



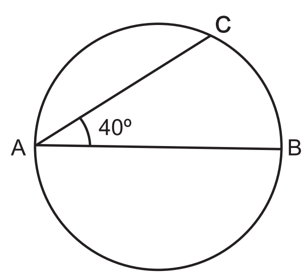
a) 2 b) 3 c) 4 d) $2\sqrt{5}$ e) 5

12. **(FUVEST)** – Uma circunferência tem centro **O** e raio **r**. Duas retas distintas passam por um ponto **P** e são tangentes à circunferência nos pontos **A** e **B**. Se o triângulo PAB é equilátero, então PO vale:

a) $\dfrac{2}{3}r$ b) $r\sqrt{2}$ c) 2r d) $\dfrac{\pi}{3}r$ e) $\dfrac{3}{2}r$

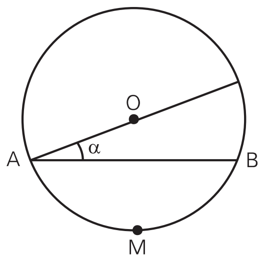
Módulo 15 – Ângulos na Circunferência

1. **(PUC-SP)** – Na figura, $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência. O menor dos arcos $\overset{\frown}{AC}$ mede:



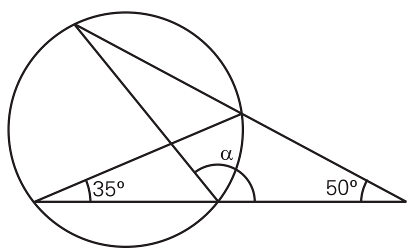
a) 100° b) 120° c) 140°
d) 150° e) 160°

2. **(CESGRANRIO-RJ)** – Em um círculo de centro **O**, está inscrito o ângulo α (ver figura). Se o arco $\overset{\frown}{AMB}$ mede 130°, então o ângulo α mede:



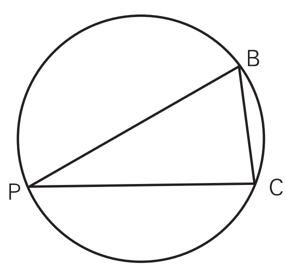
a) 25° b) 30°
c) 40° d) 45°
e) 50°

3. **(UNIMEP)** – Na figura, o ângulo α é igual a:



a) 95° b) 120° c) 115° d) 85° e) 105°

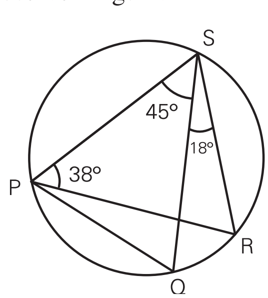
4. **(FUVEST-SP)** – Os pontos, **B**, **P** e **C** pertencem a uma circunferência γ e $\overline{BC}$ é lado de um polígono regular inscrito em γ. Sabendo-se que o ângulo $B\hat{P}C$ mede 18° podemos concluir que o número de lados do polígono é igual a:



a) 5 b) 6 c) 7 d) 10 e) 12

5. **(FUVEST-SP)** – Os pontos **A**, **B** e **C** pertencem a uma circunferência de centro **O**. Sabe-se que $\overline{OA}$ é perpendicular a $\overline{OB}$ e forma com $\overline{BC}$ um ângulo de 70°. Então, a tangente à circunferência no ponto **C** forma com a reta $\overleftrightarrow{OA}$ um ângulo de:
a) 10° b) 20° c) 30° d) 40° e) 50°

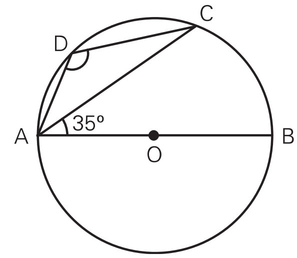
6. **(UFMG)** – Observe a figura:



Suponha que as medidas dos ângulos $P\hat{S}Q$, $Q\hat{S}R$ e $S\hat{P}R$, assinalados na figura, sejam 45°, 18° e 38°, respectivamente. A medida do ângulo $P\hat{Q}S$, em graus, é:

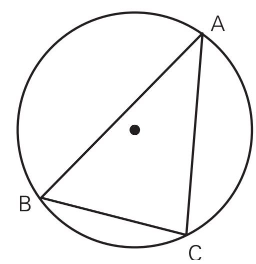
a) 38 b) 63 c) 79 d) 87

7. **(FGV)** – A medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro **O** é:



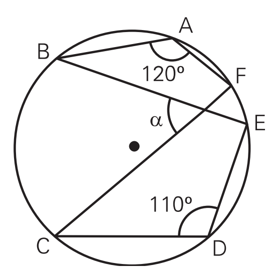
a) 125° b) 110° c) 120° d) 100° e) 135°

8. **(FUVEST)** – Na figura abaixo, o lado $\overline{BC}$ do triângulo é congruente ao raio da circunferência. Qual a medida do ângulo $B\hat{A}C$?



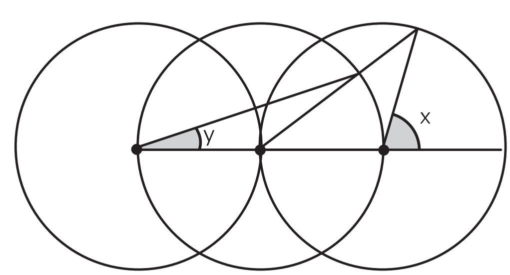
a) 30° b) 40° c) 35° d) 45° e) 50°

9. **(UNESP)** – Os pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** pertencem à uma circunferência. O valor de α é

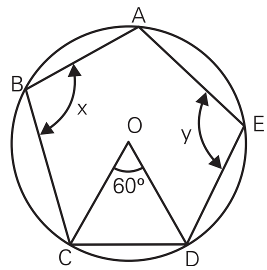


a) 60° b) 50° c) 45° d) 40° e) 35°

10. **(UNICAMP)** – Calcule a medida angular **y** em função de **x**.



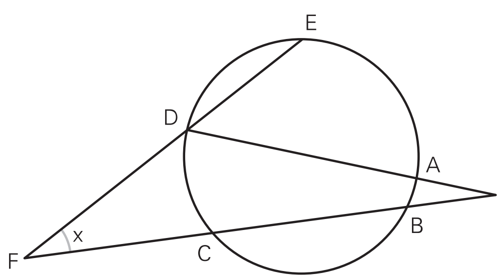
11. **(PUC-SP)** – O pentágono ABCDE da figura seguinte está inscrito em um círculo de centro **O**. O ângulo central $C\hat{O}D$ mede 60°. Então x + y é igual a:



a) 180° b) 185° c) 190° d) 210° e) 250°

12. **(CESGRANRIO-RJ)** – Se, na figura, $\widehat{AB} = 20°$, $\widehat{BC} = 124°$, $\widehat{CD} = 36°$ e $\widehat{DE} = 90°$, então o ângulo **x** mede:

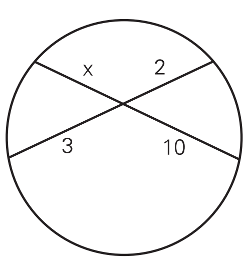
a) 34° b) 35°30’ c) 37° d) 38°30’ e) 40°



Módulo 16 – Potência de um Ponto em Relação a uma Circunferência

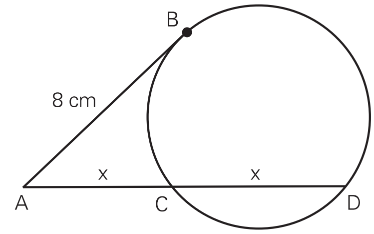
1. **(FUVEST)** – O valor de **x** na figura abaixo é:

a) 20/3 b) 3/5 c) 1 d) 4 e) 15

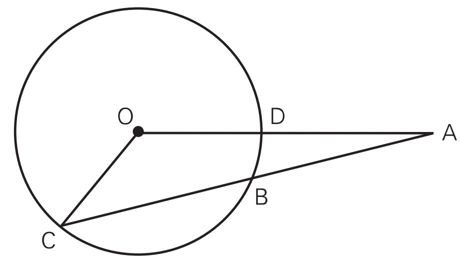


2. **(FEI)** – Na figura seguinte, $\overline{AB}$ é tangente à circunferência no ponto **B** e mede 8 cm. Se $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma medida **x**, o valor de **x**, em cm, é:

a) 4 b) $4\sqrt{3}$ c) 8 d) $3\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$



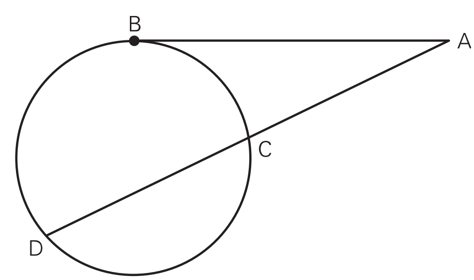
3. **(CESGRANRIO)** – Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em centímetros:



a) 36 b) 45 c) 48 d) 50 e) 54

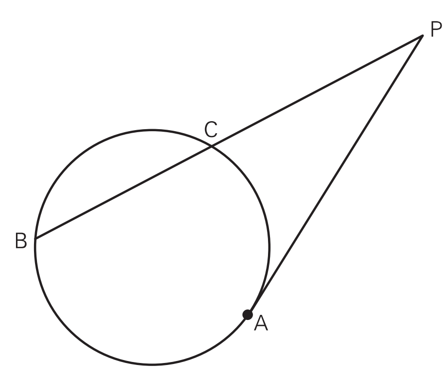
4. **(UFMA)** – De um ponto exterior a uma circunferência são traçadas uma tangente e uma secante, conforme a figura seguinte. A tangente $\overline{AB}$ mede 10 m e as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são iguais. Assim, o comprimento da secante $\overline{AD}$ é igual a:

a) 10 m b) $5\sqrt{2}$ m c) $10\sqrt{2}$ m
d) $15\sqrt{2}$ m e) 15 m



5. **(UNIV. ESTADUAL DO PARÁ)** – Na figura seguinte, sabe-se que PA = 3.PC. Então…

a) PB = 4PC b) PB = 9PC c) 2PB = 3PC
d) PB = 3PC e) 3PB = 4PC



6. **(MACKENZIE)** – Um ponto **P** está no interior de uma circunferência de centro **O** de 13 cm de raio e dista 5 cm do ponto **O**. Pelo ponto **P** traça-se uma corda $\overline{AB}$ de 25 cm. As medidas que **P** determina sobre a corda $\overline{AB}$ são:

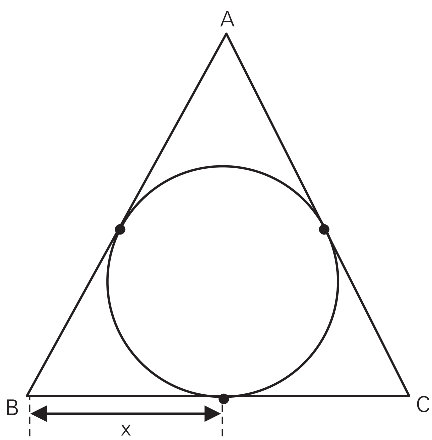
a) 11 cm e 14 cm
b) 7 cm e 18 cm
c) 16 cm e 9 cm
d) 5 cm e 20 cm
e) 8 cm e 17 cm

7. **(FATEC)** – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 cm. Se a medida de um dos catetos é igual a $\dfrac{3}{4}$ da medida do outro, então a medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é:

a) 0,05 cm
b) 0,10 cm
c) 0,15 cm
d) 0,20 cm
e) 0,25 cm

8. **(FUVEST) –** Os segmentos AB e CD se interceptam num ponto P e são cordas perpendiculares de um mesmo círculo. Se AP = CP = 2 e PB = 6, ache o raio do círculo.

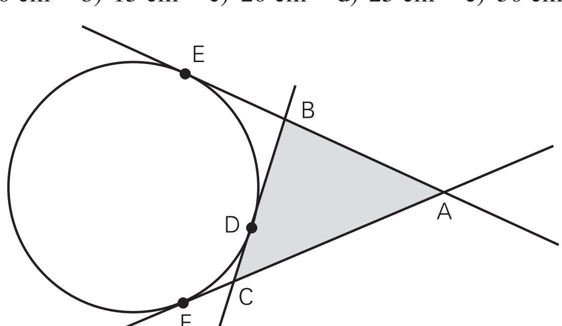
9. **(FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS-SP)** – A circunferência está inscrita no triângulo ABC. Se AB = 8, AC = 9 e BC = 7, então **x** vale:



a) 1,5
b) 2,8
c) 3,0
d) 4,6
e) 5,0

10. **(FEI)** – Na figura seguinte, em que **D**, **E** e **F** são pontos de tangência e AE = 10 cm, o perímetro do triângulo ABC (hachurado) vale:

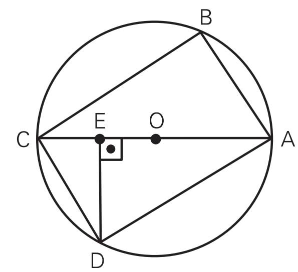
a) 10 cm
b) 15 cm
c) 20 cm
d) 25 cm
e) 30 cm



11. **(MACKENZIE-SP)** – Dado um triângulo retângulo de catetos **a** e **b** e sendo **r** e **R** os raios das circunferências inscrita e circunscrita respectivamente, temos:

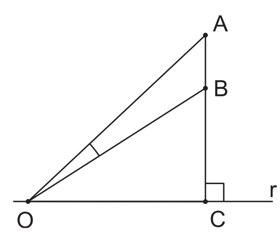
a) a + b = R + r
b) a + b = 2 (R + r)
c) a + b = 4 (R + r)
d) a + b = 4 (R – r)
e) a + b = 8 (R – r)

12. **(MACKENZIE-SP)** – Na figura: AB = 30, BC = 40, CD = 20, **O** é o centro da circunferência e $D\hat{E}A$ = 90°. O valor de CE é:



a) 12,5
b) 10
c) 8
d) 5
e) faltam dados para calcular

13. **(UNIFESP)** – Na figura, o segmento AC é perpendicular à reta r. Sabe-se que o ângulo AÔB, com O sendo um ponto da reta r, será máximo quando O for o ponto onde r tangencia uma circunferência que passa por A e B. Se AB representa uma estátua de 3,6 m sobre um pedestal BC de 6,4 m, a distância OC, para que o ângulo AÔB de visão da estátua seja máximo, é



a) 10 m.
b) 8,2 m.
c) 8 m.
d) 7,8 m.
e) 4,6 m.

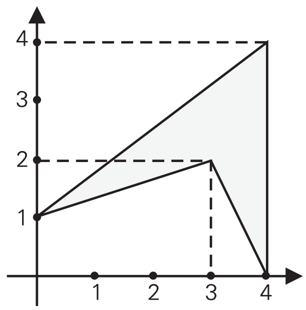
Módulo 17 – Área das Figuras Planas

1. **(PUCCAMP)** – Considere o trapézio representado na figura a seguir, cujas medidas dos lados são dadas em centímetros.

A área desse trapézio, em centímetros quadrados, é:

a) 18
b) 24
c) 30
d) 32
e) 36

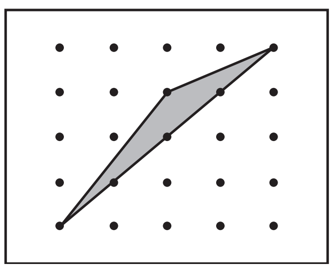
2. **(FGV)** – A área da figura sombreada, no diagrama abaixo, vale



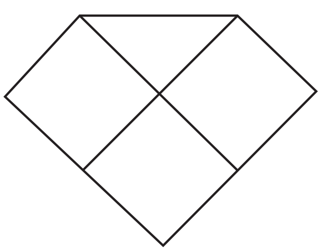
a) 4,0 b) 3,5 c) 3,0
d) 4,5 e) 5,0

3. **(FUVEST)** – Considere o triângulo representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1 cm. A área do triângulo, em centímetros quadrados, é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6



4. **(ESPM)** – Examine o polígono abaixo desenhado, que é formado a partir de três quadrados, cada um com lados de medida **x** cm.



O perímetro, em centímetros, e a área, em centímetros quadrados, desse polígono, são dados, respectivamente, pelas expressões:

a) $\dfrac{11x}{2}$; $3x^2$

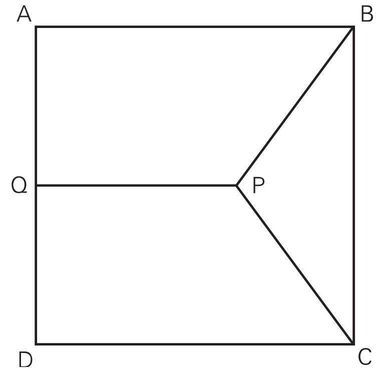
b) $6x + \sqrt{2}$; $\dfrac{7x^2}{2}$

c) $(6 + \sqrt{2})x$; $\dfrac{7x^2}{2}$

d) $(6+\sqrt{2})x$; $7x^2$

e) $6x + \sqrt{2}$; $\dfrac{11x^2}{2}$

5. **(UNESP)** – Considere um quadrado ABCD cuja medida dos lados é 1 dm. Seja **P** um ponto interior ao quadrado e equidistante dos vértices **B** e **C** e seja **Q** o ponto médio do lado $\overline{DA}$.

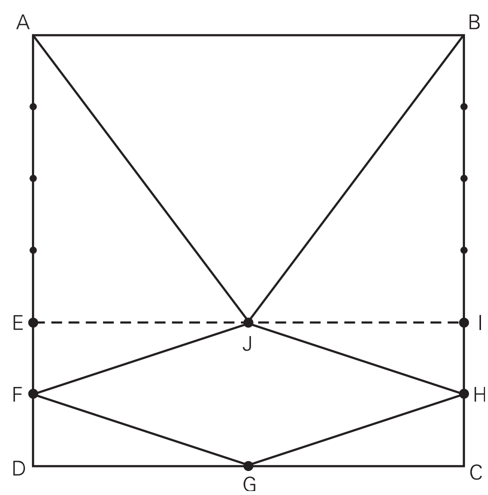


Se a área do quadrilátero ABPQ é o dobro da área do triângulo BCP, a distância do ponto **P** ao lado $\overline{BC}$ é:

a) $\dfrac{2}{3}$ dm b) $\dfrac{2}{5}$ dm c) $\dfrac{3}{5}$ dm

d) $\dfrac{1}{2}$ dm e) $\dfrac{4}{7}$ dm

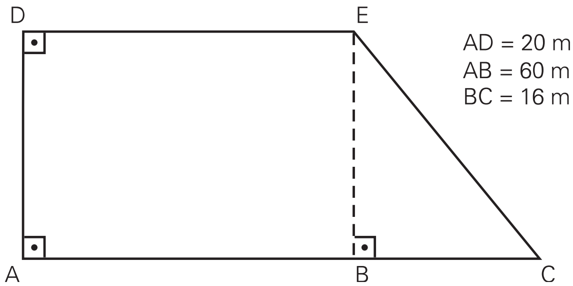
6. **(FATEC)** – Na figura a seguir, os lados do quadrado ABCD medem 6 cm e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ estão divididos em 6 partes iguais.



Se os pontos **G** e **J** são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EI}$, então a razão entre as áreas do losango FGHJ e do triângulo ABJ, nessa ordem, é:

a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{2}{5}$

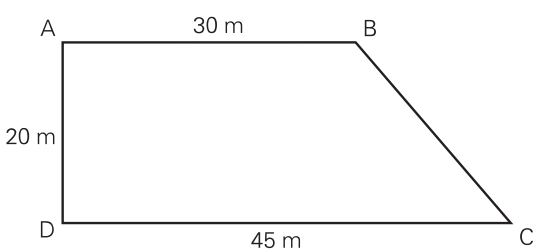
7. **(FUVEST)** – Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:



Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão tenha sido feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto **A**, em metros, deverá ter sido:

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

8. **(UNISINOS)** – Um homem deixou como herança para seus dois filhos um terreno que tem a forma de um trapézio retângulo (conforme figura abaixo). Para que a parte de cada um tivesse a mesma área, os dois filhos resolveram dividir o terreno, traçando uma paralela ao lado $\overline{AD}$. A que distância do ponto **D**, em metros, deve ser traçada esta paralela?



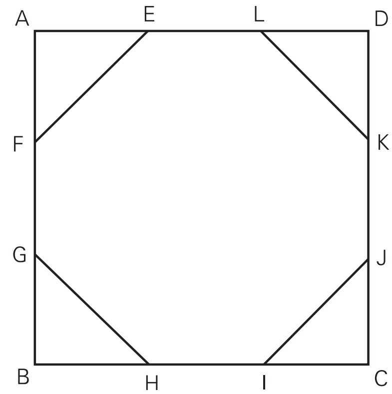
a) 15,80 b) 18,75 c) 20,84
d) 23,15 e) 26,03

9. **(FUVEST)** – A área de um triângulo de lados **a**, **b** e **c** é dada pela fórmula $S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ onde **p** é o semi-perímetro ($2p = a + b + c$).

Qual a área de um triângulo de lados 5, 6 e 7?

a) 15 b) 21 c) $7\sqrt{5}$ d) $\sqrt{210}$ e) $6\sqrt{6}$

10. **(PUC)** – Seja o octógono EFGHIJKL, inscrito num quadrado de 12 cm de lado, conforme mostra a figura a seguir.



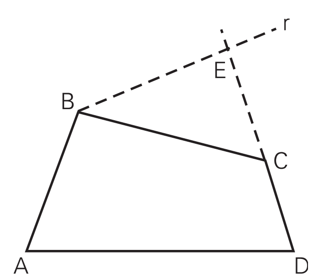
Se cada lado do quadrado está dividido pelos pontos assinalados em segmentos congruentes entre si, então a área do octógono, em centímetros quadrados, é:

a) 98 b) 102 c) 108 d) 112 e) 120

11. **(FUVEST)** – Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 2 e a hipotenusa mede 6. A área do triângulo é:

a) $2\sqrt{2}$ b) 6 c) $4\sqrt{2}$ d) 3 e) $\sqrt{6}$

12. **(FUVEST)** – Na figura abaixo, a reta **r** é paralela ao segmento $\overline{AC}$, sendo **E** o ponto de intersecção de **r** com a reta determinada por **D** e **C**. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:

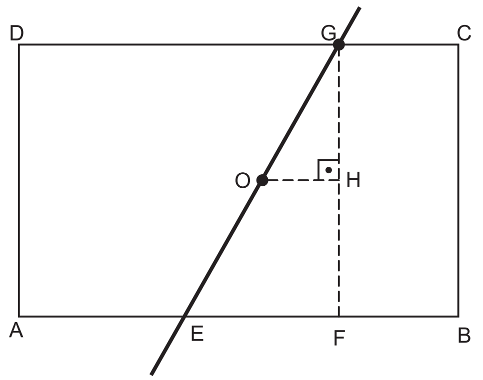


a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

13. **(MACKENZIE)** – Em um trapézio ABCD, os pontos P, Q, M e N são médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. A razão entre a área do quadrilátero PQMN e a área do trapézio é

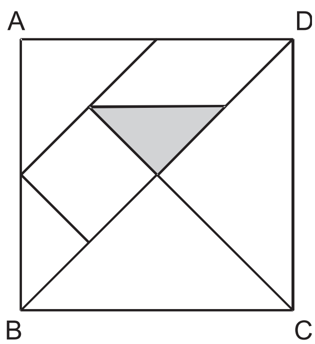
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{5}$

14. **(MACKENZIE)** – No retângulo ABCD da figura, de área 60 cm^2, o ponto O é o encontro das diagonais, EF = 4 cm e GH = 3 cm. A área e a do retângulo AFGD, em cm^2, é



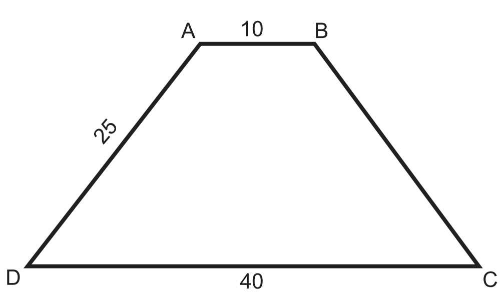
a) 42 b) 49 c) 55 d) 36 e) 64

15. **(MACKENZIE)** – A figura a seguir representa as peças do Tangram, quebra-cabeça chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sendo a área do quadrado ABCD igual a 4 cm^2, a área do triângulo sombreado, em cm^2, é



a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

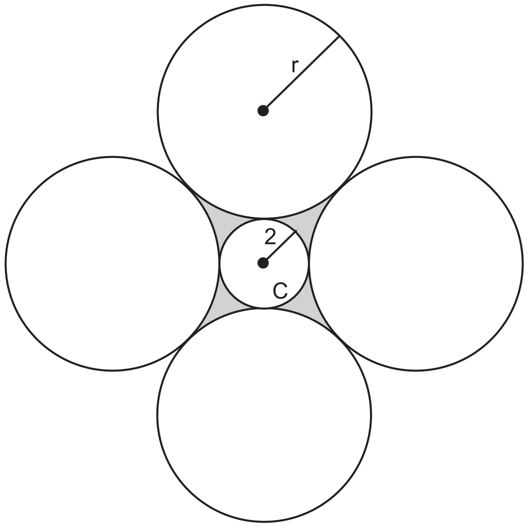
16. **(PUC)** – A figura abaixo representa um terreno com a forma de um trapézio isósceles, cujas dimensões indicadas são dadas em metros.



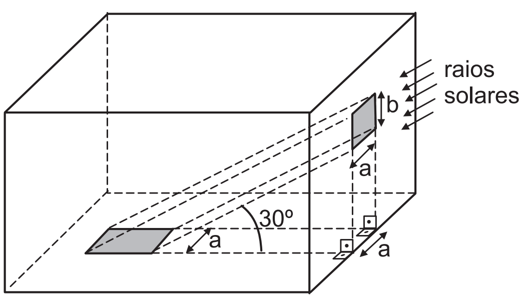
Pretende-se construir uma cerca paralela ao lado $\overline{AB}$ de modo a dividir o terreno em duas superfícies de áreas iguais. O comprimento dessa cerca, em metros, deverá ser aproximadamente igual a

a) 26 b) 29 c) 33 d) 35 e) 37

17. **(FUVEST)** – Na figura abaixo, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.
Se o raio de C é igual a 2, determinar
a) o valor de r.
b) a área da região hachurada.



18. **(UNIFESP)** – Imagine uma parede vertical com uma janela retangular, de lados a e b, conforme a figura, onde a é paralelo ao piso plano e horizontal. Suponhamos que a luz solar incida perpendicularmente ao lado a, com inclinação de 60° em relação à parede.



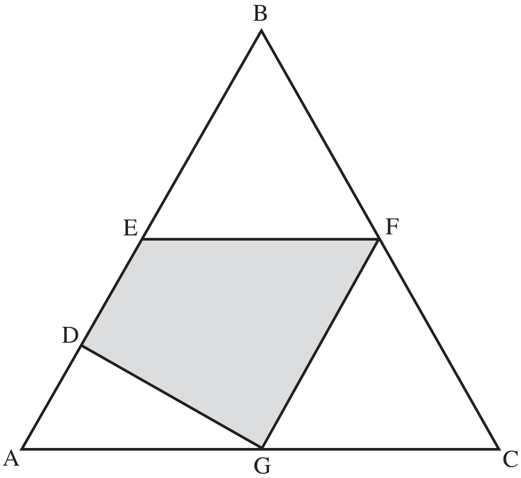
Se A_1 e A_2 representam, respectivamente, as áreas da janela e de sua imagem projetada no piso, a razão $\frac{A_1}{A_2}$ vale:

a) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

19. **(UNESP)** – Considere os pontos do plano (0,0), (0,1), (2,1), (2,3), (5,3) e (7,0). Representando geometricamente esses pontos no plano cartesiano e ligando-os por meio de segmentos de retas obedecendo a sequência dada, após ligar o último ponto ao primeiro obtém-se uma região limitada do plano. Se a unidade de medida é dada em centímetros, a área dessa região, em cm^2, é:

a) 9. b) 10. c) 13. d) 14. e) 15.

20. **(UFMT)** – Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero de lado L.

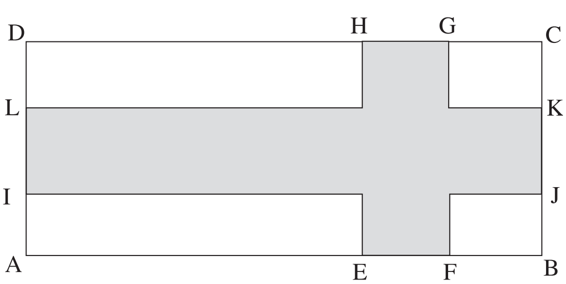


Sendo E, F e G os pontos médios dos lados desse triângulo e D, o ponto médio do segmento $\overline{AE}$, pode-se afirmar que a área do polígono DEFG é

a) $\dfrac{3\sqrt{3}\ .\ L^2}{32}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}\ .\ L^2}{16}$ c) $\dfrac{3\sqrt{2}\ .\ L^2}{25}$

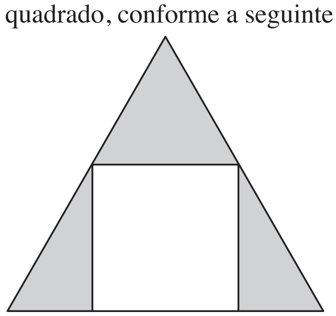
d) $\dfrac{\sqrt{2}\ .\ L^2}{18}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}\ .\ L^2}{9}$

21. **(UFPE)** – Na ilustração a seguir, temos um retângulo ABCD, com medidas AB = 12 e BC = 5, e duas faixas retangulares EFGH e IJKL, com EF e JK de mesma medida. Se a área da região colorida e a da região do retângulo ABCD exterior à área colorida são iguais, qual a medida de EF?



a) 1,8 b) 1,9 c) 2,0 d) 2,1 e) 2,2

22. **(UFOP)** – Num triângulo equilátero de lado 10 cm, inscreve-se um quadrado, conforme a seguinte figura.



A área hachurada, em cm^2, vale:

a) $150\sqrt{3} - \dfrac{225}{(2+\sqrt{3})^2}$ b) $25\sqrt{3} - \dfrac{225}{(2+\sqrt{3})^2}$

c) $150\sqrt{3} - \dfrac{300}{(2+\sqrt{3})^2}$ d) $25\sqrt{3} - \dfrac{300}{(2+\sqrt{3})^2}$

Módulo 18 – Área das Figuras Circulares

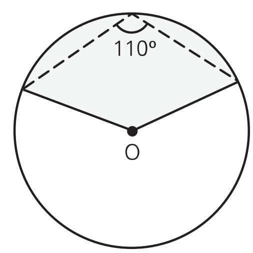
1. **(FUVEST)** – Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere a seguir um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° numa circunferência de raio 5 cm. Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém-se:

a) $\dfrac{11}{6}$ b) 2 c) $\dfrac{11}{3}$ d) $\dfrac{22}{3}$ e) 11

2. **(INATEL)** – Uma competição de velocidade é realizada numa pista circular de 60 metros de raio. Do ponto de partida até o de chegada, os competidores percorrem um arco de 135°. Quantos metros, aproximadamente, tem essa competição?

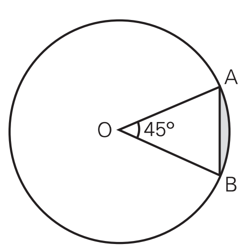
a) 120 b) 125 c) 135 d) 141 e) 188

3. **(MACKENZIE)** – No círculo da figura, de centro **O** e raio 1, a área do setor assinalado é:



a) $\dfrac{7\pi}{9}$ b) $\dfrac{7\pi}{18}$ c) $\dfrac{5\pi}{18}$ d) $\dfrac{5\pi}{9}$ e) $\dfrac{8\pi}{9}$

4. **(FATEC)** – Na figura abaixo tem-se uma circunferência **C** de centro **O** e raio de medida 3 cm. Os pontos **A** e **B** pertencem a **C**, e a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 45°. A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a



a) $\dfrac{3}{4} \cdot \left(\pi - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{\pi}{4} - \sqrt{3}\right)$

c) $\dfrac{9}{4} \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$

d) $\dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right)$ e) $\dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$

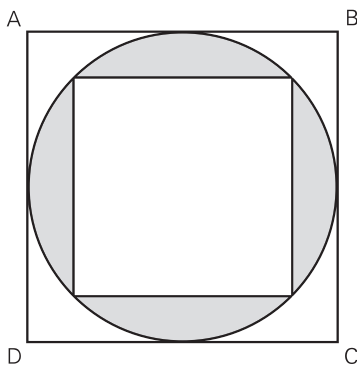
5. **(UNAERP)** – Uma pista de atletismo tem a forma de coroa circular, e a maior distância que pode ser percorrida em linha reta nessa pista é 40 m. A área da pista, em metros quadrados, é:

a) 200π b) 300π c) 400π
d) 1600π e) 2000π

6. **(FUVEST)** – Numa circunferência de raio 1 está inscrito um quadrado. A área da região interna à circunferência e externa ao quadrado é:

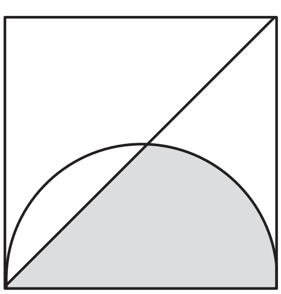
a) maior que 2 b) igual à área do quadrado
c) igual a $\pi^2 - 2$ d) igual a $\pi - 2$
e) igual a $\pi/4$

7. **(SÃO JUDAS)** – Sabendo-se que o lado do quadrado ABCD mede 2 cm, podemos afirmar que a área da figura hachurada mede, em centímetros quadrados:



a) 4 b) π c) 2π d) $\pi - 2$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

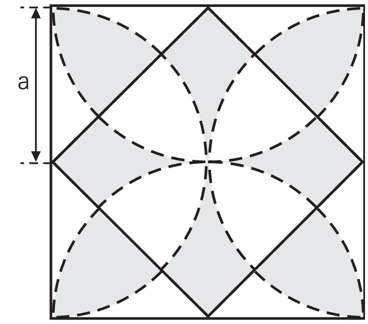
8. **(FUVEST)** – Na figura ao lado, estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então a área da região hachurada é:



a) $\dfrac{\pi}{2} + 2$ b) $\pi + 2$
c) $\pi + 3$ d) $\pi + 4$
e) $2\pi + 1$

9. **(MACKENZIE)** – A área da parte sombreada vale:

a) $a^2\,(4 - \pi)$ b) $a^2\,(\pi - 2)$ c) $2a^2$
d) $\pi\,a^2$ e) $4a^2$

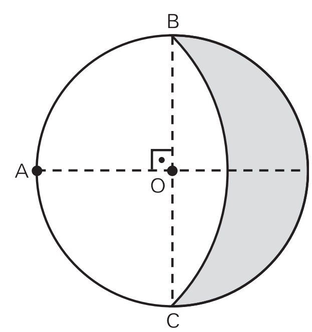


Obs.: a figura contém semicircunferências de raio **a** e centro nos vértices do quadrado menor.

10. **(UNESP)** – Um cavalo se encontra preso num cercado de pastagem, cuja forma é um quadrado com lado medindo 50 m. Ele está amarrado a uma corda de 40 m que está fixada num dos cantos do quadrado. Considerando $\pi = 3,14$, calcule a área, em metros quadrados, da região do cercado que o cavalo não conseguirá alcançar, por que está amarrado.

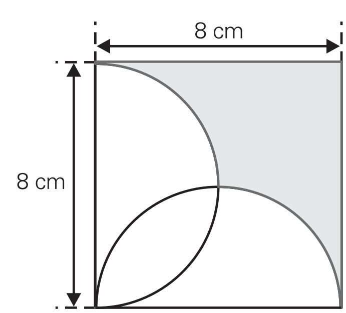
a) 1244 b) 1256 c) 1422
d) 1424 e) 1444

11. **(PUCCAMP)** – Com o objetivo de desenhar uma "meia-lua", uma pessoa traçou uma circunferência de centro **O** e raio 3 cm, e outra de centro **A** e raio AB. A área da "meia-lua" assim obtida, em centímetros quadrados, é:

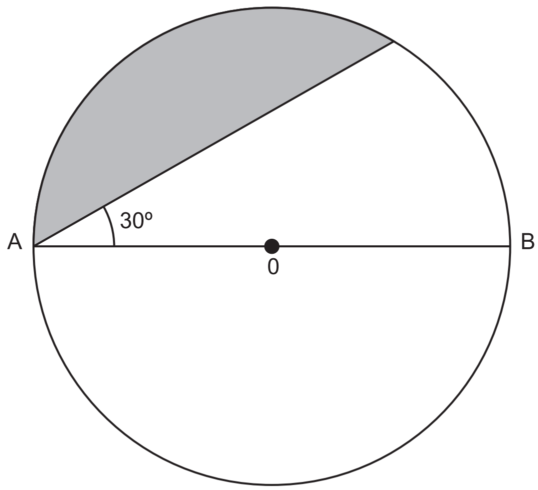


a) 9 b) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{3\pi}{4}$ d) $\dfrac{3\pi}{2}$ e) $\dfrac{9\pi}{2}$

12. **(UnB)** – Na figura a seguir, aparecem 2 semicircunferências de diâmetro igual ao lado do quadrado. Calcular a área da figura destacada.



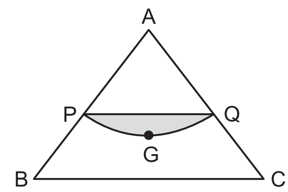
13. (**MACKENZIE**) – Na figura, o raio $\overline{OA}$ da circunferência mede 6 cm. Adotando-se $\pi = 3$, a área da região sombreada, em cm^2, é igual a



a) $9(4 - \sqrt{3})$ b) $9 - \sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$

d) $9\sqrt{3}$ e) $4(9 - \sqrt{3})$

14. (**UFTM**) – Na figura, o triângulo ABC é equilátero com baricentro em G, o arco $\overset{\frown}{PQ}$ tem centro em A e raio AG, e $\overline{PQ}$ é um segmento de reta:



Sendo 1 cm a medida do lado do triângulo ABC, a área do segmento circular sombreado na figura, em cm^2, é igual a

a) $\dfrac{3\pi - 5\sqrt{3}}{36}$ b) $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{36}$ c) $\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{18}$

d) $\dfrac{2\pi - \sqrt{3}}{36}$ e) $\dfrac{2\pi - \sqrt{3}}{12}$