MÓDULO 37 — Radiciação em $\mathbb{C}$

1. INTRODUÇÃO

Todo número complexo

$z = \rho\,(\cos\theta + i \,.\, \operatorname{sen}\theta) \neq 0$ admite **n** raízes enésimas, cujos módulos são todos iguais a $\sqrt[n]{\rho}$ e cujos argumentos são:

$$\theta_0 = \frac{\theta}{n}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot 1$$

$$\theta_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot 2$$

$$\vdots$$

$$\theta_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)$$

Esses argumentos são os **n primeiros** termos de uma **progressão aritmética** com **primeiro termo** igual a $\frac{\theta}{n}$ e razão igual a $\frac{2\pi}{n}$.

Simbolicamente:

Sendo $z = \rho\,(\cos\theta + i \,.\, \operatorname{sen}\theta) \neq 0$ e z_k, suas raízes enésimas, temos:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \,.\, \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \,.\, k\right) + i \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \,.\, k\right)\right]$$

Com $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Observação

Os afixos das raízes enésimas do número complexo **z** são vértices de um polígono regular, de **n** lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ e centro na **origem** do sistema de coordenadas cartesianas.

MÓDULO 38 — Definição de Polinômios, Grau, Valor Numérico e Identidade

1. FUNÇÃO POLINOMIAL

❑ Definição

É a função $P : C \to C$, definida por

$P(x) = a_0 \,.\, x^n + a_1 .\, x^{n-1} + ... +$

$+ a_{n-1} \,.\, x + a_n$, em que $n \in \mathbb{N}$.

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in C$ são os coeficientes.

a_0x^n, $a_1 \,.\, x^{n-1}$, ..., $a_{n-1} \,.\, x$, a_n são os termos ou monômios.

❑ Valor numérico

O valor numérico de **P**, para **$x = \alpha$**, é a imagem de **α** por **P**. É o número $P(\alpha) = a_0 \,.\, \alpha^n + a_1 \,.\, \alpha^{n-1} + ... + a_{n-1} \,.\, \alpha + a_n$.

$P(0) = a_n$ é o termo independente de x.

❑ Raiz

α é raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$.

❑ Grau

O grau do polinômio $P(x) = a_0 \,.\, x^n + a_1 \,.\, x^{n-1} + ... + a_p \,.\, x^{n-p} + ... + a_{n-1} \,.\, x + a_n$ $(n \geq p)$ é o número natural $n - p$ se, e somente se, $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0$ e $a_p \neq 0$.

Em outras palavras, "é o maior expoente que tem o **x** considerando-se apenas os termos com coeficientes diferentes de zero".

❑ Função polinomial identicamente nula

- **Definição**

$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall\, x \in C$

- **Teorema**

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

❑ Funções polinomiais idênticas

- **Definição**

$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in C$

- **Teorema**

$$A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$$

MÓDULO 39 — Divisão de Polinômios

❑ Definição

Dada a função polinomial **A**, chamada dividendo, e a função polinomial não identicamente nula **B**, chamada divisor, **dividir A** por **B** é obter a função polinomial **Q**, chamada quociente, e a função polinomial **R**, chamada resto, tais que $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e o grau do resto é menor que o grau do divisor ou o resto é identicamente nulo.

Em símbolos:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \neq 0 \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{array}}$$

- **Teorema**

O quociente e o resto da divisão de A(x) por $B(x) \not\equiv 0$ existem e são únicos.

MÓDULOS 40 e 41 — Dispositivo de Briot-Ruffini e Teorema do Resto

1. INTRODUÇÃO

Na divisão por binômios do 1º grau do tipo $x - \alpha$, podemos obter o quociente e o resto utilizando o Método da Chave ou o Método dos Coeficientes a Determinar (Descartes).

Além disso, **o resto** pode ser calculado por meio do **Teorema de D'Alembert**.

"O resto da divisão da função polinomial **A** por $x - \alpha$ é o valor numérico de **A** para $x = \alpha$."

Simbolicamente:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & x - \alpha \\ \hline r & Q(x) \end{array} \Rightarrow r = A(\alpha)$$

- **Teoremas**

a) Se **A** é divisível por $x - \alpha$, então **α** é raiz de **A**.

b) Se **A** é divisível por $x - \alpha$ e por $x - \beta$, com $\alpha \neq \beta$, então **A** é divisível pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

c) Se **A** é divisível por **p** fatores do 1º grau, dois a dois distintos, do tipo $x - \alpha_1$, $x - \alpha_2$, $x - \alpha_3$, ... , $x - \alpha_p$, então **A** é divisível pelo produto:

$$(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_p)$$

2. DIVISÃO POR ax + b

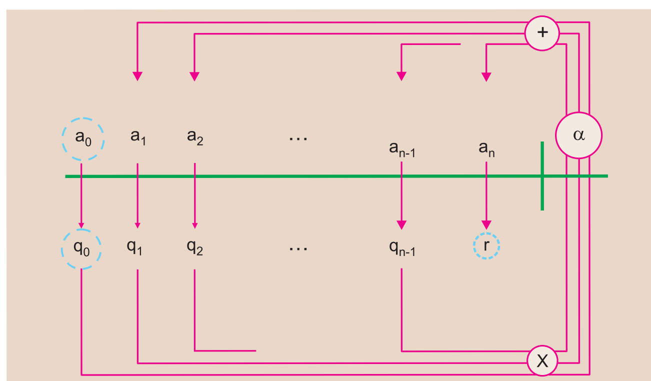
Nas divisões de A(x) por $ax + b$, com $a \neq 0$, podemos utilizar o **Teorema de D'Alembert** e o **Dispositivo Prático de Briot-Ruffini**, observando que:

a) o número **α**, tanto no Teorema de D'Alembert como no Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, é sempre a raiz de $ax + b = 0$;

b) no Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, o último coeficiente já é o resto **r**;

c) os demais coeficientes devem ser divididos por **a**, que é o coeficiente de **x** no divisor.

OBTENÇÃO DO QUOCIENTE E RESTO PELO DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI



MÓDULO 42 — Equações Algébricas: Relações de Girard

1. DEFINIÇÃO

Equação algébrica é toda sentença do tipo $P(x) = Q(x)$, em que **P** e **Q** são funções polinomiais.

❑ Redução

Como $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) = 0$, temos:

Toda equação algébrica é redutível à forma $F(x) = 0$, sendo **F** uma função polinomial.

$$F(x) = a_0x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0$$

❑ Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Toda equação algébrica de grau estritamente positivo admite no campo complexo pelo menos uma raiz.

❑ Teorema da Decomposição

Toda equação algébrica de grau estritamente positivo pode ser decomposta em um produto de **n** fatores do 1º grau do tipo $x - r_i$, em que r_i é raiz, além do coeficiente a_0.

$$F(x) = a_0 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_n) = 0$$

❑ Conclusão

Toda equação algébrica de grau estritamente positivo admite no campo complexo pelo menos uma raiz e, no máximo, **n** raízes.

❑ Obtenção das raízes

$ax + b = 0$, com $a \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a} \Leftrightarrow V = \left\{\dfrac{-b}{a}\right\}$

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \left\{\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

As raízes das equações do terceiro e do quarto grau podem ser obtidas com o auxílio de fórmulas gerais que são muito trabalhosas.

Para equações de grau maior que quatro, não existem "fórmulas resolutivas".

❑ Como resolver uma equação

Por ser impossível resolver qualquer equação algébrica por processos gerais de aplicação de fórmulas, utilizaremos relações entre as raízes e os coeficientes, além de teoremas válidos para qualquer equação, que nos fornecerão informações para a obtenção das raízes.

❑ Relações de Girard

Sendo $V = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n\}$ o conjunto verdade da equação $F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$, com $a_0 \neq 0$, valem as seguintes relações entre os coeficientes e as raízes:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \ldots + r_{n-1} \cdot r_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

....

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

MÓDULOS 43 e 44 — Equações Algébricas

1. RAÍZES MÚLTIPLAS

O número $r \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade $m \in \mathbb{N}^*$ da equação $F(x) = 0$ se, e somente se:

$F(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$

Se $V = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_p\}$ é o conjunto verdade da equação $F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$ e $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_p$, respectivamente, é a multiplicidade de cada raiz, então:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_p = n$$

$$F(x) = a_0 . (x - r_1)^{m_1} . (x - r_2)^{m_2} \ldots (x - r_p)^{m_p}$$

- **Teorema**

Se $r \in \mathbb{R}$ é raiz de multiplicidade **m** da equação $F(x) = 0$, de coeficientes reais, então **r** é raiz de multiplicidade $m - 1$ da equação $F'(x) = 0$.

Exemplo

Na equação $(x - 1)^4 . (x - 2)^3 . (x - 3)^2 . (x - 4) = 0$, 1 é raiz quádrupla (multiplicidade 4), 2 é raiz tripla (multiplicidade 3), 3 é raiz dupla (multiplicidade 2) e 4 é raiz simples (multiplicidade 1).

2. RAÍZES NULAS

Seja a equação

$F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0.$

Do teorema enunciado anteriormente, concluímos que:

1) $a_n \neq 0 \Leftrightarrow 0$ não é raiz de F.

2) $a_n = 0$ e $a_{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow 0$ é raiz simples de F.

3) $a_n = a_{n-1} = 0$ e $a_{n-2} \neq 0 \Leftrightarrow 0$ é raiz dupla de F etc.

3. RAÍZES RACIONAIS

- **Teorema**

Se $\dfrac{p}{q}$ é um número racional na forma irredutível e é raiz da equação $F(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ de coeficientes inteiros, então **p** é divisor de a_n e **q** é divisor de a_0.

$$\frac{p}{q} \text{ é raiz de } F(x) = 0 \text{ e mdc } (p, q) = 1 \Rightarrow \begin{cases} p \in D\,(a_n) \\ q \in D\,(a_0) \end{cases}$$

4. RAÍZES COMPLEXAS

Se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação algébrica de **coeficientes reais**, então $\overline{z} = a - bi$ também é. Além disso, $\overline{z}$ e z são raízes de mesma multiplicidade.

5. RAÍZES IRRACIONAIS

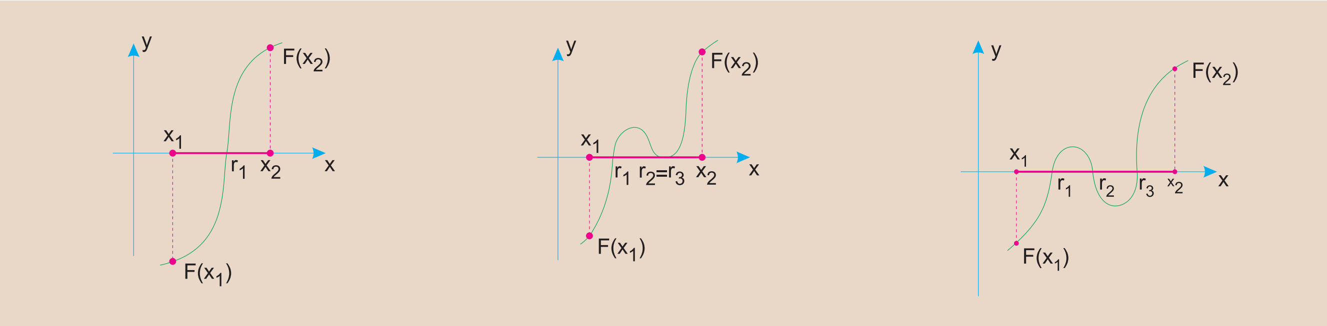
Se $a \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\alpha = a + \sqrt{b}$ é raiz de uma equação algébrica de coeficientes racionais, então $\beta = a - \sqrt{b}$ também é. Além disso, α e β são raízes de mesma multiplicidade.

6. RAÍZES REAIS

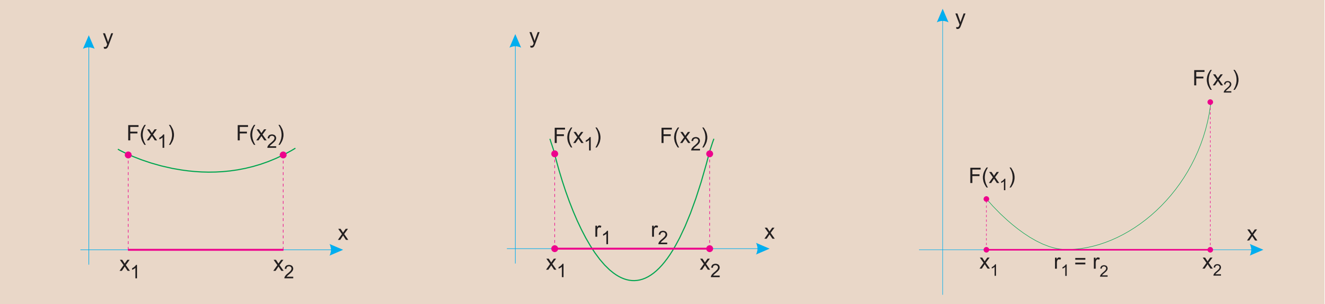
- **Teorema de Bolzano**

Seja $F(x) = 0$ uma equação algébrica de coeficientes reais e x_1 e x_2 dois números reais, tais que $x_1 < x_2$.

Se $F(x_1) \,.\, F(x_2) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]x_1; x_2[$.



Se $F(x_1) \,.\, F(x_2) > 0$, então existe um número par de raízes reais no intervalo $]x_1; x_2[$.



MÓDULO 45 Fatorial e Números Binomiais

1. FATORIAL

O fatorial de $n \in \mathbb{N}$ é representado por $n!$ e é definido por

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \,.\, (n-1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

❑ Consequência

Decorre da definição que $0! = 1! = 1$ e, para $n \geqslant 2$, temos $n! = n \,.\, (n-1)\,(n-2) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1$

Exemplo

$6! = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 720$

2. NÚMEROS BINOMIAIS

❑ Definição

Sendo $n, k \in \mathbb{N}$, o número binomial de ordem **n** e classe **k**, ou binomial de **n** sobre **k**, representado por $\binom{n}{k}$, é definido por

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}, \text{ se } n \geq k \\[2ex] \binom{n}{k} = 0, \text{ se } n < k \end{cases}$$

Exemplos

1. $\binom{2}{7} = 0$, pois $2 < 7$.

2. $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!\,7!} = \dfrac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7!}{3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 7!} = 120$

3. $\binom{10}{7} = \dfrac{10!}{7!\,3!} = \binom{10}{3} = 120$

Propriedades

(Binomiais Complementares)

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, para $n \geq k$.

(Relação de Stifel)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(Relação de Fermat)

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k+1}$$

MÓDULO 46 Triângulo de Pascal (ou Tartaglia)

1. DEFINIÇÃO

É uma tabela de números binomiais dispostos como se segue.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\ldots \\
\ldots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} \cdots & \binom{n}{n} \\
\ldots \\
\ldots
\end{array}$$

Substituindo-se cada número binomial pelo seu valor, resulta

$$\begin{array}{lllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\ldots
\end{array}$$

Observações

1. Se dois números binomiais têm o mesmo "numerador", dizemos que estão na mesma linha do triângulo.
2. Se dois números binomiais têm o mesmo "denominador", dizemos que estão na mesma coluna do triângulo.

2. PROPRIEDADES

1. A soma de dois números binomiais consecutivos de uma mesma linha é igual àquele situado na linha seguinte e na coluna do que possui maior "denominador" (Relação de Stifel).

Em símbolos

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2. A soma de todos os binomiais da linha **n** é $\mathbf{2^n}$.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

3. A soma dos binomiais da coluna **k**, a partir do primeiro, é igual ao binomial localizado na próxima linha e na próxima coluna.

Em símbolos

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

4. A soma dos binomiais de uma diagonal ("paralela ao lado oblíquo do triângulo"), a partir do primeiro, é igual ao binomial abaixo da última parcela.

Em símbolos

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$$

5. Em qualquer linha, a partir da segunda, dois binomiais equidistantes dos extremos são iguais, pois são binomiais complementares.

Em símbolos

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

MÓDULO 47 — Teorema do Binômio de Newton

1. TEOREMA

Sejam x, y $\in \mathbb{R}$ e n $\in \mathbb{N}$. Demonstra-se que

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

O desenvolvimento de $(x - y)^n$ é feito lembrando que $(x - y)^n = [\,x + (-y)\,]^n$.

Exemplo

$$(x + y)^{10} = \binom{10}{0} x^{10} y^0 + \binom{10}{1} x^9 y^1 + \binom{10}{2} x^8 y^2 \dots + \binom{10}{10} x^0 y^{10} = x^{10} + 10x^9 y + 45x^8 y^2 + \dots + 10xy^9 + y^{10}$$

2. TERMO GERAL

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$, para os expoentes de x em ordem decrescente.

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$, para os expoentes de x em ordem crescente.

3. SOMA DOS COEFICIENTES

Para obter a soma **S** dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(ax \pm by)^n$, em que a, b $\in \mathbb{R}^*$ são constantes e x, y $\in \mathbb{R}^*$ são as variáveis, basta substituir, em $(ax \pm by)^n$, x e y por 1.

Assim, $S = (a \pm b)^n$.

MÓDULO 48 — Princípio Fundamental da Contagem e Arranjos Simples

1. INTRODUÇÃO

Para se chegar a 50 063 860 jogos na Mega-Sena (total de agrupamentos de 6 números escolhidos entre um total de 60) ou a 4 782 969 resultados possíveis na Loteria Esportiva (palpites para 14 partidas de futebol), são usados princípios de **Análise Combinatória**.

Esse ramo da Matemática aborda **problemas de contagem** e nos permite descobrir, ainda, de quantas maneiras diferentes podem ser formadas filas de pessoas ou quantas senhas distintas um banco consegue emitir para seus clientes, além de possibilitar a resolução de **inúmeras situações** da vida prática.

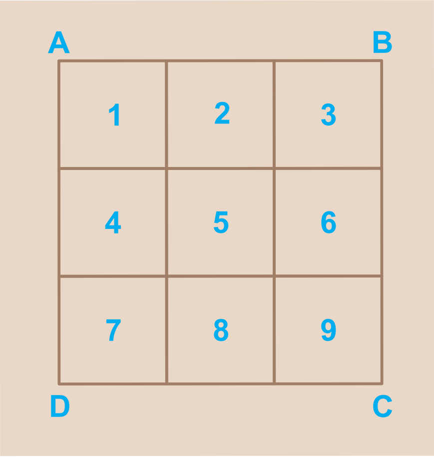
2. CONTAGEM

As quantidades obtidas nas resoluções dos problemas variam de poucas unidades a muitos milhões.

Em alguns casos é vantagem contar, uma a uma, todas as possibilidades, anotando de maneira ordenada os possíveis agrupamentos que satisfazem o problema.

Exemplo 1

Um quadrado **ABCD** de lado **3** centímetros teve seus lados divididos em partes de **1** centímetro cada uma e os pontos ligados por segmentos de reta, como ilustra a figura a seguir.



Para saber quantos **quadrados** podem ser destacados do desenho, devemos levar em conta que, além do **quadrado ABCD** e dos **9** "quadradinhos", numerados de 1 a 9, temos mais **4** de lado **2** centímetros cada um.

O total, portanto, é **1 + 4 + 9 = 14** quadrados.

Essa contagem pode ser feita como segue.

I) **1** quadrado de lado 3 centímetros;

II) **4** quadrados de lado 2 centímetros, que são os constituídos pela união dos "quadradinhos" (1, 2, 4, 5), (2, 3, 5, 6), (4, 5, 7, 8) e (5, 6, 8, 9);

III) **9** quadrados de lado 1 centímetro.

Exemplo 2

Para determinar quantas **sequências** de **7** elementos cada uma podem ser formadas com os elementos distintos **A** e **B**, sendo exatamente **3** deles iguais a "**A**" e que devem estar em posições consecutivas, **não é difícil escrever e contar as 5 possibilidades**, que são (A, A, A, B, B, B, B), (B, A, A, A, B, B, B), (B, B, A, A, A, B, B), (B, B, B, A, A, A, B) e (B, B, B, B, A, A, A).

Conclui-se, entretanto, que, **sem nenhuma restrição**, são **128** sequências com **7** elementos cada uma, formadas com **A** e **B**. Porém, chegar a tal número de sequências, escrevendo e contando todas, seria uma tarefa muito trabalhosa. Veremos, a seguir, como resolver esse tipo de problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

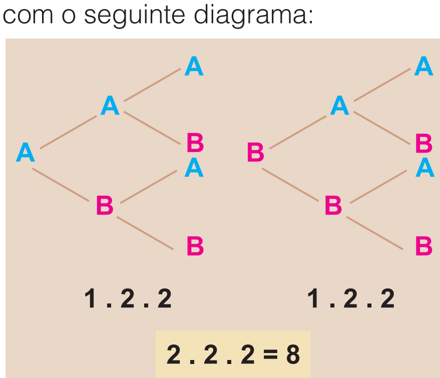
3. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Considere um acontecimento composto de dois estágios sucessivos e independentes.

Se o **primeiro** estágio pode ocorrer de **m** modos distintos e, em seguida, o **segundo** estágio pode ocorrer de **n** modos distintos, então o número de maneiras de ocorrer esse acontecimento é igual ao produto **m.n**.

No caso das sequências com os elementos A e B, sem restrições, citadas anteriormente, devemos notar que **cada uma** pode iniciar-se de **dois modos** distintos (**A** ou **B**). Para **cada uma** dessas possibilidades, existem outras **duas** (**A** ou **B**) para a **segunda** posição e assim sucessivamente.

Até o **terceiro** estágio, os **8** casos podem ser dispostos de acordo com o seguinte diagrama:



Observe que, seguindo esse raciocínio, chega-se ao número total, que é $\mathbf{2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 2^7 = 128}$.

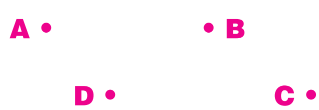
4. TÉCNICAS DE CONTAGEM

Basicamente, são **dois** os tipos de agrupamentos utilizados em Análise Combinatória: **arranjos** e **combinações**.

Para diferenciar um do outro, tomemos os seguintes exemplos:

Exemplo 1

Considere quatro pontos, A, B, C e D, distintos de um mesmo plano, de modo que três quaisquer deles não estejam alinhados, como na figura.



Os triângulos **ABC** e **ABD** são **diferentes**. Diferem pela **natureza** (**C ≠ D**) de pelo menos um de seus elementos.

No entanto, **ABC** e **ACB** representam o **mesmo triângulo**. A **ordem** de leitura dos vértices **não diferencia** um do outro.

Esses agrupamentos que **diferem apenas pela natureza** de pelo menos um de seus elementos (**não pela ordem**) são chamados **combinações**.

Exemplo 2

Considere, agora, os algarismos 1, 2, 3 e 4.

Os números **123** (cento e vinte e três) e **124** (cento e vinte e quatro) são **diferentes**. Diferem pela **natureza** (**3 ≠ 4**) de pelo menos um de seus elementos.

Os números **123** e **132**, embora constituídos pelos mesmos algarismos, também são diferentes. Diferem pela **ordem de seus elementos**.

Esses agrupamentos que **diferem pela natureza** de pelo menos um de seus elementos e também **diferem pela ordem** deles são chamados **arranjos**.

5. ARRANJOS SIMPLES

Como vimos, são agrupamentos que **diferem** entre si pela **ordem** ou pela **natureza** de seus elementos. O número de arranjos simples de **n** elementos tomados **k** a **k**, ou classe **k**, com **n ≥ k**, é dado por

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo 1

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 . 9 . 8 . 7!}{7!} = 10 . 9 . 8 = 720$$

Exemplo 2

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 . 8 . 7 . 6 . 5!}{5!} = 9 . 8 . 7 . 6 = 3024$$

Exemplo 3

Com os algarismos de 1 a 9 podem ser formados $A_{9,4} = 3024$ números de 4 algarismos distintos. Note que cada número difere de outro pela **natureza** ou pela **ordem** de seus elementos.

MÓDULO 19 — Multiplicação de Matrizes

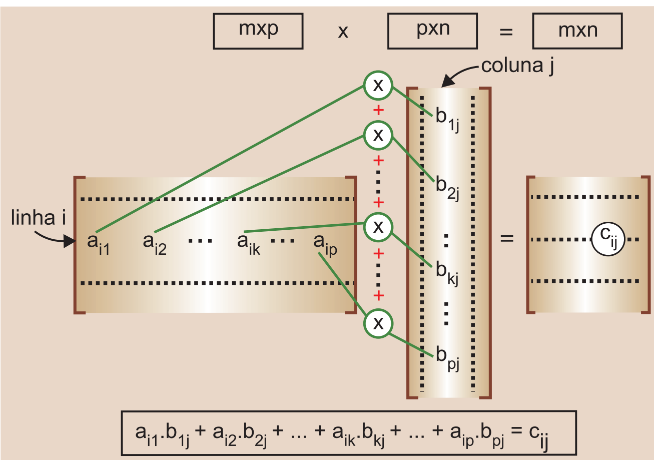
1. DEFINIÇÃO

❑ Multiplicação (de matriz por matriz)

Sendo $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, define-se:

$$C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{kj})$$

Assim sendo:



2. PROPRIEDADES

• De um modo geral, valem para as operações vistas até aqui com as matrizes AS MESMAS PROPRIEDADES das operações correspondentes com NÚMEROS REAIS.

• Na MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES, NÃO VALEM as propriedades comutativa, anulamento do produto nem cancelamento, ou seja,

– a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, EXISTEM MATRIZES A e B, CONFORMES PARA A MULTIPLICAÇÃO, TAIS QUE $A . B \neq B . A$.

– Na multiplicação de matrizes, NÃO VALE A LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO, isto é, SENDO A e B DUAS MATRIZES CONFORMES PARA A MULTIPLICAÇÃO, PODEMOS TER $A . B = 0$, MESMO COM $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

– Na multiplicação de matrizes, NÃO VALE A LEI DO CANCELAMENTO, isto é, SENDO A e B CONFORMES PARA A MULTIPLICAÇÃO E O MESMO ACONTECENDO COM A e C, PODEMOS TER $A . B = A . C$, MESMO COM $B \neq C$ e $A \neq 0$.

MÓDULO 20 — Definição e Propriedades dos Determinantes I

1. DEFINIÇÃO

Seja **M** o conjunto das matrizes quadradas e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Chama-se função determinante a função: det: **IM** $\to \mathbb{R}$

$M_n \to \det M_n$, tal que:

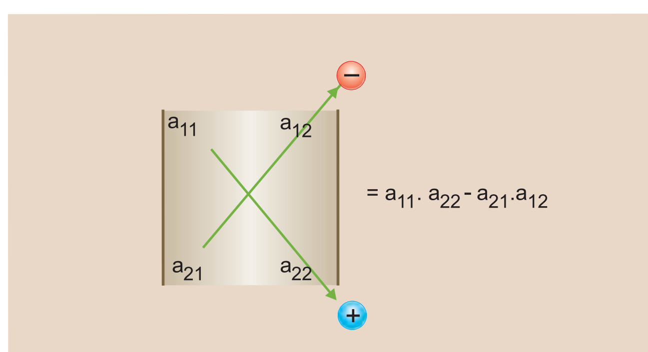
• $n = 1 \to \det M_n = a_{11}$

• $n \geq 2 \to \det M_n = \sum (-1)^p . a_{1\alpha_1} . a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$,

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ é uma permutação genérica dos segundos índices e p o número de inversões em relação à fundamental 1, 2, 3 ..., n.

2. REGRAS PRÁTICAS

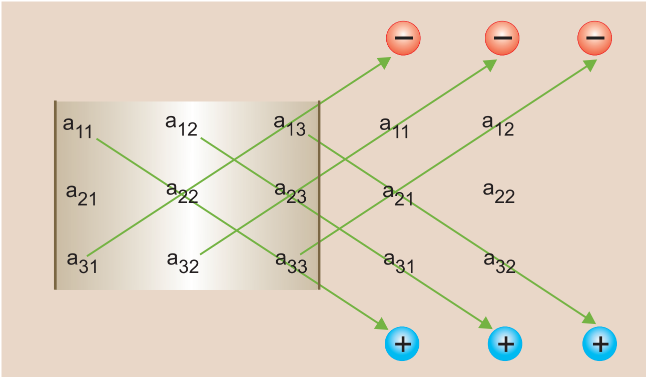
❑ Determinante de ordem 2



❑ Determinante de ordem 3 (Regra de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} . a_{22} . a_{33} + a_{12} . a_{23} . a_{31} + a_{13} . a_{21} . a_{32} - a_{31} . a_{22} . a_{13} - a_{32} . a_{23} . a_{11} - a_{33} . a_{21} . a_{12}$$

❑ Dispositivo prático



3. PROPRIEDADES

❑ "Determinante igual a zero"

O determinante de uma matriz quadrada é igual a zero, se a matriz possui:

- uma fila nula;
- duas filas paralelas iguais;
- duas filas paralelas proporcionais;
- uma fila que é combinação linear de outras filas paralelas.

MÓDULO 21 — Propriedades dos Determinantes II

❑ Alterações no Determinante

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n altera-se,

- trocando de sinal, quando duas filas paralelas trocam entre si de posição;
- ficando multiplicado por α, quando os elementos de uma fila são multiplicados por α;
- ficando multiplicado por α^n, quando a matriz é multiplicada por α.

MÓDULO 22 — Teorema de Jacobi

❑ Determinante não se altera

O determinante de uma matriz quadrada não se altera se:

- trocarmos ordenadamente as linhas pelas colunas (det M = det M^t);
- somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas (Teorema de Jacobi).

MÓDULO 23 — Teorema de Laplace, Regra de Chió e Propriedades Complementares

1. TEOREMAS DE LAPLACE E DE CAUCHY

Numa matriz quadrada, a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer

- pelos respectivos cofatores é igual ao determinante da matriz (Teorema de Laplace).
- pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela é zero (Teorema de Cauchy).

2. TEOREMA DE BINET

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então: det(A . B) = det(A) . det(B)

3. DETERMINANTE DE VANDERMONDE

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \,.\, (a_3 - a_1) \,.\, (a_3 - a_2) \,.\, \ldots \,.\, (a_n - a_1) \,.\, (a_n - a_2) \,.\, \ldots \,.\, (a_n - a_{n-1})$$

4. DETERMINANTE SOMA

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & y_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & y_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (x_{1j} + y_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (x_{2j} + y_{1j}) & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (x_{nj} + y_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. DIAGONAL PRINCIPAL

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

6. DIAGONAL SECUNDÁRIA

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{n,1} \cdot a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1} \cdot a_{1,n}$$

MÓDULO 24 Definição e Cálculo da Matriz Inversa

1. DEFINIÇÃO

Sendo M uma matriz de ordem n e I_n a matriz unidade de ordem n, define-se:

M^{-1} é inversa de M $\Leftrightarrow M \cdot M^{-1} = I_n = M^{-1} \cdot M$

2. EXISTÊNCIA DA INVERSA

det M $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ M é invertível (não singular)

det M = 0 $\Leftrightarrow$ M é não invertível (singular)

3. REGRA PRÁTICA

- Calcular det(M)
- Determinar a matriz dos cofatores de M : M'
- Determinar a matriz adjunta de M: $\overline{M} = (M')^t$
- Aplicar a fórmula: $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,\overline{M}$

Observação

Para encontrar um elemento da inversa de M, aplicar a fórmula:

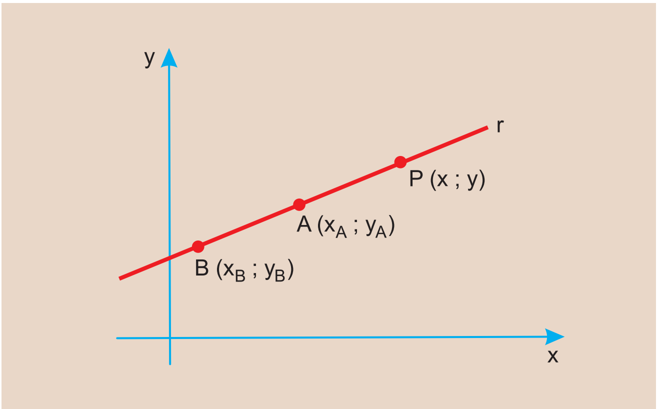
$$b_{ij} \text{ de } M^{-1} = \frac{\text{cofator do } a_{ji} \text{ de } M}{\det M}$$

MÓDULO 19 — Estudo da Reta: Equação Geral e Casos Particulares

1. TEOREMA

A toda reta **r** do plano cartesiano associa-se uma equação do tipo **a**x + **b**y + **c** = 0, com **a** e **b** não simultaneamente nulos.

2. DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL



Seja **r** a reta do plano cartesiano determinada pelos pontos $\mathbf{A(x_A; y_A)}$ e $\mathbf{B(x_B; y_B)}$; sendo P(x; y) um ponto qualquer de **r**, teremos

$$\mathbf{P}, \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B} \text{ alinhados} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo-se o determinante, resulta

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_{a}\, x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}\, y + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0.$$

A equação **a**x + **b**y + **c** = 0 ,com **a** e **b** não simultaneamente nulos, é chamada **Equação Geral** da reta.

Observação

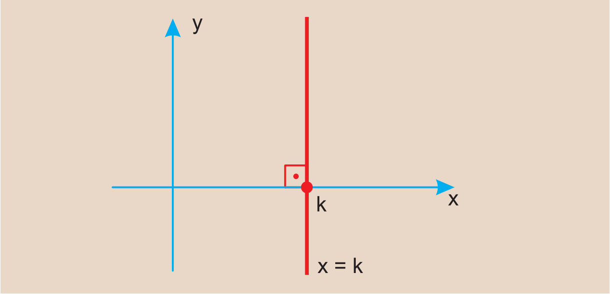
• Lembre-se sempre que, na equação **ax** + **by** + **c** = 0, **x** e **y** são as coordenadas de um ponto qualquer dessa reta. Isso significa que, se um ponto $\mathbf{P(x_p; y_p)}$ pertence à reta, então suas coordenadas satisfazem a equação da reta, isto é: $ax_p + by_p + c = 0$ e reciprocamente.

3. CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO DA RETA

Na equação geral da reta, se os coeficientes **a**, **b** ou **c** forem iguais a zero, temos os seguintes casos particulares:

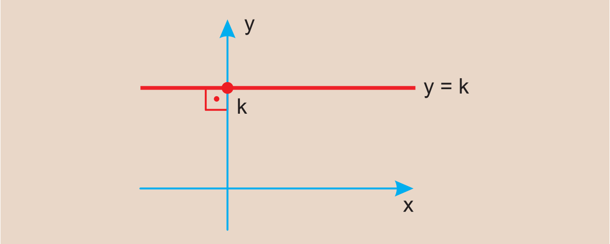
❑ Se a ≠ 0, **b = 0** e c ≠ 0, então:

$a.x + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-c}{a}$ ou $\boxed{\mathbf{x = k}}$, que é a equação de uma reta **paralela ao eixo y**;



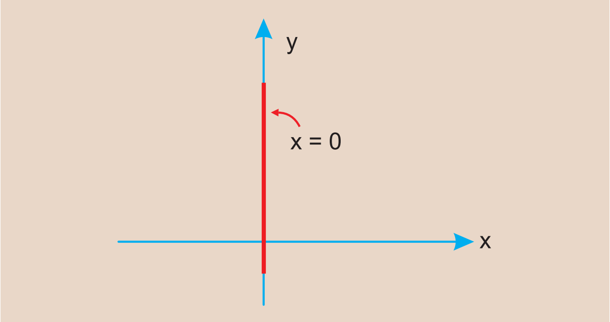
❑ Se **a = 0**, b ≠ 0 e c ≠ 0, então:

$b.y + c = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-c}{b}$ ou $\boxed{\mathbf{y = k}}$, que é a equação de uma reta **paralela ao eixo x**;



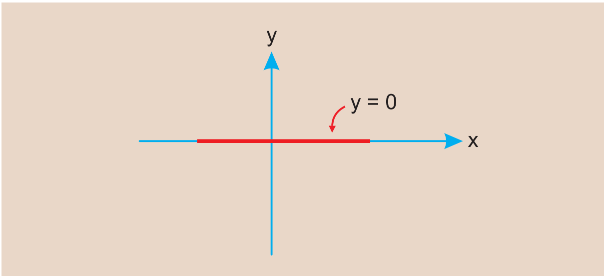
❑ Se a ≠ 0, **b = 0** e **c = 0**, então:

$a\,.\,x = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{x = 0}}$, que é a equação do **eixo y**;

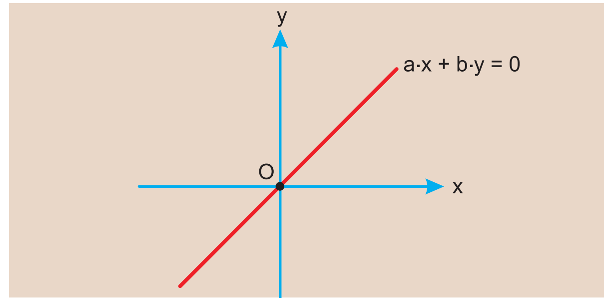


❑ Se **a = 0**, b ≠ 0 e **c = 0**, então:

b . y = 0 ⇔ **y = 0**, que é a equação do **eixo x**;



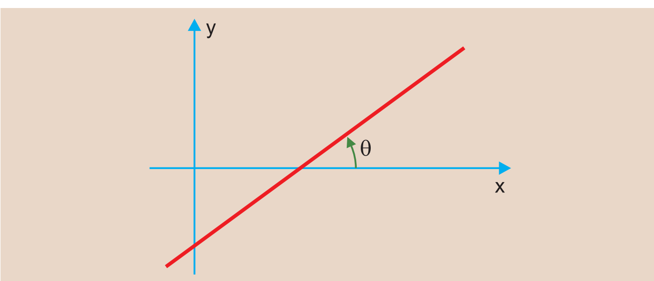
❑ Se a ≠ 0, b ≠ 0 e **c = 0**, então **ax + by = 0**, que é a equação de uma reta que passa pela **origem**.



MÓDULO 20 — Declividade – Formas da Equação da Reta

1. COEFICIENTE ANGULAR (OU DECLIVIDADE)

❑ Chama-se **inclinação** (θ) de uma reta, o menor ângulo entre a reta e o eixo dos **x**, orientado no sentido anti-horário, do eixo para a reta, conforme a figura ($0° \le \theta < 180°$).



❑ Chama-se **coeficiente angular** (ou **declividade**), de uma reta não vertical, a tangente trigonométrica da sua inclinação.

$$\boxed{\mathbf{m = tg\ \theta}}$$

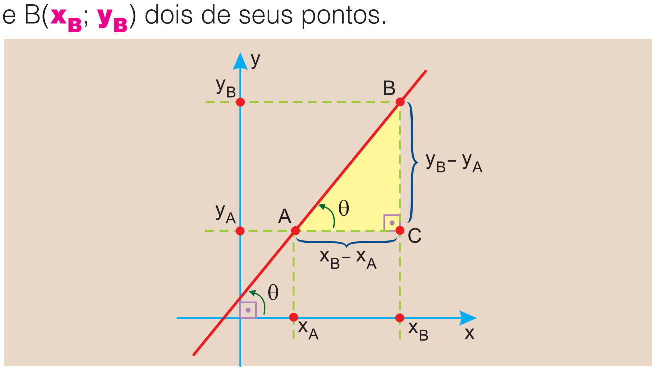
Observações

Para $0° \le \theta < 180°$, resulta

- $\theta = 0° \Leftrightarrow \text{tg}\ \theta = \text{tg}\ 0° = 0 \Leftrightarrow m = 0$
- $0° < \theta < 90° \Leftrightarrow \text{tg}\ \theta > 0 \Leftrightarrow m > 0$
- $90° < \theta < 180° \Leftrightarrow \text{tg}\ \theta < 0 \Leftrightarrow m < 0$
- $\theta = 90° \Leftrightarrow \nexists\ \text{tg}\ 90° \Leftrightarrow$ m não está definido

❑ **Determinação do coeficiente angular**

- Seja **r** uma reta não vertical e sejam $A(\mathbf{x_A}; \mathbf{y_A})$ e $B(\mathbf{x_B}; \mathbf{y_B})$ dois de seus pontos.



No triângulo ABC, temos

$$m = \text{tg}\ \theta = \frac{CB}{AC} \Rightarrow \boxed{\mathbf{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}}$$

- Seja a equação geral da reta: $\mathbf{a} . x + \mathbf{b} . y + \mathbf{c} = 0$.

Como: $\underbrace{(y_A - y_B)}_{\mathbf{a}}\ x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{\mathbf{b}}\ y + \underbrace{(x_Ay_B - x_By_A)}_{\mathbf{c}} = 0$

e $\mathbf{m} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, vem $\boxed{\mathbf{m = \dfrac{-a}{b}}}$

2. EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Seja a reta **r** não vertical ($b \neq 0$), cuja equação geral é $ax + by + c = 0$.

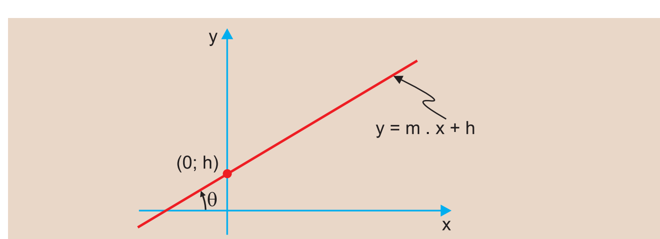
Então $by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\dfrac{a}{b} . x - \dfrac{c}{b}$

Sendo $\mathbf{m = -\dfrac{a}{b}}$ (coeficiente angular) e fazendo $\mathbf{-\dfrac{c}{b} = h}$ (coeficiente linear), teremos: $\boxed{\mathbf{y = mx + h}}$,

que recebe o nome de **equação reduzida** da reta **r**.

Observação

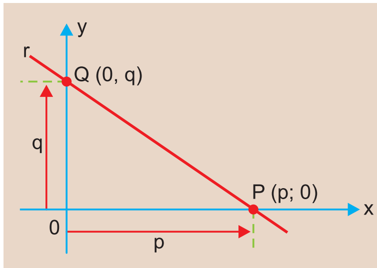
Na equação $ax + by + c = 0$, se $x = 0$, teremos $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{c}{b}$ (coeficiente linear). Assim na equação reduzida, o valor $\mathbf{h = -\dfrac{c}{b}}$ (coeficiente linear da reta) representa a **ordenada** do ponto de intersecção da reta com o eixo Oy.



3. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DA RETA

Seja **r** uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados e que não passa pela origem. Sendo **P(p; 0)** e **Q(0; q)** os **interceptos** em $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$, obtém-se a equação denominada **EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA** da reta **r**:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



4. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Essas equações dão as coordenadas (x; y) de um ponto qualquer da reta, em função de um parâmetro **t**.

$$\begin{cases} x = f(\mathbf{t}) \\ y = g(\mathbf{t}) \end{cases}$$

Observação

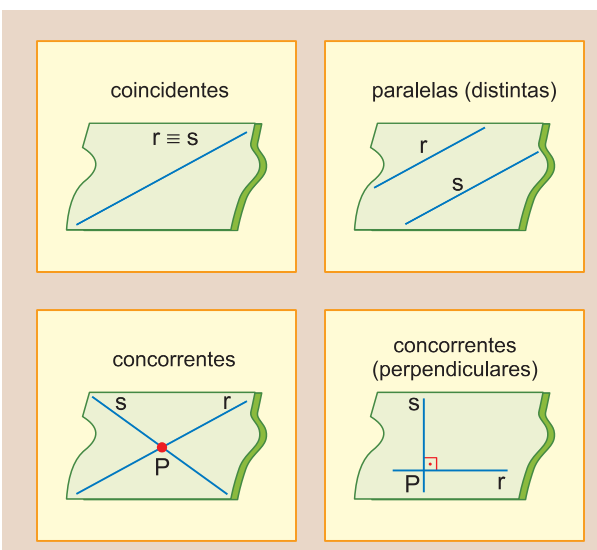
A partir das **equações paramétricas**, pode-se obter a **equação geral** da reta eliminando-se o parâmetro **t**.

MÓDULO 21 Posição Relativa de Duas Retas

1. INTRODUÇÃO

Da geometria plana, sabemos que duas retas **r** e **s** (no plano) podem assumir as seguintes posições relativas:

- concorrentes (caso particular importante: perpendiculares);
- paralelas (distintas);
- coincidentes.



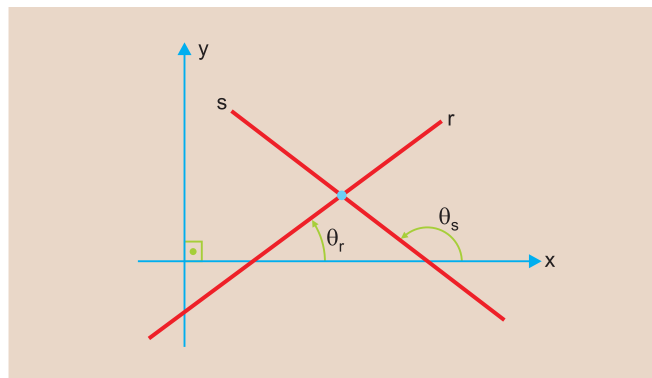
2. RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES

As retas **r** e **s** (não verticais), cujas equações reduzidas são, respectivamente,

(r) : $y = \mathbf{m_r}x + \mathbf{h_r}$

(s) : $y = \mathbf{m_s}x + \mathbf{h_s}$, têm as seguintes relações:

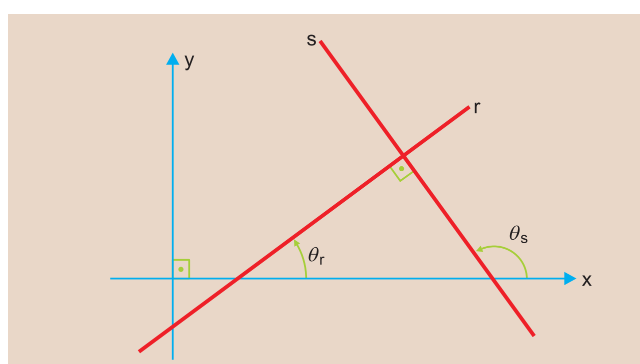
❑ Retas concorrentes



$$m_r \neq m_s$$

Se duas retas são concorrentes, seus coeficientes angulares são diferentes, e vice-versa.

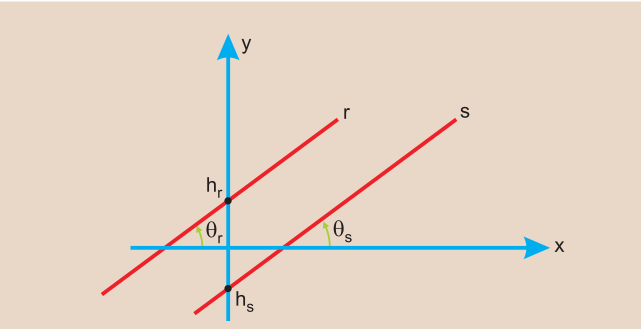
❑ Caso particular: retas perpendiculares



$$m_s = \frac{-1}{m_r}$$

Se duas retas são perpendiculares, o coeficiente angular de uma é o oposto do inverso do coeficiente angular da outra, e vice-versa.

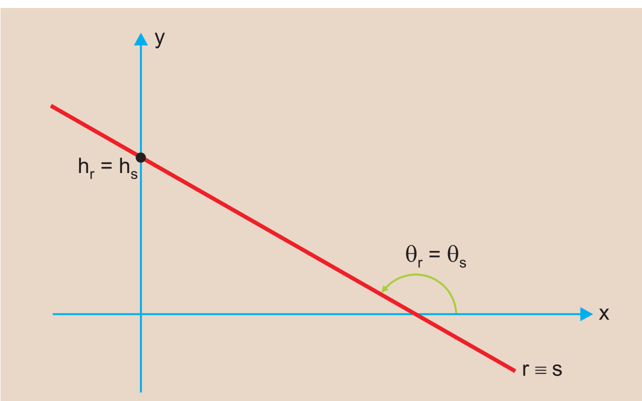
- **Retas paralelas (distintas)**



$$\mathbf{m_r = m_s} \qquad \mathbf{h_r \neq h_s}$$

Se duas retas são paralelas distintas, seus coeficientes angulares são iguais e seus coeficientes lineares são diferentes, e vice-versa.

- **Retas coincidentes**



$$\mathbf{m_r = m_s} \qquad \mathbf{h_r = h_s}$$

Se duas retas são coincidentes, seus coeficientes angulares são iguais e seus coeficientes lineares são iguais, e vice-versa.

A partir das condições acima, podemos estabelecer relações entre os coeficientes da equação geral das retas **r** e **s**, lembrando que $m = -\dfrac{a}{b}$ e $h = -\dfrac{c}{b}$.

Sendo (r) $\mathbf{a_1} \,.\, x + \mathbf{b_1} \,.\, y + \mathbf{c_1} = 0$ e

(s) $\mathbf{a_2} \,.\, x + \mathbf{b_2} \,.\, y + \mathbf{c_2} = 0$, obtemos

- **Retas concorrentes**

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

- **Retas perpendiculares**

$$a_1 \,.\, a_2 + b_1 \,.\, b_2 = 0$$

- **Retas paralelas (distintas)**

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

- **Retas coincidentes**

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

3. POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS RETAS (RESUMO)

	$r: y = m_r \,.\, x + h_r$ $s: y = m_s \,.\, x + h_s$	$r: a_1 . x + b_1 . y + c_1 = 0$ $s: a_2 . x + b_2 . y + c_2 = 0$
r, s	$m_r \neq m_s$	$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$
r, s	$m_r = \dfrac{-1}{m_s}$	$a_1 \,.\, a_2 + b_1 \,.\, b_2 = 0$
r // s	$m_r = m_s$ e $h_r \neq h_s$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$
r ≡ s	$m_r = m_s$ e $h_r = h_s$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

Exemplos

Estudo das posições relativas das seguintes retas:

- $3x + 6y + 7 = 0$
  $2x + 4y - 1 = 0$

Como $\dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4} \neq \dfrac{7}{-1}$, as retas são paralelas distintas, pois

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

- $3x + 6y + 7 = 0$
  $2x - y + 2 = 0$

Como $3 \,.\, 2 + 6 \,.\, (-1) = 0$, as retas são perpendiculares, pois: $\mathbf{a_1 \,.\, a_2 + b_1 \,.\, b_2 = 0}$

- $y = -3 \,.\, x + 5$
  $y = 2 \,.\, x - 1$

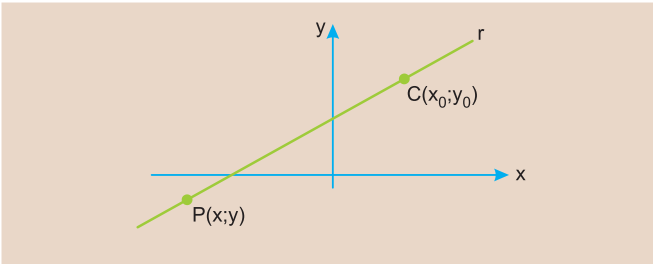
Como os coeficientes angulares das retas são iguais a **– 3** e **2**, as retas são concorrentes e não perpendiculares, pois

$$m_r \neq m_s \text{ e } m_r \neq \frac{-1}{m_s}$$

MÓDULO 22 Feixe de Retas

1. FEIXE DE RETAS CONCORRENTES

Seja C(**x_0**; **y_0**) um ponto do plano, e **r** uma reta (não perpendicular ao eixo $\overrightarrow{Ox}$) que passa pelo ponto **C**.



Sendo **m** o coeficiente angular da reta **r** e P(x; y) um ponto genérico dessa reta, temos:

$$\mathbf{m} = \frac{y - \mathbf{y_0}}{x - \mathbf{x_0}} \Leftrightarrow y - \mathbf{y_0} = \mathbf{m} \,.\, (x - \mathbf{x_0})$$

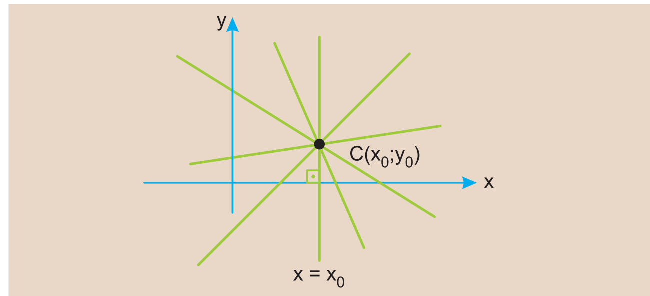
Dessa forma, a equação da reta **r**, conhecidos um ponto C(**x_0**; **y_0**) e o coeficiente angular **m**, resulta

$$\mathbf{y - y_0 = m \,.\, (x - x_0)}$$

Obs.: Atribuindo **todos** os valores possíveis ao coeficiente angular **m**($m \in \mathbb{R}$), obtemos as equações de **todas** as retas que passam pelo ponto C(**x_0**; **y_0**), com exceção da reta vertical, que é obtida pela equação **$x = x_0$**.

A equação do **feixe de retas concorrentes**, de centro C(**x_0**; **y_0**), é:

$$\mathbf{y - y_0 = m \,.\, (x - x_0)}, \textbf{ com } \mathbf{m} \in \mathbb{R}$$
ou
$$\mathbf{x = x_0} \textbf{ (reta vertical).}$$



2. FEIXE DE RETAS PARALELAS

Seja a reta **r**, de equação geral **a** . x + **b** . y + **c** = 0. Sabendo-se que retas **paralelas** têm o mesmo coeficiente angular $\left(m = -\dfrac{a}{b}\right)$ e coeficientes lineares diferentes $\left(h = -\dfrac{c}{b}\right)$, a obtenção de uma reta paralela a **r** é feita mantendo-se os valores de **a** e **b** e mudando-se o valor de **c**.

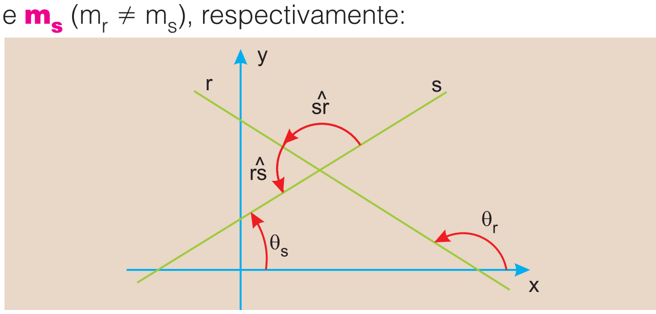
Portanto, a equação de uma reta paralela a **r** é do tipo:

$$\mathbf{a \,.\, x + b \,.\, y + k = 0}$$

MÓDULO 23 Ângulo entre Duas Retas

1. ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

No plano cartesiano, sejam as retas **r** e **s**, não verticais nem perpendiculares entre si, com declividades **m_r** e **m_s** ($m_r \neq m_s$), respectivamente:



Adotaremos para os ângulos entre **r** e **s**, a seguinte nomenclatura:

- **$\hat{sr}$** → ângulo da reta **s** para a reta **r** (orientado no sentido anti-horário)
- **$\hat{rs}$** → ângulo da reta **r** para a reta **s** (orientado no sentido anti-horário)

❑ Cálculo do ângulo $\hat{sr}$

Sendo $m_r = \text{tg}\ \theta_r$, $m_s = \text{tg}\ \theta_s$ e da figura: $\hat{sr} = \theta_r - \theta_s$, temos:

$$\text{tg}\ \hat{sr} = \text{tg}\ (\theta_r - \theta_s) \Rightarrow \text{tg}\ \hat{sr} = \frac{\text{tg}\ \theta_r - \text{tg}\ \theta_s}{1 + \text{tg}\ \theta_r \,.\, \text{tg}\ \theta_s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\ \hat{sr} = \frac{\mathbf{m_r} - \mathbf{m_s}}{1 + \mathbf{m_r} \,.\, \mathbf{m_s}}$$

Analogamente, obteríamos:

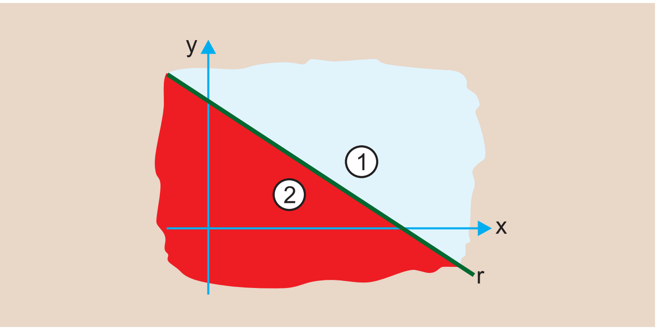
$$\text{tg}\ \hat{rs} = \frac{\mathbf{m_s} - \mathbf{m_r}}{1 + \mathbf{m_s} \,.\, \mathbf{m_r}}$$

Obs.: Obtido o valor da tangente, pela trigonometria, obtém-se o valor do ângulo.

Posição dos Pontos de um Plano em Relação a uma Reta e Distância de Ponto a Reta

1. POSIÇÃO DOS PONTOS DE UM PLANO EM RELAÇÃO A UMA RETA

❑ Seja o plano cartesiano e **r** uma de suas retas.



• Em relação à reta **r**, os pontos do plano podem assumir uma das seguintes posições relativas:

a) pertencem à reta **r**.

b) pertencem ao semiplano (**1**) (sem considerar os pontos de **r**).

c) pertencem ao semiplano (**2**) (sem considerar os pontos de **r**).

• Sendo $P(x_0; y_0)$ um ponto genérico do plano cartesiano e **r** a reta de equação $ax + by + c = 0$, verifica-se que:

a) $ax_0 + by_0 + c$ **= 0** para todos os pontos da reta **r**.

b) $ax_0 + by_0 + c$ **> 0** para todos os pontos de **um dos semiplanos** (sem considerar os pontos da reta **r**).

c) $ax_0 + by_0 + c$ **< 0** para todos os pontos do **outro semiplano** (sem considerar os pontos da reta **r**).

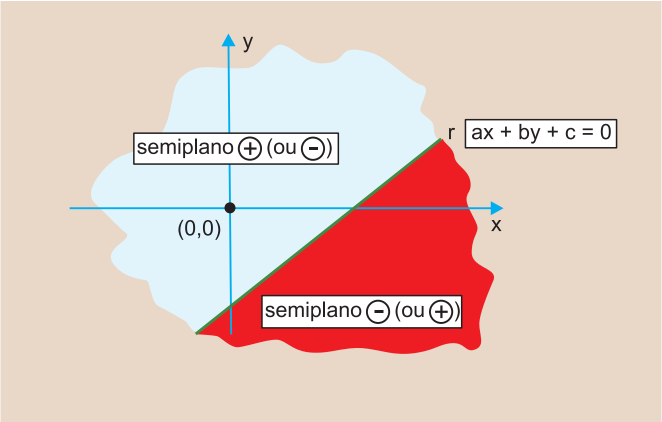
• Para sabermos qual dos semiplanos é **positivo** ou **negativo**, procede-se da seguinte maneira:

a) Procura-se o valor numérico do trinômio $ax + by + c$ para o ponto O (0; 0) – (origem).

b) Se o resultado é **positivo**, o semiplano que contém a origem é **positivo** e o outro, **negativo**.

c) Se o resultado for **negativo**, o semiplano que contém a origem é **negativo** e o outro, **positivo**.

d) Se o resultado der "zero", significa que a origem pertence à reta e devemos, pois, tomar um outro ponto (exemplo: (1; 0), (2; 0), (0; 1) etc.) **externo** à reta para, então, recairmos no estudo anterior.



Exemplo

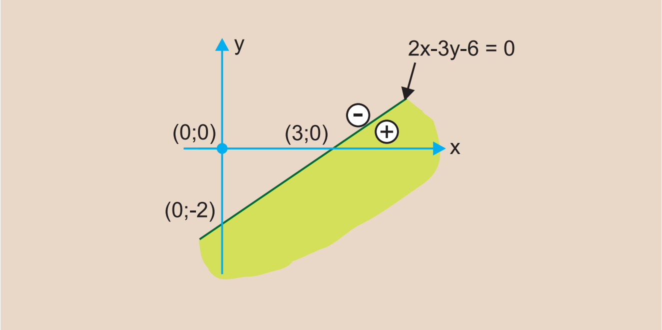
Representar graficamente o conjunto dos pontos do plano (x; y), tais que $2x - 3y - 6 \geq 0$.

Resolução

O problema pede a representação gráfica dos pontos da reta e do semiplano positivo.

A partir da representação gráfica da reta $2x - 3y - 6 = 0$, observamos que o semiplano que contém a **origem** é **negativo**, pois $2 . 0 - 3 . 0 - 6 < 0$.

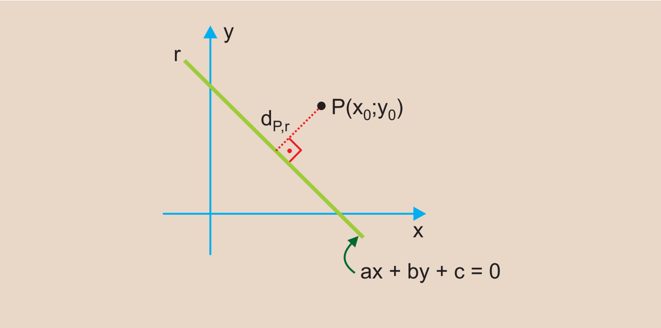
A representação gráfica da inequação $2x - 3y - 6 \geq 0$ é:



2. DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Seja a reta **r**, de equação ax + by + c = 0 e o ponto **P**(x_0; y_0), não pertencente à reta. A distância do ponto **P** à reta **r** será:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

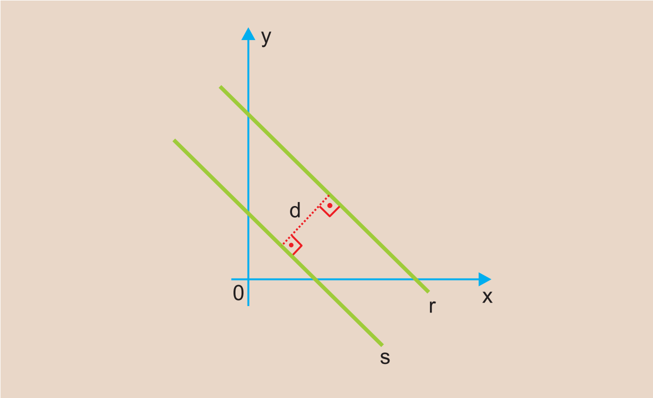


Exemplo

A distância do ponto P(5; 1) à reta de equação 3x + 4y – 4 = 0 é:

$$d = \frac{|3 . 5 + 4 . 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

3. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS PARALELAS



Dadas duas retas **r** e **s** paralelas com equações:

r: **a**x + **b**y + **c** = 0

s: **a**x + **b**y + **c**' = 0

conclui-se que a distância entre **r** e **s** é:

$$d_{r,s} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4. LUGARES GEOMÉTRICOS

❑ **Definição**

Lugar geométrico (**L.G.**) é um conjunto de pontos, no qual todos os pontos e somente eles possuem uma propriedade comum. Dessa maneira, uma curva é um lugar geométrico quando todos os seus pontos e unicamente eles admitem uma propriedade comum.

❑ **Resolução de problemas**

Resolver um problema de lugar geométrico significa determinar a **equação** de uma curva e **interpretar** essa equação no plano cartesiano, isto é, dizer que tipo de curva representa a equação obtida.

Para resolver um problema de **L.G.**, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Tomar um ponto genérico P(x; y) do plano.

2º) Impor, analiticamente, (geralmente, por meio das fórmulas de distâncias), condições para que o ponto pertença ao lugar geométrico.

3º) Obter a equação do lugar geométrico.

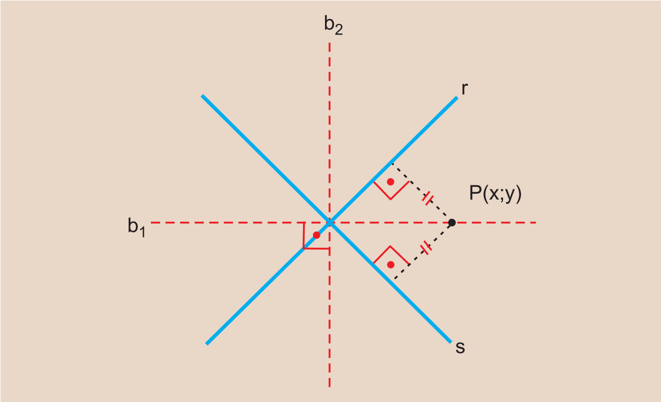
4º) Interpretar essa equação no plano cartesiano.

Exemplo

Dadas as retas (r) 3x – 6y – 1 = 0 e (s) 2x + y + 1 = 0, determinar as equações das retas **bissetrizes** de **r** e **s**.

Obs.: As **bissetrizes** constituem o L.G. dos pontos do plano equidistantes de **r** e **s**.

Resolução



Seja P(x; y) um ponto genérico do plano, então:

$$d_{P,r} = d_{P,s}$$

Portanto: $\dfrac{|3x - 6y - 1|}{\sqrt{9 + 36}} = \dfrac{|2x + y + 1|}{\sqrt{4 + 1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |3x - 6y - 1| = 3 . |2x + y + 1| \Leftrightarrow$

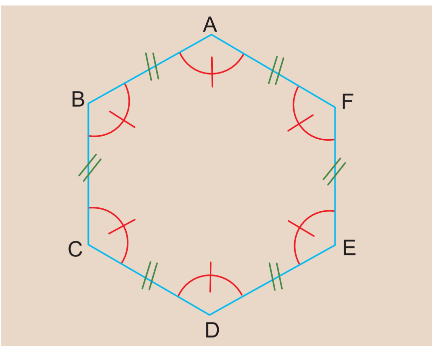
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y - 1 = 6x + 3y + 3 \Leftrightarrow 3x + 9y + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x - 6y - 1 = -6x - 3y - 3 \Leftrightarrow 9x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

As bissetrizes de **r** e **s** constituem um par de retas perpendiculares entre si.

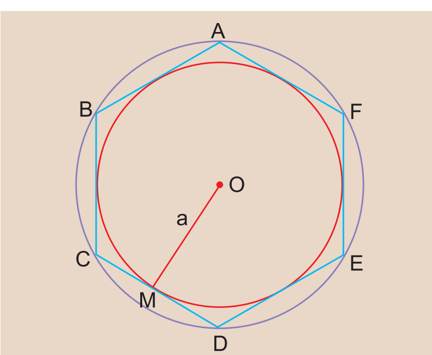
MÓDULO 19 — Polígonos Regulares

1. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

• Polígono regular é aquele cujos lados são respectivamente côngruos e cujos ângulos internos também são respectivamente côngruos.



• Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

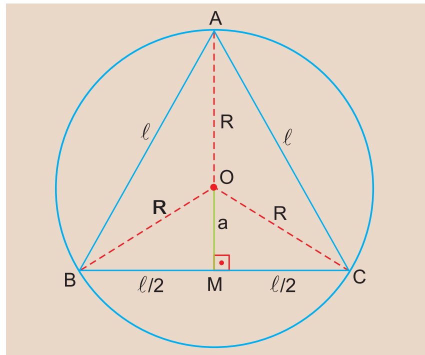


O é o centro da circunferência inscrita (interna), circunscrita (externa), e do polígono.

OM = **a** é o raio da circunferência inscrita no polígono e é denominado apótema do polígono.

2. TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO

Sendo **R** o raio da circunferência circunscrita, ℓ o lado e **a** o apótema de um triângulo equilátero, temos



• **O** é o baricentro ⇒ $\boxed{a = \dfrac{R}{2}}$

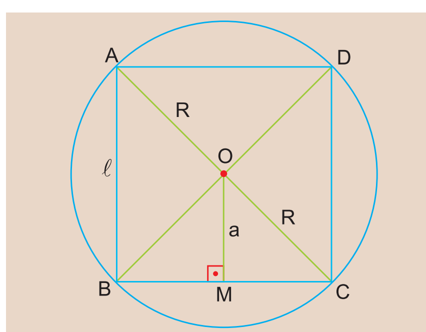
• No ΔAMC, retângulo em M, temos $AM^2 + MC^2 = AC^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(R + \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{3}}$$

3. QUADRADO INSCRITO

Sendo **R** o raio da circunferência circunscrita, ℓ o lado e **a** o apótema do quadrado inscrito, temos



• O triângulo OAB é retângulo em O, assim:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow$$

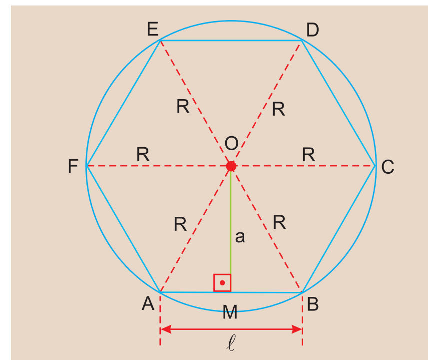
$$\Rightarrow \ell^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow \boxed{\ell = R\sqrt{2}}$$

• $OM = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{\ell}{2}}$ ou

ou $\boxed{a = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}$

4. HEXÁGONO REGULAR INSCRITO

Sendo **R** o raio da circunferência inscrita, ℓ o lado e **a** o apótema do hexágono regular inscrito, temos:

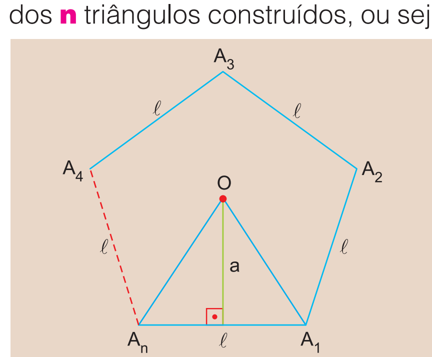


• O triângulo ABO é equilátero ⇒ $\overline{AB} \cong \overline{OA} \Rightarrow \boxed{\ell = R}$

• OM é altura do triângulo equilátero ⇒ $OM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}$

5. ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES

Sendo ℓ a medida do lado de um polígono regular de **n** lados, cujo apótema mede **a**, sobre cada lado podemos construir um triângulo de base ℓ e altura **a**. Assim, a área do polígono será igual à soma das áreas dos **n** triângulos construídos, ou seja,

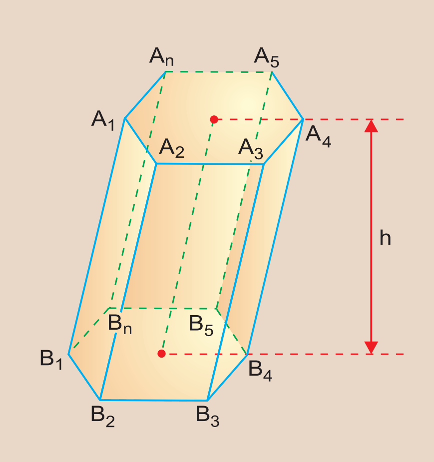


$\boxed{S = p \cdot a}$ **p é semiperímetro**

MÓDULO 20 Prismas

1. DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Consideremos uma região poligonal com **n** lados e uma reta não paralela e não contida no plano do polígono. Chama-se PRISMA à união de todos os segmentos congruentes com um extremo na região e paralelos à reta.

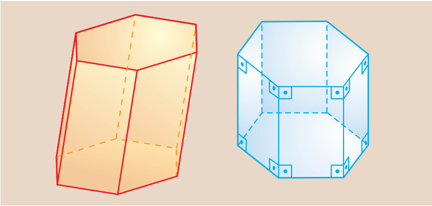


$A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ e $B_1\ B_2\ B_3 \ldots B_n$ são polígonos côngruos e paralelos chamados BASES. $\overline{A_1\ B_1}$, $\overline{A_2\ B_2}$, ..., $\overline{A_n\ B_n}$ são segmentos côngruos e paralelos chamados ARESTAS LATERAIS. $\overline{A_1\ A_2}$, $\overline{A_2\ A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}\ A_n}$, $\overline{B_2\ B_3}$, ... $\overline{B_{n-1}\ B_n}$ são chamados ARESTAS DA BASE. $A_1\ A_2\ B_2\ B_1$, $A_2\ A_3\ B_3\ B_2$, ... são paralelogramos chamados FACES LATERAIS.

h, distância entre as duas bases, é chamada de ALTURA DO PRISMA

2. CLASSIFICAÇÃO

Os prismas podem ser RETOS ou OBLÍQUOS, conforme as arestas laterais sejam ou não perpendiculares às bases.

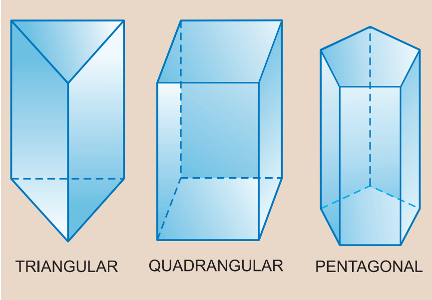


Nos prismas retos, as faces laterais são retângulos.

Os prismas retos, cujas bases são polígonos regulares, são denominados PRISMAS REGULARES.

3. NATUREZA

Os prismas são triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais etc., conforme suas bases sejam triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos etc.



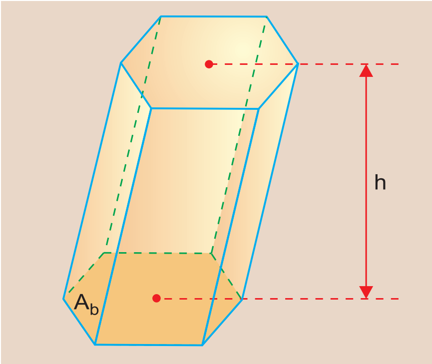
4. ÁREAS E VOLUMES

Sendo A_ℓ a área lateral de um prisma (soma das áreas de cada face lateral), A_b a área de uma de suas bases e A_t a sua área total, temos

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Num prisma, cuja área da base é A_b e a altura é h, o volume é dado por

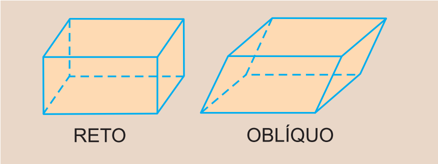
$$V = A_b \cdot h$$



MÓDULO 21 Casos Particulares de Prismas

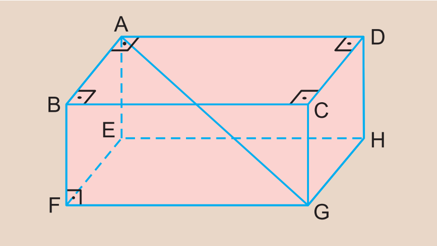
1. PARALELEPÍPEDOS

São prismas cujas bases são paralelogramos.



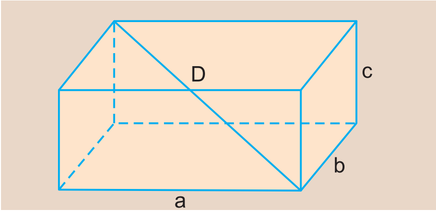
2. PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo é todo paralelepípedo reto (prisma reto) cujas bases são retângulos.



As suas seis faces são retângulos. $\overline{AG}$ é uma de suas diagonais.

Num paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c**, sendo **D** a medida de uma de suas diagonais, A_t sua área total e **V** o seu volume, têm-se



$$V = a \cdot b \cdot c$$

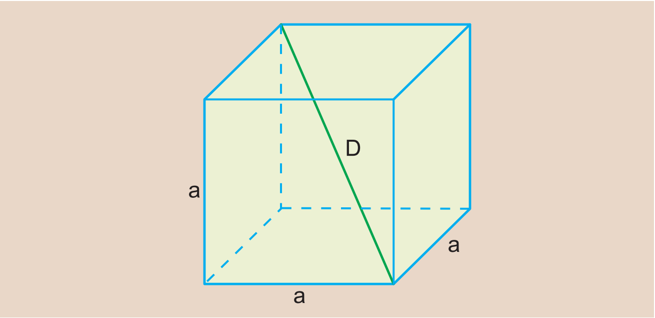
$$A_t = 2\,(ab + ac + bc)$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$(a + b + c)^2 = D^2 + A_t$$

3. HEXAEDRO REGULAR (CUBO)

É o paralelepípedo reto-retângulo (prisma) cujas seis faces (duas bases e quatro laterais) são quadradas.



Num cubo de aresta **a**, tem-se

$A_f = a^2$ (área da face)

$A_t = 6\,a^2$ (área total)

$D = a\sqrt{3}$ (diagonal)

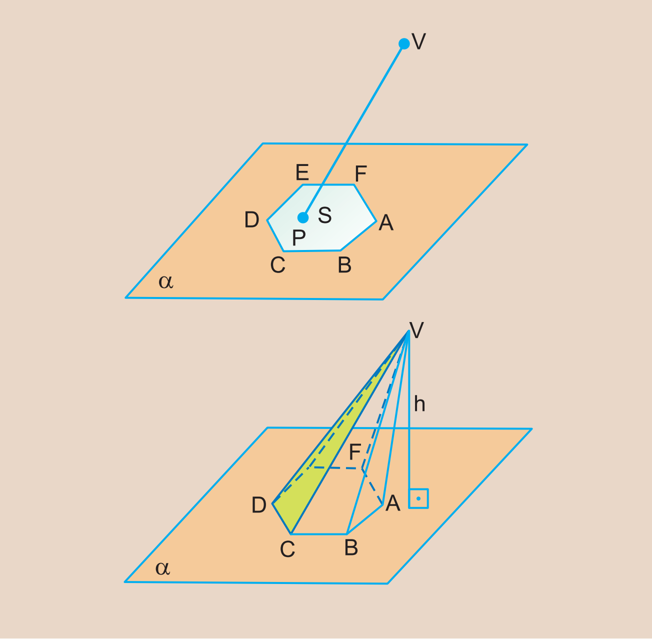
$V = a^3$ (volume)

MÓDULO 22 Pirâmide

1. DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dados um plano α, um ponto V, tais que $V \notin \alpha$ e uma região poligonal S do plano α, chama-se pirâmide a união de todos os segmentos $\overline{VP}$ onde $P \in S$.

O ponto V é denominado vértice e a região poligonal S é denominada base da pirâmide.



Na pirâmide da figura, temos

- Arestas laterais: $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, …
- Faces laterais: ΔVAB, ΔVBC, ΔVCD, …
- Arestas da base: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, …
- Altura da pirâmide: h (distância de V a α)

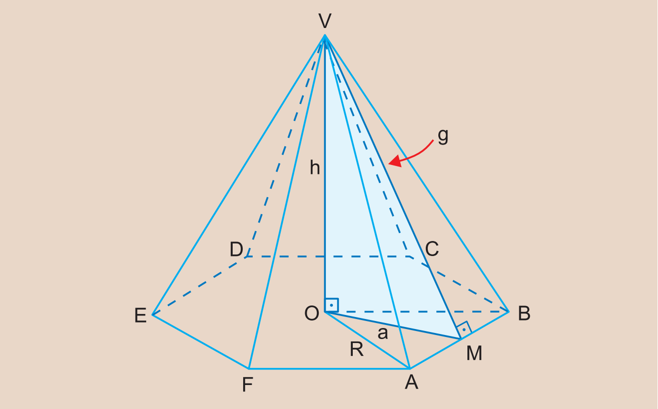
2. NATUREZA

As pirâmides são **triangulares**, **quadrangulares**, **pentagonais**, **hexagonais** etc., conforme as bases sejam **triângulos**, **quadriláteros**, **pentágonos**, **hexágonos** etc.

3. PIRÂMIDE RETA E PIRÂMIDE REGULAR

Uma pirâmide é RETA quando a projeção ortogonal do vértice incide sobre o centro do polígono da base.

Uma pirâmide é denominada REGULAR quando é reta e o polígono da base, regular.



Na pirâmide regular da figura, temos

- OA = R é o raio da circunferência circunscrita à base e é denominado simplesmente raio da base;
- OM = a é denominado apótema da base;
- VM = g é denominado apótema da pirâmide (altura de uma face lateral);
- $g^2 = a^2 + h^2$;
- $(VA)^2 = R^2 + h^2$.

4. CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Para qualquer pirâmide, tem-se

- **Área lateral (A_ℓ)**

É a soma das áreas das faces laterais da pirâmide.

Assim:
$A_\ell = A_1 + A_2 + A_3 \ldots, + A_n$, onde
$A_\ell, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são as áreas das faces laterais.

- **Área total (A_t)**

É a soma da área lateral e a área da base.

Assim, $\boxed{A_t = A_\ell + A_b}$

- **Volume (V)**

É a terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

Assim, $\boxed{V = \frac{1}{3} Ab \cdot h}$

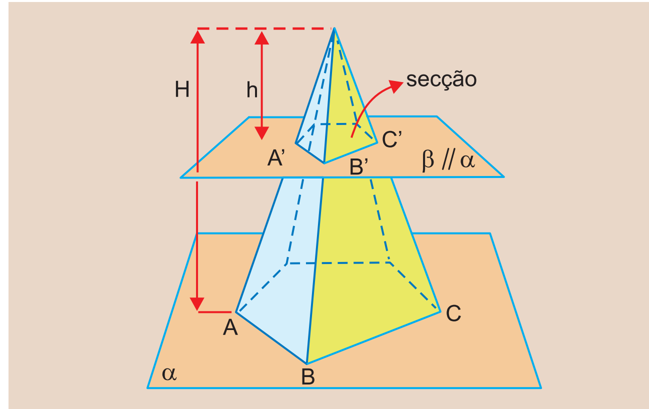
5. TETRAEDRO REGULAR

É a pirâmide triangular que possui as seis arestas congruentes entre si.

A área total e o volume de um tetraedro regular de aresta **a** são dados, respectivamente, por

$$\boxed{A_t = a^2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

6. SECÇÃO PARALELA À BASE DE UMA PIRÂMIDE



Quando interceptamos todas as arestas laterais da pirâmide por um plano paralelo à base, que não a contém nem ao vértice, obtemos uma secção poligonal, tal que

- As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.

$$\boxed{\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \ldots = \frac{h}{H}}$$

- A secção obtida e a base são polígonos semelhantes.

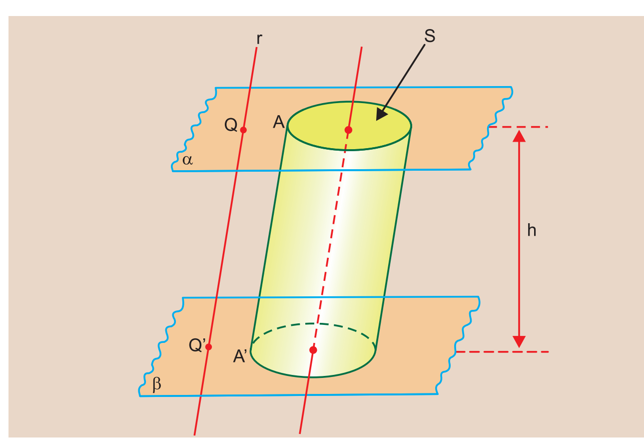
- A razão entre as áreas da secção (A_s) e da base (A_b) é igual ao quadrado da razão entre suas distâncias ao vértice.

$$\boxed{\frac{A_s}{A_b} = \frac{h^2}{H^2}}$$

MÓDULO 23 Cilindro de Base Circular

1. DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Sejam α e β planos paralelos (distintos), uma reta r interceptando os planos α e β e S uma região circular contida em α, que não tem ponto em comum com r. Chama-se cilindro de base circular a união de todos os segmentos $\overline{QQ'}$ paralelos a r, com $Q \in S$ e $Q' \in \beta$.



h é altura do cilindro (distância entre α e β);

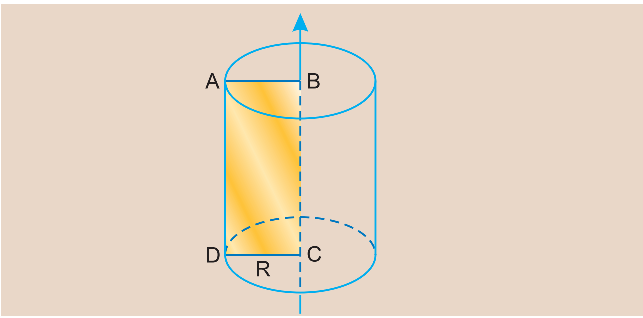
S é base do cilindro;

$\overline{AA'}$ é geratriz.

2. CILINDRO CIRCULAR RETO (CILINDRO DE REVOLUÇÃO)

❑ Definição e Elementos

Cilindro Circular Reto ou Cilindro de Revolução é o sólido gerado por uma rotação completa de uma região de retângulo em torno de um de seus lados.



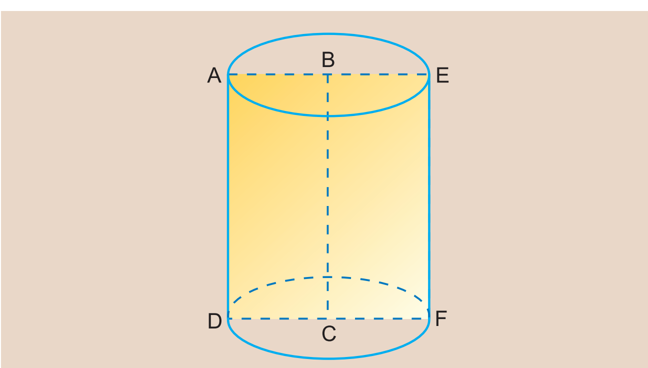
$\overleftrightarrow{BC}$ é o eixo do cilindro;

$\overline{AD}$ é a geratriz da superfície lateral;

AB = DC = R é o raio da base.

- **Secção Meridiana**

É a intersecção do cilindro com um plano que contém o seu eixo ($\overleftrightarrow{BC}$ na figura anterior).



O retângulo AEFD é uma secção meridiana do cilindro circular reto da figura.

- **Cálculo de Áreas e Volumes**

– Área da Base (A_b)

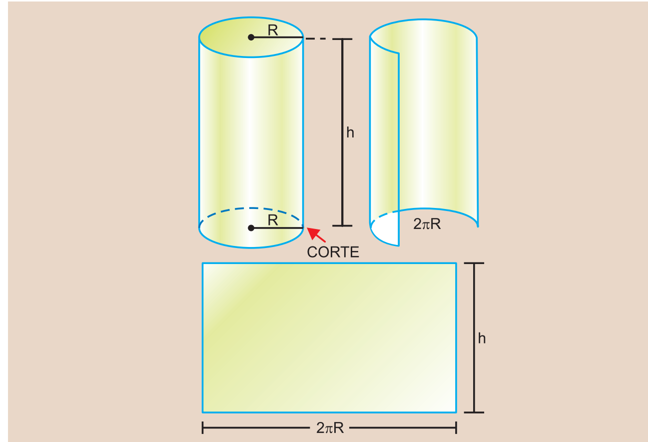
É a área de um círculo de raio R.

Assim, $\boxed{A_b = \pi R^2}$

– Área Lateral (A_ℓ)

A superfície lateral é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi R$ (comprimento da circunferência da base) e h.

Assim: $\boxed{A_\ell = 2\pi R h}$



– Área Total (A_t)

É a soma das áreas das bases com a área lateral.

Assim, $\boxed{A_t = A_\ell + 2 \,.\, A_b}$

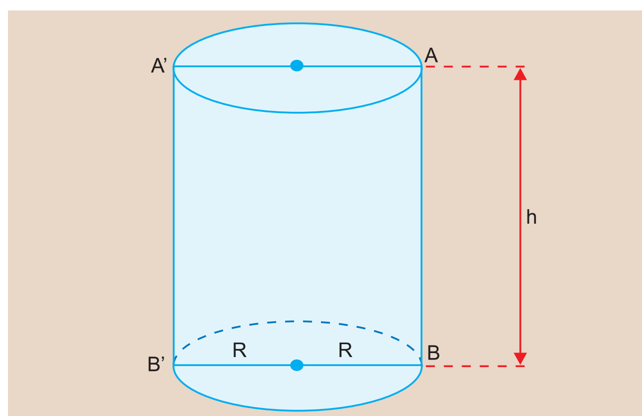
– Volume (V)

Todo cilindro é equivalente a um prisma de mesma altura e mesma área da base.

Assim, $\boxed{V = A_b \,.\, h} \Leftrightarrow \boxed{V = \pi R^2 h}$

3. CILINDRO EQUILÁTERO

É todo cilindro de base circular cuja secção meridiana é um quadrado.



A secção meridiana A'ABB' é um quadrado.

Assim, $\boxed{h = 2R}$

Observação

Num cilindro equilátero de raio R e altura h, temos

1º) $A_b = \pi R^2$

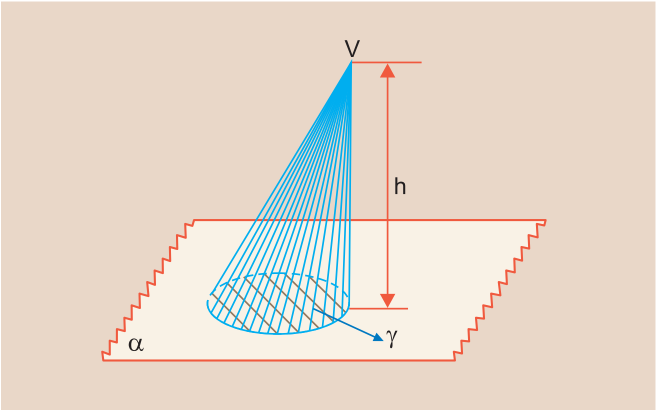
2º) $A_\ell = 2\pi R \,.\, h = 2\pi R \,.\, 2R = 4\pi R^2$

3º) $A_t = A_\ell + 2A_b = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

4º) $V = A_b . h = \pi R^2 \,.\, 2R = 2\pi R^3$

1. DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Seja um plano α, um ponto V $\notin \alpha$ e um círculo γ contido em α. Chama-se cone circular a reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo γ considerado.



No cone circular da figura, têm-se os seguintes elementos:

VÉRTICE: é o ponto V citado na definição.

BASE: é o círculo γ citado na definição.

ALTURA: é a distância (h) do vértice ao plano da base.

GERATRIZES: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

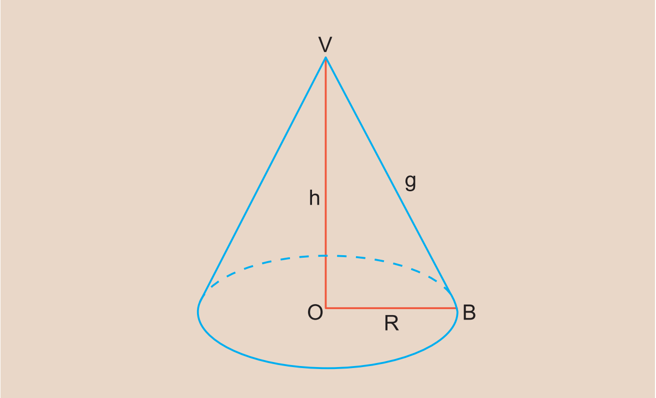
RAIO DA BASE: é o raio do círculo γ citado na definição.

2. CONE RETO

❑ Definição e elementos

Um cone circular é dito reto quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



Na figura, temos:

VO = h é a altura do cone

OB = R é o raio da base

VB = g é a geratriz

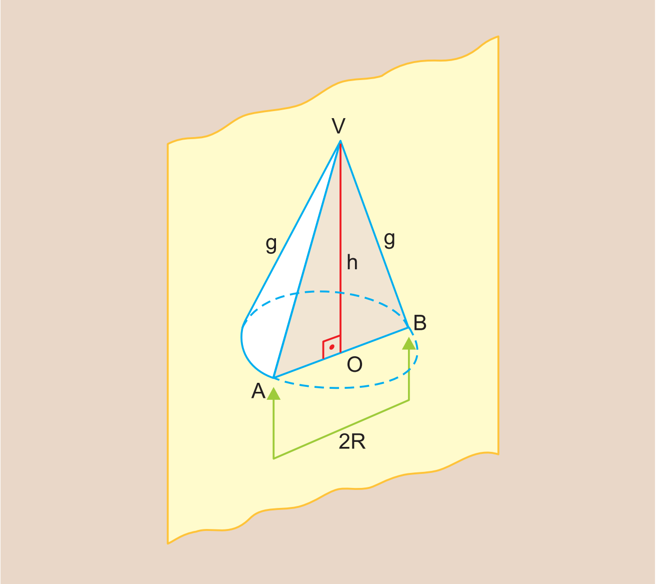
$g^2 = h^2 + R^2$

- **Secção meridiana**

É a intersecção do cone reto com um plano que contém a reta $\overleftrightarrow{VO}$ (eixo de rotação).

A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles, cuja área é dada por:

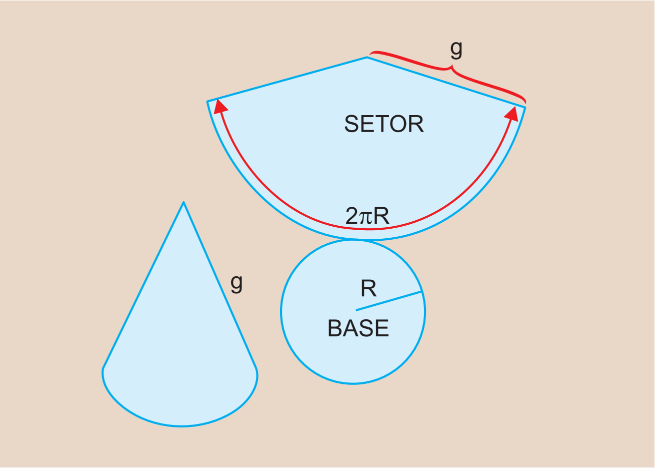
$$A_{SM} = R \cdot h$$



O triângulo isósceles VAB é uma secção meridiana do cone circular reto da figura.

- **Desenvolvimento das superfícies lateral e total de um cone reto**

A superfície lateral de um cone circular reto de raio da base R e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g, cujo arco tem comprimento $2\pi R$.



Assim, sendo A_b a área da base, A_ℓ a área lateral e A_t a área total desse cone circular reto, temos:

$$\boxed{A_b = \pi R^2}$$

$$A_\ell = \frac{g \cdot 2\pi R}{2} \Leftrightarrow \boxed{A_\ell = \pi R g}$$

$$A_t = A_\ell + A_b \Leftrightarrow \boxed{A_t = \pi R (g + R)}$$

- **Volume do cone**

Todo cone é equivalente a uma pirâmide de base equivalente e de mesma altura.

Assim,

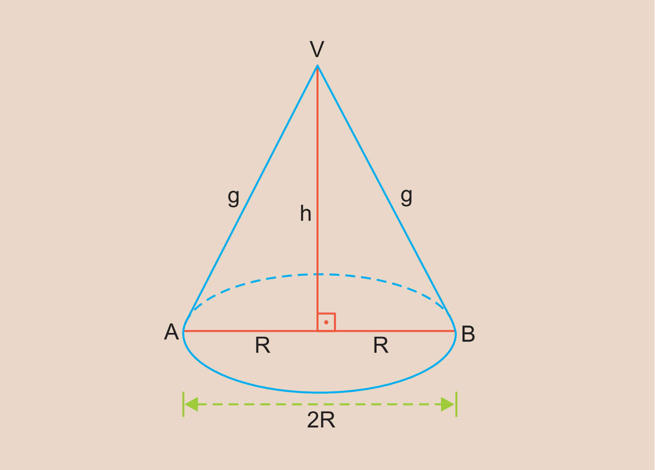
$$\boxed{V = \frac{Ab \cdot h}{3}}$$

ou

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}}$$

3. CONE EQUILÁTERO

Um cone circular reto é dito equilátero quando a sua secção meridiana é um triângulo equilátero.



No cone equilátero da figura, tem-se AB = AV = BV.
Assim,

$$\boxed{g = 2R}$$

e

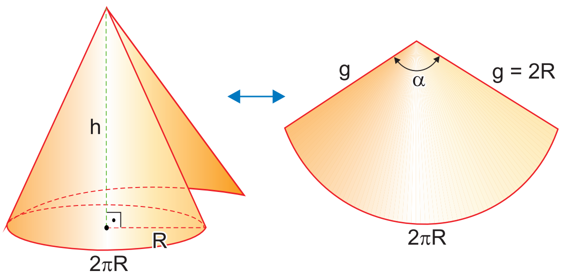
$$\boxed{h = R\sqrt{3}}$$

Exercício Resolvido

Quando se desenvolve num plano a superfície lateral de um cone equilátero, obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede:

a) 45° b) 60° c) 90°
d) 120° e) 180°

Resolução



$$\alpha = \frac{2\pi R}{g} = \frac{2\pi R}{2R} = \pi = 180°$$

Resposta: E