EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 37 – Radiciação em $\mathbb{C}$

1. Sejam os números complexos

$z_1 = 2(\cos 40° + i \text{ sen } 40°)$

$z_2 = 2[\cos(40° + 120°) + i \text{ sen}(40° + 120°)]$

$z_3 = 2[\cos(40° + 240°) + i \text{ sen}(40° + 240°)]$

Observando que **i** é a unidade imaginária, julgue as afirmações:

I. z_1 é raiz cúbica de $z = 8(\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$

II. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

III. Os afixos de z_1, z_2 e z_3 são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2, com centro na origem do plano Argand-Gauss.

São verdadeiras

a) todas. b) apenas I. c) apenas II.
d) apenas I e II. e) apenas I e III.

Resolução

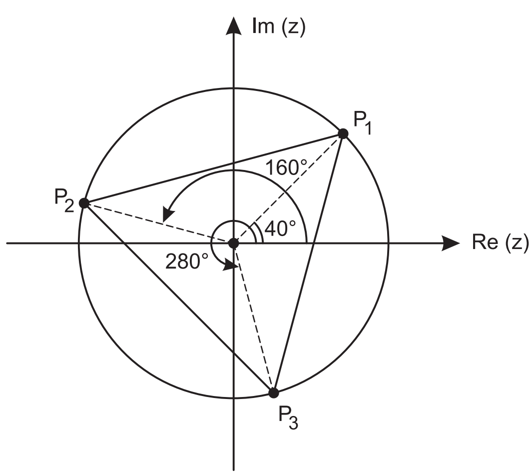
I. Verdadeira, pois $z_1^3 = 2^3 \,.\, [\cos(3 \,.\, 40°) + i \text{ sen}(3 \,.\, 40°)]$

II. Verdadeira, pois $z_1^3 = 2^3 \,.\, [\cos(3 \,.\, 40°) + i \text{ sen}(3 \,.\, 40°)]$,

$z_2^3 = 2^3 \,.\, [\cos(3 \,.\, 40° + 360°) + i \text{ sen}(3 \,.\, 40° + 360°)]$ e

$z_3^3 = 2^3 \,.\, [\cos(3 \,.\, 40° + 720°) + i \text{ sen}(3 \,.\, 40° + 720°)]$

III. Verdadeira, pois, sendo P_1, P_2 e P_3, respectivamente, os afixos de z_1, z_2 e z_3, temos a seguinte representação no plano Argand-Gauss.

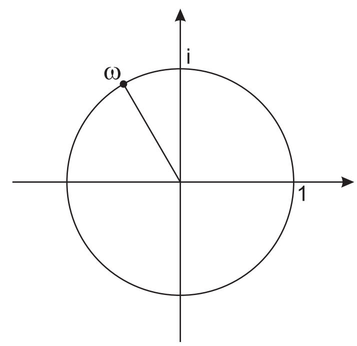


Resposta: A

2. **(FUVEST)** – A figura a seguir representa o número $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nessas condições,

a) determine as partes real e imaginária de $\dfrac{1}{\omega}$ e de ω^3.

b) represente $\dfrac{1}{\omega}$ e ω^3 na figura abaixo.



c) determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

Resolução

Se $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, então:

$\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + i \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 120° + i \,.\, \text{sen } 120°$

Assim:

a) $\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{\cos 0° + i \,.\, \text{sen } 0°}{\cos 120° + i \,.\, \text{sen } 120°} =$

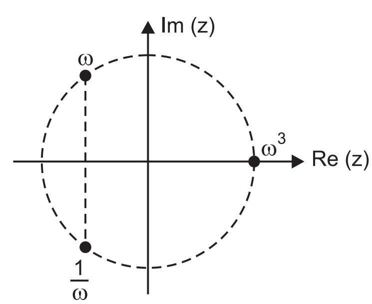
$= \cos(-120°) + i \,.\, \text{sen}(-120°) =$

$= \cos 240° + i \,.\, \text{sen } 240° = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega^3 = \cos(3 \,.\, 120°) + i \,.\, \text{sen}(3 \,.\, 120°) =$

$= \cos 360° + i \,.\, \text{sen } 360° = 1$

b)



c) $z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1 = \cos 0° + i \,.\, \text{sen } 0°$

As raízes da equação são as raízes cúbicas de 1 e, portanto:

$z_1 = 1 \,.\, (\cos 0° + i \,.\, \text{sen } 0°) = 1 = \omega^3$

$z_2 = 1 \,.\, (\cos 120° + i \,.\, \text{sen } 120°) = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \omega$

$$z_3 = 1 \,.\, (\cos 240° + i \,.\, \text{sen } 240°) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\omega}$$

Respostas: a) $\mathbf{Re\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{2}; Im\left(\frac{1}{\omega}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\mathbf{Re(\omega^3) = 1; Im(\omega^3) = 0}$

b) ver figura

c) $\mathbf{\left\{1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Módulo 38 – Definição de Polinômios, Grau, Valor Numérico e Identidade

3. Considere o polinômio de coeficientes reais
$P(x) = (m^2 - 4)x^3 - (m^3 - 3m)x^2 + (m^2 - 1)x + (2m - 2)$.
Sabendo que m é raiz de P(x), determine
a) o valor de m.
b) o grau de P.
c) o termo independente de P(x).

Resolução

a) m é raiz de P(x) $\Leftrightarrow P(m) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (m^2 - 4)m^3 - (m^3 - 3m)m^2 + (m^2 - 1)m + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m^5 - 4m^3 - m^5 + 3m^3 + m^3 - m + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

b) $m = 2 \Rightarrow P(x) = 0x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow gr(P) = 2$

c) $P(0) = 2$

Respostas: a) m = 2 b) gr(P) = 2 c) P(0) = 2

4. Se $(a - 3)x^2 + (b + 1)x + (c - 2) = 2x^2 - 5x + 1 \;\forall x \in \mathbb{R}$ então, a + b + c resulta
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução

$(a - 3)x^2 + (b + 1)x + (c - 2) = 2x^2 - 5x + 1 \;\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = 2 \\ b + 1 = -5 \\ c - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -6 \\ c = 3 \end{cases}$$

Portanto, a + b + c = 2

Resposta: C

5. **(EFOA)** – Se $\dfrac{7x^2 - 5x - 3}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x - 3}$, em que $x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$, podemos afirmar, então, que a soma dos valores de A, B e C é:
a) 8 b) 6 c) 9 d) 5 e) 7

Resolução

Para $x \in \mathbb{R} - \{0; 3\}$:

$$\frac{7x^2 - 5x - 3}{x^2(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2 - 5x - 3}{x^2(x - 3)} = \frac{Ax(x - 3) + B(x - 3) + Cx^2}{x^2(x - 3)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 5x - 3 = Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + Cx^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7x^2 - 5x - 3 = (A + C)x^2 + (-3A + B)x - 3B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 7 \\ -3A + B = -5 \\ -3B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 5 \end{cases}$$

Portanto, A + B + C = 8.

Resposta: A

Módulo 39 – Divisão de Polinômios

6. **(FGV)** – O quociente da divisão do polinômio
$P(x) = (x^2 + 1)^4 \,.\, (x^3 + 1)^3$ por um polinômio de grau 2 é um polinômio de grau
a) 5. b) 10. c) 13. d) 15. e) 18.

Resolução

O polinômio P é de grau 2 . 4 + 3 . 3 = 17.
Na divisão de P por um polinômio de grau 2 o quociente é de grau 17 – 2 = 15.

Resposta: D

7. **(UFTM)** – Dados os polinômios $P(x) = x^6$ e $Q(x) = x^6 + x^5 - x^2$, se R(x) é o polinômio do resto da divisão de P(x) por Q(x), então, as únicas raízes reais da equação R(x) = 0 são

a) -1 e $-\dfrac{1}{2}$. b) – 1 e 0. c) 0 e $\dfrac{1}{2}$.

d) 0 e 1. e) $\dfrac{1}{2}$ e 1 .

Resolução

$$\begin{array}{l|l} \;\; x^6 & x^6 + x^5 - x^2 \\ \cline{2-2} -x^6 - x^5 + x^2 & \qquad 1 \\ \hline \quad -x^5 \;\; + x^2 & \end{array}$$

Portanto, $R(x) = -x^5 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^3 = 1$.
Assim, as únicas raízes reais da equação R(x) = 0 são 0 e 1.

Resposta: D

8. Sabe-se que $x^2 + 1$ é fator do polinômio
$P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x$. O conjunto das raízes reais de P(x) é:
a) {– 1; 0; 1} b) {0; 1; 2} c) {0; 1; 3}
d) {0; 1; 4} e) {– 1; 0; 3}

Resolução

$P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3)$
Se $x^2 + 1$ é fator de P(x), então $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ é divisível por $x^2 + 1$. De fato,

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 \qquad\;\; - x^2 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline \quad -4x^3 + 3x^2 - 4x + 3 & \\ \quad +4x^3 \qquad\;\; + 4x & \\ \hline \qquad\quad 3x^2 \qquad + 3 & \\ \qquad\; -3x^2 \qquad - 3 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Assim, $P(x) = x(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 3)$ e suas raízes reais são 0, 1 e 3.

Resposta: C

Módulo 40 – Dispositivo de Briot-Ruffini e Teorema do Resto

9. Dividir $x^4 + 3x^2 - 7x + 2$ por $x - 2$ pelo método da chave.

Resolução

$$\begin{array}{rl}
\cancel{x^4} + 0x^3 + 3x^2 - 7x + 2 & \big|\ x^2 - 2 \\
-\cancel{x^4} + 2x^3 \qquad\qquad\quad & \big|\ \overline{x^3 + 2x^2 + 7x + 7} \\
\hline
2\cancel{x^3} + 3x^2 - 7x + 2 & \\
-2\cancel{x^3} + 4x^2 \qquad\quad & \\
\hline
7\cancel{x^2} - 7x + 2 & \\
-7\cancel{x^2} + 14x \quad & \\
\hline
7\cancel{x} + 2 & \\
-7\cancel{x} + 14 & \\
\hline
16 &
\end{array}$$

Resposta: $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + 7$ e $R(x) = 16$

10. Repetir a questão anterior, utilizando o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini.

Resolução

Para $\alpha = 2$, que é a raiz de $x - 2 = 0$, tem-se:

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 3 & -7 & 2 & 2 \\
\hline
\underbrace{1 \quad 2 \quad 7 \quad 7}_{\text{coeficientes de Q}} & & & & \underbrace{16}_{\text{resto}} &
\end{array}$$

O resto é 16 e os coeficientes de Q são 1, 2, 7, 7.

Resposta: $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + 7$ e $R(x) = 16$

Módulo 41 – Dispositivo de Briot-Ruffini e Teorema do Resto

11. Os restos das divisões de um polinômio P(x) por x + 1 e por x – 3 são, respectivamente, iguais a 5 e 1. O resto da divisão de P(x) por (x + 1)(x – 3) é:

a) 3 b) 4 c) – x + 4 d) 2x – 3 e) x – 2

Resolução

$$\begin{cases}
\begin{array}{r|l} P(x) & x + 1 \\ \hline 5 & Q_1(x) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{r|l} P(x) & x - 3 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{r|l} P(x) & (x + 1)(x - 3) \\ \hline \underbrace{ax + b}_{R(x)} & Q(x) \end{array}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
P(-1) = 5 \\
P(3) = 1 \\
P(-1) = -a + b \\
P(3) = 3a + b
\end{cases}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 5 \\ 3a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow R(x) = ax + b = -x + 4$$

Resposta: C

12. **(FEI)** – Se o resto da divisão de $A(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 1$ por $B(x) = x - 2$ é igual a 27, o valor de a é:

a) 2 b) 1 c) 5 d) 7 e) 0

Resolução

$$\begin{array}{r|l} A(x) & x - 2 \\ \hline 27 & Q(x) \end{array} \Leftrightarrow A(x) = (x - 2).Q(x) + 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(2) = 27 \Rightarrow 8 + 4a - 10 + 1 = 27 \Rightarrow 4a = 28 \Rightarrow a = 7$$

Resposta: D

Módulo 42 – Equações Algébricas: Relações de Girard

13. **(FUVEST)** – Um polinômio de grau 3 possui três raízes reais que, colocadas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética em que a soma dos termos é igual a $\dfrac{9}{5}$. A diferença entre o quadrado da maior raiz e o quadrado da menor raiz é $\dfrac{24}{5}$.

Sabendo-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio é 5, determine

a) a progressão aritmética.

b) o coeficiente do termo de grau 1 desse polinômio.

Resolução

a) Sendo a – r, a e a + r as três raízes em progressão aritmética de razão r > 0, temos, de acordo com o enunciado, que:

$$\begin{cases} a - r + a + a + r = \dfrac{9}{5} \\[2ex] (a + r)^2 - (a - r)^2 = \dfrac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\[1ex] r = 2 \end{cases}$$

A progressão aritmética é, portanto,

$$-\frac{7}{5}, \frac{3}{5} \text{ e } \frac{13}{5}$$

b) Sendo $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ com $a_0 = 5$, decorre das relações de Girard:

$$\left(-\frac{7}{5}\right).\left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right).\left(\frac{13}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right).\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{a_2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_2}{5} = -\frac{73}{25} \Leftrightarrow a_2 = -\frac{73}{5}$$

Respostas: a) $-\dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{13}{5}$ b) $-\dfrac{73}{5}$

14. O valor do número real k para que as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + kx - 6 = 0$ estejam em progressão aritmética é:

a) – 20 b) – 10 c) 1 d) 10 e) 20

Resolução

Sejam $r_1 = \alpha - r$; $r_2 = \alpha$ e $r_3 = \alpha + r$ as raízes em progressão aritmética.

Das relações de Girard, temos que $r_1 + r_2 + r_3 = 9$ e, portanto, $\alpha - r + \alpha + \alpha + r = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Logo, $3^3 - 9 \,.\, 3^2 + k \,.\, 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow 27 - 81 + 3k - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k = 60 \Leftrightarrow k = 20$

Resposta: E

Módulo 43 – Equações Algébricas

15. Sabe-se que 2 é raiz dupla da equação
$x^3 - x^2 + mx + n = 0$, sendo $m, n \in \mathbb{R}$. Então, **m + n** é igual a:
a) – 1 b) 1 c) 3 d) 4 e) 6

Resolução

Se as raízes da equação são $r_1 = 2$, $r_2 = 2$ e $r_3 = r$, então $r_1 + r_2 + r_3 = 1 \Leftrightarrow 2 + 2 + r = 1 \Leftrightarrow r = -3$.

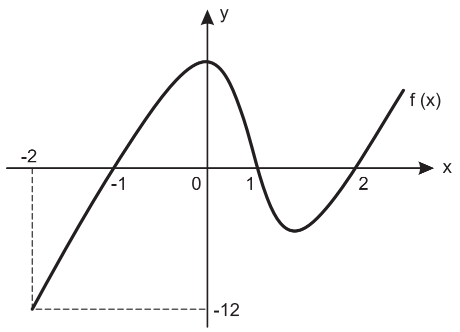
Portanto, as raízes são $r_1 = 2$, $r_1 = 2$ e $r_3 = -3$.

$$\begin{cases} r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = m \\ r_1r_2r_3 = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \,.\, 2 + 2 \,.\, (-3) + 2 \,.\, (-3) = m \\ 2 \,.\, 2 \,.\, (-3) = -n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = 12 \end{cases} \Rightarrow m + n = -8 + 12 = 4$$

Resposta: D

16. **(FGV)** – Considere a função y = f(x), tal que:
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
e cujo gráfico está representado na figura abaixo.



Determine o conjunto solução da inequação
$0 \le x^3 - 2x^2 - x + 14 \le 12$.

Resolução

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2(x - 2) - (x - 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = (x - 2) \,.\, (x^2 - 1)$ e, portanto, as raízes da equação $f(x) = 0$ são – 1, 1 e 2.
2) De acordo com o gráfico, $f(-2) = -12$ e $f(x) \ge -12, \forall x \ge -2$.
3) Também pelo gráfico, temos: $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ou $1 \le x \le 2$
4) $x^3 - 2x^2 - x + 14 \ge 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \ge -12 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \ge -12 \Leftrightarrow x \ge -2$
5) $x^3 - 2x^2 - x + 14 \le 12 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ou $1 \le x \le 2$
6) De (4) e (5), temos: $-2 \le x \le -1$ ou $1 \le x \le 2$

Resposta: $-2 \le x \le -1$ ou $1 \le x \le 2$

Módulo 44 – Equações Algébricas

17. **(PUC)** – Sabe-se que a equação $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ admite raízes inteiras. Se m é a maior das raízes não inteiras dessa equação, então o valor de $m + \dfrac{1}{m}$ é
a) – 6 b) – 3 c) 0 d) $\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{5}$

Resolução

Sabendo que a equação $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ admite raízes inteiras, conclui-se que o número 1 é raiz, e é raiz dupla, visto que, aplicando-se o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	1	– 4	1	1	1
1	2	– 2	– 1	0	1
1	3	1	0		

As demais raízes são tais que: $x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Sendo m a maior dessas raízes, temos:
$m^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = -3m$ e, portanto,

$$m + \frac{1}{m} = \frac{m^2 + 1}{m} = \frac{-3m}{m} = -3$$

Resposta: B

18. **(UFGO)** – Sabe-se que todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais admite pelo menos uma raiz real. Dado o polinômio $p(x) = [(m - 1)(m^2 + 1)]x^5 + x^2 + kx + 1$, com m, $k \in \mathbb{R}$, as condições sobre m e k, para que o polinômio p(x) não admita raiz real, são
a) m = 0 e k < – 2 b) m = – 1 e – 2 < k < 2
c) m = 1 e k < – 2 d) m = 1 e – 2 < k < 2
e) m = 0 e k > 2

Resolução

Sendo m, $k \in \mathbb{R}$, p(x) não admitirá raízes reais se, e somente se:
a) o grau de p(x) for par e, portanto, $(m - 1)(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m = 1$
b) $x^2 + kx + 1$ não tiver raízes reais $\Leftrightarrow \Delta = k^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < k < 2$

De *a* e *b*, concluímos que as condições sobre m e k, para que o polinômio p(x) não admita raízes reais, são m = 1 e – 2 < k < 2.

Resposta: D

Módulo 45 – Fatorial e Números Binomiais

19. **(ESPM)** – A expressão $\dfrac{2!\,.\,8!\,.13!}{4!}$ equivale a
a) 4 . 13! b) 4! . 13! c) 15!
d) 16 . 13! e) 16!

Resolução

$$\frac{2!\,.\,8!\,.\,13!}{4!} = \frac{2\,.\,1\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!\,.\,13!}{4!} =$$

$= 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 13! = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 7 \,.\, 13! =$
$= 16 \,.\, 15 \,.\, 14 \,.\, 13! = 16!$

Resposta: E

20. Calcular $\dbinom{7}{4}$

Resolução

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 35$$

Módulo 46 – Triângulo de Pascal (ou Tartaglia)

21. **(FGV)** – Se

$$\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$$, então n é igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 5 e) 8

Resolução

Lembrando que $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!} = \dfrac{n^2-n}{2}$,

que $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \binom{n}{6}$ (relação de Stifel)

e supondo n > 6, temos:

$$\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2-n}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{6} = \binom{n}{2} \Rightarrow n = 6 + 2 = 8$$

Resposta: E

22. A soma S = 1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + … + 8 . 9 é igual a

a) 120 b) 240 c) 330 d) 360 e) 480

Resolução

S = 1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + … + 8 . 9 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{2} = \frac{2 . 1}{2} + \frac{3 . 2}{2} + \frac{4 . 3}{2} + \ldots + \frac{9 . 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{9}{2} \Leftrightarrow \frac{S}{2} = \binom{10}{3}$$

(soma na coluna do triângulo de Pascal)

$$\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{2}$$
$$\binom{4}{2}$$
$$\vdots$$
$$\binom{9}{2}$$
$$\searrow \binom{10}{3}$$

Então, $\dfrac{S}{2} = \dfrac{10 . 9 . 8}{3 . 2 . 1} \Leftrightarrow S = 240$

Resposta: B

Módulo 47 – Teorema do Binômio de Newton

23. O quarto termo do desenvolvimento de $(2x + y)^8$, feito segundo os expoentes decrescentes de x é igual a:

a) $56x^5y^3$ b) $36x^3y^5$ c) $1792x^5y^3$
d) $1792x^3y^5$ e) $2240x^4y^4$

Resolução

Como $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ para $(x + y)^n$ temos:

$$T_4 = \binom{8}{3} (2x)^5 . y^3 = 56 . 32x^5y^3 = 1792x^5y^3$$

Resposta: C

24. **(UEAL)** – A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(7x - 2y)^m$ é 3125. O valor de m é:

a) 5 b) 4 c) 6 d) 7 e) 3

Resolução

Para x = 1 e y = 1, resulta para a soma dos coeficientes $(7-2)^m = 5^m$

$5^m = 3125 \Leftrightarrow 5^m = 5^5 \Leftrightarrow m = 5$

Resposta: A

Módulo 48 – Princípio Fundamental da Contagem e Arranjos Simples

25. **(UNESP)** – Uma rede de supermercados fornece a seus clientes um cartão de crédito cuja identificação é formada por 3 letras distintas (dentre 26), seguidas de 4 algarismos distintos. Uma determinada cidade receberá os cartões que têm L como terceira letra, o último algarismo é zero e o penúltimo é 1. A quantidade total de cartões distintos oferecidos por tal rede de supermercados para essa cidade é

a) 33 600. b) 37 800. c) 43 200.
d) 58 500. e) 67 600.

Resolução

A numeração dos cartões dessa cidade é do tipo

$$\square\ \square\ L\ \triangle\ \triangle\ 10$$

A primeira letra pode ser escolhida entre as 25 restantes e a segunda letra entre as 24 restantes.
O primeiro algarismo pode ser escolhido entre os 8 restantes e o segundo entre os sete restantes.
Desta forma, o número de cartões é 25 . 24 . 8 . 7 = 33 600

Resposta: A

26. **(FGV)** – Aconteceu um acidente: a chuva molhou o papel onde Teodoro marcou o telefone de Aninha e apagou os três últimos algarismos. Restaram apenas os dígitos 58347. Observador, Teodoro lembrou que o número do telefone da linda garota era um número par, não divisível por 5 e que não havia algarismos repetidos. Apaixonado, resolveu testar todas as combinações numéricas possíveis. Azarado! Restava apenas uma possibilidade, quando se esgotaram os créditos do seu telefone celular. Até então, Teodoro havia feito:

a) 23 ligações b) 59 ligações c) 39 ligações
d) 35 ligações e) 29 ligações

Resolução

Os algarismos que restam não podem ser 5, 8, 3, 4 ou 7 e, além disso, o último só pode ser 2 ou 6. Os dois algarismos que restam podem ser obtidos de 4 . 3 maneiras diferentes.
Portanto, o total de possibilidades é 2 . 4 . 3 = 24.
Quando se esgotaram os créditos do seu telefone celular Teodoro havia feito 24 – 1 = 23 ligações.

Resposta: A

Módulo 37 – Radiciação em $\mathbb{C}$

De **1** a **7** calcular as raízes:

1. Quadradas de **– 4**.
2. Cúbicas de **8 i**.
3. Quartas de **– 16**.
4. Quartas de **16 (cos 120° + i . sen 120°)**
5. Sextas de **– 64**.
6. Sextas de **64**.
7. Cúbicas de **8**.

Módulo 38 – Definição de Polinômios, Grau, Valor Numérico e Identidade

1. Dado o polinômio
$\mathbf{x^3 + (2 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 3m}$, calcule o valor numérico para $\mathbf{x = m}$.

2. **(UESB)** – Se $\mathbf{P(x) = x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - ... + x^2 - x + 1}$ e $\mathbf{P(-1) = 19}$, então **n** é igual a:
a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

3. Num polinômio **p(x)**, do 3º grau, o coeficiente de $\mathbf{x^3}$ é **1**. Se $\mathbf{p(1) = p(2) = 0}$ e $\mathbf{p(3) = 30}$, o valor de $\mathbf{p(-1)}$ é:
a) 48 b) 18 c) 66 d) – 2 e) 68

4. O polinômio
$\mathbf{p(x) = (m - 4) . x^3 + (m^2 - 16) . x^2 + (m + 4) . x + 4}$ é de grau **2**:
a) se, e somente se, m = 4 ou m = – 4
b) se, e somente se, m ≠ 4
c) se, e somente se, m ≠ – 4
d) se, e somente se, m ≠ 4 e m ≠ – 4
e) para nenhum valor de m

5. **(UFC)** – Considere a igualdade
$$\frac{x + 3}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$
A opção em que figuram os valores de **A** e **B** que tornam esta igualdade uma identidade algébrica é:
a) A = – 2 e B = 1 b) A = 1 e B = – 2
c) A = 1 e B = 2 d) A = 2 e B = 1
e) A = 2 e B = – 1

6. Se $\dfrac{8}{x^3 - 4x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 2} + \dfrac{c}{x + 2}$,
$\forall x \in \mathbb{C} - \{0; 2; -2\}$, então os valores de **a**, **b** e **c** serão, respectivamente:
a) – 2; 2; – 1 b) – 1, 2, 1 c) – 2; 1; – 1
d) – 1; – 1; 2 e) – 2; 1; 1

7. Os valores de **A** e **B** para os quais
$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$ são, respectivamente:
a) – 2; 3 b) 1; 0 c) – 1; 2 d) 2; 3 e) 4; 5

Módulo 39 – Divisão de Polinômios

1. As soluções da equação **Q(x) = 0**, em que **Q(x)** é o quociente da divisão do polinômio $\mathbf{x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24}$ por $\mathbf{x^2 - 6x + 5}$, são:
a) – 1 e 5 b) – 1 e – 5 c) 1 e – 5
d) 1 e 5 e) 0 e 1

2. **(UESPI)** – O resto da divisão do polinômio $\mathbf{P(x) = x^4 + 69}$ por $\mathbf{x^2 + 4x + 8}$ é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

3. **(PUC-RS)** – Se chamamos de **Q(x)** o quociente da divisão de $\mathbf{P(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 30}$ por $\mathbf{D(x) = x^2 - 7x + 6}$, então **Q(3)** é igual a:
a) – 8 b) – 2 c) 2 d) 3 e) 8

4. **(UESPI)** – Se o polinômio $\mathbf{P(x) = x^3 + mx^2 - 1}$ é divisível por $\mathbf{x^2 + x - 1}$, então **m** é igual a:
a) – 3 b) – 2 c) – 1 d) 1 e) 2

5. **(UEL)** – Sabe-se que na divisão do polinômio
$\mathbf{f = x^3 - 2x^2 + kx + t}$ por $\mathbf{g = x^2 - x + 1}$, obtém-se resto **3x – 2**. Nessas condições, os números reais **k** e **t** são tais que **k – t** é igual a:
a) 8 b) 4 c) 2 d) – 2 e) – 8

6. O quociente da divisão do polinômio $\mathbf{f = x^3 - 1}$ por $\mathbf{g = x^2 + 1}$ é:
a) x + 1 b) x – 1 c) x d) – x + 1 e) – x – 1

7. **(FGV)** – Dividindo o polinômio P(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se quociente igual a x – 5 e resto igual a 13x + 5. O valor de P(1) é:
a) 12 b) 13 c) 15 d) 16 e) 14

8. **(UFRN)** – Se A, B e C são números reais e
$P(x) = x^5 - 7x^2 + 2x + 4$ dividido por $Q(x) = x^3 - 8$ deixa resto $R(x) = Ax^2 + Bx + C$, pode-se afirmar que 4 A + 2 B + C é igual a:
a) 8 b) 16 c) 12 d) 20

Módulo 40 – Dispositivo de Briot-Ruffini e Teorema do Resto

1. **(UEL)** – Dividindo-se o polinômio $\mathbf{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x - 21}$ por **x + 3**, obtêm-se:
a) $x^3 - 2x^2 + x - 12$ com resto nulo
b) $x^3 - 2x^2 + 3$ com resto 16
c) $x^3 + x^2 - 13x + 35$ e resto 84
d) $x^3 + x^2 - 3x + 1$ com resto 2
e) $x^3 - x^2 + x - 7$ e resto nulo

2. O resto da divisão do polinômio $\mathbf{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ por $\mathbf{x + 1}$ é:
a) 0 b) 5 c) – 1 d) 1 e) 2

3. O resto da divisão do polinômio $\mathbf{p(x) = 2x^4 - 3x + 1}$ por $\mathbf{g(x) = 2x - 1}$ é:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{5}$

4. **(UEL)** – Se o resto da divisão do polinômio $\mathbf{p = x^4 - 4x^3 - kx - 75}$ por $\mathbf{(x - 5)}$ é **10**, o valor de **k** é:
a) – 5 b) – 4 c) 5 d) 6 e) 8

Módulo 41 – Dispositivo de Briot-Ruffini e Teorema do Resto

1. **(PUCCAMP)** – Dividindo-se um polinômio **f** por $\mathbf{g = x^2 - 1}$, obtêm-se quociente $\mathbf{q = 2x + 1}$ e resto $\mathbf{r = kx - 9}$, sendo $k \in \mathbb{R}$. Se **f** é divisível por $\mathbf{x - 2}$, então **k** é igual a
a) 6 b) 3 c) – 1 d) – 3 e) – 6

2. O resto da divisão de $\mathbf{x^{142} - 1}$ por $\mathbf{x + 1}$ é:
a) 0 b) 1 c) – 1 d) 2 e) – 2

3. A divisão $\mathbf{x^{999} - 1}$ por $\mathbf{x - 1}$ tem resto **R(x)** e quociente **Q(x)**. Pode-se afirmar que:
a) R(x) = – 2 e Q(x) tem grau 998
b) R(x) = 0 e Q(x) se anula para x = 0
c) R(x) = – 2 e Q(x) se anula para x = – 1
d) R(x) = 0 e Q(x) vale 1 para x = 0
e) R(x) = – 2 e Q(x) vale – 1 para x = 0

4. O polinômio $\mathbf{P(x) = x^5 + ax^4 - bx}$ é divisível por $\mathbf{x - 2}$. Dividido por $\mathbf{x + 2}$, dá resto **8**. Então, o valor de **b** é:

a) $\frac{1}{4}$ b) – 18 c) 18 d) $-\frac{1}{4}$ e) 12

5. Para que o polinômio $\mathbf{x^3 - 6x^2 + mx + n}$ seja divisível por $\mathbf{(x - 1)(x - 2)}$ o produto **mn** deve ser igual a:
a) 2 b) – 66 c) – 2 d) 66 e) 0

6. Sejam **m** e **n** determinados de tal modo que o polinômio $\mathbf{x^4 - 12x^3 + 47x^2 + mx + n}$ seja divisível por $\mathbf{x^2 - 7x + 6}$. Então **m + n** é igual a:
a) 72 b) 0 c) – 36 d) 36 e) 58

7. O resto da divisão de um polinômio P(x) por 2x – 1 é 4; deste modo, o resto da divisão de $(x^2 - x)$. P(x) por 2x – 1 é:

a) – 2 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) – 1 e) 4

8. **(FUVEST)** – Seja **p(x)** um polinômio divisível por **x – 3**. Dividindo **p(x)** por **x – 1**, obtemos quociente **q(x)** e resto **r = 10**. O resto da divisão de **q(x)** por **x – 3** é:
a) – 5 b) – 3 c) 0 d) 3 e) 5

9. **(FUVEST)** – Considere **P(x)** um polinômio de grau ≥ 2 tal que **P(1) = 2** e **P(2) = 1**. Sejam **D(x) = (x – 2) (x – 1)** e **Q(x)** o quociente da divisão de **P(x)** por **D(x)**.

a) Determine o resto da divisão de **P(x)** por **D(x)**.
b) Sabendo-se que o termo independente de **P(x)** é igual a **8**, determine o termo independente de **Q(x)**.

10. Um polinômio **P(x)** dividido por **x – 2** dá resto **3** e dividido por $\mathbf{x^2 - 2}$ dá resto **3x – 1**. O resto da divisão de **P(x)** por $\mathbf{(x - 2)(x^2 - 2)}$ é:
a) $-x^2 + 3x + 1$ b) 9x – 3 c) $x^2 - 3x - 1$
d) $4x^2 + 2x - 3$ e) $x^2 + 3x + 1$

11. **(UnB)** – O resto da divisão do polinômio $\mathbf{3^{-10} \cdot (x + 3)^{12}}$ pelo polinômio $\mathbf{x^3}$ é:
a) $66x^2 + 36x + 9$ b) zero c) $48x^2 + 12x + 9$
d) $66x^2 - 9$ e) $x^2 + x + 9$

12. Um polinômio **P(x)** é divisível por **x + 1** e, dividido por $\mathbf{x^2 + 1}$, dá quociente $\mathbf{x^2 - 4}$ e resto **R(x)**. Se **R(2) = 9**, escreva **P(x)**.

13. **(UnB)** – $\mathbf{P_1(x)}$ e $\mathbf{P_2(x)}$ são polinômios do 2º grau que se anulam quando **x = 0**. O resto da divisão de $\mathbf{P_1(x)}$ por **(x – 1) (x + 2)** é **3x + 1**. O resto da divisão de $\mathbf{P_2(x)}$ por **(x + 1) (x + 2)** é **2x – 1**. Então, o quociente da divisão de $\mathbf{P_1(x)}$ por $\mathbf{P_2(x)}$ é:
a) 1 b) 0 c) x + 1 d) 2 e) x – 1

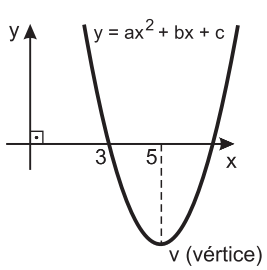
14. **(MACKENZIE)** – Um polinômio p(x), de grau maior que 1, deixa resto 1, quando dividido por x – 2, e deixa resto 2, quando dividido por x – 3. O resto da divisão de p(x) por $x^2 - 5x + 6$ é
a) x. b) 2x + 1. c) 2x. d) x – 1. e) 2.

15. **(UNESP)** – Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

O determinante de A é um polinômio p(x).
a) Verifique se 2 é uma raiz de p(x).
b) Determine todas as raízes de p(x).

16. **(UNIFESP)** – Dividindo-se os polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por x – 2 obtêm-se, respectivamente, r_1 e r_2 como restos. Sabendo-se que r_1 e r_2 são os zeros da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, conforme gráfico,



o resto da divisão do polinômio produto $p_1(x).p_2(x)$ por x – 2 é:
a) 3 b) 5 c) 8 d) 15 e) 21

17. **(UNESP)** – Considere o polinômio $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, onde b, c e d são constantes reais. A derivada de p(x) é, por definição, o polinômio $p'(x) = 3x^2 + 2bx + c$. Se $p'(1) = 0$, $p'(-1) = 4$ e o resto da divisão de p(x) por $x - 1$ é 2, então o polinômio p(x) é:

a) $x^3 - x^2 + x + 1$. b) $x^3 - x^2 - x + 3$.
c) $x^3 - x^2 - x - 3$. d) $x^3 - x^2 - 2x + 4$.
e) $x^3 - x^2 - x + 2$.

Módulo 42 – Equações Algébricas: Relações de Girard

1. Determinar o polinômio do 3º grau que se anula para **x = 1** e que, dividido por **x + 1**, **x – 2** e **x + 2**, dá restos iguais a **6**.

2. Se $\mathbf{P(x) = x^3 + ax + b}$, em que **a**, **b** são números reais e **– 1**, **2**, **c** são raízes do polinômio **P(x)**, então **c** é igual a:
a) 0 b) – 1 c) 3 d) 1 e) – 3

3. A equação polinomial $\mathbf{4x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = 0}$ tem como raízes **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.
O valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ é:
a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

4. **(FUVEST)** – O polinômio $\mathbf{p(x) = x^3 - x^2 + x + a}$ é divisível por **x – 1**. Ache todas as raízes complexas de **p(x)**.

5. Resolver a equação $\mathbf{x^3 - 7x + 6 = 0}$, sabendo-se que **1** é uma de suas raízes.

6. **(FATEC)** – Se **– 1** é raiz do polinômio $\mathbf{p(x) = x^3 - 4x^2 + x - k}$, $\mathbf{k \in \mathbb{R}}$, então as outras duas raízes são:
a) reais e de multiplicidade 2 b) racionais e negativas
c) não reais d) irracionais
e) inteiras

7. **(UEL)** – Uma das raízes do polinômio $\mathbf{x^3 + 2x^2 - 7x - 2}$ é **2**. O produto das outras raízes é:
a) 2 b) 1 c) 0 d) –1 e) –2

8. **(MACK)** – Se a soma de duas raízes de $\mathbf{P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k}$ é **3**, então o número real **k** é igual a:
a) – 6 b) – 3 c) – 2 d) 3 e) 6

9. **(UFCE)** – Sabendo-se que as raízes do polinômio $\mathbf{P(x) = x^3 - 18x^2 + 8x + 384}$ estão em progressão aritmética, determinar a maior delas.

10. **(VUNESP)** – Se as raízes do polinômio $\mathbf{p(x) = x^3 - 6x^2 + kx - 6}$ são reais e estão em progressão aritmética, o valor de **k** é:
a) 0 b) 2 c) 3 d) 5 e) 11

11. **(FUVEST)** – Sabe-se que **P(x)** é um polinômio cujas raízes formam uma progressão geométrica de razão **2** e primeiro termo **2**. O coeficiente do termo de mais alto grau de **P(x)** é **1** e o termo independente é igual a $\mathbf{2^{21}}$. O grau do polinômio é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

12. **(ITA)** – As raízes da equação de coeficientes reais $\mathbf{x^3 + ax^2 + bx + c = 0}$ são inteiras, positivas e consecutivas. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a **14**. Então $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2}$ é igual a:
a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) 194

13. Um polinômio $\mathbf{P_1(x)}$ anula-se em **3** pontos distintos. Um polinômio $\mathbf{P_2(x)}$ anula-se em **4** pontos distintos. Então, o produto dos polinômios $\mathbf{P_1(x)}$ e $\mathbf{P_2(x)}$:
a) pode não se anular em nenhum ponto.
b) anula-se em exatamente 7 pontos distintos.
c) pode anular-se em mais de 7 pontos distintos.
d) pode anular-se em apenas 5 pontos distintos.
e) anula-se em exatamente 12 pontos distintos.

14. **(FGV)** – O polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 - 52x + 224$ tem três raízes inteiras. Se a primeira delas é o dobro da terceira e a soma da primeira com a segunda é 1, então, o produto da primeira e a segunda é
a) – 224. b) – 167. c) – 56. d) 28. e) 5.

15. **(UNIFESP)** – Considere a equação $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, onde A, B e C são constantes reais. Admita essas constantes escolhidas de modo que as três raízes da equação são as três dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto-retângulo. Dado que o volume desse paralelepípedo é 9 cm^3, que a soma das áreas de todas as faces é 27 cm^2 e que a soma dos comprimentos de todas as arestas é 26 cm, pede-se:
a) os valores de A, B e C.
b) a medida de uma diagonal (interna) do paralelepípedo.

16. **(UNESP)** – Seja z = 1 + i um número complexo.
a) Escreva z e z^3 na forma trigonométrica.
b) Determine o polinômio de coeficientes reais, de menor grau, que tem z e $|z|^2$ como raízes e coeficiente dominante igual a 1.

17. **(FUVEST)** – O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a – 1. Determinar
a) o valor de m.
b) as raízes de p.

18. **(UFOP)** – Sabendo que –1 é raiz da equação polinomial $\mathbf{6x^3 + 5x^2 + kx - 1 = 0}$ e denominando de *a* e *b* as outras raízes dessa equação, pode-se afirmar que $\mathbf{a^2 + b^2}$ vale:
a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) 1 d) –1

Módulo 43 – Equações Algébricas

1. Na equação $\mathbf{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0}$, o número **1** é raiz:
a) simples b) dupla c) tripla
d) quádrupla e) quíntupla

2. Se a equação $\mathbf{x^3 - 2x^2 + x + m - 1 = 0}$ tem uma raiz dupla, então **m** pode ser:
a) zero b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

3. **(FUVEST)** – Suponha que o polinômio do 3º grau $\mathbf{P(x) = x^3 + x^2 + mx + n}$, em que **m** e **n** são números reais, seja divisível por $\mathbf{x - 1}$.
a) Determine **n** em função de **m**.
b) Determine **m** para que **P(x)** admita raiz dupla diferente de **1**.
c) Que condições **m** deve satisfazer para que **P(x)** admita três raízes reais e distintas?

4. O polinômio $\mathbf{x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 = 0}$ tem:
a) 2 raízes duplas b) 1 raiz tripla
c) 4 raízes não reais d) 6 raízes não reais
e) 3 raízes duplas

5. Determine as raízes da equação $\mathbf{x^3 - 16x^2 + 85x - 150 = 0}$, sabendo-se que uma das raízes tem multiplicidade **2**.

6. **(UEL)** – Sabe-se que **– 2** é raiz de multiplicidade **2** da equação $\mathbf{2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12 = 0}$. A soma das demais raízes dessa equação é:
a) 7 b) $\frac{7}{2}$ c) 3 d) $-\frac{7}{2}$ e) – 7

7. **(UNICAMP)** – Para resolver equações do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, podemos proceder do seguinte modo: como $x = 0$ não é uma raiz, divide-se a equação por x^2 e, após fazer a mudança de variáveis $u = x + \frac{1}{x}$, resolve-se a equação obtida [na variável u]. Observe que, se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $u \geq 2$.
a) Ache as 4 raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
b) Encontre os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real positiva.

Módulo 44 – Equações Algébricas

1. As raízes da equação $\mathbf{3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0}$ são:
a) $7, 6, \frac{1}{7}$ b) $6, 5, \frac{1}{6}$ c) $5, 7, \frac{1}{5}$
d) $1, 3, \frac{1}{3}$ e) $2, 4, \frac{1}{2}$

2. **(PUCCAMP)** – Sabe-se que a equação $\mathbf{2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0}$ admite uma única raiz racional e não inteira. As demais raízes dessa equação são:
a) inteiras e positivas. b) inteiras e de sinais contrários.
c) não reais. d) irracionais e positivas.
e) irracionais e de sinais contrários.

3. **(VUNESP)** – Os coeficientes do polinômio $\mathbf{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3}$ são números inteiros. Supondo que **f(x)** tenha duas raízes racionais positivas distintas:
a) encontre todas as raízes desse polinômio.
b) determine os valores de **a** e **b**.

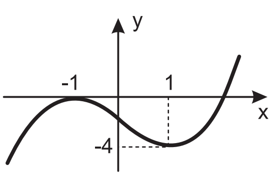
4. Sabe-se que o número complexo **i** é solução da equação $\mathbf{x^4 - 3x^2 - 4 = 0}$. Então:
a) essa equação tem uma solução de multiplicidade 2.
b) as soluções dessa equação formam uma progressão.
c) a equação tem duas soluções reais irracionais.
d) a equação tem 2 soluções reais racionais.
e) a equação não tem soluções reais.

5. Se $\mathbf{x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0}$ admite a raiz complexa $\mathbf{1 - i}$, então a soma das duas raízes reais dessa equação é:
a) – 3 b) – 1 c) 1 d) 2 e) 3

6. O polinômio de coeficientes inteiros, de menor grau possível, que tem como raízes **2** e **i**, pode ser:
a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ b) $x^2 + (2 - i)x - 2$
c) $x^2 - (2 + i)x + 2i$ d) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
e) $x^3 + x^2 - x - 2$

7. O polinômio $\mathbf{p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2}$ tem:
a) duas raízes reais no intervalo [– 1; 0]
b) pelo menos uma raiz real no intervalo $]0; \frac{1}{2}[$
c) pelo menos uma raiz real no intervalo]2; 3[
d) duas raízes reais no intervalo [1; 3]
e) uma raiz real no intervalo [3; 4]

8. **(FUVEST)** – A figura mostra parte do gráfico de uma função polinomial **f(x)** de grau **3**.



O conjunto de todos os valores reais de **m** para os quais a equação **f(x) = m** tem três raízes reais distintas é:
a) $-4 < m < 0$ b) $m > 0$
c) $m < 0$ d) $-1 < m < 1$
e) $m > -4$

9. **(GV)** – Considere a seguinte equação polinomial: $\mathbf{x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 6 = 0}$
a) Mostre que esta equação tem uma raiz racional e encontre esta raiz.
b) Mostre que esta equação tem uma raiz irracional.

10. **(UNICAMP)** – Dada a equação polinomial com coeficientes reais $x^3 - 5x^2 + 9x - a = 0$:

a) Encontre o valor numérico de *a* de modo que o número complexo $2 + i$ seja uma das raízes da referida equação.

b) Para o valor de *a* encontrado no item anterior, determine as outras duas raízes da mesma equação.

11. **(UFPR)** – Considere as seguintes afirmativas a respeito do polinômio $p(x) = x^2 + bx + c$:

I. Quando $c = 0$, o valor $x = 0$ é raiz do polinômio.

II. Se $x = \alpha$ e $x = -\alpha$ são raízes do polinômio e $\alpha \neq 0$, então $b = 0$.

III. Se o número complexo $x = 1 - i$ é raiz do polinômio, então $b + ic = 0$.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

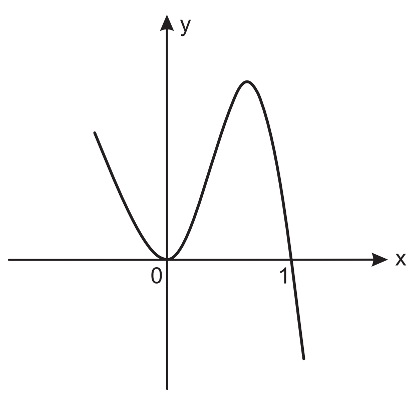
b) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

d) Somente a afirmativa I é verdadeira.

e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

12. **(UFMT)** – A divisão de um polinômio de coeficientes reais P(x) por (x + 1) apresenta como quociente um polinômio Q(x) de grau 3 com o coeficiente do termo de maior grau igual a –1 e, como resto, (x – 3). O gráfico de Q(x) é mostrado na figura a seguir.



A partir dessas informações, qual é a soma dos coeficientes de P(x)?

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

13. **(MACKENZIE)** – Se as três raízes reais, não necessariamente distintas, do polinômio $p(x) = x^3 - a^3x^2 + ax - 1$, $a \in \mathbb{R}$, formam uma progressão geométrica, então o valor de $a - a^3$ é

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

Módulo 45 – Fatorial e Números Binomiais

1. O valor de $\dfrac{21! - 20!}{19!}$ é:

a) 210 b) 420 c) 360 d) 400 e) 500

2. Simplificando a expressão $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ obtemos:

a) n b) $n^2 + 1$ c) $n^2 + n$
d) $n^2 - 1$ e) $n^2 - n$

3. **(UNESP)** – Se **n** é um número inteiro positivo, pelo símbolo **n!** subentende-se o produto de **n** fatores distintos, $n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots 2 \,.\, 1$. Nestas condições, qual é o algarismo das unidades do número $(9!8!)^{7!}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

4. **(UESPI)** – Se n_1 e n_2 são os números inteiros positivos que satisfazem a equação

$$\frac{2}{5!(n-5)!} - \frac{1}{4!(n-4)!} - \frac{1}{6!(n-6)!} = 0, \text{ então}$$

$n_1 + n_1 \,.\, n_2 + n_2$ é igual a:

a) 119 b) 129 c) 139 d) 149 e) 159

5. **(VUNESP)** – Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então, $(n-1)!\,[(n+1)! - n!]$ é igual a:

a) n!n b) (n – 1)!n c) $(n^2)!$ d) $(n!)^2$ e) 2(n!)

6. **(MACKENZIE)** – Efetuando $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$, obtém-se:

a) $\dfrac{1}{(n+1)!}$ b) $\dfrac{2}{n!}$ c) $\dfrac{n!(n+1)!}{n-1}$

d) $\dfrac{2n+1}{(n+1)!}$ e) 0

7. O valor do número binomial $\dbinom{200}{198}$ é:

a) 19900 b) 20000 c) 19800
d) 39800 e) 5460

8. O valor do número binomial $\dbinom{8}{3}$ é:

a) 336 b) 56 c) 48 d) 36 e) 20

9. Resolver a equação $2\dbinom{x+1}{4} = 7\dbinom{x-1}{2}$

10. **(UEL)** – A solução da equação $\dfrac{\dbinom{n+1}{4}}{\dbinom{n-1}{2}} = \dfrac{7}{2}$ é um número inteiro múltiplo de

a) 11 b) 9 c) 7 d) 5 e) 3

Módulo 46 – Triângulo de Pascal (ou Tartaglia)

1. Resolver a equação $\binom{14}{5-x} = \binom{14}{5x-7} \neq 0$

2. Resolver a equação $\binom{15}{3-x} = \binom{15}{2x}$

3. O valor de $\binom{20}{13} + \binom{20}{14}$ é:

a) $\binom{20}{14}$ b) $\binom{20}{15}$ c) $\binom{21}{14}$ d) $\binom{21}{15}$ e) $\binom{21}{13}$

4. **(PUC)** – Se $\binom{m-1}{p-1} = 10$ e $\binom{m}{m-p} = 55$, então $\binom{m-1}{p}$ é igual a:

a) 40 b) 45 c) 50 d) 55 e) 60

5. Calcular **p**, p > 3, sendo dado: $\dfrac{\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3}}{\binom{p}{2} - \binom{p-1}{3}} = \dfrac{5}{3}$

Questões de 6 a 11

Lembrando que $\sum\limits_{k=2}^{7} a_k$, por exemplo, significa $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ e utilizando as propriedades do Triângulo de Pascal, calcular:

6. $\sum\limits_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} =$

7. $\sum\limits_{k=0}^{4} \binom{k+2}{k} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} =$

8. $\sum\limits_{p=2}^{9} \binom{9}{p} =$

9. $\sum\limits_{p=4}^{10} \binom{p}{4} =$

10. $\sum\limits_{p=5}^{10} \binom{p}{5} =$

11. $\sum\limits_{p=0}^{3} \binom{p+8}{p} =$

12. O valor de **m** que satisfaz a sentença $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 512$ é:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Módulo 47 – Teorema do Binômio de Newton

1. Utilizando o Teorema do Binômio de Newton, desenvolver $(x-2)^6$

2. **(MACKENZIE)** – O sistema

$$\begin{cases} \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2y + \binom{3}{2} xy^2 + \binom{3}{3} y^3 = 8 \\ x^2 - y^2 = 6 \end{cases}$$

tem por solução um par ordenado (x, y) cuja representação gráfica é um ponto do:

a) primeiro quadrante b) segundo quadrante
c) terceiro quadrante d) quarto quadrante
e) eixo das abscissas

3. **(UEL)** – No desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ segundo as potências decrescentes de x, o sétimo termo é:

a) $210 \,.\, x^{-4}$ b) $120 \,.\, x^{-\frac{11}{4}}$ c) $210 \,.\, x^{-2}$
d) $120 \,.\, x^{\frac{11}{4}}$ e) $210 \,.\, x^4$

4. Calcular o sexto termo do desenvolvimento de $(\sqrt{2}\,x - \sqrt{5}\,y)^{10}$.

5. **(U.F.CEARÁ)** – O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(\sqrt{2} \,.\, x^2 + 2)^5$ é:

a) $40\sqrt{2}$ b) $48\sqrt{2}$ c) $60\sqrt{2}$ d) $80\sqrt{2}$ e) $84\sqrt{2}$

6. **(UFSC)** – Qual é o coeficiente numérico do termo em x^2, no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$?

7. **(MACKENZIE)** – O coeficiente do termo em x^{-3} no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 1 b) 6 c) 10 d) 15 e) inexistente

8. Calcular o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\dfrac{1}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)^{18}$.

9. **(MACKENZIE)** – Um dos termos do desenvolvimento de $(x+3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo-se que **a** não depende de **x**, o valor de **a** é:

a) ± 1 b) ± 2 c) ± 3 d) ± 4 e) ± 5

10. **(U.F.GOIÁS)** – Determine o valor que deve ser atribuído a **k** de modo que o termo independente de **x**, no desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{k}{x}\right)^6$, seja igual a 160.

11. **(MACKENZIE)** – No desenvolvimento $\left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$, os coeficientes binomiais do quarto e do décimo-terceiro termos são iguais. O termo independente de x, feito segundo os expoentes decrescentes de x, é o:

a) décimo b) décimo-primeiro c) nono
d) décimo-segundo e) oitavo

12. **(MACK)** – No desenvolvimento de $(2x + b)^5$, $b \neq 0$, o coeficiente numérico do termo em x^4 é oito vezes aquele do termo em x^3. Então, b vale:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 32 e) 16

13. A soma dos coeficientes numéricos dos termos do desenvolvimento de $(x - y)^{104}$ é:

a) 1 b) – 1 c) 0 d) 104 e) 2

14. A soma dos coeficientes numéricos dos termos do desenvolvimento de $(3x - 2y)^n$ é:

a) 1 b) – 1 c) 2 d) 2^n e) -2^n

Módulo 48 – Princípio Fundamental da Contagem e Arranjos Simples

1. **(FUVEST)** – Considere todas as trinta e duas sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas sequências possuem **pelo menos** três zeros em posições consecutivas?

a) 3 b) 5 c) 8 d) 12 e) 16

2. **(VUNESP)** – De uma urna contendo 10 bolas coloridas, sendo 4 brancas, 3 pretas, 2 vermelhas e 1 verde, retiram-se, de uma vez, 4 bolas. Quantos são os casos possíveis em que aparecem exatamente uma bola de cada cor?

a) 120 b) 72 c) 24 d) 18 e) 12

3. **(UEL)** – Para responder a certo questionário, preenche-se o cartão apresentado abaixo, colocando-se um “x” em uma só resposta para cada questão.

CARTÃO RESPOSTA					
QUESTÕES	1	2	3	4	5
SIM	☐	☐	☐	☐	☐
NÃO	☐	☐	☐	☐	☐

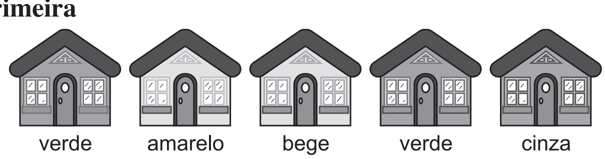
De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

a) 3125 b) 120 c) 32 d) 25 e) 10

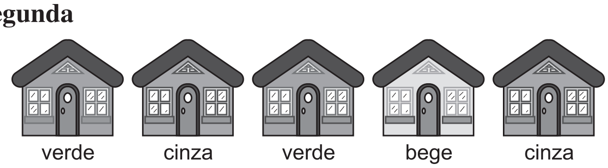
4. **(UFRJ)** – Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a mesma cor.

Por exemplo, duas possibilidades diferentes de pintura seriam:

Primeira

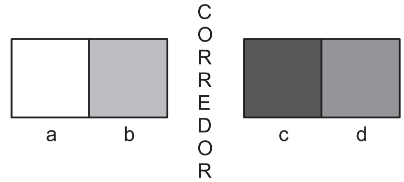


Segunda



Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

5. **(UNESP)** – Quatro amigos vão ocupar as poltronas a, b, c, d de um ônibus dispostas na mesma fila horizontal, mas em lados diferentes em relação ao corredor, conforme a ilustração.



Dois deles desejam sentar-se juntos, seja do mesmo lado do corredor, seja em lados diferentes. Nessas condições, de quantas maneiras distintas os quatro podem ocupar as poltronas referidas, considerando-se distintas as posições em que pelo menos dois dos amigos ocupem poltronas diferentes?

a) 24 b) 18 c) 16 d) 12 e) 6

6. **(MACKENZIE)** – Cada um dos círculos da figura ao lado

deverá ser pintado com uma única cor, escolhida dentre quatro disponíveis. Sabendo-se que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, então o número de formas de se pintar os círculos é:

a)100 b) 240 c) 729 d) 2916 e) 5040

7. **(UEL)** – Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

a) 861 b) 1722 c) 1764 d) 3444 e) 2^{42}

8. **(UNIV. EST. DE FEIRA DE SANTANA)** – O número de equipes de trabalho que poderão ser formadas num grupo de dez indivíduos, devendo cada equipe ser constituída por um coordenador, um secretário e um digitador, é:

a) 240 b) 360 c) 480 d) 600 e) 720

9. **(UNIV. EST. DE FEIRA DE SANTANA)** – Numa corrida de Fórmula 1, estão inscritos 12 participantes. Não podendo haver empate, o número de resultados possíveis para os dois primeiros lugares é:

a) 96 b) 108 c) 112 d) 121 e) 132

10. Quantos números de 3 algarismos distintos, maiores que 500, podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

11. Quantos números diferentes de quatro algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração?

12. Quantos números ímpares diferentes, de quatro algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração?

13. Quantos números pares diferentes, de quatro algarismos distintos existem no sistema decimal de numeração?

14. Cada linha telefônica nova é formada por 8 algarismos, divididos em 2 grupos: um formado pelos primeiros 4 algarismos, que distingue os centros telefônicos, e outro, com 4 algarismos, que distingue as linhas de um mesmo centro. Suponha que só os algarismos de cada grupo sejam todos distintos. Quantas linhas telefônicas, começando com o algarismo 2, poderiam ser lançadas?

15. **(UFMG)** – O total de números inteiros, com todos os algarismos distintos, compreendidos entre 11 e 1000, é:

a) 576 b) 648 c) 728 d) 738 e) 741

16. **(MACKENZIE)**

Agrupamentos de quatro algarismos	
TIPO I – Quantidade x	TIPO II – Quantidade y
Os dois primeiros algarismos iguais e os dois últimos iguais, mas diferentes dos primeiros	Três algarismos iguais em posições consecutivas, sendo o algarismo restante diferente dos anteriores.

Considerando a tabela acima, x + y é igual a:

a) 180 b) 190 c) 270 d) 280 e) 300

17. **(FGV)** – Num concurso que consta de duas fases, os candidatos fizeram uma prova de múltipla escolha, com 30 questões de 4 alternativas cada. Na segunda fase, outra prova continha 30 questões do tipo falsa ou verdadeira. Chamando de n_1 o número dos diferentes modos de responder a prova da 1.ª fase e de n_2, o número dos diferentes modos de responder a prova da 2.ª fase, tem-se que

a) $n_1 = 2\ n_2$. b) $n_1 = 30\ n_2$. c) $n_1 = 4\ n_2$.
d) $n_1 = 2^{30}\ n_2$. e) $n_1 = 4^{30}\ n_2$.

18. **(FGV)** – Por ocasião do Natal, um grupo de amigos resolveu que cada um do grupo mandaria 3 mensagens a todos os demais. E assim foi feito. Como o total de mensagens enviadas foi 468, pode-se concluir que o número de pessoas que participam desse grupo é

a) 156. b) 72. c) 45. d) 13. e) 11.

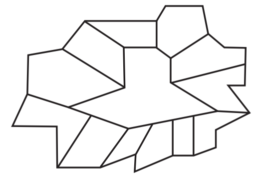
19. **(FGV)** – Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:

a) 78 125 b) 7 200 c) 15 000
d) 6 420 e) 50

20. **(MACKENZIE)** – Um *hacker* está tentando invadir um *site* do Governo e, para isso, utiliza um programa que consegue testar 16^3 diferentes senhas por minuto. A senha é composta por 5 caracteres escolhidos entre os algarismos de 0 a 9 e as letras de A a F. Sabendo que o programa testa cada senha uma única vez e que já testou, sem sucesso, 75% das senhas possíveis, o tempo decorrido desde o início de sua execução é de

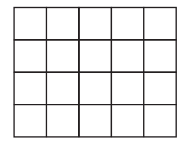
a) 2 horas e 16 minutos. b) 1 hora e 40 minutos.
c) 3 horas e 48 minutos. d) 3 horas e 12 minutos.
e) 2 horas e 30 minutos.

21. **(UNIFESP)** – A figura exibe um mapa representando 13 países. Considerando-se como países vizinhos aqueles cujas fronteiras têm um segmento em comum, o número mínimo de cores que se pode utilizar para colori-los, de forma que dois países vizinhos não tenham a mesma cor, é:

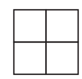


a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

22. **(UNESP)** – Considere o tabuleiro da figura.

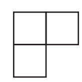


a) Considere uma peça com 4 casas:



De quantas maneiras diferentes pode-se colocá-la no tabuleiro, sem girá-la e mantendo-se sempre a mesma face voltada para cima, de forma a cobrir 4 casas por completo?

b) Considere, agora, a peça com 3 casas:

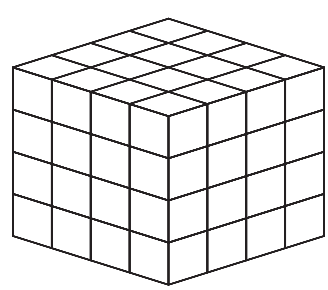


Imaginando todas as posições possíveis para a mesma, e mantendo-se sempre a mesma face voltada para cima, de quantas maneiras diferentes pode-se colocá-la no tabuleiro de modo que cubra 3 casas por completo?

23. **(UNESP)** – Considere a identificação das placas de veículos, compostas de três letras seguidas de 4 dígitos. Sendo o alfabeto constituído de 26 letras, o número de placas possíveis de serem constituídas, pensando em todas as combinações possíveis de 3 letras seguidas de 4 dígitos, é

a) 3 120. b) 78 624 000. c) 88 586 040.
d) 156 000 000. e) 175 760 000.

24. **(FUVEST)** – A partir de 64 cubos brancos, todos iguais, forma-se um novo cubo. A seguir, este novo cubo tem cinco de suas seis faces pintadas de vermelho. O número de cubos menores que tiveram pelo menos duas de suas faces pintadas de vermelho é



a) 24 b) 26 c) 28 d) 30 e) 32

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 19 – Multiplicação de Matrizes

1. Uma matriz A é do tipo de 3×m, outra matriz, B, é do tipo 4×2 e a matriz C é do tipo n × 2. Se existe a matriz (A . B) . C e é do tipo p×q, então:

a) m + n + p + q = 10 b) m + n = p + q
c) m = p + q d) m = n + q
e) p – n = 2

Resolução

A matriz M, resultado do produto, é tal que

$A_{3\times m} \cdot B_{4\times 2} \cdot C_{n\times 2} = m_{p\times q}$

Desta forma, tem-se m = 4, n = 2, p = 3 e q = 2

Resposta: D

2. **(VUNESP)** – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e sabendo-se que A . B = C, pode-se concluir que

a) $a + b = -2$.
b) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-5}{2}$.
c) $a \cdot b = 24$.
d) $a^2 - b^2 = -20$.
e) $a^b = \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$.

Resolução

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2b + a \\ b + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + a = -2 \\ b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a^b = 6^{-4} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$$

Resposta: E

3. **(FGV)** – Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, em que $a_{ij} = (-2)^j$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, em que $b_{ij} = (-1)^i$. O elemento c_{23}, da matriz $C = (c_{ij})_{3\times 3}$, em que C = A . B é:

a) 14 b) – 10 c) 12 d) – 8 e) 4

Resolução

O elemento c_{23} da matriz C = A . B é a soma dos produtos dos elementos da linha 2 de A pelos correspondentes elementos da coluna 3 de B. Desse modo,

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} =$

$= (-2)^1 \cdot (-1)^1 + (-2)^2 \cdot (-1)^2 + (-2)^3 \cdot (-1)^3 =$

$= (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-8) \cdot (-1) = 2 + 4 + 8 = 14$

Resposta: A

Módulo 20 – Definição e Propriedades dos Determinantes I

4. **(UFSES)** – Os valores reais de x que tornam o determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ x & -2 & 4 \end{vmatrix}$ igual a zero são:

a) – 3 e – 2 b) – 3 e 2 c) – 2 e 3
d) – 1 e 2 e) 2 e 3

Resolução

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & x & 1 \\ x & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4x^2 + x - 6 - x^2 - 12 + 2x = 3x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$

Resposta: B

5. O valor de **x** para que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 2 \\ 1 & 5 & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2x+1 & 10 \\ -2 & x-2 \end{pmatrix}$ tenham determinantes iguais é:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 2 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2 + 60 - 3x - 4x - 20 = 2x^2 - 7x + 42$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2x+1 & 10 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix} = (2x + 1).(x - 2) - 10 \cdot (-2) =$$

$= 2x^2 - 4x + x - 2 + 20 = 2x^2 - 3x + 18$

Se det A = det B, então $2x^2 - 7x + 42 = 2x^2 - 3x + 18 \Leftrightarrow x = 6$

Resposta: A

Módulo 21 – Propriedades dos Determinantes II

6. O determinante da matriz

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{bmatrix}$ é igual a 5. O determinante da matriz

$B = \begin{bmatrix} 2a & b & 3c \\ 2m & n & 3p \\ 2x & y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 20 b) 25 c) 30 d) 36 e) 40

Resolução

$$\det B = \begin{vmatrix} 2a & b & 3c \\ 2m & n & 3p \\ 2x & y & 3z \end{vmatrix} = 2 \,.\, 3 \,.\, \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$= 6 \,.\, \det A = 6 \,.\, 5 = 30$

Resposta: C

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

e C = 3B, o valor de $\dfrac{\det A + \det B}{\det C}$ é igual a:

a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 5,5 e) 6

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 90 + 24 - 80 = 34$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 16 = 2$$

$C = 3B \Rightarrow \det C = \det(3B) = 3 \,.\, 3 \,.\, \det B = 9 \,.\, 2 = 18$

Assim, $\dfrac{\det A + \det B}{\det C} = \dfrac{34 + 2}{18} = 2$

Resposta: C

Módulo 22 – Teorema de Jacobi

8. Se **a** é raiz da equação $x^2 + x + 2 = 0$, o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 2-a \\ a^2 & 2 & a \\ 3a+1 & a^2 & 1-2a \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 2 b) a c) 0 d) a + 1 e) a^2

Resolução

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 2-a \\ a^2 & 2 & a \\ 3a+1 & a^2 & 1-2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+a+2 & a^2 & 2-a \\ a^2+a+2 & 2 & a \\ a^2+a+2 & a^2 & 1-2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a^2 & 2-a \\ 0 & 2 & a \\ 0 & a^2 & 1-2a \end{vmatrix} = 0$$

Resposta: C

9. Qual o valor real de x que satisfaz a equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0?$$

Resolução

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x+3 & x & 1 \\ x+3 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} =$$

$= (x + 3)(x^2 + 1 + 4 - 2x - x - 2) = (x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0$

Assim,

$x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$, pois

$\Delta = (-3)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 3 = -3 < 0$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Resposta: – 3

Módulo 23 – Teorema de Laplace, Regra de Chió e Propriedades Complementares

10. **(UFMA)** – Considere a matriz $A = (a_{ij})$ com $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, 180\}$, definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{sen } j° + \cos j°, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i < j, \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$$

onde j° significa **j graus**.

Nessas condições, é correto afirmar que do valor do

$\det A + \text{sen } \dfrac{\pi}{6}$ é:

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) – 1 d) 0 e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

A matriz A é do tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & \ldots 0 \\ 1 & 1 & a_{33} & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & a_{180\,180} \end{bmatrix}$$

O determinante de A é tal que

$\det A = a_{11} \,.\, a_{22} \,.\, a_{33} \ldots a_{135\,135} \ldots a_{180\,180} = 0,$

pois $a_{135\,135} = \text{sen } 135° + \cos 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

Assim, $\det A + \text{sen } \dfrac{\pi}{6} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: B

11. Se x e y são números primos e positivos e

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & x+y \\ x^2 & y^2 & x^2+2xy+y^2 \end{vmatrix} = 84, \text{ então } y^x \text{ é igual a:}$$

a) 144 b) 196 c) 216 d) 324 e) 343

Resolução

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & x+y \\ x^2 & y^2 & x^2+2xy+y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & x+y \\ x^2 & y^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix} =$$

$= (y - x).(x + y - x) \,.\, (x + y - y) = 84$, pois trata-se de um determinante de Vandermonde, então $(y - x) \,.\, x \,.\, y = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 7$

Sendo x e y primos positivos, a única possibilidade é x = 3 e y = 7. Portanto, $y^x = 7^3 = 343$

Resposta: E

Módulo 24 – Definição e Cálculo da Matriz Inversa

12. **(U.F.VIÇOSA)** – Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{pmatrix}$, em que x e y são números reais e M é a matriz inversa de A. Então o produto xy é:

a) 3/2 b) 2/3 c) 1/2 d) 3/4 e) 1/4

Resolução

Se M é a matriz inversa de A, então

$$A \, . \, M = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-2 & -1+2y \\ 2x-6 & -2+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ -1+2y=0 \\ 2x-6=0 \\ -2+6y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ e } xy = 3 \, . \, \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: A

13. A matriz $A = \begin{bmatrix} (x-2) & 6 \\ 7 & (x-3) \end{bmatrix}$ admite inversa se, e somente se:

a) x = 1 ou x = 3
b) $x \neq 1$ e $x \neq 3$
c) x = – 4 ou x = 9
d) $x \neq -4$ e $x \neq 9$
e) x é par

Resolução

det A = (x – 2) . (x – 3) – 6 . 7

det A = $x^2 - 2x - 3x + 6 - 42$

det A = $x^2 - 5x - 36$

Para que A seja inversível devemos ter

det A $\neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$ e $x \neq 9$

Resposta: D

EXERCÍCIOS-TAREFA

Módulo 19 – Multiplicação de Matrizes

1. $(4 \;\; 1 \;\; 3) \, . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} =$

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \\ 20 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} . (4 \;\; 1 \;\; 3)$

c) (21) d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ e) (4)

2. **(MACK)** – Sejam as matrizes $\begin{cases} A = (a_{ij})_{4 \times 3}, \; a_{ij} = i^j \\ B = (b_{ij})_{3 \times 4}, \; b_{ij} = j^i \end{cases}$

Se C = A . B, então c_{22} vale:

a) 3 b) 14 c) 39 d) 84 e) 258

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determine X, tal que A . X = B.

4. **(UEL)** – Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}$. Sabendo-se que $M^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, conclui-se que o número real **a** pode ser

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ c) 2 d) $-\sqrt{2}$ e) $-\sqrt{3}$

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, qual a afirmativa certa?

a) $A^t = \begin{bmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{bmatrix}$ b) $A^2 = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ z^2 & t^2 \end{bmatrix}$ c) A = – A

d) $A \, . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ e) $A \, . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$

6. **(PUC)** – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ então AB – BA é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

7. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix}$, então o valor de x tal que A . B = B . A é:

a) – 1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

8. **(PUC)** – Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, então $A^2 + 2 . A - 11 . I$, onde

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Calculando $2AB + B^2$, onde

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ teremos:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -9 & 4 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) AB b) $(A . B)^t$ c) $A^t . B^t$ d) $B^t . A^t$

11. **(PUC)** – Se A, B e C são matrizes quadradas e A^t, B^t e C^t são suas matrizes transpostas, a igualdade falsa entre essas matrizes é:

a) $(A + B) . C = A . C + B . C$ b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(A . B)^t = A^t . B^t$ d) $(A - B)C = AC - BC$

e) $(A^t)^t = A$

12. **(MACK)**–Sabe-se que $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}$, $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ é uma matriz diagonal, ou seja, $b_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$.

Os valores de **x**, **y** e **z** são respectivamente:

a) 2, 3, 4 b) 1, 4, 4 c) 7, 7, 7

d) 2, 3, 1 e) 1, 1, 1

13. **(FATEC)** – Seja α o conjunto de todas as matrizes da forma $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ onde $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}^*$. Então existe uma matriz A, em α, tal que:

a) $A . A \notin \alpha$ b) $A^t \notin \alpha$ c) $A^t - A \notin \alpha$

d) $A + A \notin \alpha$ e) $2 . A \notin \alpha$

14. Dadas as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} \log_2 x & \log_2 2x \\ y & \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix}$

a) Efetue o produto AB.

b) Determine os valores de x e y para que AB = C.

15. **(FUVEST)** – Uma matriz real A é ortogonal se $AA^t = I$, onde I indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de A.

Se $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{3}{2}$

16. **(UNESP)** – Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 36 & 45 \end{pmatrix}$,

com x, y, z números reais.

Se A . B = C, a soma dos elementos da matriz A é:

a) 9 b) 40 c) 41 d) 50 e) 81

Módulo 20 – Definição e Propriedades dos Determinantes I

1. **(UEL)** – A solução positiva da equação

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$ é um número:

a) ímpar b) primo c) não inteiro

d) cubo perfeito e) quadrado perfeito

2. A sentença $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 \\ y & x+1 \end{vmatrix}$:

a) é equivalente a $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+1 \\ y & y+1 \end{pmatrix}$

b) só é verdadeira se $x = y \neq 0$.

c) só é verdadeira se $x = y = 0$.

d) nunca é verdadeira.

e) é equivalente a $x = y$.

3. O conjunto solução de $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ b) {0, 1} c) {1}

d) {– 1} e) {0}

4. **(PUC)** – A matriz $A = (a_{ij})$ é quadrada de ordem 2

com $\begin{cases} a_{ij} = 2i - j \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 3i - 2j \text{ para } i \neq j \end{cases}$

O determinante de A é igual a:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

5. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular o número real x tal que $\det(A - x \,.\, B) = 0$.

6. **(UNIFOR)** – Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

O determinante da matriz A . B é:

a) 64 b) 8 c) 0 d) – 8 e) – 64

7. O conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$ é:

a) {1; 3} b) {–1; 2} c) {2; 4}

d) {– 2; 4} e) $\left\{-\dfrac{1}{2}; 2\right\}$

8. **(UNESP)** – Considere as matrizes reais

$A = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$.

Se $A = B^t$ (transposta de B), o determinante da matriz

$\begin{pmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) – 1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

9. **(FEI)** – Para que o determinante da matriz

$\begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{bmatrix}$ seja nulo, o valor de **a** deve ser:

a) 2 ou – 2 b) 1 ou 3 c) – 3 ou 5

d) – 5 ou 3 e) 4 ou – 4

10. O produto M . N da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz N = (1 1 1):

a) não se define;

b) é uma matriz de determinante nulo;

c) é a matriz identidade de ordem 3;

d) é uma matriz de uma linha e uma coluna;

e) não é matriz quadrada.

11. Sabendo-se que o determinante associado à matriz

$\begin{pmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ é nulo, concluímos que essa matriz tem:

a) duas linhas proporcionais.
b) duas colunas proporcionais.
c) elementos negativos.
d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas.
e) duas filas paralelas iguais.

12. **(MACKENZIE)** – O menor valor assumido pela função real definida por $f(x) = \begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ é

a) –1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) 1 e) 2

13. O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal. Se os números inteiros x e y são tais que a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$ tem traço igual a 4 e determinante igual a –19, então o produto xy é igual a

a) – 4 b) – 3 c) – 1 d) 1 e) 3

14. **(FGV)** – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \log_x x & \log_3 9 \\ \log_3 1 & \log_9 3 \end{bmatrix}$ com $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $x \neq 1$ e seja n, o determinante de A. Considere as equações:

(1) $\to 6x + 3 = 0$ (2) $\to \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$

(3) $\to 9^x - 3 = 0$ (4) $\to x^2 = \dfrac{1}{4}$

(5) $\to x^2 = \dfrac{1}{2}$

Pode-se afirmar que n é raiz da equação

a) (1). b) (2). c) (3). d) (4). e) (5).

15. **(UNESP)** – Foi realizada uma pesquisa, num bairro de determinada cidade, com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio p(x), em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Com base na fórmula p(x) = det A, determine:

a) o peso médio de uma criança de 5 anos;

b) a idade mais provável de uma criança cujo peso é 30 kg.

16. O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & \sec(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & \text{cossec}(\theta) \\ \text{tg}(\theta) & 1 & \sec^2(\theta) \end{pmatrix}, \text{ para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ é}$$

a) – 1. b) tg(θ). c) sec(θ). d) 0. e) 1.

17. **(UNESP)** – Sejam $A = \begin{bmatrix} x - 2y & 1 \\ 3x + y & -1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, matrizes reais.

a) Calcule o determinante de A, det(A), em função de x e y, e represente no plano cartesiano os pares ordenados (x,y) que satisfazem a inequação det(A) ≤ det(B).

b) Determine x e y reais, de modo que A + 2B = C.

Módulo 21 – Propriedades dos Determinantes II

1. **(UEL)** – Seja o determinante $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. É verdade que:

a) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = D - 1$ b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = D$ c) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = D$

d) $\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = D$ e) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{vmatrix} = D^2$

2. Sendo x e y, respectivamente, os determinantes não nulos, das matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2a & -2c \\ 3b & 3d \end{bmatrix}$, então $\frac{y}{x}$ vale:

a) 36 b) 12 c) – 6 d) – 12 e) –15

3. **(UESPI)** – Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & 2 & 2 \\ p & 4 & 4 \\ p & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a – 18, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ p & -2 & 4 \\ p & -2 & 1 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) – 9 b) – 6 c) 3 d) 6 e) 9

4. **(MACKENZIE)** – A é uma matriz quadrada de ordem 4 e det A = – 6. O valor de x tal que det (2A) = x – 97 é:

a) – 12 b) 0 c) 1 d) $\frac{97}{2}$ e) 194

5. **(CESGRANRIO)** – Quando os elementos da 3ª linha de uma matriz quadrada são divididos por x (x diferente de zero) e os elementos da 1ª coluna são multiplicados por y (y diferente de zero), o determinante da matriz fica dividido por:

a) xy b) $\frac{1}{xy}$ c) $\frac{x}{y}$ d) $\frac{y}{x}$ e) $\frac{x^3}{y^3}$

6. **(PUC)** – Se somarmos 4 a todos elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cujo determinante é D, então o determinante da nova matriz é:

a) 2D b) 3D c) 4D d) 5D e) 6D

7. **(UESPI)** – Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a 10, então o determinante da matriz

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é igual a:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

8. **(UFSCar)** – Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 3 tal que, $a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ se } i = j \\ 2p, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de

a) 2. b) 3. c) 5. d) 7. e) 11.

9. **(UFRN)** – Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ uma matriz 3 x 3.

Se Det. (A) = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, então

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 18 b) 12 c) 6 d) 0

10. **(UFOP)** – A matriz A, dada a seguir, é igual à oposta da sua transposta, ou seja, $A = -A^t$

$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & w \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$

Seu determinante vale:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

Módulo 22 – Teorema de Jacobi

1. **(MACKENZIE)** – Se abc ≠ 0, então, o determinante

$D = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ vale:

a) a b) b c) c d) 2a e) 0

2. Prove que se **a + b + c + d = 0**, então:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

3. **(VUNESP)** – Sejam **a**, **b**, **c**, **d**, **e** cinco números inteiros formando, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então, o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{pmatrix}$ vale:

a) $a + b + c + d + e$ b) $ace - c^3$ c) 0

d) 1/2 e) 1

4. Qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$, o valor de

$$\begin{vmatrix} m+1 & m+2 & m+3 \\ m+2 & m+3 & m+4 \\ m+3 & m+4 & m+5 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $(m + 1) . (m + 3) . (m + 5)$ b) $(m + 3)^3$

c) zero d) 1

e) – 1

5. Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

6. **(PUC)** – O cofator do elemento a_{23} da matriz

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é:

a) 2 b) 1 c) – 1 d) – 2 e) 3

7. O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem a equação $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 3x & x \\ x & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) {0} b) $\mathbb{R}_+^*$ c) {7} d) $\mathbb{R}$ e) {0; 7}

8. **(UEMT)** – O maior valor real de x tal que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ é:}$$

a) – 8 b) 0 c) 1 d) 8 e) 16

9. Para que $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$, devemos ter:

a) $x > 2$ b) $0 < x < 5$ c) $x < -2$

d) $x > 5$ e) $1 < x < 2$

10. Os valores de a para os quais $\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$ são tais que:

a) $-1 < a < 1$ b) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

c) $a < -2$ ou $a > 2$ d) $a < -\frac{1}{2}$ ou $a > \frac{1}{2}$

e) $a > \frac{1}{2}$

11. **(FUVEST)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

a) 2 b) 1 c) 0 d) –1 e) – 2

12. **(UFCEARÁ)** – Sejam m_1 e m_2 números reais positivos. Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{m_1} \\ \sqrt{m_2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m_1 - 1 & 2 \\ 1 & -1 & m_2 + 2 \end{pmatrix}$.

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{25}{4}$

d) $\frac{25}{2}$ e) $\frac{12}{5}$

Módulo 23 – Teorema de Laplace, Regra de Chió e Propriedades Complementares

1. **(UEL)** – Se A é a matriz $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, o determinante da matriz A^2 é igual a:

a) 0 b) 1 c) 4 d) 9 e) 25

2. Sejam $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Os valores de x, tais que o determinante de A . B é igual a zero, são:

a) 0; 4; – 4 b) 0; – 1; – 4 c) 0; 1; 4
d) 0; 1; – 1 e) 0; 2; – 2

3. **(ITA)** – Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2A \cdot A^t) = 4x$?

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

4. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz produto A . B é:

a) 5 b) – 5 c) 15 d) – 15 e) 10

5. **(U.F.SANTA CATARINA)** – Considere as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e n = det (AB). Calcule 7^n.

6. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Se o determinante de AB é igual a zero, então, necessariamente, devemos ter:

a) ab + cd = 0 b) a = 0 e b = 0
c) ad – bc = 0 d) a + c = 0 e b + d = 0
e) a = b = c = d = 0

7. **(MACKENZIE)** – Na função real definida por

$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{vmatrix}$, f(0,001) vale:

a) 0,02 b) 1000^{-1} c) 10^{-2} d) 500^{-1} e) 0,5

8. Resolver a equação:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & x & x^2 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ \mathbf{1} & -3 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

9. Estando **a**, **b** e **c** em P.A. de razão **r**, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

a) é sempre positivo.

b) depende de **a.**

c) depende só de **r**, qualquer que seja **a.**

d) é $\mathbf{a^3 - r^3}$.

e) é $\mathbf{8r^3}$.

10. Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$

11. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 3, em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

O valor do determinante de A é:

a) 0 b) 12 c) 24 d) 48 e) 6

12. Somando-se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

obtém-se:

a) 840 b) – 840 c) 600 d) – 600 e) 0

13. **(MACK)** – Se $0 \leq x \leq 2$, o menor valor de x tal que:

$\begin{vmatrix} -\text{sen } x & -8 & -5 \\ 0 & -\text{sen } x & \text{cotg } x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0$ é:

a) 0 b) $\pi/6$ c) $\pi/4$ d) $\pi/2$ e) $\pi/3$

14. O determinante $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ é estritamente positivo se, e somente se:

a) x < 1 b) x > 0 c) 0 < x < 1
d) x < 0 ou x > 1 e) x < 1 ou x > 2

15. **(UFG)** – Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então os valores de λ, tais que o determinante da matriz $A^2 - \lambda I$ é igual a zero, são:

a) somente λ = 0 b) λ = 0 ou λ = 2
c) qualquer que seja λ real d) λ = 4 ou λ = 2
e) λ = 0 ou λ = 4

16. **(MACKENZIE)** – Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que A.B = I, então o determinante da matriz A^2 é

a) 1 b) 4 c) 9 d) 16 e) 25

17. **(MACKENZIE)** – Dada a matriz $A = (a_{i,j})_{2x2}$, tal que $a_{i,j} = 3i - j$, o valor do determinante da matriz A^2 é

a) 0 b) 1 c) 4 d) 9 e) 16

Módulo 24 – Definição e Cálculo da Matriz Inversa

1. A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) inexistente d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$ duas matrizes.

Se **B** é a inversa de **A**, então **x + y** vale:

a) 3/2 b) 1/2 c) –1 d) 1 e) 0

3. (**MACKENZIE**) – Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$, então o número de valores de **x** tais que $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

4. Se **b** for o elemento da primeira linha e segunda coluna da matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, então:

a) b = – 2 b) b = – 1 c) b = 0

d) b = 1 e) b = 2

5. (**U.F.LAVRAS**) – A matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$ admite inversa se, e somente se:

a) $x = 0$ e $x = 1$ b) $x \neq 0$ c) $x > 1$

d) $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e) $x \neq 0$ e $x \neq \frac{1}{2}$

6. (**FUVEST**) – A matriz $\begin{bmatrix} \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se:

a) $\theta \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ b) $\theta \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c) $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ d) $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

e) $\theta \in \mathbb{R}$

7. Determine as condições que **x** deve satisfazer para que a matriz **A** seja inversível.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & x \end{pmatrix}$$

8. Os valores de k para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ não admita inversa são

a) 0 e 3. b) 1 e – 1. c) 1 e 2.

d) 1 e 3. e) 3 e – 1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 19 – Estudo da Reta: Equação Geral e Casos Particulares

1. **(UFMG)** – Sejam t e s as retas de equação $2x - y - 3 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, respectivamente. A reta r contém o ponto A = (5; 1) e o ponto de intersecção de t e s. A equação de r é:

a) $5x - y - 24 = 0$
b) $5x + y - 26 = 0$
c) $x + 5y - 10 = 0$
d) $x - 5y = 0$
e) $5x + y - 12 = 0$

Resolução

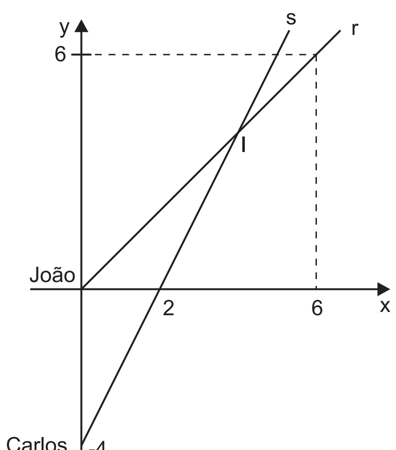
1) Sendo B o ponto de intersecção das retas de equações $2x - y - 3 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, temos:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow B(7;\ 11)$$

2) Dessa forma, a equação da reta que contém os pontos A(5; 1) e B(7; 11) é $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 7 & 11 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - y - 24 = 0$

Resposta: A

2. **(UNIV.FED. PELOTAS)** – As retas abaixo representam, no plano cartesiano, o trajeto de dois estudantes até suas escolas. O ponto de intersecção entre elas indica o local onde eles se encontram.



Com base nos textos, é correto afirmar que a distância que João percorre até encontrar o colega, quando representada no plano cartesiano, é de

a) 8 u.c.
b) 6 u.c.
c) $4\sqrt{2}$ u.c.
d) $16\sqrt{2}$ u.c.
e) $2\sqrt{2}$ u.c.

Resolução

1º) A reta r passa pelos pontos (0;0) e (6;6), tem equação y = x.

2º) A reta s, que passa pelos pontos (2;0) e (0; – 4), tem equação

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$$

3º) O ponto de intersecção é obtido a partir do sistema

$$\begin{cases} y = x \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4$$

Assim: I(4;4)

4º) A distância de João, no ponto (0; 0) até o ponto de encontro (4;4) é igual a $4\sqrt{2}$

Resposta: C

Módulo 20 – Declividade – Formas da Equação da Reta

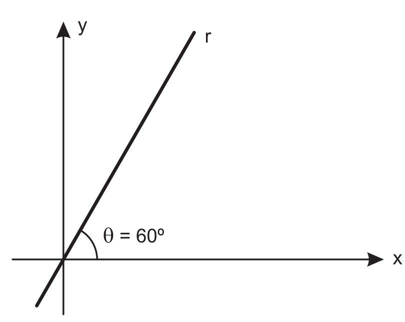
3. **(UFSCar-adaptado)** – Seja $A = (p; \sqrt{3}p)$ um ponto da reta (r) y = q . x. Construa o gráfico da reta *r* e determine seu ângulo de inclinação.

Resolução

O ponto $A(p;\ \sqrt{3}\ .\ p)$ é ponto da reta (r) $y = q\ .\ x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ .\ p = q\ .\ p \Leftrightarrow q = \sqrt{3}$

Sendo $q = \sqrt{3}$ o coeficiente angular da reta r, temos:
$q = tg\ \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60°$, que é o ângulo de inclinação da reta r.

O gráfico da reta r, de equação $y = \sqrt{3}\ .\ x$, é:



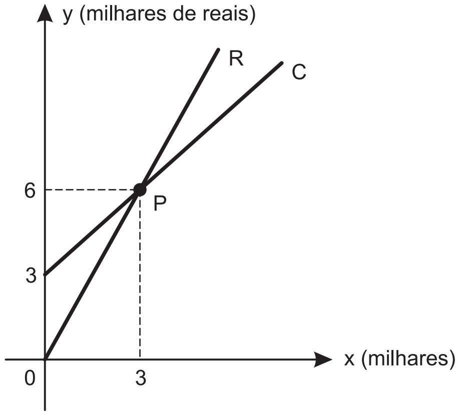
4. **(FGV)** – Considere a receita **R** de uma indústria como a quantia em dinheiro recebida por ela com a venda dos milhares de litros de suco que produz e o custo de produção **C** como a quantia gasta por ela para produzir esse suco. Chamamos de lucro dessa empresa a diferença, quando positiva, entre a receita e o custo de produção, e de prejuízo, essa diferença, quando negativa. Sabendo que a receita **R** e o custo de produção **C**, referentes à quantidade x em milhares de litros de suco produzidos e vendidos por essa empresa, variam de acordo com as leis R = 2x e C = x + 3, em milhares de reais,

a) Represente R e C num mesmo sistema cartesiano.

b) Interprete o significado:
– do ponto $P = (x_P, y_P)$, comum às duas curvas;
– da posição relativa das duas curvas para $x < x_P$ e para $x > x_P$, de acordo com a situação apresentada.

Resolução

O ponto P (x_p;y_p), comum às duas curvas, representa a igualdade entre o custo e a receita. É chamado ponto de equilíbrio, assim:



$$\begin{cases} R = 2x \\ C = x + 3 \\ R = C \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } R = C = 6, \text{ portanto P (3;6)}$$

Na produção de 3 000 litros de suco, a quantia em dinheiro do custo e da receita é igual, em reais, a 6 000 e, portanto, a indústria não tem lucro e nem prejuízo.

Na produção de mais de 3 000 litros de suco ($x > 3$), a empresa tem lucro.

Na produção de menos de 3 000 litros do suco ($x < 3$), a empresa tem prejuízo.

Respostas: a) gráfico
b) ponto de equilíbrio (3;6)

Módulo 21 – Posição Relativa de Duas Retas

5. **(VUNESP)** – Sabe-se que as equações $x + ky - 2 = 0$ e $kx + 4y - 4 = 0$ são equações de uma mesma reta, num sistema de coordenadas cartesianas do plano. Nesse caso:

a) $k = 4$ b) $k = 2$ c) $k = 1$ d) $k = 0$ e) $k = -1$

Resolução

As retas são coincidentes, então:

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{4} = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: B

6. **(FGV)** – As retas de equações $y = -x - 1$ e $y = \left(\dfrac{-a+1}{a-2}\right)x + 12$ são perpendiculares. O valor de **a** é:

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) – 2 e) $\dfrac{3}{2}$

Resolução

As retas (r) $y = -x + 1$ e (s) $y = \left(\dfrac{-a+1}{a-2}\right) . x + 12$ têm coeficientes angulares, respectivamente, $m_r = -1$ e $m_s = \dfrac{-a+1}{a-2}$ e são perpendiculares.

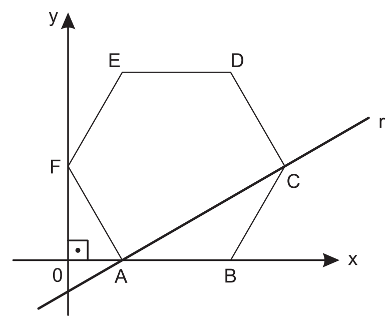
Portanto, $m_s = \dfrac{-1}{m_r} \Leftrightarrow \dfrac{-a+1}{a-2} = \dfrac{-1}{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - 2 = -a + 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

Resposta: E

Módulo 22 – Feixe de Retas

7. **(METODISTA)** – O hexágono regular ABCDEF tem lados medindo 2 unidades. A equação da reta **r** é:



a) $x - y - \sqrt{3} = 0$
b) $3x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$
c) $\sqrt{3}x - \sqrt{3}y - 3 = 0$
d) $3x + \sqrt{3}y + 3 = 0$
e) $\sqrt{3}x - 3y - \sqrt{3} = 0$

Resolução

Cada ângulo interno do hexágono regular é igual a 120°, então: $O\hat{A}F = 60°$ e $B\hat{A}C = 30°$ (pois o triângulo ABC é isósceles)

O ponto A (do eixo x) é tal que

$OA = AF . \cos 60° \Leftrightarrow OA = 2 . \dfrac{1}{2} = 1$, resultando suas coordenadas iguais a (1;0).

Se o coeficiente angular de *r* é $m = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e a reta passa pelo ponto A(1;0), a equação da reta r é:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} . (x - 1) \Leftrightarrow \sqrt{3} . x - 3 . y - \sqrt{3} = 0$$

Resposta: E

8. **(UFSCar)** – Considere P um ponto no 1º quadrante pertencente à reta (r) de equação $3x + 5y - 10 = 0$ e equidistante dos eixos coordenados. A equação da reta que passa por P e é perpendicular a (r) é

a) $10x - 6y - 5 = 0$. b) $6x - 10y + 5 = 0$.
c) $15x - 9y - 16 = 0$. d) $5x + 3y - 10 = 0$.
e) $15x - 3y - 4 = 0$.

Resolução

1º) Se P(a; b) é um ponto pertencente à reta (r) de equação $3x + 5y - 10 = 0$, então $3a + 5b - 10 = 0$ (I)

2º) Se P(a; b) é equidistante dos eixos coordenados no 1º quadrante, então, $a = b$ (II)

3º) De (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 3a + 5b - 10 = 0 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{5}{4} \Rightarrow P\left(\frac{5}{4} ; \frac{5}{4}\right)$$

4º) Se (s) é a reta perpendicular a (r), sendo $m_r = \frac{-3}{5}$, então

$m_s = \frac{5}{3}$

5º) A reta (s) que passa pelo ponto P $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$ e é perpendicular à reta (r), tem equação

$y - \frac{5}{4} = \frac{5}{3} \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow 10x - 6y - 5 = 0.$

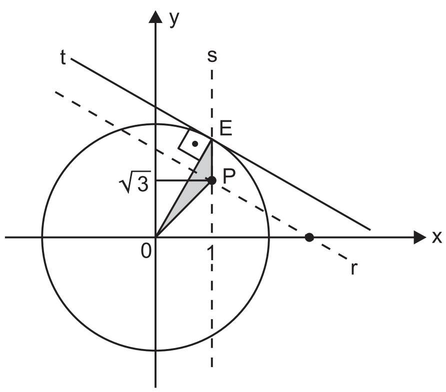
Resposta: A

Módulo 23 – Ângulo entre Duas Retas

9. **(FUVEST)** – São dados, no plano cartesiano de origem O, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$, o ponto $P = (1, \sqrt{3})$ e a reta s que passa por P e é paralela ao eixo y. Seja E o ponto de ordenada positiva em que a reta s intercepta a circunferência. Assim sendo, determine

a) a reta tangente à circunferência no ponto E.
b) o ponto de encontro das alturas do triângulo OPE.

Resolução



a) A equação da reta tangente à circunferência no ponto E é $x + 2y - 5 = 0$

1) Se E é um ponto da circunferência, então as coordenadas de E são $x_E = 1$ e $y_E = 2$

2) O coeficiente angular da reta OE é $m_1 = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{2}{1}$.

O coeficiente angular da reta tangente à circunferência em E é

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$

3) A equação da reta tangente à circunferência em E é $y - y_E = m_2 (x - x_E)$, ou seja,

$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$

b) 1) O coeficiente angular da reta OE é $m_1 = 2$, assim o coeficiente angular da altura do triângulo OPE e que passa por P é

$m_3 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{2}$

2) A equação da reta que contém a altura do triângulo OPE que passa por p é: $y - \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$

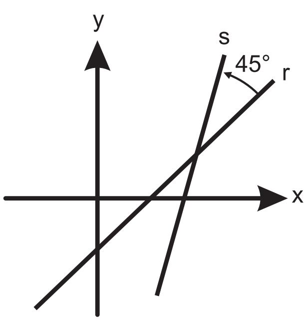
3) O ortocentro do triângulo OPE é o ponto de intersecção da reta de equação $y = 0$ (altura do triângulo OPE que passa por O) e da reta de equação $x + 2y - 2\sqrt{3} - 1 = 0$ (altura do triângulo OPE que passa por E):

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 2\sqrt{3} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

O ponto de encontro das alturas do triângulo OPE é $(2\sqrt{3} + 1; 0)$

Respostas: a) $x + 2y - 5 = 0$ b) $(2\sqrt{3} + 1; 0)$

10. Determinar o coeficiente angular da reta s da figura, sabendo que o coeficiente angular da reta r é $\frac{2}{3}$.



a) $\frac{1}{5}$ b) -5 c) 5 d) $-\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

Resolução

Usando a convenção anti-horária para representação do ângulo entre duas retas, verificamos que o ângulo (45°) assinalado na figura é o de **r** para **s**, portanto a fórmula fica:

$$\text{tg}\,\hat{rs} = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } 45° = \frac{m_s - \frac{2}{3}}{1 + m_s \cdot \frac{2}{3}} \Leftrightarrow 1 = \frac{m_s - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot m_s} \Leftrightarrow m_s = 5$$

Resposta: C

Módulo 24 – Posição dos Pontos de um Plano em Relação a uma Reta e Distância de Ponto a Reta

11. **(FUVEST)** – Por recomendação médica, uma pessoa deve fazer, durante um curto período, dieta alimentar que lhe garanta um mínimo diário de 7 miligramas de vitamina A e 60 microgramas de vitamina D, alimentando-se exclusivamente de um iogurte especial e de uma mistura de cereais, acomodada em pacotes. Cada litro do iogurte fornece 1 miligrama de vitamina A e 20 microgramas de vitamina D. Cada pacote de cereais fornece 3 miligramas de vitamina A e 15 microgramas de vitamina D. Consumindo x litros de iogurte e y pacotes de cereais diariamente, a pessoa terá certeza de estar cumprindo a dieta se

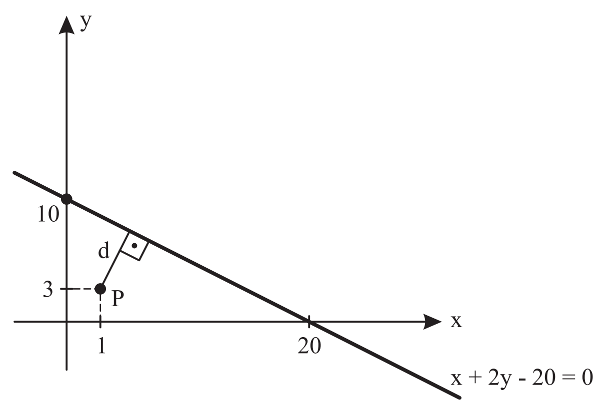
a) $x + 3y \geq 7$ e $20x + 15y \geq 60$
b) $x + 3y \leq 7$ e $20x + 15y \leq 60$
c) $x + 20y \geq 7$ e $3x + 15y \geq 60$
d) $x + 20y \leq 7$ e $3x + 15y \leq 60$
e) $x + 15y \geq 7$ e $3x + 20y \geq 60$

Resolução
Em x litros de iogurte e y pacotes de cereal, têm-se (1x + 3y) miligramas de vitamina A e (20x + 15y) microgramas de vitamina D. Assim, para suprir as necessidades diárias, deve-se obedecer ao sistema:

$$\begin{cases} 1x + 3y \geq 7 \\ 20x + 15y \geq 60 \end{cases}$$

Resposta: A

12. **(FGV-adaptado)** – Um mapa é posicionado sobre um sistema de eixos cartesiano ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto P(1; 3).
Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação $x + 2y - 20 = 0$. Qual a menor distância entre o avião e a cidade?
Resolução



A menor distância entre a cidade e o avião é dada por

$$\frac{|1 + 2 \cdot 3 - 20|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: A menor distância entre a cidade e o avião é $\mathbf{\dfrac{13\sqrt{5}}{5}}$

EXERCÍCIOS-TAREFA

Módulo 19 – Estudo da Reta: Equação Geral e Casos Particulares

1. **(FUVEST)** – Os pontos (a; 1) e (2; b) estão sobre a reta $x + 2y = 0$. A distância entre eles é:

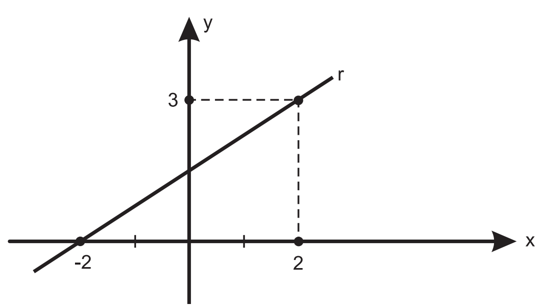
a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{10}$ d) 2 e) $4\sqrt{5}$

2. **(F.C.CHAGAS)** – As retas **r** e **s** são definidas por $y = 2x + 1$ e $5y + 2x - 2 = 0$. A reta vertical que contém o ponto de intersecção de **r** e **s** é definida por:

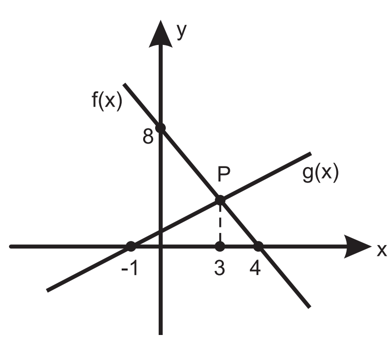
a) $x = -\dfrac{3}{8}$ b) $y = \dfrac{1}{4}$ c) $x = -\dfrac{1}{4}$
d) $x = \dfrac{3}{8}$ e) $x = -4$

3. **(ESAPP)** – A equação geral da reta **r** da figura é:

a) $x - 3y + 4 = 0$ b) $-2x + 3y + 6 = 0$
c) $3x - 4y + 6 = 0$ d) $3x - 2y - 4 = 0$
e) $-x + 4y - 6 = 0$



4. **(U.GAMA FILHO)** –



No gráfico anterior estão representadas as funções do 1º grau f(x) e g(x), cujas retas se interceptam no ponto **P**, de abscissa 3. A expressão que define g(x) é:

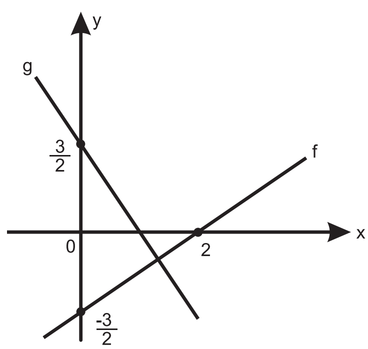
a) x – 1 b) 2x – 2 c) $\dfrac{x-1}{2}$

d) $\dfrac{x+1}{2}$ e) $\dfrac{x+2}{2}$

5. **(UNA)** – A reta r passa pelos pontos (2; 5) e (5; 9). Um outro ponto dessa reta é:

a) (500; 669) b) (500; 670) c) (500; 671)
d) (500; 672) e) (500; 673)

6. **(UESB)**



A figura representa os gráficos das funções reais definidas por y = f(x), onde ax – 4y – 6 = 0, e y = g(x), onde 3x – by – 3 = 0, com a, b ∈ $\mathbb{R}^*$. O valor de a + b é:

a) 0 b) 1 c) 3
d) 5 e) 6

7. **(U. MARÍLIA)** – Dados os pontos A(2; – 2); B(5; 2) e C(8; 6), considere as afirmações abaixo:

I. A, B e C são colineares.
II. – 4x + 3y + 14 = 0 é a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.
III. B é o ponto médio de $\overline{AC}$.

Das alternativas abaixo, assinale a correta:
a) I, II e III são verdadeiras.
b) Somente a I não é verdadeira.
c) Somente a II é verdadeira.
d) Somente a III é verdadeira.
e) I, II e III não são verdadeiras.

8. **(FGV)** – Dada a reta de equação $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$, determinar o valor de m, para que ela seja perpendicular a x = 5.

a) 3 b) 0 c) – 2 d) $-\dfrac{1}{5}$ e) 1

9. Dados os pontos A(3; – 1) e B(– 2; 4), determinar a intersecção da reta AB com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

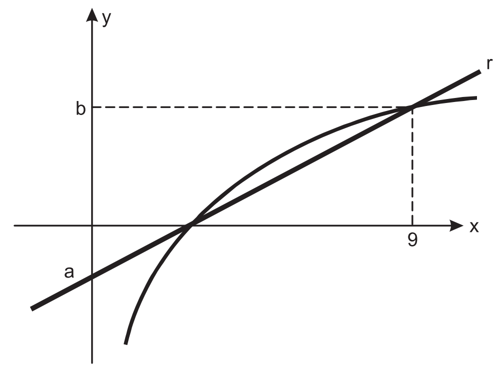
10. **(MACKENZIE)** – A equação da reta paralela ao eixo Ox e que passa pela intersecção das retas 3x + 5y – 7 = 0 e 4x + 6y – 5 = 0 é:

a) $y = \dfrac{13}{2}x$ b) $x = \dfrac{13}{2}$

c) $y = \dfrac{13}{2}$ d) $y = \dfrac{13}{2}x + \dfrac{3}{2}$

e) $x = \dfrac{13}{2}y + \dfrac{3}{2}$

11. **(MACKENZIE)** – Na figura, a reta r encontra o gráfico de $y = \log_3 x$ no ponto (9, b). O valor de a + b é



a) 2 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{7}{4}$ d) – 1 e) $\dfrac{2}{9}$

Módulo 20 – Declividade – Formas da Equação da Reta

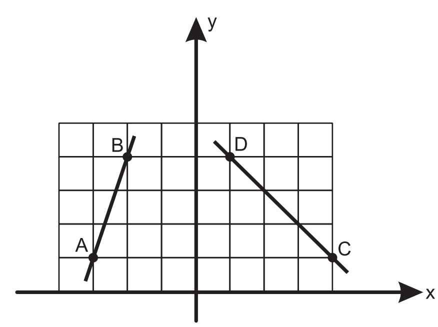
1. Determinar o coeficiente angular e a inclinação da reta que passa pelos pontos de coordenadas: (2; 2) e (3; 2 + $\sqrt{3}$).

2. **(F. CARLOS CHAGAS)** – O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A\left(0; \dfrac{1}{m}\right)$ e $B\left(-\dfrac{1}{m}; 0\right)$, com m ≠ 0, é:

a) m b) – m c) 1 d) – 1 e) m^2

3. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ valem, respectivamente:

a) 3 e 1 b) – 3 e – 1 c) 2 e 1/2
d) 3 e – 1 e) 2 e – 1



4. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Uma reta pela origem de coeficiente angular negativo tem somente 3 pontos em comum com o gráfico da função y = sen x. A menor das 3 correspondentes abscissas:

a) é um múltiplo de π
b) está entre $-3\pi/2$ e $-\pi$
c) é nula
d) está entre -2π e $-3\pi/2$
e) é positiva

5. Determinar a equação reduzida das retas que passam pelos seguintes pares de pontos.

a) A(0; 3) e B(– 1; 0)
b) C(1; – 2) e D(– 3; 4)

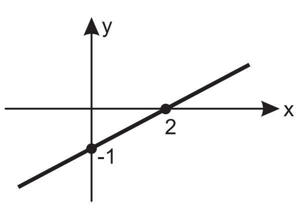
6. Dada a reta de equação $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, a sua expressão sob a forma reduzida é:

a) $x - y - 5 = 0$
b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot x - \dfrac{1}{2}$
c) $x = 3y + 2$
d) $x - y = 1$
e) $y = 3x + 2$

7. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Considere o triângulo $V_1(0; 0)$, $V_2(a; a)$ e $V_3(a; -a)$. A equação da reta que passa pelo vértice V_3 e pelo ponto médio do lado V_1V_2 é:

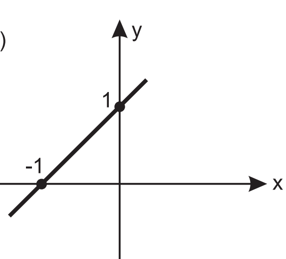
a) $y = -\dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{29}{3}$
b) $y = -3x + 2a$
c) $y = x - 1$
d) $y = \dfrac{1}{3} \cdot \left(x - \dfrac{a}{2}\right) + \dfrac{a}{2}$
e) $y = 3x + 2a$

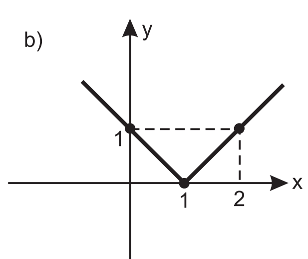
8. **(ABC)** – A reta abaixo tem por equação:

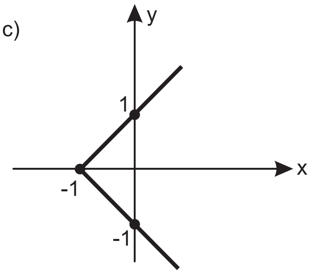


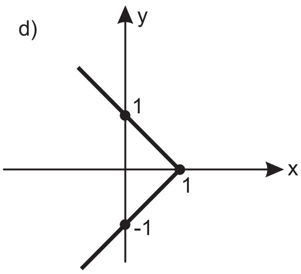
a) $x - 2y - 2 = 0$
b) $x + 2y - 2 = 0$
c) $y = 2x + 1$
d) $x = 2y + 1$
e) $2x + y - 2 = 0$

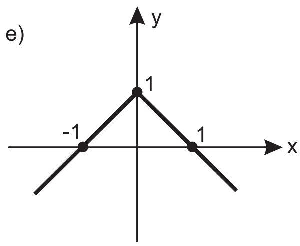
9. **(F. CARLOS CHAGAS)** – O gráfico que melhor representa a relação $|y| = x + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, é:

a)


b)


c)


d)


e)


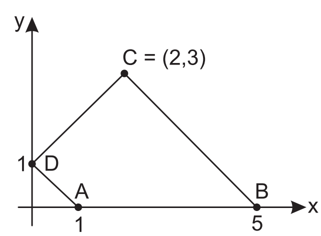
10. **(PUC)** – Dada a reta de equações paramétricas

$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + t \cdot \sqrt{3} \end{cases}$, o seu coeficiente angular é:

a) $-\dfrac{5}{2}$
b) $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$
c) $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

11. **(FUVEST)** – Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero ABCD, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado AB passando pelo ponto P = (a,0). O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:

a) $\sqrt{5} - 1$
b) $5 - 2\sqrt{2}$
c) $5 - \sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$
e) $5 + 2\sqrt{2}$



Módulo 21 – Posição Relativa de Duas Retas

1. **(FUVEST)** – As retas de equações $x - 5y + 1 = 0$ e $10y - 2x + 22 = 0$:

a) são reversas
b) concorrem na origem
c) não têm ponto em comum
d) formam um ângulo de 90°
e) têm um único ponto em comum

2. Determinar **k**, de modo que a reta 3x = 2ky – 6 seja perpendicular à reta 3y = – 5x + 2:

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{5}{2}$ d) $-\frac{2}{5}$ e) $\frac{6}{5}$

3. **(UNISA)** – Achando-se os valores de **K** e **L** para os quais 2x + Ky + 12 = 0 e 5x – y – L = 0 são equações de uma mesma reta, verifica-se que **K + L** é igual a:

a) – 34 b) – 26 c) $-\frac{13}{30}$ d) $\frac{24}{5}$ e) – 30,4

4. Para que valor de **k** as retas (r) kx + 5y + k = 0 e (s) 4x + (k + 1) . y – 5 = 0 são paralelas (distintas)?

5. Determinar o valor de x, sabendo-se que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são perpendiculares entre si.

São dados A(x; – 2), B(5; 1), C(10; 0) e D(13; –2).

a) – 1 b) 2 c) – 4 d) 3 e) – 3

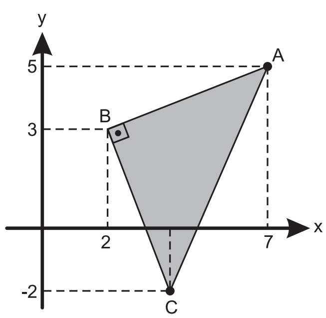
6. Para que valores de **K** as retas (K – 1) . x + 6 . y + 1 = 0 e 4 . x + (K + 1) . y – 1 = 0 são paralelas?

a) ± 3 b) ± 5 c) somente 5
d) $\forall K \in \mathbb{R}$ e) nenhum

7. **(ULBRA)** – O valor de α para que as retas 2x – y – 3 = 0 e 3y + αx – 2 = 0 sejam perpendiculares é

a) 3 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

8. **(FGV)** – Sabendo que o ΔABC é um triângulo retângulo em B, calcular as coordenadas do vértice C.



a) (5; – 2)
b) $\left(\frac{7}{2}; -2\right)$
c) (4; – 2)
d) $\left(\frac{9}{2}; -2\right)$
e) (3; – 2)

9. **(UN. CAT. RS)** – As retas r: 3x – (p + 1)y + 4 = 0 e s: 5x – py – 2 = 0 são concorrentes, se

a) p ≠ 5 b) p ≠ 2 c) $p \neq \frac{3}{2}$
d) p ≠ – 1 e) $p \neq -\frac{5}{2}$

10. **(UESB)** – Considere as retas de equações x + y – 1 = 0, 2x + y – 1 = 0 e 3x + y = 0. Sobre essas retas, pode-se afirmar que:

a) são concorrentes em um único ponto
b) se interceptam duas a duas
c) são coincidentes
d) são duas a duas perpendiculares
e) são paralelas

11. **(FGV)** – No plano cartesiano, a reta de equação y = x + 1 corta o lado $\overline{AC}$ do triângulo de vértices A = (1,7), B = (1,1) e C = (10,1), no ponto

a) (3,4). b) (4,5).
c) (5,6). d) $\left(\frac{\sqrt{117}}{2}, \frac{\sqrt{117}}{2} + 1\right)$.
e) (5,5; 4).

12. **(UNICAMP)** – Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* pertencem ao gráfico da função *y* = 1/*x*, *x* > 0. As abscissas de *A*, *B* e *C* são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento *AB* é paralelo ao segmento *CD*.

a) Encontre as coordenadas do ponto *D*.
b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos *AB* e *CD* passa também pela origem.

13. **(UNIFESP)** – Se P é o ponto de intersecção das retas de equações x – y – 2 = 0 e $\frac{1}{2}x + y = 3$, a área do triângulo de vértices A(0,3), B(2,0) e P é

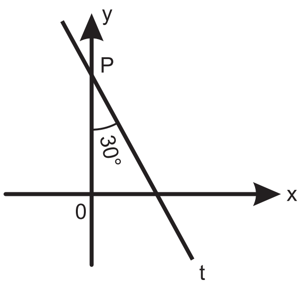
a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{5}{3}$. c) $\frac{8}{3}$. d) $\frac{10}{3}$. e) $\frac{20}{3}$.

Módulo 22 – Feixe de Retas

1. **(F. OSVALDO ARANHA)** – A equação da reta que passa pelo ponto (– 2; 4) e tem coeficiente angular igual a – 3 é:

a) y – 3x + 4 = 0 b) y + 3x + 4 = 0
c) y – 3x – 2 = 0 d) y + 3x + 2 = 0
e) y – 3x – 4 = 0

2. **(UESB)** – Uma reta **t** que intercepta o eixo Oy no ponto P(0; 2) e forma com este um ângulo de 30° tem como equação



a) $y = \sqrt{3}x + 2$
b) $y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$
c) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$
d) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2}$
e) $y = -\sqrt{3}x + 2$

3. **(F.E.SERRA DOS ÓRGÃOS)** – **ABCD** é um paralelogramo. Se A(1; 3), B(2; 4) e C(3; – 1), a equação da reta **CD** é:

a) y = – 1 b) y = – x + 2 c) y = x – 4
d) y = 2x – 7 e) y = 3x – 10

4. **(FFCLUSP)** – A equação da reta perpendicular à reta $5x - 3y = 2$ pelo ponto (4; 5) é:

a) $3 \cdot (x - 4) + 5 \cdot (y - 5) = 0$

b) $5 \cdot (x - 4) + 3 \cdot (y - 5) = 0$

c) $3 \cdot (x - 4) - 5 \cdot (y - 5) = 0$

d) $5 \cdot (x - 4) - 3 \cdot (y - 5) = 0$

e) $4 \cdot (x - 5) + 5 \cdot (y - 3) = 0$

5. **(F. CARLOS CHAGAS)** – Se o ponto (– 1; 2) é um dos vértices de um quadrado e $2x - 3y + 6 = 0$ é a equação da reta suporte de uma de suas diagonais, a equação da reta suporte da outra diagonal é:

a) $3x - 2y - 2 = 0$ b) $3x + 2y - 1 = 0$
c) $3x - 2y + 1 = 0$ d) $3x + 2y + 1 = 0$
e) $3x - 2y + 2 = 0$

6. **(PUC-MG)** – Seja P = (a; 1) um ponto da reta **r** de equação $3x + y - 7 = 0$. A equação da reta **s** que passa por **P** e é perpendicular a **r** é:

a) $x - y - 1 = 0$ b) $x - 3y + 1 = 0$
c) $x - 3y - 5 = 0$ d) $x + y - 3 = 0$
e) $2x - 3y - 1 = 0$

7. **(FUVEST)** – A equação da reta que passa pelo ponto (3; 4) e é paralela à bissetriz do 2º quadrante é:

a) $y = x - 1$ b) $x + y - 7 = 0$
c) $y = x + 7$ d) $3x + 6y = 33$
e) $y = -x - 7$

8. **(MACKENZIE)** – Observe a figura. Pertence à reta **r** o ponto:

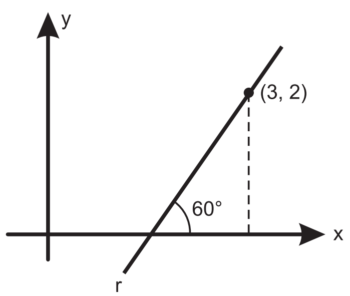
a) $(0; 2 - 3\sqrt{3})$

b) $(2 - \sqrt{3}; 0)$

c) $(0; \sqrt{3} - 6)$

d) $(3 - \sqrt{3}; 0)$

e) $(0; 3 - 2\sqrt{3})$



9. Achar a equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas: $x - 3y + 2 = 0$ e $5x + 6y - 4 = 0$ e é paralela à reta $4x + y + 7 = 0$.

10. **(MAUÁ)** – Num sistema de eixos ortogonais, são dados os pontos A(1; 0), B(6; 0) e C(2; 6), que definem um ΔABC. Escrever as equações das retas suportes, da mediana relativa ao lado BC e da altura relativa do lado AC.

11. **(UFPR)** – Considere, no cartesiano, o triângulo de vértices A = (0,0), B = (3,1) e C = (1,2) e avalie as afirmativas a seguir:

I. O triângulo ABC é isósceles.

II. O ponto $D = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao segmento AB.

III. A equação da reta que passa pelos pontos B e C é $2x + y = 5$.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa I é verdadeira.

b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

12. **(MACKENZIE)** – Num sistema cartesiano, as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC são A = (0;0), B = (3;6) e C = (8;0). A soma das coordenadas do ortocentro (encontro das alturas) deste triângulo é

a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{11}{2}$ c) $\frac{13}{6}$ d) $\frac{13}{2}$ e) $\frac{11}{3}$

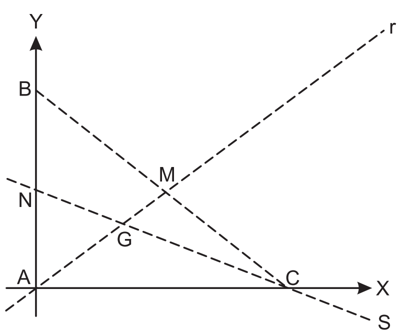
13. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q, sendo P = (2, 1) e Q o simétrico, em relação ao eixo y, do ponto Q' = (1, 2) são, respectivamente:

a) $\frac{1}{3}$; $x - 3y - 5 = 0$. b) $\frac{2}{3}$; $2x - 3y - 1 = 0$.

c) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$. d) $\frac{1}{3}$; $x + 3y - 5 = 0$.

e) $-\frac{1}{3}$; $x + 3y + 5 = 0$.

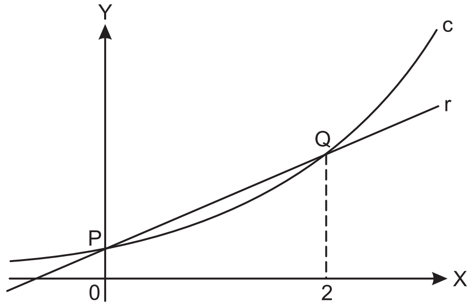
14. **(UFOP)** – No triângulo ABC, a seguir, o ângulo Â é reto. M e N são pontos médios de seus respectivos lados, AB = 18 cm e AC = 24 cm.



a) Obtenha as equações da reta *r*, passando por A e M, e da reta *s*, passando por C e N.

b) Obtenha a medida do segmento $\overline{AG}$.

15. **(UFOP)** – A curva *c*, a seguir, é gráfico da função $f(x) = 2^x$. A equação da reta *r* que passa pelos pontos P e Q é:



a) $y = \dfrac{2}{3}x - 1$ b) $y = \dfrac{3}{2}x - 1$

c) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$ d) $y = \dfrac{3}{2}x + 1$

Módulo 23 – Ângulo entre Duas Retas

1. **(FUVEST)** – Dados os pontos P(3; 2) e a reta (r) $x - y + 1 = 0$, determinar as coordenadas da projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.

2. **(FUVEST)** – Achar o pé da perpendicular baixada do ponto P(– 1; 2) à reta $3x - 5y - 21 = 0$.

3. **(FUVEST)** – Entre os pontos da reta de equação $x + 3y - 8 = 0$, existe um ponto **Q** cuja distância ao ponto P(1; 2) é mínima. As coordenadas do ponto **Q** são:

a) $\left(\dfrac{11}{10}; \dfrac{23}{10}\right)$ b) (2; 2) c) (8; 0)

d) $\left(\dfrac{11}{5}; \dfrac{23}{5}\right)$ e) $\left(2; \dfrac{13}{10}\right)$

4. Determinar as retas paralelas a $3x - 4y + 5 = 0$ e que definem com os eixos um triângulo de área 6.

5. **(F. CARLOS CHAGAS)** – O menor ângulo formado pelas retas cujos coeficientes angulares são **m** e $\dfrac{m-1}{m+1}$ mede:

a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi}{6}$ e) $\dfrac{3\pi}{4}$

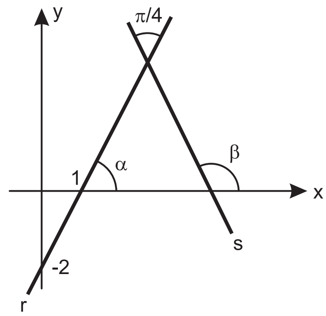
6. Qual o ângulo obtuso formado pelas retas:
$3x - y - 10 = 0$ e $2x + y - 6 = 0$?

7. Determinar as equações das retas que passam pelo ponto P(2; – 1) e formam, cada uma, um ângulo de 45° com a reta $2x - 3y + 7 = 0$.

8. **(UN. ESTÁCIO DE SÁ)** – As retas $x + y = 3$ e $x - y = -12$ formam entre si um ângulo de:
a) 30° b) 60° c) 90° d) 120° e) 150°

9. **(F. CARLOS CHAGAS)** – A reta **r** passa pelos pontos (1; 0) e (0; – 2) e forma com a reta **s** um ângulo π/4 orientado como na figura. O coeficiente angular de **s** é:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) – 3 c) – 2 d) $-\dfrac{1}{3}$ e) – 1

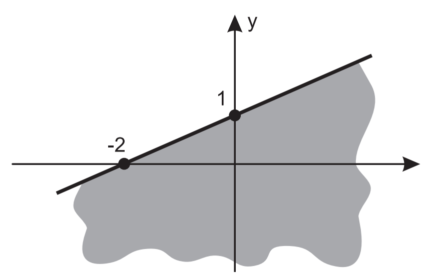


Módulo 24 – Posição dos Pontos de um Plano em Relação a uma Reta e Distância de Ponto a Reta

1. Resolva graficamente as inequações:
a) $3x - 4y - 6 < 0$ b) $5x + y - 5 \le 0$

2. **(PUC)** – O semiplano hachurado é o conjunto dos pontos (x; y) tais que:
a) $x \ge 2y - 2$ b) $x \ge -2y - 2$ c) $x \le 2y + 2$

d) $y \le x + 2$ e) $y \ge \dfrac{x}{2} + 1$

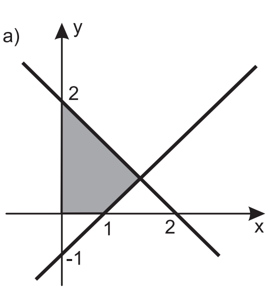


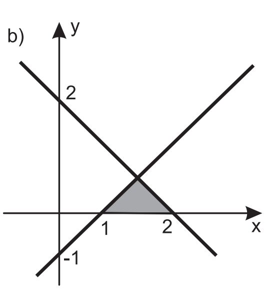
Questões 3 e 4.

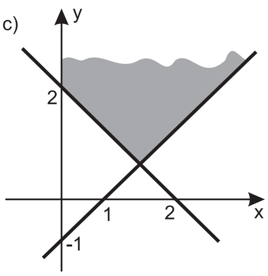
Resolva graficamente os sistemas:

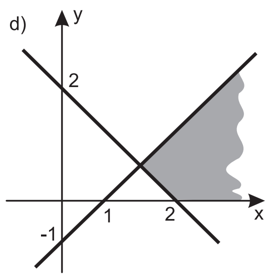
3. $\begin{cases} x - y - 1 < 0 \\ x + y + 2 \le 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x - 2y < 10 \\ y \ge 2 \end{cases}$

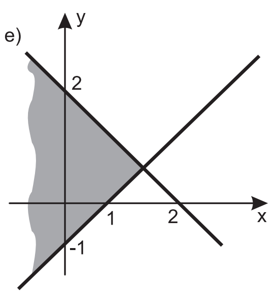
5. O gráfico da relação: $\begin{cases} x + y - 2 \le 0 \\ x - y - 1 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ é:

a)


b)


c)


d)


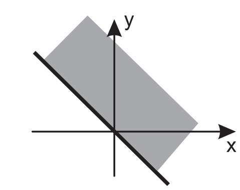
e)


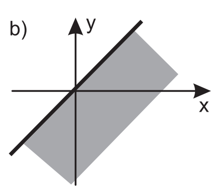
6. **(FGV)** – A representação gráfica do sistema de inequações

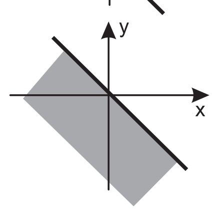
$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases} \quad \text{é um}$$

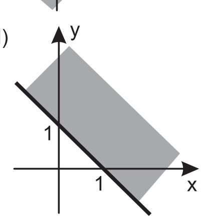
a) quadrado de área igual a 25
b) retângulo de área igual a 30
c) retângulo de área igual a 20
d) trapézio de área igual a 24
e) trapézio de área igual a 25

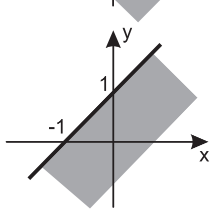
7. **(ULBRA)** – A representação gráfica de
$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \mid x + y \geq 0\}$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


8. **(FUVEST)** – Sabe-se que os pontos (– 1; 3) e (– 3; a) estão em semiplanos opostos relativamente à reta x – 2y + 2 = 0. Um possível valor de *a* é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{2}{5}$ e) $-\frac{4}{7}$

9. **(FGV)** – No plano cartesiano, seja P o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação y = 3x. Sabendo que a distância de P à reta de equação 3x + 4y = 0 é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de P vale:

a) 5,6 b) 5,2 c) 4,8 d) 4,0 e) 4,4

10. Calcular a distância da reta 3x – 4y + 20 = 0 à origem.

11. Calcular a distância do ponto P(– 3; 5) à reta 3x – 4y – 5 = 0.

12. Determinar a distância do ponto P(6; 5) à reta que passa pelos pontos A(– 3; 1) e B(5; – 1).

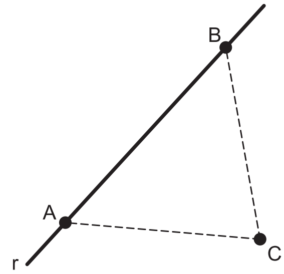
13. Se a distância da reta ax + by + c = 0 à origem é 2, então:

a) $4a^2 + 4b^2 - c^2 = 0$ b) $a^2 + 4b^2 - 4c^2 = 0$
c) $4a^2 + b^2 - 4c^2 = 0$ d) $4a^2 - 4b^2 + c^2 = 0$
e) $4a^2 - b^2 + 4c^2 = 0$

14. Seja a reta **r** que passa pelo ponto (3; 2) e é perpendicular à reta x + y – 1 = 0. Então, a distância do ponto (3; 0) a **r** é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) 2 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

15. **(USF)** – Na figura, **A** e **B** são pontos da reta **r** de equação 3x – 4y + 10 = 0; **A**, **B** e **C** são vértices de um triângulo equilátero e o ponto **C** tem coordenadas (2; – 1). O perímetro do triângulo **ABC**, em unidades de comprimento, é:



a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $6\sqrt{3}$ e) $8\sqrt{3}$

16. Os vértices de um triângulo são os pontos A(–2; – 6), B(10; –1) e C(2; 8). Calcular o comprimento da altura relativa ao lado AB.

17. Determinar a distância entre as retas:
2x – 3y = – 4 e 4x – 6y = – 9

18. **(FUVEST)** – Determinar a área do quadrado ABCD que tem o lado AB na reta (r) 2x – y + 1 = 0 e o lado CD na reta (s) 2x – y – 8 = 0.

19. **(FUVEST)** – O ponto P(2; – 5) é um vértice de um quadrado que tem um dos lados não adjacente a **P** sobre a reta x – 2y – 7 = 0. Qual é a área do quadrado?

20. Dada a matriz, 3 x 3, $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, a distância entre as retas r e s de equações, respectivamente, det(A) = 0 e det(A) = 1 vale:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3 e) $3\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

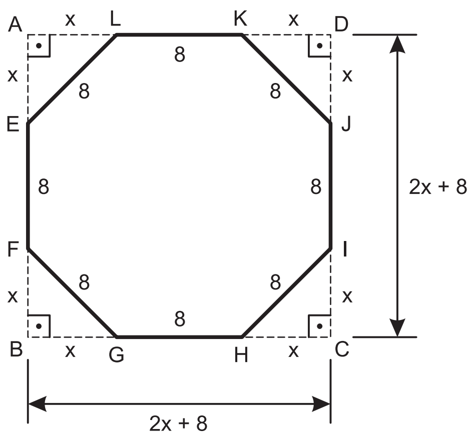
Módulo 19 – Polígonos Regulares

1. **(FATEC)** – O lado de um octógono regular mede 8 cm. A área da superfície desse octógono, em centímetros quadrados, é igual a

a) $128.(1 + \sqrt{2})$ b) $64.(1 + \sqrt{2})$ c) $32.(1 + \sqrt{2})$

d) $64 + \sqrt{2}$ e) $128 + \sqrt{2}$

Resolução



No triângulo retângulo FBG, temos: $x^2 + x^2 = (8\ \text{cm})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$ cm

Sendo S a área, em centímetros quadrados, do octógono EFGHIJKL, temos:

$$S = S_{ABCD} - 4 \cdot S_{FBG} = (2x + 8)^2 - 4 \cdot \frac{x \cdot x}{2} =$$

$$= 4x^2 + 32x + 64 - 2x^2 = 2x^2 + 32x + 64 =$$

$$= 2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 32 \cdot (4\sqrt{2}) + 64 = 128 \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Resposta: A

2. **(MODELO ENEM)** – Na figura seguinte, o quadrado ABCD tem lado de medida 10 cm. Sabe-se que AE = AF e que as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$ estão na razão de 1 para 4. A área da região sombreada é, em centímetros quadrados:

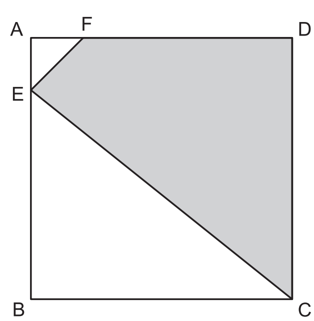
a) 63

b) 59

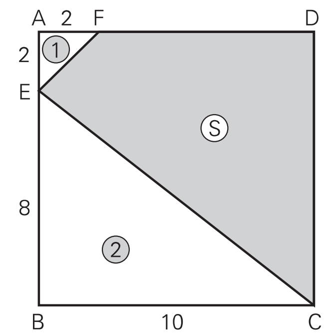
c) 64

d) 70

e) 58



Resolução



$$S = S_{quadrado} - S_1 - S_2 \Leftrightarrow S = 10^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{10 \cdot 8}{2} \Rightarrow S = 58$$

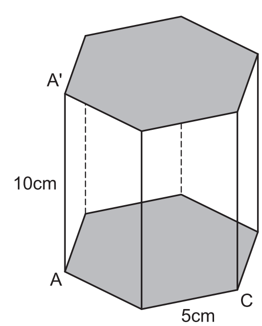
Resposta: E

Módulo 20 – Prismas

3. **(UNICAMP)** – A figura abaixo apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma.

b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos A, C e A'.

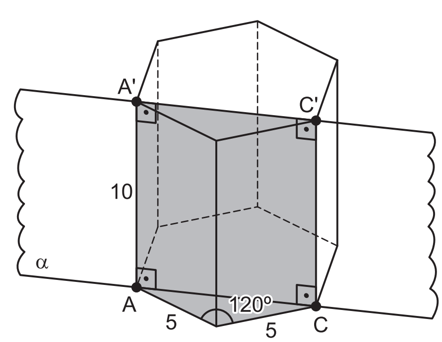


Resolução

a) O volume do prisma é dado pelo produto entre a área do polígono da base e a sua altura. Assim, o seu volume V, em centímetros cúbicos, é tal que:

$$V = \left(6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 10 \Leftrightarrow V = 375\sqrt{3}$$

b)



A secção desse prisma pelo plano α, que passa pelos pontos A, C e A', é o retângulo ACC'A', cuja altura $\overline{AA'}$ mede 10 cm e cuja base $\overline{CA}$ tem a sua medida em centímetros dada por:

$AC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, \cos 120°} \Leftrightarrow AC = 5\sqrt{3}$

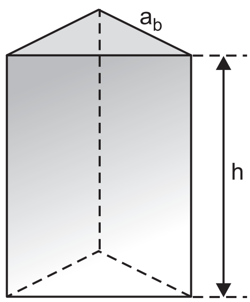
Assim, a área S, em centímetros quadrados, dessa secção é dada por: $S = AC \,.\, AA' \Leftrightarrow S = 5\sqrt{3} \,.\, 10 \Leftrightarrow S = 50\sqrt{3}$

Respostas: a) $375\sqrt{3}$ cm³ b) $50\sqrt{3}$ cm²

4. Um prisma triangular regular tem a aresta da base igual à altura. Calcular a área total do sólido, sabendo-se que a área lateral é 10 m².

Resolução

$A_\ell = 10 \text{ m}^2$ e $a_b = h$



1º) A base é triângulo equilátero:

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 3 \,.\, a_b \,.\, h \Rightarrow A_\ell = 3a_b^2 \\ A_\ell = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow a_b^2 = \frac{10}{3}$$

2º) Área da base: $A_b = \dfrac{a_b^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \dfrac{10\sqrt{3}}{12}$

3º) $A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 10 + 2 \,.\, \dfrac{10\sqrt{3}}{12}$

Resposta: $A_t = 10\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ m²

Módulo 21 – Casos Particulares de Prismas

5. **(FUVEST)** – O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimentos **a**. Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta $\overline{AE}$, então a distância do ponto M ao centro do quadrado ABCD é igual a

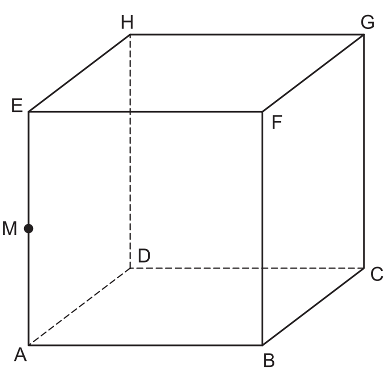
a) $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$

b) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

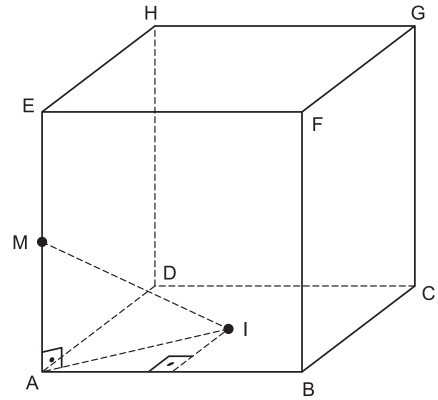
c) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

d) $a\sqrt{3}$

e) $2a\sqrt{3}$



Resolução



1º) Se I é o centro do quadrado, então $AI = \dfrac{a}{2} \,.\, \sqrt{2}$

2º) Se M é o ponto médio de AE, então $AM = \dfrac{a}{2}$

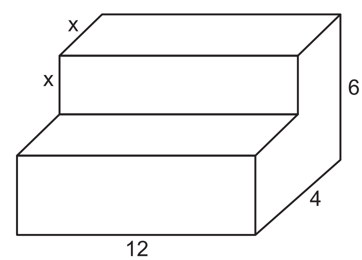
3º) Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo MAI, temos

$(MI)^2 = (AM)^2 + (AI)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (MI)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2} \,.\, \sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Resposta: C

6. **(MACKENZIE)** – A figura representa a maquete de uma escada que foi construída com a retirada de um paralelepípedo reto-retângulo, de outro paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 12, 4 e 6. O menor volume possível para essa maquete é



a) 190

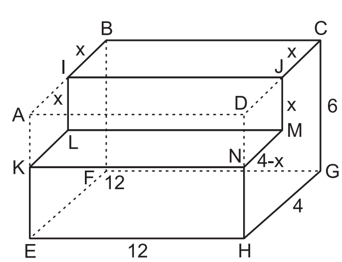
b) 180

c) 200

d) 194

e) 240

Resolução



O volume do sólido é o volume do paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH menos o volume do paralelepípedo reto-retângulo AIJDKLMN. As dimensões do primeiro são 12, 4 e 6. As dimensões do segundo são 12, (4 – x) e x. Assim,

$V = 12 \,.\, 4 \,.\, 6 - 12 \,.\, (4 - x) \,.\, x = 12x^2 - 48x + 288.$

Esse volume é mínimo para $x = \dfrac{-(-48)}{2 \,.\, 12} = 2$

Desta forma, $V_{min} = 12 \,.\, 2^2 - 48 \,.\, 2 + 288 = 240$

Resposta: E

Módulo 22 – Pirâmide

7. **(FGV)** – Uma pirâmide cuja base é um quadrado de diagonal igual a $2\alpha\sqrt{2}$ cm tem o mesmo volume de um prisma cuja base é um quadrado de lado αcm. A razão entre as alturas do prisma e da pirâmide é:

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{3}{\alpha}$ e) 4α

Resolução

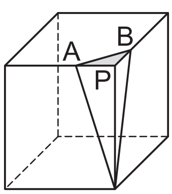
Sejam h_{Pr} e h_{Pi} as alturas do prisma e da pirâmide, respectivamente. Como os dois sólidos têm o mesmo volume, temos:

$$\alpha^2 \cdot h_{PR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\alpha\sqrt{2})^2}{2} \cdot h_{Pi} \Leftrightarrow h_{PR} = \frac{4}{3} \cdot h_{Pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_{PR}}{h_{Pi}} = \frac{4}{3}$$

Resposta: A

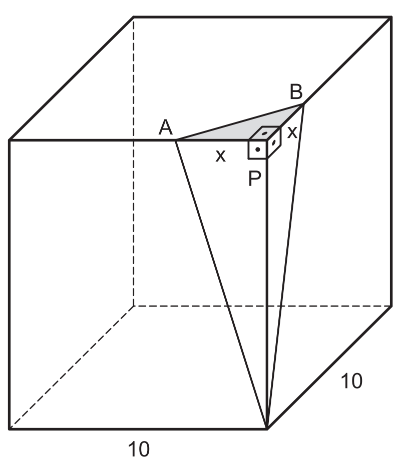
8. **(FGV)** – Um cubo de aresta de 10 m de comprimento deve ser seccionado como mostra a figura, de modo que se obtenha uma pirâmide cuja base APB é triangular isósceles e cujo volume é 0,375% do volume do cubo.



Cada um dos pontos A e B dista de P

a) 5,75 m. b) 4,25 m. c) 3,75 m.
d) 1,5 m. e) 0,75 m.

Resolução



Seja x cm a distância dos pontos A e B até o ponto P.

O volume do cubo, em metros cúbicos, é: $V_{cubo} = 10^3 = 1000$

O volume da pirâmide, em metros cúbicos, é:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x \cdot x}{2} \cdot 10 = \frac{5x^2}{3}$$

Como $V_{pirâmide} = 0{,}375\% \cdot V_{cubo}$, temos:

$$\frac{5x^2}{3} = \frac{0{,}375}{100} \cdot 1000 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{100} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1{,}5$, pois x é positivo.

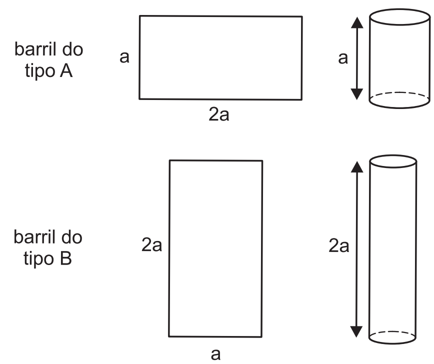
Resposta: D

Módulo 23 – Cilindro de Base Circular

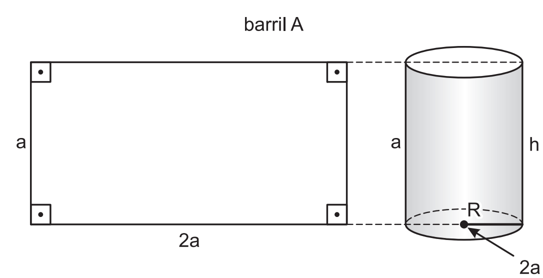
9. **(FUVEST)** – Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir.

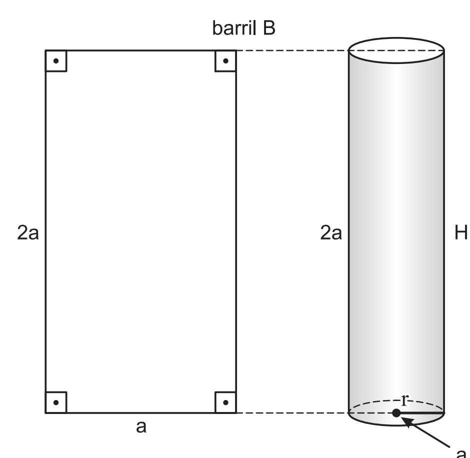
Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

a) $V_A = 2V_B$ b) $V_B = 2V_A$ c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$ e) $V_B = 4V_A$



Resolução





Sendo h e H as alturas dos barris A e B, respectivamente, têm-se: h = a e H = 2a.

Assim: H = 2h

Sendo R e r os raios das bases dos barris A e B, respectivamente, tem-se:

1) $2\pi R = 2a \Leftrightarrow R = \dfrac{a}{\pi}$

2) $2\pi r = a \Leftrightarrow r = \dfrac{a}{2\pi}$

Assim: R = 2r

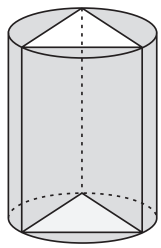
Finalmente, sendo V_A e V_B, respectivamente, os volumes desses barris, tem-se:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi R^2 h}{\pi r^2 H} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{(2r)^2 h}{r^2 2h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Leftrightarrow V_A = 2V_B$$

Resposta: A

10. **(UNESP)** – Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência. A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável.



Determine o volume dessa região. Para os cálculos finais, considere as aproximações $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Resolução

Sejam:

I) ℓ a medida, em centímetros, do lado do triângulo equilátero, que serve de base para o prisma.

II) r a medida, em centímetros, do raio do círculo que serve de base para o cilindro.

III) h a altura, em centímetros, do prisma e do cilindro.

O volume V, da região entre o prisma e o cilindro é dado, em centímetros cúbicos, por:

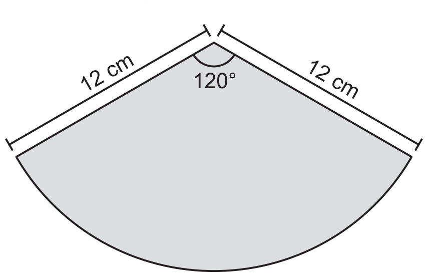
$$V = \pi r^2 h - \frac{\ell^2 . \sqrt{3}}{4} . h \text{, onde: } r = 5, h = 12 \text{ e } \ell = r\sqrt{3}$$

$$\text{Assim: } V = 3 . 25 . 12 - \frac{25.3.1{,}7}{4} . 12 = 900 - 382{,}5 = 517{,}5$$

Resposta: 517,5 cm³

Módulo 24 – Cone circular

11. **(UNICENTRO-PR)**

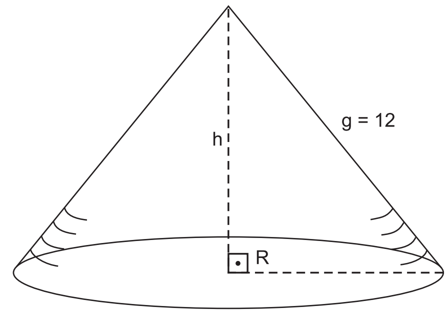


A figura anterior representa a superfície lateral de um cone planificado de altura igual a:

a) $4\sqrt{3}$ cm b) $5\sqrt{3}$ cm c) $7\sqrt{5}$ cm

d) $8\sqrt{2}$ cm e) $10\sqrt{2}$ cm

Resolução



1) $2 . \pi . R = \frac{120°}{360°} . 2 . \pi . 12 \Leftrightarrow R = \frac{1}{3} . 12 \Leftrightarrow R = 4$

2) $h^2 + R^2 = g^2$

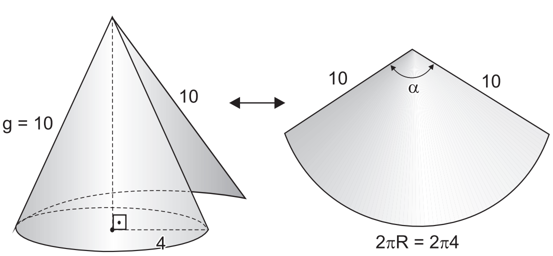
Assim, $h^2 + 4^2 = 12^2 \Leftrightarrow h^2 = 128 \Leftrightarrow h = \sqrt{64 . 2} \Leftrightarrow h = 8\sqrt{2}$

Resposta: D

12. A geratriz de um cone circular reto mede 10 m e o raio da base 4 m. A medida do ângulo do setor circular obtido, quando se desenvolve a superfície lateral desse cone, é igual a:

a) 30° b) 36° c) 72° d) 144° e) 180°

Resolução



I) Cálculo da ângulo central α (em radianos) do setor obtido:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{g} = \frac{2 . \pi . 4}{10} = \frac{4\pi}{5}$$

II) Conversão em graus:

$$\alpha = \frac{4\pi}{5} \text{rad} = \frac{4}{5} . 180° = 4 . 36° = 144°$$

Resposta: D

EXERCÍCIOS-TAREFA

Módulo 19 – Polígonos Regulares

1. **(MACKENZIE)** – Se **p** é o perímetro de um triângulo equilátero inscrito num círculo, a área do círculo é:

a) $\frac{\pi p^2}{27}$ b) $\frac{\pi p^2}{9}$ c) $\frac{\pi p^2 \sqrt{3}}{27}$ d) $\frac{\pi p^2}{3}$ e) πp^2

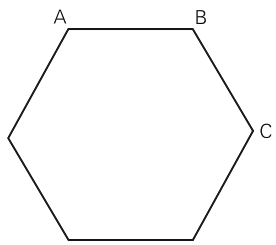
2. **(USF)** – Considere um triângulo equilátero cuja área é numericamente igual ao perímetro. O apótema desse triângulo mede, em centímetros:

a) $2\sqrt{3}$ b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{2}$ c) 2 d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

3. **(PUCCAMP)** – Considere-se o hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede 12 cm. A medida do apótema desse hexágono, em centímetros, é:

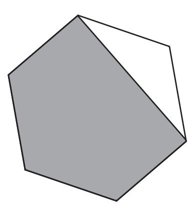
a) $6\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

4. **(FUVEST)** – Os pontos **A**, **B** e **C** são vértices consecutivos de um hexágono regular de área igual a 6. Qual a área do triângulo ABC?



a) 1
b) 2
c) 3
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$

5. **(MACKENZIE)** – Se o hexágono regular da figura tem área 2, a área do pentágono assinalado é:



a) $\dfrac{7}{2}$ b) $\dfrac{7}{3}$ c) $\dfrac{5}{6}$
d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{5}{3}$

6. **(MACKENZIE)** – A área da figura que se obtém eliminando-se do hexágono de lado 2 a sua intersecção com os 6 círculos de raios unitários e centros nos vértices do hexágono é:

a) $6\sqrt{3} - 2\pi$ b) $6\sqrt{6} - \pi$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{3}\pi$
d) $6(\sqrt{3} - \pi)$ e) $3\sqrt{6} - 2\pi$

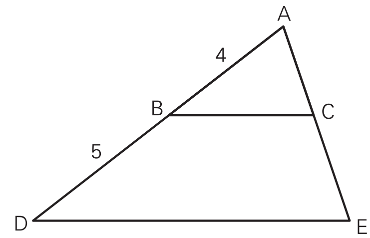
7. **(ITA)** – A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{3}{8}$ e) $\dfrac{1}{4}$

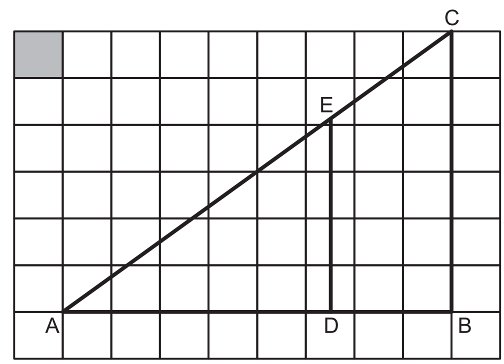
8. **(UNICAMP)** – Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm^2. Calcule:

a) O comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia.
b) A área da superfície queimada.

9. **(FUVEST)** – Na figura, BC é paralelo a DE, AB = 4 e BD = 5. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio BCDE.

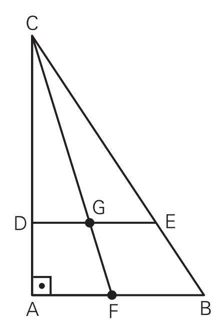


10. **(FUVEST)** – No papel quadriculado da figura abaixo, adota-se como unidade de comprimento o lado do quadrado hachurado. $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Para que a área do triângulo ADE seja a metade da área do triângulo ABC, a medida de $\overline{AD}$, na unidade adotada, é:



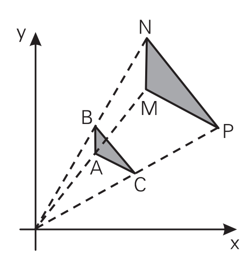
a) $4\sqrt{2}$ b) 4 c) $3\sqrt{3}$
d) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

11. **(FUVEST)** – Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, **F** é um ponto de $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{CF}$ intercepta $\overline{DE}$ no ponto **G**, com CG = 4 e GF = 2. Assim, a área do triângulo CDE é:



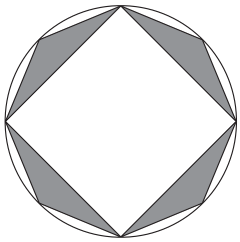
a) $\dfrac{16}{3}$ b) $\dfrac{35}{6}$ c) $\dfrac{39}{8}$
d) $\dfrac{40}{9}$ e) $\dfrac{70}{9}$

12. **(FUVEST)** – Na figura, A = (3; 4); M = (9; 12); AB // MN e AC // MP. A área do triângulo ABC é 8. A área do triângulo MNP é:



a) 8/9 b) 8/3
c) 24 d) $36\sqrt{3}$
e) 72

13. **(MACKENZIE)** – Na figura, um octógono regular e um quadrado estão inscritos na circunferência de raio $r = \sqrt{2}$. A área da região sombreada é



a) $4 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$ c) $\dfrac{4 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{5}$

d) $\dfrac{8\sqrt{2}}{7}$ e) $\dfrac{\sqrt{2} + 11}{8}$

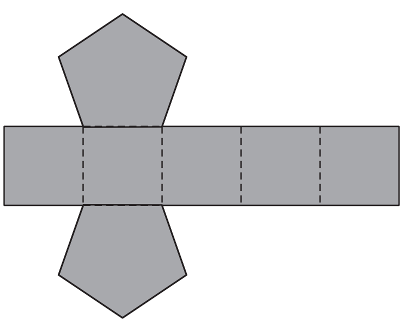
14. **(UNICAMP)** – Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular cujo lado mede 1,5 cm. Calcule:

a) O comprimento de cada lado do triângulo.

b) A razão entre as áreas do hexágono e do triângulo.

Módulo 20 – Prismas

1. **(VUNESP-SP)** – Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura a seguir, obteremos uma figura espacial cujo nome é:



a) pirâmide de base pentagonal
b) paralelepípedo
c) octaedro
d) tetraedro
e) prisma

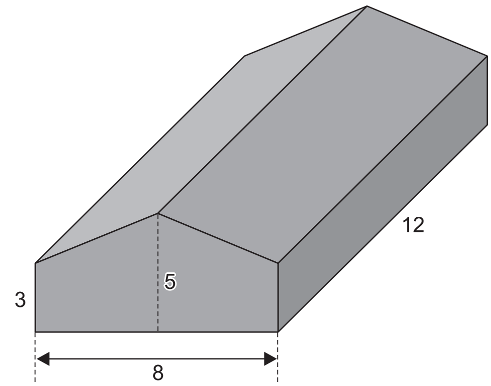
2. **(PUC)** – A base de um prisma reto é um triângulo de lados que medem 5 m, 5 m e 8 m, e a altura do prisma tem 3 m. O volume desse prisma, em metros cúbicos, é igual a:
a) 12 b) 24 c) 36
d) 42 e) 60

3. **(PUC)** – Tem-se um prisma reto de base hexagonal cuja altura é $\sqrt{3}$ e cujo raio do círculo, que circunscreve a base, é 2. A área total desse prisma é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) 30 d) $10\sqrt{2}$ e) 8

4. **(UNIUBE-MG)** – Um prisma reto de base quadrada tem 3 m de altura e área total de 80 m^2. O volume desse prisma é igual a:
a) 24 m^3 b) 48 m^3 c) 108 m^3 d) 192 m^3 e) 300 m^3

5. **(VUNESP-SP)** – O volume do ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é:



a) 288 b) 384 c) 480 d) 360 e) 768

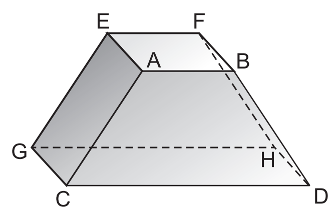
6. **(FUVEST-SP)** – Na figura a seguir:

a) ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5.

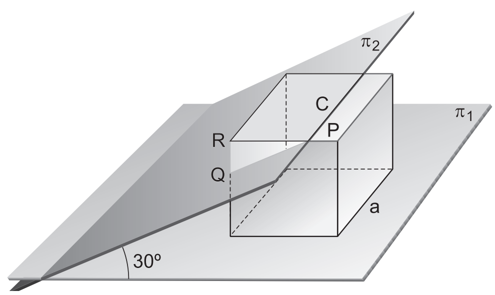
b) Os trapézios estão em planos paralelos, cuja distância é 3.

c) As retas AE, BF, CG e DH são paralelas.

Calcule o volume do sólido.



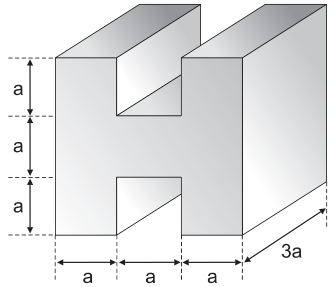
7. **(UnB-DF)** – Na figura a seguir, é dado um cubo de $8\sqrt{3}$ cm de aresta, cuja base está sobre um plano π_1. O plano π_2 é paralelo à reta que contém a aresta **a**, forma com π_1 um ângulo de 30° e "corta" do cubo um prisma C cuja base é o triângulo PQR.
O segmento PQ tem 5 cm de comprimento.
Determinar o volume do prisma C.



8. **(CESGRANRIO)** – De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido, em forma de "H", mostrado na figura.

O volume do sólido é:

a) $27 a^3$
b) $21 a^3$
c) $18 a^3$
d) $14 a^3$
e) $9 a^3$



9. **(ITA-SP)** – Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em centímetros cúbicos, é:

a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) 12   d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$

10. **(UNESP-SP)** – Um prisma reto tem como base um triângulo equilátero de lado **a**. A altura do prisma para que a área da superfície lateral coincida com a área da base é:

a) $\dfrac{a\sqrt{3}}{12}$ b) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ c) $\dfrac{a}{2}$

d) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ e) maior que $\dfrac{a}{6}$

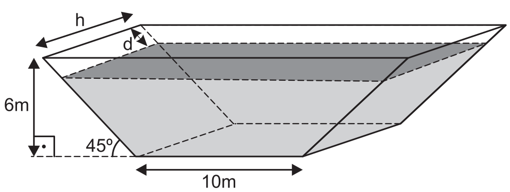
11. **(PUC)** – Se a área da base de um prisma diminiu 10% e a altura aumenta 20%, então o seu volume:

a) aumenta 8%.   b) aumenta 15%.   c) aumenta 108%.
d) diminui 8%.   e) não se altera.

12. **(MACKENZIE-SP)** – A área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes e cujo volume é $54\sqrt{3}$ vale:

a) $18\sqrt{3} + 108$ b) $108\sqrt{3} + 18$ c) $108\sqrt{3} – 18$
d) $54\sqrt{3} + 16$ e) $36\sqrt{3} + 12$

13. **(MACKENZIE)** –

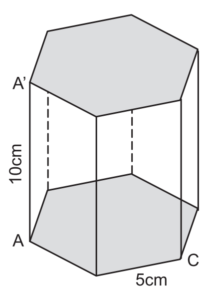


A figura anterior representa uma caçamba com água, na qual as laterais oblíquas e o piso são retangulares e as laterais paralelas têm o formato de trapézios isósceles. Se $d = \sqrt{2}$ m, a razão entre o volume de água e o volume total da caçamba é

a) $\dfrac{17}{25}$ b) $\dfrac{21}{32}$ c) $\dfrac{25}{28}$ d) $\dfrac{17}{28}$ e) $\dfrac{25}{32}$

14. **(MACKENZIE)** – A figura ao lado apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.

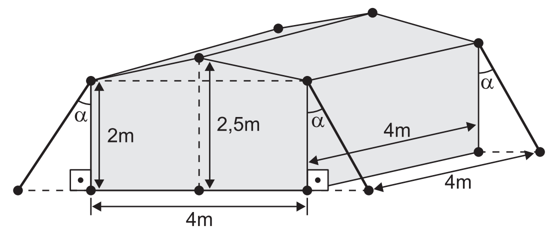
a) Calcule o volume do prisma.
b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos A, C e A'.



15. **(UNESP)** – Com um recipiente de vidro fino transparente na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, que tem como base um quadrado cujo lado mede 15 cm e a aresta da face lateral mede 40 cm, Márcia montou um enfeite de natal. Para tanto, colocou no interior desse recipiente 90 bolas coloridas maciças de 4 cm de diâmetro cada e completou todos os espaços vazios com um líquido colorido transparente. Desprezando-se a espessura do vidro e usando (para facilitar os cálculos) a aproximação $\pi = 3$,

a) dê, em cm^2, a área lateral do recipiente e a área da superfície de cada bola.
b) dê, em cm^3, o volume do recipiente, o volume de cada esfera e o volume do líquido dentro do recipiente.

16. **(UNESP)** – Em um *camping*, sobre uma área plana e horizontal, será montada uma barraca com a forma e as dimensões dadas de acordo com a figura a seguir.



Em cada um dos quatro cantos do teto da barraca será amarrado um pedaço de corda, que será esticado e preso a um gancho fixado no chão, como mostrado na figura.

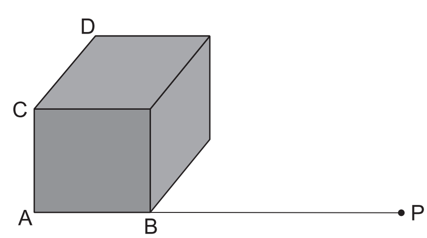
a) Calcule qual será o volume do interior da barraca.
b) Se cada corda formará um ângulo α de 30º com a lateral da barraca, determine, aproximadamente, quantos metros de corda serão necessários para fixar a barraca, desprezando-se os nós. (Use, se necessário, a aproximação $\sqrt{3} = 1{,}73$).

Módulo 21 – Casos Particulares de Prismas

1. **(FUVEST-SP)** – Qual é a distância entre os centros de duas faces adjacentes de um cubo de aresta 4?

a) 2   b) $2\sqrt{2}$ c) 4   d) $4\sqrt{2}$ e) 8

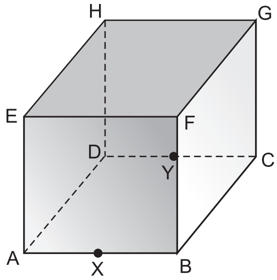
2. **(FUVEST-SP)** – A aresta do cubo abaixo mede 2 e BP = 3. Calcule PC e PD.



3. **(UNICAMP-SP)** – Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa-d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

a) Calcule o comprimento das arestas de referida caixa.
b) Calcule a sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

4. **(FUVEST-SP)** – Na figura, **X** e **Y** são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do cubo. A razão entre o volume do prisma AXFEDYGH e o do cubo é:



a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{5}{6}$

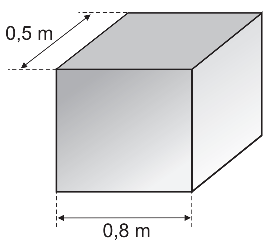
5. **(MACKENZIE-SP)** – Um paralelepípedo retângulo tem 142 cm^2 de área total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60 cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão aritmética, eles valem (em cm):

a) 2, 5, 8 b) 1, 5, 9 c) 12, 20, 28
d) 4, 6, 8 e) 3, 5, 7

6. **(PUC)** – A soma das dimensões **a**, **b**, **c** de um paralelepípedo retângulo é **m** e a diagonal é **d**. Tem-se para área total **S**:

a) $S^2 = m^2 - d^2$ b) $S = m^2 - d^2$ c) $S = m^2 + d^2$
d) S = md e) S = 2 md

7. **(MACKENZIE-SP)** – A figura abaixo representa um reservatório de água totalmente cheio. Após terem sido consumidos 12 litros, o nível d'água terá baixado de:



a) 3 dm
b) 3 cm
c) 17 cm
d) 17 dm
e) 0,17 mm

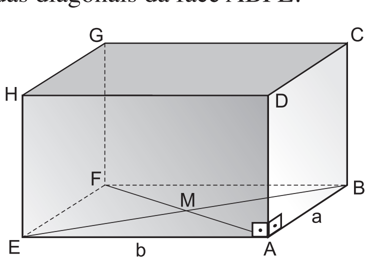
8. **(FUVEST-SP)** – O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é 240 cm^3. As áreas de duas de suas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. A área total do paralelepípedo, em cm^2, é:

a) 96 b) 118 c) 236 d) 240 e) 472

9. **(FUVEST-SP)** – Um tanque em forma de paralelepípedo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 m e 1,2 m. Um indivíduo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075 m. Então o volume do indivíduo, em **litros**, é:

a) 66 b) 68 c) 70 d) 72 e) 75

10. **(FUVEST-SP)** – No paralelepípedo reto-retângulo da figura a seguir, sabe-se que AB = AD = a, AE = b e que **M** é a intersecção das diagonais da face ABFE.



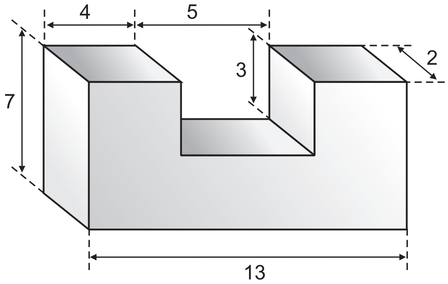
Se a medida de $\overline{MC}$ também é igual a **b**, o valor de **b** será:

a) $\sqrt{2}\,a$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,a$ c) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}\,a$

d) $\sqrt{3}\,a$ e) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}\,a$

11. **(MACKENZIE-SP)** – A área total do sólido a seguir é:

a) 204 b) 206 c) 222 d) 244 e) 262



12. **(FGV)** – O acréscimo de volume do paralelepípedo retângulo de arestas de medidas **a**, **b** e **c**, quando aumentamos cada aresta em 10%, é:

a) 30,0% b) 0,13% c) 33,1% d) 21,0% e) 10,8%

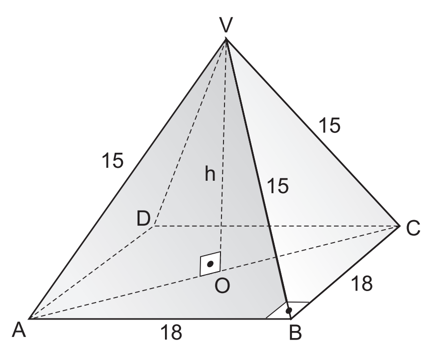
13. **(FGV)** – Uma piscina com o formato de um paralelepípedo retângulo tem dimensões, em metros, iguais a 20 por 8 por h, em que h é a profundidade.
Quando ela está cheia de água até 80% de sua capacidade, o volume de água é 256m^3. Podemos concluir que a medida em metros de h é:

a) Um número racional não inteiro.
b) Um número inteiro.
c) Um número menor que 1,8.
d) Um número maior que 2,2.
e) Um número irracional.

Módulo 22 – Pirâmide

1. **(FATEC-SP)** – As arestas laterais de uma pirâmide reta medem 15 cm, e sua base é um quadrado cujos lados medem 18 cm. A altura dessa pirâmide, em cm, é igual a:

a) $3\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{7}$
c) $2\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{7}$
e) $\sqrt{7}$



2. **(UNIV. AMAZONAS)** – Qual a área total de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo-se que sua altura mede 24 cm e que o apótema da pirâmide mede 26 cm?

a) 1440 cm^2 b) 1540 cm^2 c) 840 cm^2 d) 1400 cm^2

3. **(UNISA-SP)** – O apótema de uma pirâmide regular de base arbitrária tem 15 cm e a aresta lateral, 17 cm; então, a aresta da base mede:

a) 8 cm b) 16 cm c) 14 cm d) 10 cm e) 12 cm

4. **(UNICENTRO-PR)** – Um prisma e uma pirâmide têm, ambos, bases quadradas e mesmo volume. O lado do quadrado da base da pirâmide mede 1 m e o quadrado da base do prisma tem lado 2 m. A razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, respectivamente é:

a) $\dfrac{3}{4}$ b) 12 c) $\dfrac{1}{12}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{4}{3}$

5. **(UNISA-SP)** – Uma pirâmide quadrada tem todas as arestas medindo 2. A sua altura mede:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

6. **(ITA-SP)** – Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45°. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. **(CESGRANRIO)** – O volume da pirâmide de base quadrada, cujas oito arestas têm o mesmo comprimento ℓ, é:

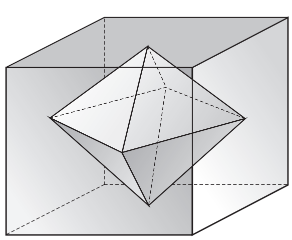
a) $\dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{6}$ c) $\dfrac{\ell^3}{3}$

d) $\dfrac{\ell^3\sqrt{3}}{4}$ e) $\dfrac{\ell^3}{8}$

8. **(FUVEST-SP)** – Qual a altura de uma pirâmide quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{1{,}5}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2{,}5}$ e) $\sqrt{3}$

9. **(UFSCar-SP)** – Os segmentos de reta que unem os pontos centrais das faces adjacentes de um cubo determinam um octaedro (ver figura a seguir). Se a aresta do cubo mede ℓ cm, então o volume do octaedro é igual a:



a) $\dfrac{\ell^3}{8}$ cm³ b) $\dfrac{\ell^3}{4}$ cm³

c) $\dfrac{\ell^3}{5}$ cm³ d) $\dfrac{\ell^3}{7}$ cm³

e) $\dfrac{\ell^3}{6}$ cm³

10. **(SÃO JUDAS-SP)** – O volume de um tetaedro regular, cuja aresta mede 1 cm, em centímetros cúbicos, é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ e) 1

11. **(ESPM-SP)** – A Pirâmide de Quéops tem um volume aproximado de 2.645.000 m³. Segundo Eric von Daniken, no livro *Eram os Deuses Astronautas?*, se multiplicarmos a altura da pirâmide por 1 bilhão, teremos a distância da Terra ao Sol. Calcule a distância (em km), sabendo que a aresta da base tem um valor aproximado de 230 m.

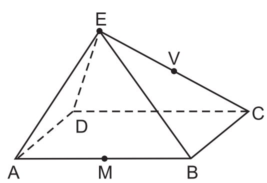
12. **(PUC)** – Um imperador de uma antiga civilização mandou construir uma pirâmide que seria usada como seu túmulo. As características dessa pirâmide são:

1º) Sua base é um quadrado com 100 m de lado.
2º) Sua altura é de 100 m.

Para construir cada parte da pirâmide equivalente a 1000 m³, os escravos, utilizados como mão de obra, gastavam em média 54 dias. Mantida essa média, o tempo necessário para a construção da pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de:

a) 40 anos. b) 50 anos. c) 60 anos.
d) 90 anos. e) 150 anos.

13. **(FUVEST)** – A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

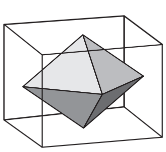


a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3

14. **(MACKENZIE)** – Uma barraca de lona tem forma de uma pirâmide regular de base quadrada com 1 metro de lado e altura igual a 1,5 metro. Das alternativas abaixo, a que indica a menor quantidade suficiente de lona, em m², para forrar os quatro lados da barraca é

a) 2 b) 2,5 c) 4,5 d) 3,5 e) 4

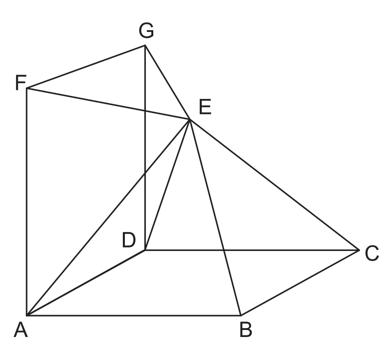
15. **(FGV)** – Um octaedro regular está inscrito num cubo de aresta com 4 cm de comprimento, isto é, seus vértices coincidem com o centro de cada face do cubo, como mostra a figura. O volume do octaedro é



a) $\dfrac{64}{3}$ cm³. b) $\dfrac{32}{3}$ cm³. c) $\dfrac{16}{3}$ cm³.

d) $\dfrac{8}{3}$ cm³. e) $\dfrac{4}{3}$ cm³.

16. **(UFSCar)** – As bases ABCD e ADGF das pirâmides ABCDE e ADGFE são retângulos e estão em planos perpendiculares. Sabe-se também que ABCDE é uma pirâmide regular de altura 3 cm e apótema lateral 5 cm, e que ADE é face lateral comum às duas pirâmides.



Se a aresta AF é 5% maior que a aresta AD, então o volume da pirâmide ADGFE, em cm³, é

a) 67,2.
b) 80.
c) 89,6.
d) 92,8.
e) 96.

Módulo 23 – Cilindro de Base Circular

1. **(UNISA-SP)** – Se a altura de um cilindro circular reto é igual ao diâmetro da base, então a razão entre a área total e a área lateral do cilindro é igual a:

a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) $2\pi R^2$ d) 2 e) 1

2. **(UNIVEST-SP)** – Um cilindro circular reto tem volume igual a 64 dm^3 e área lateral igual a 400 cm^2. O raio da base mede:

a) 3,2 dm b) 24 dm c) 32 dm d) 48 dm e) 64 dm

3. **(UNIMEP-SP)** – Faz-se girar um quadrado de lado 1 cm em torno de um de seus lados. A área total do sólido resultante vale:

a) 4π cm^2 b) π cm^2 c) 8π cm^2
d) $\frac{\pi}{2}$ cm^2 e) 2π cm^2

4. **(PUC)** – Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

a) 0,3768 b) 3,768 c) 0,03768
d) 37,68 e) 0,003768

5. **(PUC)** – As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual é o volume do cilindro?

a) 1000π b) 750π c) 500π
d) 250π e) 100π

6. **(UELON-PR)** – Considere um cilindro circular reto que tem 4 cm de altura. Aumentando-se indiferentemente o raio da base ou a altura desse cilindro em 12 cm, obtêm-se, em qualquer caso, cilindros de volumes iguais. A medida, em centímetros, do raio do cilindro original é:

a) 12 b) 10 c) 8 d) 6 e) 4

7. **(UNIMEP-SP)** – O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos, cuja altura é $\frac{1}{4}$ da altura da lata e cujo raio da base é $\frac{1}{3}$ do raio da base da lata. O número de potes necessários é:

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

8. **(FEI-SP)** – Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm num determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

a) 1,5 cm b) 2 cm c) 2,5 cm
d) 4,5 cm e) 5 cm

9. **(FATEC-SP)** – Sabe-se que um cilindro de revolução de raio igual a 10 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo, a uma distância de 6 cm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é:

a) 1250π b) $1260\pi^2$ c) $6,25\pi^2$
d) 625π e) $625\pi^2$

10. **(FEI-SP)** – Um cilindro reto com diâmetro da base igual a 6 cm é seccionado por um plano oblíquo à mesma, que determina no cilindro "alturas" entre 2 cm e 8 cm, como indicado na figura. O volume do tronco resultante, cm^3, é:

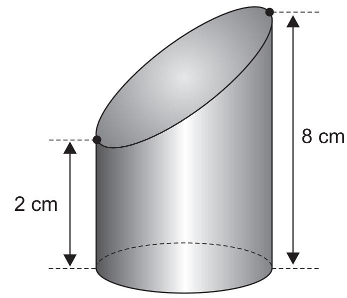
a) $7\sqrt{3}\,\pi$

b) 30π

c) $8\sqrt{3}\,\pi$

d) 45π

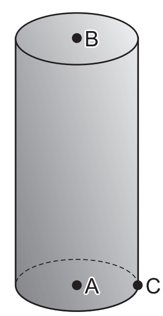
e) $10\sqrt{3}\,\pi$



11. **(FGV)** – Um cilindro de ferro de raio r e altura h está totalmente imerso na água contida em um recipiente cilindrico de raio interno R, com R > r. Ao retirarmos o cilindro de ferro, o nível da água baixará de:

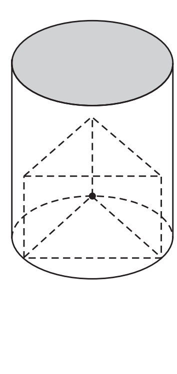
a) $\frac{Rh}{r}$ b) $\frac{rh}{R}$ c) $\left(\frac{r}{R}\right)^2 h$ d) h e) $\pi\left(\frac{r}{R}\right)^2 h$

12. **(FUVEST-SP)** – Na figura ao lado, tem-se um cilindro circular reto, em que A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento $\overline{BC}$, cujas distâncias a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são ambas iguais a *d*, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de *d*.



13. **(UNESP)** – Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm.
Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:
a) o volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao triplo do raio;
b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

14. **(MACKENZIE)** – Num cilindro reto de altura $6\sqrt{3}$ completamente cheio de água, foi imerso um prisma triangular regular de altura 2π, conforme a figura a seguir. A razão entre o volume de água que transbordou e o volume do cilindro é



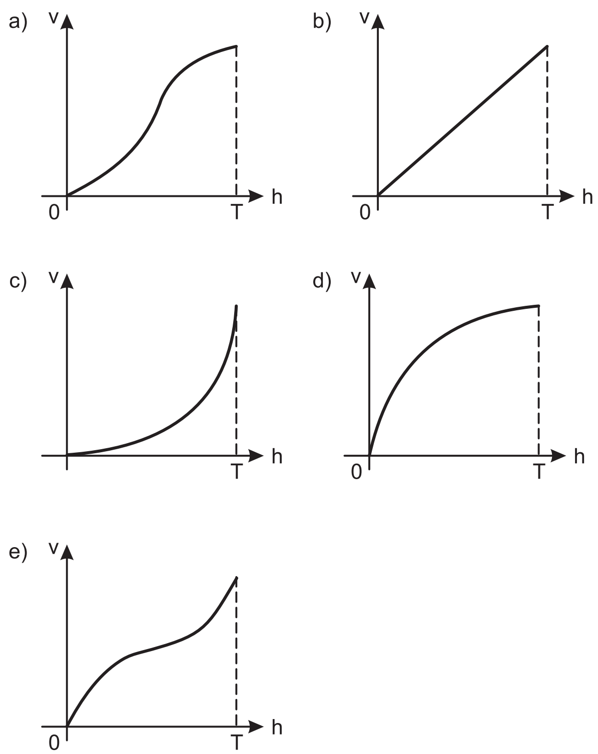
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

15. **(MACKENZIE)** – Uma lata tem forma cilíndrica com diâmetro da base e altura iguais a 10 cm. Do volume total, $\frac{4}{5}$ é ocupado por leite em pó. Adotando-se $\pi = 3$, o volume de leite em pó, em cm^3, contido na lata é

a) 650 b) 385 c) 600 d) 570 e) 290

16. **(UFPR)** – O tanque de combustível de um posto de gasolina possui o formato de um cilindro circular reto e está instalado de modo que as bases estão na vertical. Para saber o volume de combustível presente no tanque, o funcionário utiliza uma régua graduada e só necessita observar a altura alcançada pelo combustível dentro do tanque. Essa régua foi confeccionada com base no estudo da função que relaciona o volume v com a altura h, desde zero até a altura total T.

Qual dos gráficos a seguir mais se aproxima do gráfico dessa função?

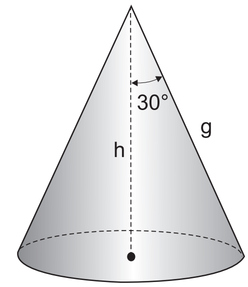


Módulo 24 – Cone circular

1. **(FATEC-SP)** – A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:

a) 64π b) 48π c) 32π
d) 16π e) 8π

2. **(UEBA)** – Na figura, está representado um cone cuja geratriz **g** mede $6\sqrt{3}$ cm, e o ângulo que ela faz com a reta que contém a altura do cone mede 30°. O volume desse sólido, em cm^3, é:



a) 9π
b) 27π
c) 54π
d) 81π
e) 243π

3. **(MACKENZIE-SP)** – A área lateral de um cone equilátero que tem 16π de área da base vale:

a) 32π b) 2π c) 8π d) 4π e) 16π

4. **(UFSCar)** – Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18 cm e 6 cm, respectivamente. A razão de seus volumes é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

5. **(FUVEST-SP)** – Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual a distância do bico do chapéu à mesa?

a) $3\sqrt{10}$ b) 10 cm c) $10\sqrt{3}$ cm
d) 20 cm e) $20\sqrt{2}$ cm

6. **(FUVEST-SP)** – Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

a) 144° b) 192° c) 240° d) 288° e) 336°

7. **(UNISANTOS-SP)** – Com um semicírculo de papel, com raio igual a 20 cm, um pipoqueiro faz saquinhos para vender pipocas, com a forma de cone circular reto. O volume desses saquinhos, usando $\pi \cong 3$, é mais próximo de:

a) 1100 cm^3 b) 1300 cm^3 c) 1500 cm^3
d) 1700 cm^3 e) 2000 cm^3

8. **(ITA-SP)** – O desenvolvimento da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de raio **a** e ângulo central igual a 60°. O volume deste cone é:

a) $\frac{a^2}{6}\pi$ b) $\pi\sqrt{35}\,a^3$ c) $\frac{1}{3}\pi a^3$

d) $\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3$ e) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3\sqrt{35}$

9. **(UNISA-SP)** – O volume de um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo e isósceles de hipotenusa igual a 1, em torno de um eixo que contém a hipotenusa, é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{24}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

10. **(UNIUBE-MG)** – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2 e um dos ângulos mede 60°. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtém-se um cone cujo volume é igual a:

a) π b) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ c) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$

d) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$ e) $\dfrac{\pi}{3}$

11. **(MACKENZIE-SP)** – Ao se girar um triângulo retângulo de lados 3 m, 4 m e 5 m em torno de sua hipotenusa, obtém-se um sólido cujo volume, em m^3, é igual a:

a) 12π b) 16π c) 25π

d) 30π e) $\dfrac{48\pi}{5}$

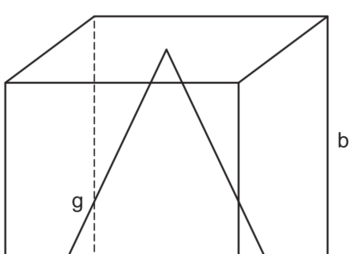
12. **(ITA-SP)** – Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$ e) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

13. **(FUVEST)** – Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é 3/2 e o volume do cone é π.

Então, o comprimento g da geratriz do cone é



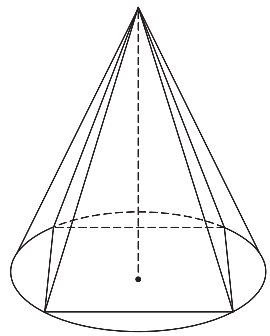
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{11}$

14. **(MACKENZIE)** – Considere o triângulo isósceles ABC, tal que AB = BC = 10 cm e CA = 12 cm. A rotação desse triângulo em torno de um eixo que contém o lado AB gera um sólido cujo volume, em centímetros cúbicos, é

a) 256π b) $298{,}6\pi$ c) $307{,}2\pi$

d) 316π e) $328{,}4\pi$

15. **(UFOP)** – Uma pirâmide reta de base quadrada está inscrita num cone reto de raio da base $2\sqrt{2}$ cm.

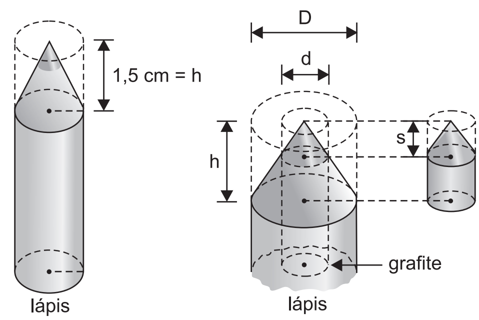


A relação entre os volumes do cone e da pirâmide, nesta ordem, é:

a) $\dfrac{3\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$

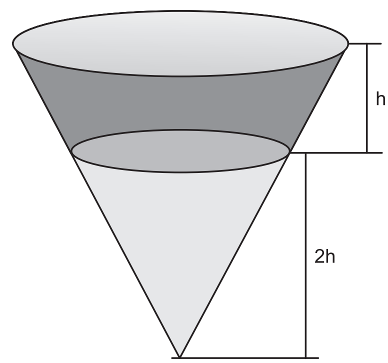
c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{6}$

16. **(UNIFESP)** – A figura representa um lápis novo e sua parte apontada, sendo que D, o diâmetro do lápis, mede 10 mm; d, o diâmetro da grafite, mede 2 mm e h, a altura do cilindro reto que representa a parte apontada, mede 15 mm. A altura do cone reto, representando a parte da grafite que foi apontada, mede s mm.



a) Calcule o volume do material (madeira e grafite) retirado do lápis.
b) Calcule o volume da grafite retirada.

17. (**UFPE**) – Um recipiente na forma de um cone reto invertido está preenchido com água e óleo, em duas camadas que não se misturam. A altura, medida na vertical, da camada de óleo é metade da altura da parte de água, como ilustrado a seguir.



Se o volume do recipiente é 54 cm^3, qual o volume da camada de óleo?

a) 32 cm^3 b) 34 cm^3 c) 36 cm^3

d) 38 cm^3 e) 40 cm^3