EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FRENTE 1 – ÁLGEBRA

MÓDULO 49

PERMUTAÇÕES

1. Considerando os anagramas da palavra DODECAEDRO calcule:
a) quantos são no total;
b) quantos começam por DODE (nessa ordem);
c) quantos têm as vogais juntas e as consoantes também juntas.

RESOLUÇÃO:

a) $P_{10}^{(3,\,2,\,2)} = \dfrac{10!}{3!\;2!\;2!} = 151\,200$

b) Os que começam por DODE (nessa ordem) são os anagramas de CAEDRO, que totalizam $P_6 = 6! = 720$.

c) As consoantes DDCDR podem ser dispostas juntas de

$P_5^{(3)} = \dfrac{5!}{3!} = 20$ maneiras diferentes e as vogais OEAEO podem ser dispostas juntas de $P_5^{(2,2)} = \dfrac{5!}{2!\;2!} = 30$ maneiras diferentes.

Resulta, portanto, 20 . 30 . 2 = 1200.

Respostas: a) 151 200   b) 720   c) 1200

2. **(UFMG)** – Para montar a programação de uma emissora de rádio, o programador musical conta com 10 músicas distintas, de diferentes estilos, assim agrupadas: 4 de MPB, 3 de *Rock* e 3 de *Pop*.
Sem tempo para fazer essa programação, ele decide que, em cada um dos programas da emissora, serão tocadas, de forma aleatória, todas as 10 músicas.
Assim sendo, é correto afirmar que o número de programas distintos em que as músicas vão ser tocadas agrupadas por estilo é dado por

a) $4! \times 3! \times 3! \times 3!$ b) $\dfrac{10!}{7!}$

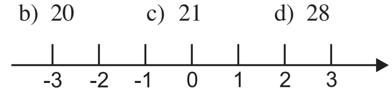
c) $4! \times 3! \times 3!$ d) $\dfrac{10!}{4!}$

RESOLUÇÃO:
MPB: $P_4 = 4!$
***Rock*: $P_3 = 3!$**
***Pop*: $P_3 = 3!$**
Estilos: $P_3 = 3!$
$P_4 \,.\, P_3 \,.\, P_3 \,.\, P_3 = 4!\;3!\;3!\;3!$
Resposta: A

3. **(UnB)** – Julgue a seguinte assertiva: Considere que um vagão do trem Maglev tenha 12 bancos individuais, que serão ocupados por 12 passageiros. Dos 12 bancos, 6 são de frente para o sentido de deslocamento do trem, e 6 de costas. Se, dos 12 passageiros, 3 preferirem sentar-se de frente, 4 de costas, e os demais não manifestarem preferência, então o número de maneiras de acomodar os passageiros, respeitadas as suas preferências, é superior a 2×120^3.

RESOLUÇÃO:
De acordo com a preferência dos passageiros, o número de maneiras de acomodar os passageiros é:
$A_{6,3} \,.\, A_{6,4} \,.\, P_5 = (6 \,.\, 5 \,.\, 4) \,.\, (6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3) \,.\, (5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) =$
$= 120 \,.\, 3 \,.\, 120 \,.\, 120 = 3 \,.\, 120^3 > 2 \,.\, 120^3$
Resposta: Certa

4. Uma partícula desloca-se sobre o eixo de origem O, da figura abaixo, em que a unidade utilizada é o centímetro (cm). Se em cada movimento ela percorre 1 cm, de quantas maneiras diferentes essa partícula pode partir da origem e retornar a ela realizando exatamente seis movimentos?
a) 15   b) 20   c) 21   d) 28   e) 35

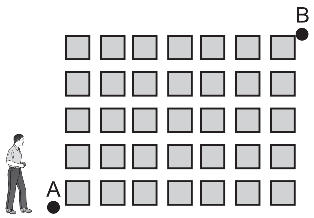


RESOLUÇÃO:
Para partir da origem e retornar a ela com 6 movimentos, a partícula deve realizar 3 movimentos para a direita (D) e 3 movimentos para a esquerda (E). O total de maneiras é igual ao número de anagramas da palavra DDDEEE que é $P_6^{(3,3)} = \dfrac{6!}{3!\;3!} = 20$.

Resposta: B

5. **(UNESP)** – A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B é:

a) 95 040 b) 40 635 c) 924
d) 792 e) 35



RESOLUÇÃO:
Qualquer percurso para ir de A até B deve ter, sempre, *cinco* trechos “de baixo para cima” e *sete* trechos “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes é igual, portanto, ao número de permutações desses 12 trechos, lembrando que 5 são iguais (↑) e os outros 7 também (→). Logo

$$P_{12}^{5,7} = \frac{12!}{5!\,.\,7!} = \frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8\,.\,7!}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,7!} = 792$$

Resposta: D

MÓDULO 50

COMBINAÇÕES SIMPLES E ARRANJOS E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

1. **(UNICAMP-2012)** – O grêmio estudantil do Colégio Alvorada é composto por 6 alunos e 8 alunas. Na última reunião do grêmio, decidiu-se formar uma comissão de 3 rapazes e 5 moças para a organização das olimpíadas do colégio. De quantos modos diferentes pode-se formar essa comissão?

a) 6720. b) 100800. c) 806400. d) 1120.

RESOLUÇÃO:
O número total de comissões é

$$C_{6,3}\,.\,C_{8,5} = \frac{6!}{3!3!}\,.\,\frac{8!}{5!3!} = 20\,.\,56 = 1120$$

Resposta: D

2. **(FGV)** – As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão.
Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?

a) 26 b) 24 c) 22 d) 30 e) 28

RESOLUÇÃO:
Cada salada de frutas é feita com *pelo menos* 2 (das 5) frutas.
Então, o total de saladas de frutas T é dado por:

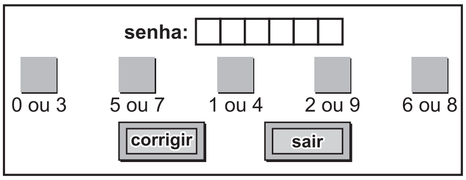
$$T = C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$$

$$T = \frac{5!}{2!\,.\,3!} + \frac{5!}{3!\,.\,2!} + \frac{5!}{4!\,.\,1!} + \frac{5!}{5!\,.\,0!}$$

T = 10 + 10 + 5 + 1 = 26 tipos

Resposta: A

3. **(MACKENZIE)** –



Ao utilizar o caixa eletrônico de um banco, o usuário digita sua senha numérica em uma tela como mostra a figura. Os dez algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) são associados aleatoriamente a cinco botões, de modo que a cada botão correspondam dois algarismos, indicados em ordem crescente. O número de maneiras diferentes de apresentar os dez algarismos na tela é

a) $\frac{10!}{2^5}$ b) $\frac{10!}{5}$ c) $2^5\,.\,5!$ d) $25\,.\,10!$ e) $\frac{10!}{2}$

RESOLUÇÃO:

escolha dos dois primeiros números ↓ **escolha dos dois números seguintes ↓**

$$\binom{10}{2}\,.\,\binom{8}{2}\,.\,\binom{6}{2}\,.\,\binom{4}{2}\,.\,\binom{2}{2} =$$

$$= \frac{10!}{8!2!}\,.\,\frac{8!}{6!2!}\,.\,\frac{6!}{4!2!}\,.\,\frac{4!}{2!2!}\,.\,\frac{2!}{2!0!} = \frac{10!}{2^5}$$

Resposta: A

4. **(UFJF-2012)** – Dado um grupo com 3 mulheres e 8 homens, obtenha o número de filas distintas com 5 pessoas, contendo em cada fila exatamente 2 mulheres.

RESOLUÇÃO:
As duas mulheres podem ser escolhidas de $C_{3,2}$ modos diferentes e os três homens de $C_{8,3}$ maneiras distintas, resultando $C_{3,2} \cdot C_{8,3} = 3 \cdot 56 = 168$ maneiras diferentes de serem formados grupos com duas mulheres e três homens.
Permutando as cinco pessoas em cada um desses grupos resulta que o número de filas distintas é $C_{3,2} \cdot C_{8,3} \cdot P_5 = 20160$
Resposta: 20 160

MÓDULO 51

COMBINAÇÕES SIMPLES E ARRANJOS E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

1. Seis crianças, sendo três meninos e três meninas, vão brincar de roda. Calcule:
a) de quantas maneiras diferentes a roda poderá ser formada com essas seis crianças;
b) em quantas dessas rodas duas crianças de um mesmo sexo **não** ficam lado a lado;
c) quantas rodas do item **a** existem em que duas determinadas crianças A e B estão sempre juntas.

RESOLUÇÃO:
a) $P_6' = (6-1)! = 5! = 120$
b) $P_3' \cdot P_3 = (3-1)!\ 3! = 2 \cdot 6 = 12$
c) $P_5' \cdot P_2 = (5-1)!\ 2! = 24 \cdot 2 = 48$
Respostas: a) 120 b) 12 c) 48

2. Cada face de uma pirâmide quadrangular regular deve ser pintada de uma única cor escolhida entre cinco cores diferentes. O número de pirâmides distintas que podem ser assim obtidas é
a) 24 b) 30 c) 48 d) 60 e) 120

RESOLUÇÃO:
A cor da base da pirâmide pode ser escolhida de cinco maneiras diferentes. Para cada uma dessas possibilidades as quatro faces laterais podem ser pintadas de P_4' modos distintos.
Logo, o número de pirâmides que podem ser obtidas é
$5 \cdot P_4' = 5 \cdot (4-1)! = 5 \cdot 6 = 30$
Resposta: B

3. Sabendo-se que o número de combinações completas (com repetição de elementos) de **n** elementos tomados **k** a **k** ($n, k \in \mathbb{N}^*$) é dado por $C^*_{n,k} = C_{n+k-1,k}$ obtenha:
a) $C^*_{7,2}$ b) $C^*_{8,3} - C_{8,3}$

RESOLUÇÃO:
a) $C^*_{7,2} = C_{7+2-1,2} = C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$
b) $C^*_{8,3} - C_{8,3} = C_{8+3-1,3} - C_{8,3} =$
$= C_{10,3} - C_{8,3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 - 56 = 64$
Respostas: a) 28 b) 64

4. **(UNESP)** – Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?
a) 4. b) 6. c) 9. d) 12. e) 15.

RESOLUÇÃO:
$C^*_{3,4} = C_{3+4-1,4} = C_{6,4} = \dfrac{6!}{2!4!} = 15$
Poder-se-iam, também, escrever as 15 soluções possíveis. Representando por C, M e U os sabores chocolate, morango e uva, as soluções são:
- **C C C C, M M M M, U U U U**
- **C C C U, C C C M, M M M C, M M M U, U U U C, U U U M**
- **C C M M, C C U U, M M U U**
- **C C U M, M M U C, U U M C**

Resposta: E

5. Obtenha o número de soluções inteiras e não negativas das equações:
a) $x + y = 3$
b) $x + y + z + w = 6$

RESOLUÇÃO:
a) $C^*_{2,3} = C_{2+3-1,3} = C_{4,3} = 4$
b) $C^*_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = 84$
ou
a) 1 1 + 1 : $P_4^{(3)} = \dfrac{4!}{3!} = 4$
b) 1 1 + 1 + 1 1 + 1 : $P_9^{(6,3)} = \dfrac{9!}{6!\ 3!} = 84$
Respostas: a) 4 b) 84

6. Doze notas de R\$ 50,00 deverão ser distribuídas entre quatro pessoas de modo que cada uma receba no mínimo duas notas. O número de maneiras de se fazer essa distribuição é

a) 21 b) 35 c) 45 d) 50 e) 72

RESOLUÇÃO:

Sejam A, B, C e D os números de notas das 4 pessoas. Então,

$$\begin{cases} A = 2 + x \\ B = 2 + y \\ C = 2 + z \\ D = 2 + w \end{cases} \Rightarrow x + y + z + w + 8 = 12 \Rightarrow x + y + z + w = 4$$

O número de maneiras de se fazer a distribuição é igual ao número de soluções inteiras e não negativas da equação x + y + z + w = 4, isto é,

$C^*_{4;4} = C_{4+4-1,4} = C_{7,4} = 35$ **ou**

$1 + 1 + 1 + 1 \quad P_7^{(4,3)} = \dfrac{7!}{4!\,3!} = 35$

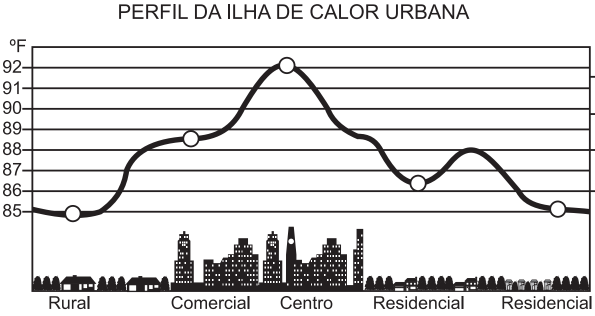
Resposta: B

MÓDULO 52

PROBABILIDADE, DEFINIÇÃO E UNIÃO DE EVENTOS

1. **(ENEM-2012)** – Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

PERFIL DA ILHA DE CALOR URBANA



Fonte: EPA

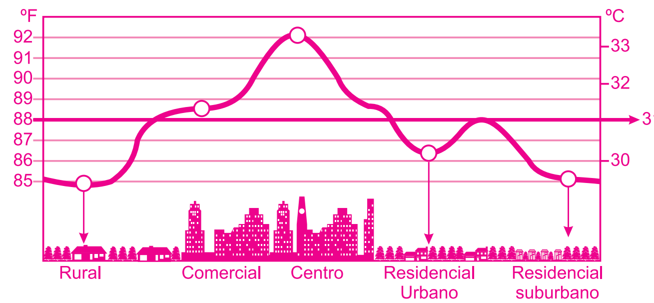
Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{3}{4}$

RESOLUÇÃO:

Observe o gráfico:

PERFIL DA ILHA DE CALOR URBANA



Das outras regiões da cidade (Rural, Comercial, Residencial Urbana e Residencial Suburbana), estão abaixo de 31°C as regiões Rural, Residencial Urbana e Residencial Suburbana. Dessa forma, a probabilidade pedida é $\dfrac{3}{4}$.

Resposta: E

2. **(UFPR-2012)** – Uma caixa contém 7 lápis azuis, 5 vermelhos e 9 amarelos. Sabendo que a caixa contém somente esses lápis, responda:

a) Qual o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado 4 lápis de uma mesma cor? Justifique sua resposta.

b) Se retirarmos ao acaso 3 lápis dessa caixa (sem olhar a cor), qual é a probabilidade de que todos sejam da cor amarela?

RESOLUÇÃO:

a) Ao serem retirados nove lápis, poderemos ter três de cada uma das três cores. Ao retirar o décimo, certamente haverá quatro lápis de uma mesma cor.
Portanto, o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado quatro lápis de uma mesma cor é dez.

b) A probabilidade, é dada por $p = \dfrac{C_{9,3}}{C_{21,3}} =$

$$= \frac{\dfrac{9.8.7}{3.2.1}}{\dfrac{21.20.19}{3.2.1}} = \frac{9.8.7}{21.20.19} = \frac{6}{95}$$

Resposta: a) 10 b) $\dfrac{6}{95}$

3. **(UFF)** – Dois dados cúbicos não viciados, cujas faces estão numeradas de 1 a 6, são jogados aleatoriamente e simultaneamente sobre uma mesa plana. Se a soma dos valores sorteados(*) for um número par, Paulo ganha a partida. Se a soma for um número ímpar, Lúcia ganha. Ao perder a primeira partida, Lúcia diz que não irá mais jogar porque a regra favorece Paulo. Seu argumento é o seguinte: entre os onze valores possíveis para a soma (os inteiros de 2 a 12), há seis números pares e apenas cinco números ímpares. Logo, Paulo tem maior probabilidade de ganhar.

a) Calcule a probabilidade de Lúcia ganhar uma partida. Justifique sua resposta.

b) Use o item a para verificar se o argumento de Lúcia está correto.

(*) Valor sorteado é o número escrito na face do cubo oposta à face que está apoiada na mesa.

RESOLUÇÃO:

a) O espaço amostral desse experimento é o conjunto A, com 36 elementos:

A = { (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6),
(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6),
(3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6),
(4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6),
(5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6),
(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6) }.

O evento "a soma dos valores sorteados é um número ímpar" é o conjunto E, com 18 elementos:

E = { (1; 2), (1; 4), (1; 6),
(2; 1), (2; 3), (2; 5),
(3; 2), (3; 4), (3; 6),
(4; 1), (4; 3), (4; 5),
(5; 2), (5; 4), (5; 6),
(6; 1), (6; 3), (6; 5) }.

Logo, a probabilidade de Lúcia ganhar é igual a 18/36 = 1/2 = 50%.

b) O cálculo feito no item (a) mostra que Paulo e Lúcia têm a mesma probabilidade de ganhar uma partida. Assim, o argumento de Lúcia está errado.

4. **(FUVEST-2012)** – Considere todos os pares ordenados de números naturais (a; b), em que $11 \leqslant a \leqslant 22$ e $43 \leqslant b \leqslant 51$.
Cada um desses pares ordenados está escrito em um cartão diferente. Sorteando-se um desses cartões ao acaso, qual é a probabilidade de que se obtenha um par ordenado (a; b) de tal forma que a fração *a*/*b* seja irredutível e com denominador par?

a) $\dfrac{7}{27}$ b) $\dfrac{13}{54}$ c) $\dfrac{6}{27}$ d) $\dfrac{11}{54}$ e) $\dfrac{5}{27}$

RESOLUÇÃO:

1) $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 11 \leq a \leq 22\} \Rightarrow n(A) = 12$

2) $B = \{b \in \mathbb{N} \mid 43 \leq b \leq 51\} \Rightarrow n(B) = 9$

3) $n(A \times B) = 12 \cdot 9 = 108$

4) As frações irredutíveis com denominador par são aquelas cujo denominador é 44, 46, 48, 50.

5) Se o denominador for 44, para ser irredutível o numerador pode ser 13, 15, 17, 19, 21 num total de 5 possibilidades.

6) Se o denominador for 46, pelo mesmo motivo, o numerador pode ser 11, 13, 15, 17, 19, 21 num total de 6 possibilidades.

7) Quando o denominador for 48, existem 4 possibilidades (11, 13, 17, 19).

8) Com denominador 50, o número de casos possíveis é 5 (11, 13, 17, 19, 21).

9) O número total de pares ordenados (a; b), de modo que a fração a/b seja irredutível e de denominador par é 5 + 6 + 4 + 5 = 20.

10) A probabilidade pedida é $\dfrac{20}{108} = \dfrac{5}{27}$

Resposta: E

MÓDULO 53

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INTERSECÇÃO DE EVENTOS

1. **(ENEM)** – O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{5}{7}$ e) $\dfrac{5}{14}$

RESOLUÇÃO:

A partir da tabela, o número de funcionárias com calçado maior que 36,0 igual a 1 + 10 + 3 = 14. Entre essas funcionárias, 10 calçam 38.
Assim a probabilidade de, tendo-se escolhido uma funcionária ao acaso e sabendo que ela calça mais de 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

$P = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7}$

Resposta: D

2. Escolhendo-se, ao acaso, dois elementos distintos do conjunto A = {1; 2; 3; ...; 20} verificou-se que sua soma é igual a 16. A probabilidade de os dois números serem pares é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{4}{7}$

RESOLUÇÃO:
Os pares de números escolhidos podem ser (1; 15), (2; 14), (3; 13), (4; 12), (5; 11), (6; 10) e (7; 9).
Dessas sete possibilidades três têm os dois números pares e, portanto, a probabilidade é $p = \frac{3}{7}$.
Resposta: D

3. Daqui a 20 anos, a probabilidade de João estar vivo é 30% e de sua esposa Ana estar viva é 40%. Assim, a probabilidade de pelo menos um deles estar vivo daqui a 20 anos é

a) 38% b) 42% c) 58%
d) 70% e) 88%

RESOLUÇÃO:
A probabilidade de nenhum deles estar vivo daqui a 20 anos é
$P(A) = (1 - 30\%) \,.\, (1 - 40\%) = 70\% \,.\, 60\% = 42\%$
Então, a probabilidade de pelo menos um deles estar vivo daqui a 20 anos é $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 42\% = 58\%$
Resposta: C

4. **(FGV-RJ-2012)** – Uma urna tem duas bolas vermelhas e três brancas; outra urna tem uma bola vermelha e outra branca. Uma das duas urnas é escolhida ao acaso e dela é escolhida, ao acaso, uma bola. A probabilidade de que a bola seja vermelha é:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{17}{40}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{10}$

RESOLUÇÃO:
Sejam U_1 a urna que tem duas bolas vermelhas e três brancas e U_2 a que tem uma bola vermelha e outra branca.

A probabilidade de se escolher a urna U_1 e dela ser retirada uma bola vermelha é $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.
A probabilidade de se escolher a urna U_2 e dela ser retirada uma bola vermelha é $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Logo, a probabilidade pedida é $p = p_1 + p_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$.

Resposta: C

5. **(BARRO BRANCO-2012)** – Antônio, João e Carlos apostaram em um jogo de cara ou coroa: uma moeda é lançada sucessivamente e o jogo termina no primeiro vencedor. Antônio vence na primeira vez que saírem 2 caras seguidas, João vence na primeira vez que saírem 2 coroas seguidas e Carlos vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. As probabilidades de Antônio, João e Carlos ganharem são, respectivamente,

a) $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$. b) $\frac{3}{7}, \frac{3}{7}$ e $\frac{1}{7}$. c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$.
d) $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$. e) $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{5}$.

RESOLUÇÃO:
Considerando CA a ocorrência de cara e CO a de coroa temos o seguinte diagrama de árvore:

CA
- **CA (I) (Antonio vence)**
- **CO (II) (Carlos vence)**

CO
- **CO (III) (João vence)**
- **CA**
  - **CA (IV) (Antonio vence)**
  - **CO (V) (Carlos vence)**

Antonio será vencedor nos casos (I) e (IV) e a probabilidade dele ganhar é $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

João será o vencedor no caso (III) cuja probabilidade é
$P(J) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Carlos será o vencedor nos casos (II) e (V). A probabilidade de Carlos ganhar é $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Resposta: D

MÓDULO 54

LEI BINOMIAL DE PROBABILIDADE

1. Um casal tem cinco filhos. Calcule a probabilidade de serem
a) os dois primeiros homens;
b) os dois primeiros homens e os três últimos mulheres;
c) dois homens e três mulheres.

RESOLUÇÃO:
a) $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$

b) $p = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{32}$

c) $p = C_{5,2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

2. A probabilidade de resultar cara no lançamento de uma moeda viciada é $\frac{1}{3}$. Se essa moeda for lançada três vezes, calcule a probabilidade de resultar

a) três caras; b) duas caras e uma coroa;
c) uma cara e duas coroas; d) três coroas.

RESOLUÇÃO:

Se, em um lançamento dessa moeda, a probabilidade de resultar cara é $\frac{1}{3}$, então a probabilidade de resultar coroa é $\frac{2}{3}$.

a) $P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

b) $P_2 = C_{3,2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

c) $P_3 = C_{3,1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

d) $P_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

Obs.: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

3. **(MACKENZIE-2012)** – Sempre que joga, um time tem probabilidade $\frac{2}{3}$ de vencer uma partida. Em quatro jogos, a probabilidade de esse time vencer, exatamente dois deles, é

a) $\frac{4}{27}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $\frac{8}{27}$ d) $\frac{4}{81}$ e) $\frac{16}{27}$

RESOLUÇÃO:

$C_{4;2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$

Resposta: C

4. Uma moeda não viciada é jogada 10 vezes. A probabilidade de se obter exatamente 5 caras e 5 coroas é

a) $\frac{1}{1024}$ b) $\frac{45}{1024}$ c) $\frac{63}{256}$
d) $\frac{105}{512}$ e) $\frac{1}{2}$

RESOLUÇÃO:

A probabilidade é

$p = C_{10,5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$

Resposta: C

5. Numa caixa foram depositadas 10 bolas, sendo 6 brancas e 4 pretas. Serão retiradas, ao acaso, 4 bolas dessa urna. Calcule a probabilidade de serem obtidas 2 bolas brancas e 2 bolas pretas se

a) houver reposição de cada bola antes de se retirar a seguinte;
b) não ocorrer reposição da bola retirada.

RESOLUÇÃO:

a) $p = C_{4,2} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{216}{625}$

b) $p = C_{4,2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

Respostas: a) $\frac{216}{625}$ **b)** $\frac{3}{7}$

MÓDULO 55

MÉDIAS

1. Calcule as médias aritmética **A**, geométrica **G**, harmônica **H** e aritmética ponderada **P** (com pesos 1, 2 e 3, respectivamente) dos números 6, 4 e 9.

RESOLUÇÃO:

$$A = \frac{6 + 4 + 9}{3} = 6{,}333...$$

$$H = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9}}{3}} = \frac{108}{19} \cong 5{,}68$$

$$G = \sqrt[3]{6 \,.\, 4 \,.\, 9} = 6$$

$$P = \frac{6 \,.\, 1 + 4 \,.\, 2 + 9 \,.\, 3}{1 + 2 + 3} = \frac{41}{6} \cong 6{,}82$$

2. **(UEPI)** – Qual o preço do kg de café que é obtido misturando 8 kg de um tipo de café, com preço de R\$ 9,20 o kg, com 12 kg de outro tipo de café, que custa R\$ 8,00 o kg?

a) R\$ 8,42 b) R\$ 8,44 c) R\$ 8,46
d) R\$ 8,48 e) R\$ 8,50

RESOLUÇÃO:
Em reais, o preço é

$$p = \frac{8 \,.\, 9{,}20 + 12 \,.\, 8}{8 + 12} = \frac{73{,}6 + 96}{20} = \frac{169{,}6}{20} = 8{,}48$$

Resposta: D

3. **(FGV-2012)** – A média aritmética de três números supera o menor desses números em 14 unidades, e é 10 unidades menor do que o maior deles. Se a mediana dos três números é 25, então a soma desses números é igual a

a) 60. b) 61. c) 63. d) 64. e) 66.

RESOLUÇÃO:
Se $a < 25 < c$ forem os três números então:

$$c - 10 = \frac{a + 25 + c}{3} = a + 14 \Leftrightarrow a = 7 \text{ e } c = 31$$

A soma dos 3 números é $7 + 25 + 31 = 63$

Resposta: C

4. **(FUVEST)** – Os números de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foram 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

RESOLUÇÃO:
Sendo *x* o número de gols na segunda rodada, devemos ter:

$$\frac{15 + x}{6 + 5} = \frac{15}{6} + \frac{20}{100} \,.\, \frac{15}{6} \Leftrightarrow \frac{15 + x}{11} = 3 \Leftrightarrow 15 + x = 33 \Leftrightarrow x = 18$$

Resposta: 18 gols

MÓDULO 56

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA I

1. As idades dos 25 participantes de uma festa, em anos, estão descritas a seguir:
16, 15, 18, 14, 12, 18, 15, 16, 18, 12, 15, 14, 16, 15, 18, 16, 18, 16, 15, 14, 16, 15, 14, 16, 14.
Determine:
a) o rol
b) a amplitude
c) a distribuição de frequências

x_i	f_i	f_r	$f_{\%}$	f_a	f_{ra}	$f_{\%a}$
Σ						

d) a moda
e) a mediana
f) a média

RESOLUÇÃO:
a) Rol
12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18, 18, 18
b) H = 18 – 12 = 6
c)

x_i	f_i	f_r	$f_{\%}$	f_a	f_{ra}	$f_{\% a}$
12	2	0,08	8	2	0,08	8
14	5	0,20	20	7	0,28	28
15	6	0,24	24	13	0,52	52
16	7	0,28	28	20	0,80	80
18	5	0,20	20	25	1,00	100
Σ	25	1,00	100			

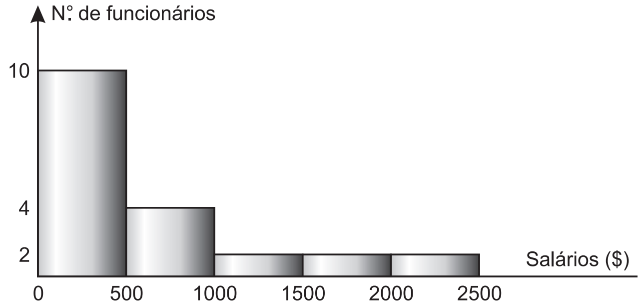
d) $M_0 = 16$ **e)** $M_d = 15$

f) $\overline{x} = \dfrac{12 \,.\, 2 + 14 \,.\, 5 + 15 \,.\, 6 + 16 \,.\, 7 + 18 \,.\, 5}{25} = \dfrac{386}{25} = 15{,}44$

2. **(FATEC-2012)** – Considere as seguintes definições em Estatística:
Sejam $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n$ os valores ordenados de um grupo de n dados.
Mediana é a medida que consiste no valor que se encontra no centro desse grupo de dados. Se n é ímpar, a mediana é o elemento central desse grupo ordenado.
Moda é a medida que consiste no valor observado com maior frequência em um grupo de dados, isto é, o valor que aparece mais vezes.
As idades, em anos, de um grupo de sete pessoas são:
16, 8, 13, 8, 10, 8, m
Sabendo que m é maior que 12 e que a moda, a mediana e a média aritmética das idades desse grupo de pessoas, nessa ordem, são três termos consecutivos de uma progressão aritmética não constante, então o valor de m é
a) 17. b) 19. c) 21. d) 23. e) 25.

RESOLUÇÃO:
De acordo com o enunciado, o rol das idades das 7 pessoas é
8, 8, 8, 10, m, 13, 16 ou 8, 8, 8, 10, 13, m, 16 ou 8, 8, 8, 10, 13, 16, m
Assim sendo, a moda é 8 e a mediana é 10.
Sabendo que a moda, a mediana e a média, nessa ordem, são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, concluímos que a média é 12, portanto:
$$\frac{8 + 8 + 8 + 10 + 13 + 16 + m}{7} = 12 \Leftrightarrow m = 21$$
Resposta: C

3. **(UNIMES)** – O gráfico abaixo representa a distribuição de frequências das faixas salariais numa pequena empresa:



Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é aproximadamente:

a) $ 400 b) $ 600 c) $ 800
d) $ 1000 e) $ 1200

RESOLUÇÃO:

$$\overline{x} \cong \frac{250 \,.\, 10 + 750 \,.\, 4 + 1250 \,.\, 2 + 1750 \,.\, 2 + 2250 \,.\, 2}{10 + 4 + 2 + 2 + 2} = \frac{16\,000}{20} = 800$$

Resposta: C

4. **(ENEM-2012)** – Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a) 17°C, 17°C e 13,5°C b) 17°C, 18°C e 13,5°C
c) 17°C, 13,5°C e 18°C d) 17°C, 18°C e 21,5°C
e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C

RESOLUÇÃO:
Com os dados fornecidos, tem-se a seguinte tabela de frequências:

x_i	13,5	14	15,5	16	18	18,5	19,5	20	21,5
f_i	4	1	1	1	2	1	1	3	1

1) $$\overline{x} = \frac{13{,}5.4+14.1+15{,}5.1+16.1+18.2+18{,}5.1+19{,}5.1+20.3+21{,}5.1}{4+1+1+1+2+1+1+3+1} =$$

$$= \frac{255}{15} = 17$$

A média é 17°C.

2) **A mediana (valor do oitavo termo) é 18°C.**

3) **A moda é 13,5°C.**

Resposta: B

MÓDULO 57

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA II

1. Calcule: amplitude, média, desvio médio, variância e desvio-padrão.

x_i	5	6	7	8	10	11
f_i	1	2	2	3	7	5

a) Amplitude

RESOLUÇÃO:

H = 11 – 5 = 6

b) Média

RESOLUÇÃO:

$$\bar{x} = \frac{5 \,.\, 1 + 6 \,.\, 2 + 7 \,.\, 2 + 8 \,.\, 3 + 10 \,.\, 7 + 11 \,.\, 5}{1 + 2 + 2 + 3 + 7 + 5} = \frac{180}{20} = 9$$

c) Construção da tabela

x_i	f_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$f_i \lvert D_i \rvert$	D_i^2	$f_i D_i^2$
5	1					
6	2					
7	2					
8	3					
10	7					
11	5					
Σ						

RESOLUÇÃO:

x_i	f_i	D_i	$\lvert D_i \rvert$	$f_i \lvert D_i \rvert$	D_i^2	$f_i D_i^2$
5	1	– 4	4	4	16	16
6	2	– 3	3	6	9	18
7	2	– 2	2	4	4	8
8	3	– 1	1	3	1	3
10	7	1	1	7	1	7
11	5	2	2	10	4	20
Σ	20			34		72

d) Desvio médio

RESOLUÇÃO:

$$D_m = \frac{\Sigma\, f_i \,\lvert D_i \rvert}{n} = \frac{34}{20} = 1{,}7$$

e) Variância

RESOLUÇÃO:

$$s^2 = \frac{\Sigma\, f_i\, D_i^2}{n} = \frac{72}{20} = 3{,}6$$

f) Desvio-padrão

RESOLUÇÃO:

$$s = \sqrt{3{,}6} \cong 1{,}9$$

2. **(FGV)** –Numa pequena ilha, há 100 pessoas que trabalham na única empresa ali existente. Seus salários (em moeda local) têm a seguinte distribuição de frequências:

Salários	Frequência
\$ 50,00	30
\$ 100,00	60
\$ 150,00	10

a) Qual a média dos salários das 100 pessoas?
b) Qual a variância dos salários? Qual o desvio-padrão dos salários?

RESOLUÇÃO:

a) Indicando a média desses salários por $\bar{s}$, temos:

$$\bar{s} = \frac{30 \,.\, 50 + 60 \,.\, 100 + 10 \,.\, 150}{30 + 60 + 10} = 90$$

b) $$\text{Var(s)} = \frac{30(90 - 50)^2 + 60(90 - 100)^2 + 10(90 - 150)^2}{30 + 60 + 10}$$

$\text{Var(s)} = 900\ (\$)^2$

O desvio-padrão é dado por $\sigma = \sqrt{\text{Var(s)}}$; logo, $\sigma = 30(\$)$.

Respostas: a) \$ 90,00
b) Variância dos salários: 900,00 $(\$)^2$
Desvio-padrão: 30,00 (\$)

3. **(ENEM)** – Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir, são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio-padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio-Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
b) Marco, pois obteve menor desvio-padrão.
c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d) Paulo, pois obteve maior mediana.
e) Paulo, pois obteve maior desvio-padrão.

RESOLUÇÃO
Marco e Paulo tiveram médias iguais, porém o desvio-padrão de Marco é menor, significando que suas notas nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais estão mais próximas da média do que as respectivas notas de Paulo. Desta forma, as notas de Marco são mais regulares (têm desvio-padrão menor) e, portanto, ele foi mais bem classificado.
Resposta: B

MÓDULO 58

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

1. As grandezas A = (2; x; 3) e B = (y; 5; 9) são diretamente proporcionais. O valor de x + y é:

a) 7 b) $\frac{23}{3}$ c) 6 d) $\frac{17}{3}$ e) 5

RESOLUÇÃO:

$$\frac{2}{y} = \frac{x}{5} = \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{x}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 6 \text{ e } x = \frac{5}{3} \Rightarrow x + y = \frac{5}{3} + 6 = \frac{23}{3}$$

Resposta: B

2. **(BARRO BRANCO)** – Em época de eleições, são comuns discursos de candidatos dizendo que o aumento do número de policiais nas ruas faz diminuir o número de delitos cometidos. Admitindo que isso seja verdade e que as duas quantidades sejam inversamente proporcionais, se o número de policiais sofrer um acréscimo de 25%, o número de delitos cometidos sofrerá um decréscimo de

a) 20% b) 25% c) 30% d) 40% e) 80%

RESOLUÇÃO:
Sendo, atualmente, *p* policiais e *d* delitos, com um acréscimo de 25% no número de policiais e um decréscimo de i% no número dos delitos, teremos

$$p \,.\, d = p \,.\, (1 + 0{,}25) \,.\, d \,.\, (1 - i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - i = \frac{1}{1{,}25} \Leftrightarrow i = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow i = \frac{1}{5} \Leftrightarrow i = 20\%$$

Resposta: A

3. Divida o número 234 em três partes tais que elas sejam
a) diretamente proporcionais a 2, 3 e 4;
b) inversamente proporcionais a 2, 3 e 4.

RESOLUÇÃO:
Sendo x, y e x, respectivamente, as partes correspondentes a 2, 3 e 4, temos:

a) $\begin{cases} x + y + z = 234 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 \\ y = 78 \\ z = 104 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 234 \\ \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{3}} = \dfrac{z}{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 108 \\ y = 72 \\ z = 54 \end{cases}$

Respostas: a) 52, 78 e 104
b) 108, 72 e 54

4. **(UEPI)** – Dois mecânicos trabalham na pintura de um carro. Trabalhando sozinho, o mecânico A terminaria a pintura em oito horas, enquanto o mecânico B levaria seis horas. Eles trabalham na pintura juntos, nas primeiras duas horas, e, em seguida, o trabalho será terminado pelo mecânico A, trabalhando sozinho. Quantas horas adicionais são necessárias para o mecânico A concluir a pintura?

a) 3 horas
b) 3 horas e 10 minutos
c) 3 horas e 20 minutos
d) 3 horas e meia
e) 3 horas e 40 minutos

RESOLUÇÃO:

Em 2 horas, os dois juntos realizam

$$2 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \text{ da pintura.}$$

Assim, o mecânico A deverá concluir sozinho $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ **da pintura.**

Para isso, ele necessitará de

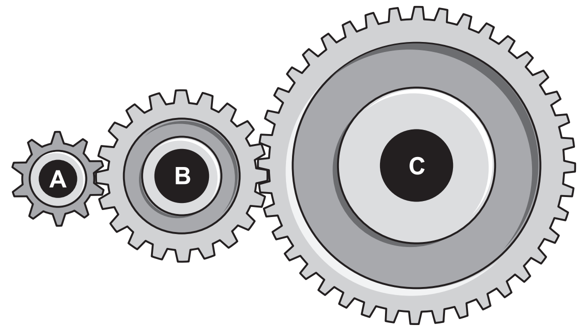
$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{8}}\,h = \frac{40}{12}\,h = \frac{10}{3}\,h = \frac{9}{3}\,h + \frac{1}{3}\,h = 3h + 20\text{ min}$$

Resposta: C

MÓDULO 59

REGRA DE TRÊS

1. **(UFLA)** – As engrenagens **A**, **B** e **C** têm 20, 40 e 100 dentes, respectivamente. Se **B** completar dez voltas, os números de voltas que **A** e **C** completarão, respectivamente, são:



a) 10 e 4
b) 10 e 6
c) 20 e 10
d) 20 e 4
e) 20 e 6

RESOLUÇÃO:

Nº de dentes	**Voltas**	
$\downarrow$ 40	$\uparrow$ 10	$\Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{20}{40} \Rightarrow x = 20$
20	x	
$\downarrow$ 40	$\uparrow$ 10	$\Rightarrow \frac{10}{y} = \frac{100}{40} \Rightarrow y = 4$
100	y	

Resposta: D

2. **(MAUÁ)** – Um certo trabalho pode ser realizado por um grupo de 12 operários em 20 dias de trabalho de 8 horas diárias. Se esse mesmo trabalho tivesse de ser feito em apenas 16 dias, com 16 operários igualmente eficientes, quantas horas por dia eles deveriam trabalhar?

RESOLUÇÃO:

↑ operários	↑ dias	↓ h/dia
12	20	8
16	16	x

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{12}{16} \cdot \frac{20}{16} \Rightarrow x = 7{,}5$$

Resposta: 7,5 horas por dia

3. **(EPCAR)** – Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados.

No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é

a) domingo
b) segunda-feira
c) terça-feira
d) quarta-feira
e) quinta-feira

RESOLUÇÃO:

↑ Operários	↓ Dias	↑ Horas/dia	↓ Trabalho
24	10	7	40%
20	x	6	60%

$$\frac{10}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow x = 21$$

O tempo total gasto na reforma foi de (10 + 21) dias = 31 dias, que corresponde a 4 semanas completas e mais 3 dias, pois $\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$

Assim, se o trabalho começou numa 2ª feira, as 4 semanas foram completadas no domingo e, então, o serviço foi concluído numa 4ª feira.
Resposta: D

4. **(ENEM)** – Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e, nos primeiros 10 dias, trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta se tenha mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg
b) 800 kg
c) 720 kg
d) 600 kg
e) 570 kg

RESOLUÇÃO:
O problema, representado por uma regra de 3 composta, pode ser apresentado da seguinte forma:

↓ Alimentos (kg)	↓ Tempo (dias)	↓ Horas/dia	↓ Nº de alunos
120	10	3	20
x	20	4	50

Assim: $\frac{120}{x} = \frac{10}{20} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{50} \Leftrightarrow x = 800$ **kg.**

Ao final do prazo estipulado, a quantidade de alimentos arrecadados seria de: 800 kg + 120 kg = 920 kg.
Resposta: A

MÓDULO 60

PORCENTAGEM E JUROS

1. **(FUVEST)** – Uma fazenda estende-se por dois municípios, A e B. A parte da fazenda que está em A ocupa 8% da área desse município. A parte da fazenda que está em B ocupa 1% da área desse município. Sabendo-se que a área do município B é dez vezes a área do município A, a razão entre a área da parte da fazenda que está em A e a área total da fazenda é igual a:

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{3}{9}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{7}{9}$

RESOLUÇÃO:

Sendo A a área do município A, B a área do município B e F a área da fazenda, temos:

$$\begin{cases} F = 8\% \cdot A + 1\% \cdot B \\ B = 10 \cdot A \end{cases} \Rightarrow F = 8\% \cdot A + 1\% \cdot 10 \cdot A \Leftrightarrow F = 18\% \cdot A$$

A razão entre a área da fazenda que está em A e a área total da fazenda é:

$$\frac{8\% \cdot A}{F} = \frac{8\% \cdot A}{18\% \cdot A} = \frac{4}{9}$$

Resposta: C

2. **(UEG-2012)** – Leia o texto a seguir.

"O mundo precisa aumentar a produção de alimentos se quiser evitar instabilidade social e política. Atualmente o mundo produz uma quantidade de alimentos adequada para 5,5 bilhões de pessoas. A população mundial é de 6,5 bilhões, sendo que 1 bilhão de pessoas passa fome segundo a FAO. Em 2050, seremos nove bilhões de habitantes. Ou seja, precisamos aumentar a oferta de alimentos nos próximos 40 anos. Se valesse olhar para trás, isso seria possível. Mas não é um desafio pequeno, porque no período os efeitos das mudanças climáticas devem se agravar, complicando uma situação que já é bastante difícil".

Disponível em: <http://blogdaterra.com.br/2009/05/05/mundo-precisa-aumentar-produção-de-alimentos-para-evitar-instabilidade-social>. Acesso em: 29 ago. 2011. (Adaptado).

Considerando-se que hoje a produção de alimentos no mundo é suficiente para alimentar 5,5 bilhões de pessoas, então a quantidade de alimentos que a sociedade terá de produzir em 2050, para que ninguém passe fome, terá de aumentar em porcentagem, em relação ao que é produzido hoje, em

a) 100% b) 64% c) 50% d) 38%

RESOLUÇÃO:

Se hoje a produção p de alimentos no mundo é suficiente para alimentar 5,5 bilhões de pessoas, então para alimentar 9 bilhões em 2050, de modo que ninguém passe fome, a produção de alimentos deverá ser de

$$\frac{9}{5{,}5}\,p \simeq 1{,}64p$$

O aumento, portanto, deverá ser de 64%.

Resposta: B

3. **(UECE-2012)** – Se na cidade de Sinimbu o salário das mulheres é 20% inferior ao salário dos homens, então podemos afirmar corretamente que, naquela cidade, o salário dos homens é superior ao salário das mulheres em

a) 20%. b) 22%. c) 25%. d) 28%.

RESOLUÇÃO:

Sejam *m* o salário das mulheres e *h* o salário dos homens de Sinimbu.

De acordo com o enunciado, temos:

$$m = h - 0{,}2h \Leftrightarrow m = 0{,}8h \Leftrightarrow h = \frac{m}{0{,}8} \Leftrightarrow h = \frac{10}{8}m \Leftrightarrow h = 1{,}25m$$

Portanto, o salário dos homens de Sinimbu é 25% maior que o das mulheres.

Resposta: C

4. **(PUC-RJ-2012)** – Em uma região, há uma espécie de ave que pode ser azul ou verde. Inicialmente 98% dos indivíduos eram azuis. Houve uma peste que matou várias aves azuis, mas nenhuma ave verde. Depois da peste, 96% dos indivíduos eram azuis. Que porcentagem das aves foi morta pela peste?

a) 1% b) 2% c) 5% d) 10% e) 50%

RESOLUÇÃO:

Se das *x* aves da referida espécie da região morreram *m* temos:

inicialmente

$$x \begin{cases} 0{,}98x & \text{azuis} \\ 0{,}02x & \text{verdes} \end{cases}$$

após a peste

$$x - m \begin{cases} 0{,}98x - m & \text{azuis} \\ 0{,}02x & \text{verdes} \end{cases}$$

Devemos ter, então,

$$\begin{cases} 0{,}98x - m = 0{,}96(x - m) \\ 0{,}02x = 0{,}04(x - m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x}{2} \\ m = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 50\%x$$

Resposta: E

5. João aplicou R\$10 000,00 pelo sistema de juros simples e ao final de 6 meses obteve um montante de R\$ 10 500,00. A taxa anual do investimento foi de

a) 5% b) 6% c) 8% d) 10% e) 12%

RESOLUÇÃO:

Sendo J os juros da aplicação, temos $10\,500 = 10\,000 + J \Leftrightarrow J = 500$

Logo $$\frac{10\,000 \cdot i \cdot \frac{6}{12}}{100} = 500 \Leftrightarrow i = 10$$

Resposta: D

6. **(UFPR-2012)** – Uma quantia inicial de R\$ 1000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? (Use $\log_2(1{,}06) \approx 0{,}084$.)

RESOLUÇÃO:

Sendo t o tempo, em anos, devemos ter

$$1000 \cdot (1 + 0{,}06)^t = 2000 \Leftrightarrow (1{,}06)^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1{,}06} 2 =$$

$$= \frac{1}{\log_2 1{,}06} \simeq \frac{1}{0{,}084} \simeq 12$$

Resposta: 12 anos

MÓDULO 25

PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA E EQUAÇÕES MATRICIAIS

1. **(UNESP)** – Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B é tal que $B^{-1} = 2A$, o determinante de B será:

a) 24 b) 6 c) 3 d) 1/6 e) 1/24

RESOLUÇÃO:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det B^{-1} = \det(2A) = 2^3 \,.\, \det A = 8 \,.\, 3 = 24 \Leftrightarrow \det B = \frac{1}{\det B^{-1}} = \frac{1}{24}$$

Resposta: E

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$, duas matrizes de ordem dois por dois. Se A^T é a matriz transposta de A, e B^{-1} é a matriz inversa de B, o valor de $\det(A^T B^{-1}) + \det(A + B)$ é igual a:

a) 69 b) 6 c) 108 d) – 21 e) – 15

RESOLUÇÃO:

1) $\det A = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 54 \Rightarrow \det A^t = 54$

2) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = 9$

$\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} = \dfrac{1}{9}$

3) $\det(A^t \,.\, B^{-1}) = \det A^t \,.\, \det B^{-1} = 54 \,.\, \dfrac{1}{9} = 6$

4) $A + B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A + B) = -21$

5) $\det(A^t \,.\, B^{-1}) + \det(A + B) = 6 + (-21) = -15$

Resposta: E

3. **(FGV)** – Sendo M uma matriz, M^{-1} sua inversa, M^T sua transposta, D o determinante de M, e P o determinante de M^T, é correto afirmar que, necessariamente,

a) D = P.
b) M pode não ser uma matriz quadrada.
c) M^{-1} e M^T podem não ser de mesma ordem.
d) M possui ao menos duas filas paralelas linearmente dependentes.
e) o determinante de $M \cdot M^{-1}$ é igual ao produto de P por D.

RESOLUÇÃO:
Lembrando que:
1) **Determinante é definido para matrizes quadradas.**
2) **Determinante de uma matriz é sempre igual ao da sua transposta.**
3) **Só existe M^{-1} se det M ≠ 0 e, portanto, M não possui filas paralelas linearmente dependentes.**
4) **Se M é matriz quadrada e possui inversa, então M, M^{-1} e M^T têm mesma ordem.**

Temos $\left.\begin{matrix} D = \det M \\ P = \det M^t \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = P$

Resposta: A

Sendo A e B matrizes invertíveis de mesma ordem, resolva as equações 4, 5 e 6.

Sr. Professor, aproveite estas questões para comentar algumas propriedades de matrizes produto, transpostas e inversas, tais como $A \,.\, I = A$, $(A \,.\, B)^t = B^t \,.\, A^t$ **e** $(A \,.\, B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$

4. $A \,.\, X = B$

RESOLUÇÃO:
$A \,.\, X = B \Rightarrow A^{-1} \,.\, AX = A^{-1} \,.\, B \Rightarrow X = A^{-1} \,.\, B$

5. $X \,.\, A = B$

RESOLUÇÃO:
$X \,.\, A = B \Rightarrow X \,.\, A \,.\, A^{-1} = B \,.\, A^{-1} \Rightarrow X = B \,.\, A^{-1}$

6. $(A \,.\, X)^t = B \,.\, A^t$

RESOLUÇÃO:
$(A \,.\, X)^t = B \,.\, A^t \Leftrightarrow [(A \,.\, X)^t]^t = [B \,.\, A^t]^t \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A \,.\, X = (A^t)^t \,.\, B^t \Leftrightarrow A^{-1} \,.\, AX = A^{-1} \,.\, A \,.\, B^t \Leftrightarrow I \,.\, X = I \,.\, B^t \Rightarrow X = B^t$

MÓDULO 26

SISTEMA NORMAL, REGRA DE CRAMER E ESCALONAMENTO

1. **(UFMG)** – Se a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ é a matriz $M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, então a solução (x;y) do sistema linear possível e determinado $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + by = 3 \end{cases}$ é

a) (1; 0) b) (0; – 1) c) (1; 1)
d) (1; – 2) e) (– 1; 2)

RESOLUÇÃO:
Senhor professor, utilize este exercício para comentar com os alunos como a teoria de matrizes está ligada à teoria de sistemas.

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + by = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + 2y \\ 3x + by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}}_{M} . \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow M . X = B$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} . M . X = M^{-1} . B \Leftrightarrow I . X = M^{-1} . B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ portanto, } x = 1 \text{ e } y = 0.$$

O par (1;0) é a solução do sistema.

Resposta: A

2. Os valores de x, y e z do sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 5x + 2y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - z = 8 \end{cases}$$

são tais que x . y . z é igual a:
a) 10 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

RESOLUÇÃO:
Professor, utilize este exercício para apresentar a Regra de Cramer (não perca tempo calculando os determinantes).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 32$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 48$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 80$$

Regra de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{32}{16} = 2 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{48}{16} = 3 \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{80}{16} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x . y . z = 30$$

Resposta: B

3. Ana, Beatriz e Claudia foram ao shopping fazer compras e quando voltaram reclamaram de terem gasto muito dinheiro. Juntas elas gastaram R$ 210,00. Ana disse a Beatriz “a culpa é sua que gastou o dobro do que gastei”. Beatriz se defendeu dizendo que a culpa foi da Claudia, pois gastou o dobro do que ela, Beatriz havia gasto. Se as informações delas forem corretas, Beatriz gastou
a) R$ 30,00 b) R$ 45,00 c) R$ 60,00
d) R$ 80,00 e) R$ 90,00

RESOLUÇÃO:
Sendo a, b e c o gasto de cada uma temos, em reais

$$\begin{cases} a + b + c = 210 \\ b = 2a \\ c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 210 \\ 2a - b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases}$$

Sendo,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 2 = 7 \text{ e}$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 1 & 210 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 420, \text{ temos que Beatriz gastou}$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{420}{7} = 60$$

Resposta: C

4. **(MACKENZIE)** – Relativas ao sistema $\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$, considere as afirmações I, II e III abaixo.

I) Apresenta solução única para, exatamente, dois valores distintos de k.

II) Apresenta mais de 1 solução para um único valor de k.

III) É impossível para um único valor de k.

Dessa forma,

a) somente I está correta. b) somente II e III estão corretas.

c) somente I e III estão corretas. d) somente III está correta.

e) I, II e III estão corretas.

RESOLUÇÃO:

O sistema $\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases}$

1) Admite solução única (é possível e determinado) se, e somente se;

$$\begin{vmatrix} k & 4k \\ 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow k^2 - 12k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0 \text{ e } k \neq 12$$

Desta forma, a frase (I) é falsa.

2) Admite mais de 1 solução (é possível e indeterminado) somente para k = 0, pois neste caso temos:

$$\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x + 4 \cdot 0 \cdot y = 0 \\ 3 \cdot x + 0 \cdot y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ e } \forall y$$

As soluções são do tipo $\left(\frac{8}{3}; y\right)$ **e a frase (II) está correta.**

3) É impossível para k = 12, pois teremos

$$\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 48y = 0 \\ 3x + 12y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ x + 4y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

que são equações incompatíveis. Assim, a frase (III) é verdadeira.

Resposta: B

5. **(UFOP)** – Para resolver as questões propostas, considere o sistema de equações nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + 7 = 0 \\ -4x + 6y - \beta = 0 \end{cases}$$

a) Para que valores de α e β o sistema é possível e determinado?

b) Escolha um par de valores para α e β, dentre os valores econtrados em **A**, e resolva o sistema para esse par.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + 7 = 0 \\ -4x + 6y - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \alpha y = -7 \\ -4x + 6y = \beta \end{cases}$$

a) O sistema é possível e determinado se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -\alpha \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 3$$

b) Vamos adotar $\alpha = 6$ **e** $\beta = 7$**.**

Teremos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6y = -7 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -7 \\ -2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Respostas: a) SPD $\Leftrightarrow \alpha \neq 3$ **e** β **qualquer**

b) Para $\alpha = 6$ **e** $\beta = 7$ **temos a solução** $\left(0; \frac{7}{6}\right)$

MÓDULO 27

ESCALONAMENTO (MÉTODO DE GAUSS)

1. Se x, y e z são números reais tais que

$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{cases}$, então $(x + y)^z$ é igual a:

a) 1 b) 8 c) 27 d) 36 e) 49

RESOLUÇÃO:

Professor, a intenção desta questão é mostrar o método do escalonamento.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 8 \\ 2y + 5z = 19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 8 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x + y)^z = (1 + 2)^3 = 27$

Resposta: C

2. **(UNICAMP-2012)** – As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal. Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $\begin{cases} x + \quad 2z = 60 \\ \quad y + \ z = 60 \\ 3{,}5x - y \quad = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \quad z = 60 \\ \quad y + 2z = 60 \\ 3{,}5x - y \quad = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \quad 2z = 60 \\ \quad y + \ z = 60 \\ 3{,}5x + y \quad = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + \quad z = 60 \\ \quad y + 2z = 60 \\ 3{,}5x + y \quad = 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 60 - 2z = x \\ 60 - z = y \\ y = 3{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 60 \\ y + z = 60 \\ 3{,}5x - y = 0 \end{cases}$$

Resposta: A

3. **(UNICAMP)** – Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.

a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?

b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função c(v) que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade v, para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	Emissão de CO_2 (g/km)
20	400
30	250
40	200

RESOLUÇÃO:

a) Em uma viagem de 378km, percorrendo 13,5km por litro de combustível, um automóvel consumiu $\dfrac{378\text{ km}}{13{,}5\text{km}/\ell} = 28\ell$

Se o automóvel emite 2,7kg de CO_2 a cada litro, então, ao consumir 28 litros, ele emite 28 . 2,7 = 75,6kg de CO_2.

b) Seja $c(v) = av^2 + bv + c$. Pelos dados da tabela, tem-se:

$$\begin{cases} a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 400 \\ a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c = 250 \\ a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -40 \\ c = 1000 \end{cases}$$

Logo, $c(v) = \dfrac{1}{2} \cdot v^2 - 40 \cdot v + 1000$

Respostas: a) 75,6 kg

b) $c(v) = \dfrac{1}{2} \cdot v^2 - 40 \cdot v + 1000$

4. **(UNESP)** – Foram estudados três tipos de alimentos, para os quais se determinou, para a mesma quantidade (1 g), que:

		Vitaminas		
		A	**B**	**C**
Alimentos	I	300	0	300
	II	100	300	400
	III	200	300	500

Diariamente, o corpo humano necessita de 1 100 unidades de vitamina A, 900 unidades de vitamina B e 2 000 unidades de vitamina C. Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornecem as unidades de vitaminas desejadas para serem ingeridas diariamente.

RESOLUÇÃO:

Se x, y e z forem as quantidades dos alimentos I, II e III, respectivamente, então:

$$\begin{cases} 300x + 100y + 200z = 1\,100 \\ 0 \cdot x + 300\,y + 300z = 900 \\ 300x + 400y + 500z = 2\,000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \ y + 2z = 11 \\ \quad y + \ z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \ y + 2z = 11 \\ \quad y + \ z = 3 \\ \quad 3y + 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Para z = k, temos:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 - 2k \\ \quad\;\; y = \;\; 3 - k \end{cases}$$

e, portanto, a solução geral do sistema é:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8-k}{3} \\ y = 3 - k \\ z = k \end{cases} \text{, com } 0 \le k \le 3$$

Se as quantidades de alimentos forem inteiras, então a única possibilidade será x = 2, y = 1, z = 2.

Resposta: A solução geral é $\left(\dfrac{8-k}{3}; 3 - k; k\right)$**, para** $0 \le k \le 3$**. Destas soluções, a única inteira é (2; 1; 2).**

5. Determine os valores de k e p para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = p \\ x + 3y + kz = 2 \end{cases}$$

nas variáveis x, y e z seja

a) possível e determinado;

b) possível e indeterminado;

c) impossível.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = p \\ x + 3y + kz = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = p - 6 \\ 2y + (k-1)z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = p - 6 \\ (k-5)z = 8 - 2p \end{cases}$$

Da última equação, temos:

a) O sistema é possível e determinado se $k - 5 \ne 0 \Leftrightarrow k \ne 5$

b) O sistema é possível e indeterminado se $k - 5 = 0$ **e** $8 - 2p = 0 \Leftrightarrow k = 5$ **e** $p = 4$

c) O sistema é impossível se $k - 5 = 0$ **e** $8 - 2p \ne 0 \Leftrightarrow k = 5$ **e** $p \ne 4$

Respostas: a) $k \ne 5$

b) $k = 5$ **e** $p = 4$

c) $k = 5$ **e** $p \ne 4$

MÓDULO 28

CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ E TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

1. Determine a característica da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

RESOLUÇÃO:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{p = 1}$$

2. Determine a característica da matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

A 3ª coluna é a soma das duas primeiras, a quarta só contém zeros e a quinta é proporcional à primeira, portanto, a característica de M é a mesma da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **que é 2, pois** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \ne 0$.

3. A característica da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 12 \\ 4 & 1 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 11 & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO:

A característica da matriz dada é a mesma da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 12 \\ 4 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \ne 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 65 \ne 0$$

portanto, a característica é 3.

Resposta: C

4. Mostre que o sistema $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 3 \\ 2x + 3y + \ \ z = 6 \\ 4x + 5z + 3z = 12 \end{cases}$ admite infinitas soluções e determine todas as soluções.

RESOLUÇÃO:

a) Sejam *p* e *q* as características das matrizes incompleta e completa do sistema.

$$MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Como em ambas a última linha é combinação linear das duas primeiras linhas (o dobro da primeira mais a segunda), suas características são respectivamente iguais às características das matrizes

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **e** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **e, portanto, p = 2 e q = 2.**

Pelo Teorema de Rouché-Capelli, p = q = 2 < 3 ⇔ SPI
Assim o sistema tem infinitas soluções.

b) Fazendo z = k, temos:

$$\begin{cases} x + y + k = 3 \\ 2x + 3y + k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 - k \\ 2x + 3y = 6 - k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 - k \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = k \end{cases}$$

Respostas: a) Demonstração
b) (3 – 2k; k; k); ∀k

5. **(CEPERJ)** – O sistema $\begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 2x - 5y + 4z = 9 \\ 5x + 4y + z = m \end{cases}$ é indeterminado.

O valor de m é

a) 16 b) 18 c) 24 d) 30 e) 36

RESOLUÇÃO:

Sendo *p* e *q*, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa, temos:

1) $MI = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **e p = 2,**

pois $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ **e** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) $MC = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & 4 & 1 & m \end{bmatrix}$ **para ter característica 2 devemos ter**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -5 & 9 \\ 5 & 4 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -11m + 330 = 0 \Leftrightarrow m = 30$$

Resposta: C

6. **(UF Juiz de Fora)** – Considere o sistema abaixo nas variáveis x, y e z.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Sobre este sistema, podemos afirmar que

a) possui uma única solução.
b) possui exatamente três soluções.
c) possui infinitas soluções.
d) não possui soluções.
e) não possui soluções ou possui infinitas soluções.

RESOLUÇÃO:

Sr. Professor, faça uso deste exercício para mostrar a importância de se conhecer o Teorema de Rouché-Capelli.

Como $MI = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ **e** $MC = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

As características p e q dessas matrizes são menores ou iguais a dois. Assim, se p = q = 1 ou p = q = 2, o sistema é possível e indeterminado e se p ≠ q, o sistema é impossível.

Resposta: E

MÓDULO 29

DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES

1. **(UNICENTRO)** – O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -2 \\ ax + by = c \end{cases}$$ tem solução se, e somente se:

a) a = 2b e c = 0 b) a ≠ c c) c = 2b
d) a ≠ b e c = 2 e) b = c

RESOLUÇÃO 1:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -2 \\ ax + by = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para que estes valores satisfaçam a 3ª equação, devemos ter $a \cdot 0 + b \cdot 2 = c \Rightarrow c = 2b$

RESOLUÇÃO 2:

$$MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$$ **tem característica 2, pois** $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Para que a matriz completa

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$ **tenha característica 2, devemos ter**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -c - 2a + 2b + 2a - c + 2b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2c + 4b = 0 \Rightarrow c = 2b$$

Resposta: C

2. **(UFV)** – O sistema linear $\begin{cases} kx + y = 2 - k \\ x + ky = k \end{cases}$ nas incógnitas x, y, sendo k um número real, é impossível para

a) mais de dois valores de k.
b) exatamente dois valores de k.
c) apenas um valor de k.
d) nenhum valor de k.

RESOLUÇÃO:
Para ser impossível, as características das matrizes

$$MI = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \text{ e } MC = \begin{bmatrix} k & 1 & 2-k \\ 1 & k & k \end{bmatrix}$$

deverão ser diferentes. Desta forma,

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 = 0 \\ \text{e} \\ \begin{vmatrix} k & 2-k \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} k = \pm 1 \\ \text{e} \\ k \neq -2 \text{ e } k \neq 1 \end{cases},$$

portanto k = – 1.
Resposta: C

3. **(MACKENZIE)** – Os valores de k, para que o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + ky + z = 1 \\ -x + y + kz = 3 \end{cases}$$

não tenha solução real, são os 2 primeiros termos de uma progressão aritmética de termos crescentes.
Então, nessa PA, o logaritmo na base $\sqrt{3}$ do quadragésimo terceiro termo é

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

RESOLUÇÃO:

I) Uma condição necessária para que o sistema não tenha solução real é:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = -1 \text{ ou } k = -3$$

II) Para k = – 1, temos o sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 3 \end{cases}$ **, que possui a primeira e terceira equações incompatíveis.**

III) Para k = – 3, temos o sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \\ -x + y - 3z = 3 \end{cases}$ **, que possui a primeira e a segunda equações incompatíveis com a terceira equação (menos quatro vezes a primeira, acrescida da segunda, resulta em $-x + y - 3z = -7$).**

Logo, a progressão aritmética de termos crescentes (– 3, – 1, …) possui razão 2 e quadragésimo terceiro termo $a_{43} = -3 + 42 \cdot 2 = 81$ e, portanto,

$$\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 3 = 8$$

Resposta: A

4. **(UFSC)** – Uma solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 4 \\ x + z = 5 \end{cases}$ que verifica

$|x - y| = |y - z|$ é:

a) $x = y = z = 1$

b) $x = z = \frac{5}{2}, y = 1$

c) $x = 2, y = 1, z = 3$

d) $x = 3, y = 1, z = 2$

e) $x = 4, y = 1, z = 1$

RESOLUÇÃO:

1) Observemos que o sistema é possível e indeterminado, pois

$$MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **tem característica 2 e**

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ **também tem característica 2.**

2) Para $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$$

3) Para satisfazer a condição $|x - y| = |y - z|$ devemos ter

$$|5 - \alpha - 1| = |1 - \alpha| \Leftrightarrow |4 - \alpha| = |1 - \alpha| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \alpha = 1 - \alpha \\ \text{ou} \\ 4 - \alpha = -1 + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

4) Para $\alpha = \frac{5}{2}$, temos:

$$x = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \; y = 1 \text{ e } z = \frac{5}{2}$$

Resposta: B

MÓDULO 30

SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

1. **(AFA)** – Os valores de m, para os quais o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução $x = y = z = 0$, são:

a) $m = 4$ b) $m > 0$ c) $m \neq 4$ d) $m < 5$

RESOLUÇÃO:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & m \end{vmatrix} = -m + 4$$

Se o sistema admite somente a solução trivial, então $-m + 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Resposta: C

2. Sobre o sistema $\begin{cases} 2x - y = kx \\ x + 3y = ky \end{cases}$, pode-se afirmar que, para $k \in \mathbb{R}$,

a) não é homogêneo.
b) só admie a solução trivial.
c) não admite solução.
d) admite infinitas soluções.
e) admite a solução $(1; 1 - k)$ para $k \neq 1$.

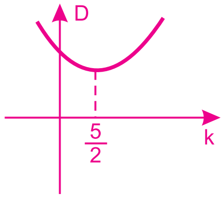
RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2x - y = kx \\ x + 3y = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - k)x - y = 0 \\ x + (3 - k)y = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} (2 - k) & -1 \\ 1 & (3 - k) \end{vmatrix} = (2 - k)(3 - k) + 1 =$$

$= 6 - 2k - 3k + k^2 + 1 = k^2 - 5k + 7 > 0, \forall k \in \mathbb{R}$, pois o gráfico de

$D = k^2 - 5k + 7$ é do tipo



Assim, o sistema só admite a solução trivial.
Resposta: B

3. **(UNIFEI-adaptado)** – Considere o sistema linear homogêneo:

$$S = \begin{cases} -2x - 2y + 3az = 0 \\ 2x + by + 2z = 0 \\ cx + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

, em que os números estritamente positivos a, b e c são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente. Qual deve ser o valor de (6a + 3b + c) para que esse sistema admita infinitas soluções?

RESOLUÇÃO:

O sistema é homogêneo e, portanto, para que o sistema admita inifinitas soluções, devemos ter

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3a \\ 2 & b & 2 \\ c & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4b - 4c + 12a - 3abc - 8 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 12a + 4b - 4c - 3abc = 0$

Se a, b e c são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, então a = k, b = 2k e c = 3k. Substituindo na equação acima, temos:

$-12 \,.\, k + 12 \,.\, k + 4 \,.\, 2k - 3 \,.\, k \,.\, 2k \,.\, 3k = 0 \Leftrightarrow 8k - 18k^3 = 0 \Leftrightarrow k = 0,$

$k = -\dfrac{2}{3}$ **ou** $k = \dfrac{2}{3}$ **. Como a, b e c são estritamente positivos, devemos ter** $k = \dfrac{2}{3}$ **. Consequentemente,** $a = \dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{4}{3}$ **e** $c = \dfrac{6}{3} = 2$

Assim:

$(6a + 3b + c) = 6 \,.\, \dfrac{2}{3} + 3 \,.\, \dfrac{4}{3} + 2 = 10$

Resposta: 10

4. **(FGV)** – O sistema de equações nas incógnitas x, y e z, dado abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 0 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{z} = 0 \end{cases}$$

a) tem uma única solução.
b) tem (0, 0, 0) como uma de suas soluções.
c) é impossível.
d) tem infinitas soluções.
e) no campo complexo, tem exatamente 3 soluções.

RESOLUÇÃO:

Fazendo $\dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{y} = b$ **e** $\dfrac{1}{z} = c$, **temos:**

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 0 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \quad \text{(I)} \\ 4a + b - 5c = 0 \end{cases}$$

O sistema (I) é homogêneo e só admite a solução trivial a = b = c = 0, pois

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$$

Como $\dfrac{1}{x} = a \neq 0$, $\dfrac{1}{y} = b \neq 0$ **e** $\dfrac{1}{z} = c \neq 0$ **para todo x, y e z não nulos, o sistema dado não admite solução.**

Resposta: C

5. No plano cartesiano o conjunto de pontos P(p; k) que tornam o sistema

$$\begin{cases} kx - py = 0 \\ px + 3y = 2x - 4y \end{cases}$$

possível e indeterminado pertence a uma
a) reta paralela ao eixo horizontal.
b) elipse de centro na origem.
c) parábola de vértice no 2º quadrante.
d) parábola de vértice no 1º quadrante.
e) circunferência de raio $\dfrac{1}{7}$.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} kx - py = 0 \\ px + 3y = 2x - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx - py = 0 \\ (p-2)x + 7y = 0 \end{cases}$$

Este sistema será possível e indeterminado se, e somente se,

$\begin{vmatrix} k & -p \\ (p-2) & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7k + p^2 - 2p = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{7}p^2 + \dfrac{2}{7}p$ **que é a equação de uma parábola de vértice** $V\left(1; \dfrac{1}{7}\right)$**, do primeiro quadrante.**

Resposta: D

MÓDULO 25

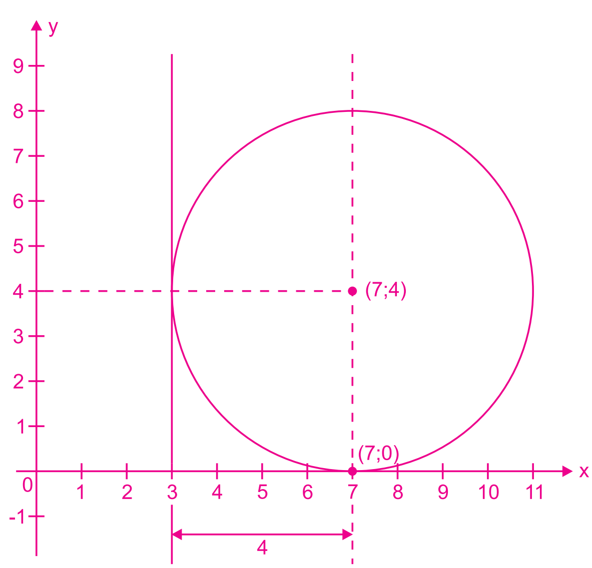
CIRCUNFERÊNCIA: EQUAÇÕES REDUZIDA E GERAL

1. **(PUC-RS)** – O comprimento da curva de equação
$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 9 = 0$ é
a) -1 b) 3 c) π d) 3π e) 6π

RESOLUÇÃO:
$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 9 = 0$ é a equação de uma circunferência de centro $(1; -1)$ e raio $r = 3$.
O comprimento C, dessa curva é tal que:
$C = 2\pi r \Leftrightarrow C = 6\pi$
Resposta: E

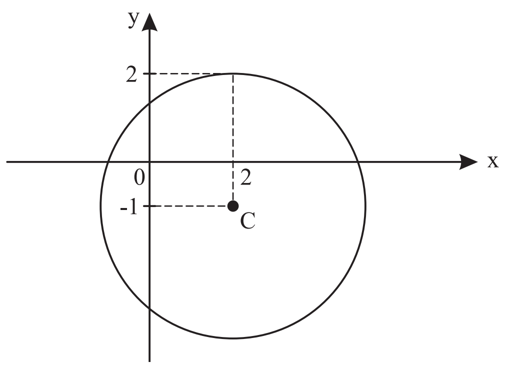
2. **(UN.FED. JUIZ DE FORA)** – No plano cartesiano, seja C uma circunferência situada no 1º quadrante, tangente à reta $x = 3$ e tangente ao eixo x no ponto $(7; 0)$. Uma equação cartesiana de C é:
a) $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 16$ b) $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 4$
c) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 16$ d) $(x-7)^2 + y^2 = 49$
e) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

RESOLUÇÃO:
Observe a figura abaixo:



De acordo com as condições do enunciado, conclui-se que a circunferência tem centro: C(7; 4) e raio: r = 4
e, portanto, equação $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 4^2$
Resposta: A

3. **(ESPM)** – Na figura abaixo, tem-se representada, em um sistema de eixos cartesianos, a circunferência λ de centro C.



A equação de λ é:
a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

RESOLUÇÃO:
A circunferência tem centro C $(2; -1)$ e raio $r = 3$. A equação dessa circunferência é: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
Resposta: A

4. **(FGV)** – No plano cartesiano, o ponto C(2; 3) é o centro de uma circunferência que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{CP}$, em que P é o ponto de coordenadas (5; 7). A equação da circunferência é:
a) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 27 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$
c) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 29 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 31 = 0$

RESOLUÇÃO:

1º) raio $= \dfrac{PC}{2} = \dfrac{\sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2}}{2} = \dfrac{5}{2}$

2º) Equação da circunferência, com centro C(2; 3) e raio $r = \dfrac{5}{2}$

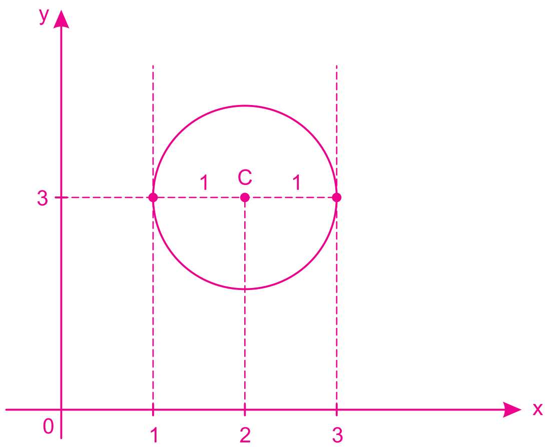
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + \frac{27}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 27 = 0$$

5. **(FGV)** – No plano cartesiano, a reta de equação x = k tangencia a circunferência de equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$. Os valores de k são:

a) – 2 ou 0 b) – 1 ou 1 c) 0 ou 2
d) 1 ou 3 e) 2 ou 4

RESOLUÇÃO:
A circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ tem centro C(2;3) e raio 1. A reta x = k é vertical.



Então: k = 1 ou k = 3
Resposta: D

6. **(FUVEST-adaptado)** – No plano Oxy, a circunferência (λ) tem centro no ponto C(– 5; 1) e é tangente à reta **t** de equação $4x - 3y - 2 = 0$. Escreva uma equação para a circunferência (λ).

RESOLUÇÃO:
O raio da circunferência é a distância do ponto C à reta t, então:

$$r = d_{C,t} = \frac{|4 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Uma equação para a circunferência (λ) é:
$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 25$

MÓDULO 26

DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DO RAIO

1. **(UNESP)** – A distância do centro da circunferência $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 2 = 0$ à origem é

a) 3. b) $\sqrt{5}$. c) $\sqrt{3}$. d) $\sqrt{2}$. e) 1.

RESOLUÇÃO:
O centro da circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

é o ponto $C\left(\frac{2}{-2}; \frac{-4}{-2}\right) \Leftrightarrow C(-1; 2)$, cuja distância à origem é:

$d = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$
Resposta: B

2. **(FGV)** – Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P é:

a) 10 b) 10,5 c) 11 d) 11,5 e) 1

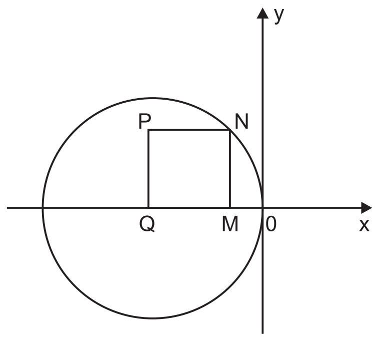
RESOLUÇÃO:
A circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ tem centro C (3; 5) e raio $r = \sqrt{3^2 + 5^2 - 30} = 2$.

O ponto P, de ordenada máxima, é P (3; 5 + 2) = P (3; 7).

A soma das coordenadas de P é 10.

Resposta: A

3. **(PUC-SP)** – Seja $x^2 + y^2 + 4x = 0$ a equação da circunferência de centro Q representada no plano cartesiano abaixo.



Se o quadrado PQMN tem os vértices Q e M sobre o eixo das abscissas e o vértice N pertence à circunferência, o ponto N é dado por:

a) $(\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})$
b) $(-\sqrt{2} + 2; \sqrt{2})$
c) $(\sqrt{2} - 2; 2)$
d) $(-\sqrt{2} - 2; 2 - \sqrt{2})$
e) $(-\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$

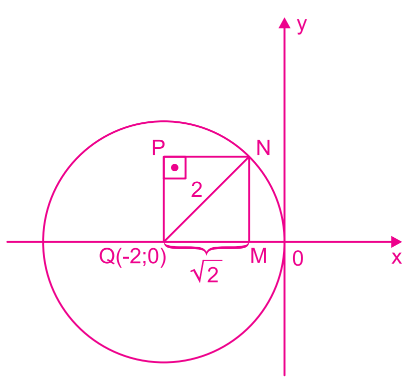
RESOLUÇÃO:

A circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4$ tem centro $Q(-2; 0)$ e raio $r = 2$.

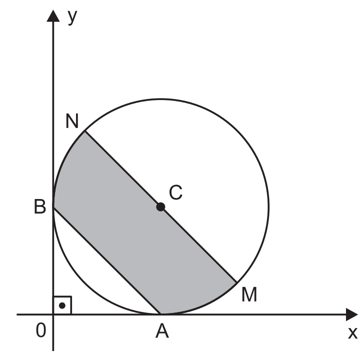
Sendo PQMN um quadrado com diagonal $QN = r = 2$, resulta $QM = \sqrt{2}$.

Dessa forma, têm-se $x_M = x_N = -2 + \sqrt{2}$ e $y_N = \sqrt{2}$ e as coordenadas de N são $(-2 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$.



Resposta: A

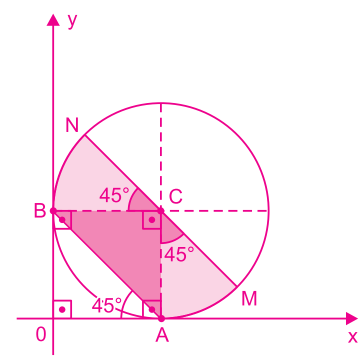
4. **(FUVEST)** – A circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ é tangente aos eixos coordenados x e y nos pontos A e B, conforme a figura. O segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao segmento $\overline{AB}$ e contém o centro C da circunferência.



É correto afirmar que a área da região hachurada vale

a) $\pi - 2$
b) $\pi + 2$
c) $\pi + 4$
d) $\pi + 6$
e) $\pi + 8$

RESOLUÇÃO:



A circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ tem centro $C(2;2)$ e raio $r = 2$.

Os triângulos OAB e ABC são retângulos e isósceles.

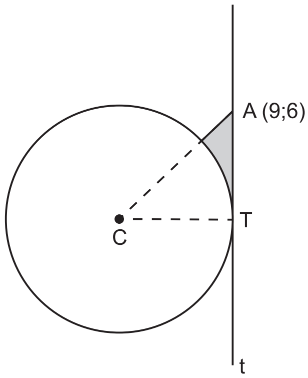
Sendo $A(2;0)$ e $B(0;2)$, pode-se concluir que a área hachurada é a soma das áreas de dois setores circulares, de ângulo central 45°, e do triângulo ABC.

Portanto, a área é:

$$A = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{8} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi + 2$$

Resposta: B

5. **(UFPB)** – Na figura, a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ tem centro no ponto C. Se o ponto A tem coordenadas (9;6) e a reta t é tangente à circunferência no ponto T, então a área assinalada é igual a:



a) $16 - 2\pi$

b) $8 - 2\pi$

c) $8 - \pi$

d) $\dfrac{\pi}{8}$

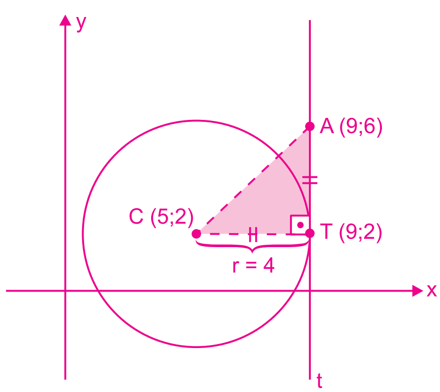
e) $4 + \pi$

RESOLUÇÃO:
A circunferência $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ tem:

centro: $C\left(\dfrac{-10}{-2}\,;\,\dfrac{-4}{-2}\right) \Rightarrow C(5;\,2)$

raio: $r = \sqrt{5^2 + 2^2 - 13} = 4$

A reta t, tangente à circunferência, passando pelo ponto A(9;6), tem equação x = 9.
As coordenadas do ponto T resultam (9; 2).
No triângulo ACT, retângulo em T, CT = AT = 4 e $A\hat{C}T = 45°$ (o triângulo ACT é retângulo e isósceles).



A área procurada será igual a:

$$A = A_{\triangle} - A_{\triangle} = \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{\pi \cdot 4^2}{8} = 8 - 2\pi$$

Resposta: B

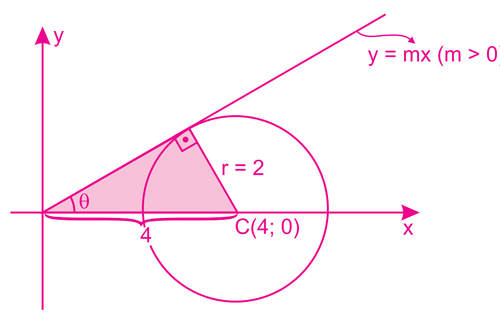
MÓDULO 27

POSIÇÃO DOS PONTOS DO PLANO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

1. **(FUVEST)** – A reta $y = mx$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x.

a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e) $\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO:
A circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ tem centro C(4; 0) e raio r = 2. A partir do enunciado, temos a seguinte figura:

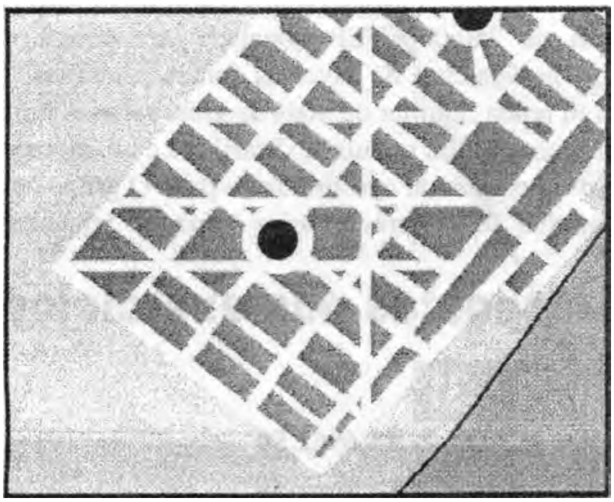


$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: B

2. **(UFPel)** – No chamado meio ambiente urbano, as praças públicas são bens de uso comum, contribuindo para o embelezamento das cidades, auxiliando sobremaneira na melhoria das condições sanitárias e higiênicas dos núcleos urbanos e promovendo o intercâmbio social e cultural.

Na figura abaixo, observa-se que algumas ruas atravessam a praça, outras a tangenciam em um único ponto e outras nem passam por ela. Considere uma praça circular delimitada por uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ e uma das ruas representada pela equação $4x + 3y - 4 = 0$.



De acordo com os textos e seus conhecimentos, é correto afirmar que a rua representada pela equação acima

a) tangencia a praça no ponto A(2, – 4).
b) tangencia a praça no ponto A(– 4, 8).
c) não atravessa a praça.
d) tangencia a praça no ponto A(– 2, 4).
e) atravessa a praça.

RESOLUÇÃO:

I) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ tem centro C(2; – 4) e raio r = 6.

II) A reta de equação $4x + 3y - 4 = 0$ é secante à circunferência, pois

$$\frac{|4 \cdot 2 + 3(-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5} < r = 6$$

Resposta: E

3. **(UNIRIO)** – Considerando uma circunferência de centro (2;1) que passa pelo ponto (2; – 2), assinale a opção correta.

a) A equação da circunferência é $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$.
b) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$.
c) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 < 0$.
d) O exterior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 2 > 0$.
e) O ponto (5; – 1) pertence à circunferência.

RESOLUÇÃO:

centro: C(2; 1)

raio: $r = \sqrt{(2-2)^2 + (1+2)^2} = 3$

A equação da circunferência é:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

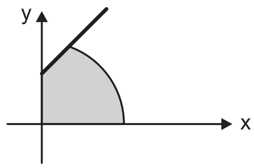
Os pontos internos da circunferência são representados por:

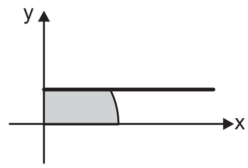
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 < 0$

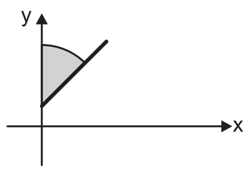
Resposta: C

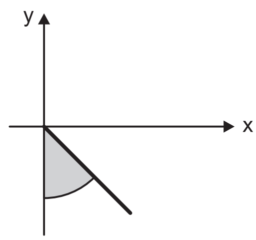
4. **(FUVEST)** – Das regiões hachuradas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x; y) do plano cartesiano, satisfazendo o conjunto de desigualdades

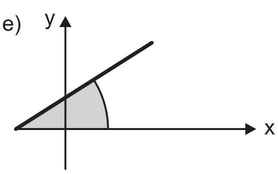
$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 \leqslant 9 \end{cases}, \text{ é:}$$

a) 

b) 

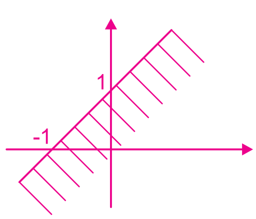
c) 

d) 

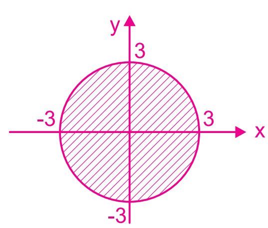
e) 

RESOLUÇÃO:

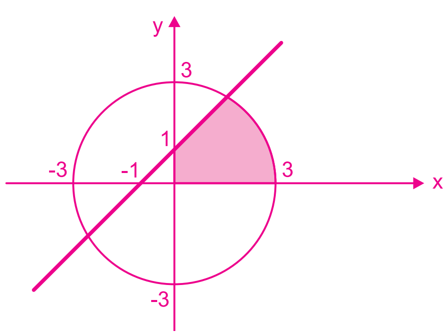
(I) $x - y + 1 \geqslant 0$



(II) $x^2 + y^2 \leqslant 9$



O conjunto das desigualdades no problema representa os pontos do 1º quadrante que satisfazem simultaneamente a (I) e a (II), isto é:



Resposta: A

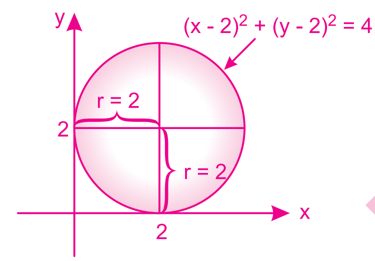
5. **(FATEC)** – Considere que R é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$ e $x - y \leqslant 0$. A área de R, em unidades de superfície, é:

a) π b) 2π c) π^2 d) 4π e) $4\pi^2$

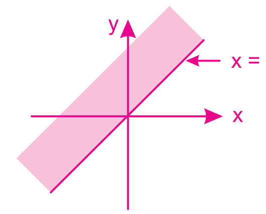
RESOLUÇÃO:

Os pontos do plano que satisfazem as sentenças estão representados nas figuras abaixo.

I) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$

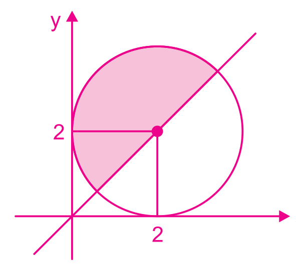


II) $x - y \leqslant 0$



As duas condições simultâneas representam um semicírculo, cuja área é:

$$A = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$$



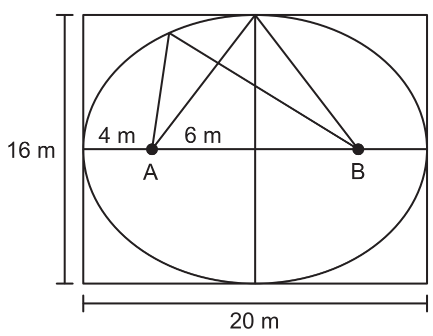
Resposta: B

MÓDULO 28

ELIPSE

(UEL) – Texto para as questões 1 e 2.

Existem pessoas que nascem com problemas de saúde relacionados ao consumo de leite de vaca. A pequena Laura, filha do Sr. Antônio, nasceu com este problema. Para solucioná-lo, o Sr. Antônio adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular medindo 20 m de comprimento e 16 m de largura. Acontece que as cabras comem tudo o que aparece à sua frente, invadindo hortas, jardins e chácaras vizinhas. O Sr. Antônio resolveu amarrar a cabra em uma corda presa pelas extremidades nos pontos A e B que estão 12 m afastados um do outro. A cabra tem uma argola na coleira por onde é passada a corda, de tal modo que ela possa deslizar livremente por toda a extensão da corda. Observe a figura e responda à questão a seguir.



1. Qual deve ser o comprimento da corda para que a cabra possa pastar na maior área possível, dentro do campo retangular?

a) 10 m b) 15 m c) 20 m d) 25 m e) 30 m

RESOLUÇÃO:
Os pontos A e B serão os focos da elipse, com eixos maior e menor, respectivamente: 2a = 20 m e 2b = 16 m.
Para que a cabra possa pastar na maior área possível (interior da elipse de focos em A e B), o comprimento da corda deve ser:
PA + PB = 2a (definição de elipse)
Assim: PA + PB = 20 m
Resposta: C

2. Obtenha a equação da curva que delimita a maior área possível nas condições do problema.

a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{8} = 1$ b) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ c) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

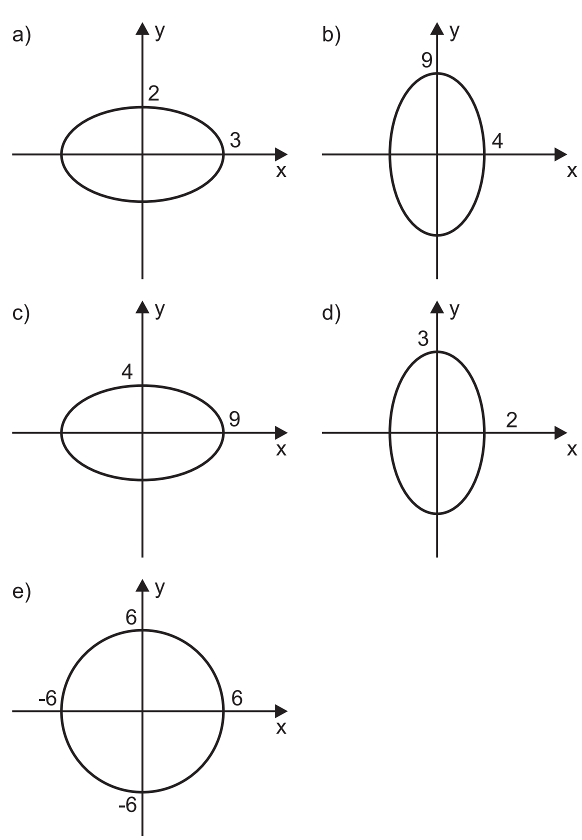
d) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ e) $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1$

RESOLUÇÃO:
Sendo 2a = 20 ⇔ a = 10
2b = 16 ⇔ b = 8,
a equação da elipse resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta: C

3. **(UFRN-adaptado)** – O gráfico que melhor representa a equação $9x^2 + 4y^2 = 36$, é:



RESOLUÇÃO:
A equação

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

representa uma elipse, com eixo maior vertical, centro na origem e com medidas dos semieixos iguais a:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Resposta: D

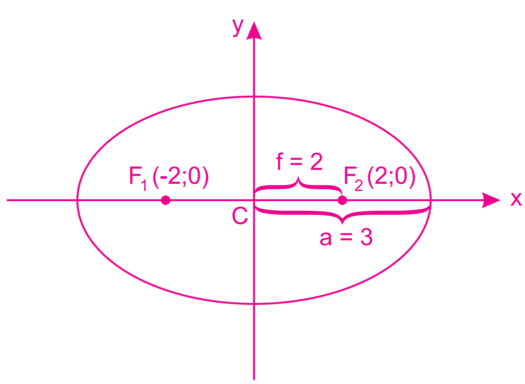
4. **(UNESP)** – A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por:

a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$ d) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

RESOLUÇÃO:



A elipse de focos $F_1(-2;0)$ e $F_2(2;0)$ e eixo maior igual a 6 é tal que:

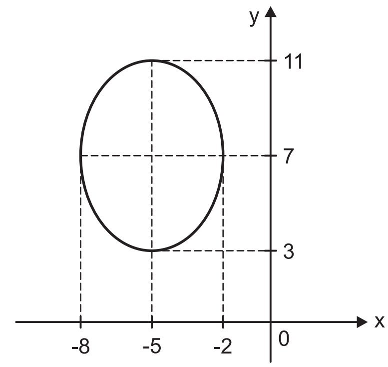
$$\left.\begin{array}{l} f = 2 \\ a = 3 \\ a^2 = b^2 + f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

A equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Resposta: B

5. **(UNESP)** – A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é:

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$

b) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$

c) $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 1$

d) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{16} = 1$

e) $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$

RESOLUÇÃO:
A elipse da figura tem centro $C(-5;7)$ e semi-eixos $a = 4$ e $b = 3$.
A equação reduzida da elipse, representada na figura, com centro $C(g;h)$ e semi-eixos a e b, é:

$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

Resposta: B

MÓDULO 29

HIPÉRBOLE

1. **(USF)** – Se os lados de um retângulo têm medidas iguais às medidas do eixo transverso e do eixo conjugado da hipérbole de equação $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$, a área desse retângulo, em unidades de área, é igual a:

a) 90 b) 120 c) 50 d) 44 e) 60

RESOLUÇÃO:

A hipérbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ tem:

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ (eixo transverso)

$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow 2b = 10$ (eixo conjugado)

A área do retângulo é igual a:

$A = 12 \cdot 10 = 120$

Resposta: B

2. **(CESGRANRIO-adaptado)** – Esboçar o gráfico da curva de equação $y^2 - 4x^2 = 16$, determinando as coordenadas dos vértices e dos focos.

RESOLUÇÃO:

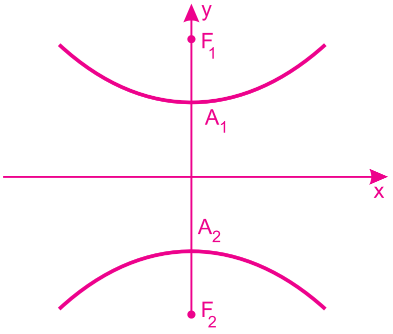
$y^2 - 4x^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

representa uma hipérbole com focos no eixo y, sendo:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

O gráfico é do tipo:

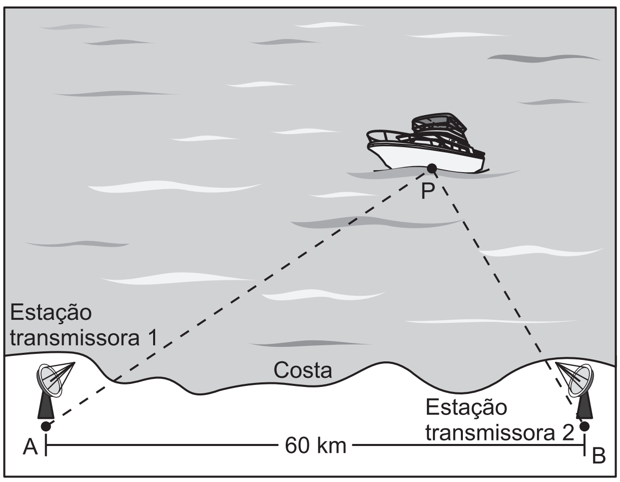


Então: $f^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$ e $f = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Os focos têm coordenadas: $F_1(0; 2\sqrt{5})$ e $F_2(0; -2\sqrt{5})$.

Os vértices são os pontos $A_1(0; 4)$ e $A_2(0; -4)$.

3. **(UFPB)** – Em certo sistema marítimo de navegação, duas estações de rádio, localizadas na costa, nos pontos A e B, transmitem simultaneamente sinais de rádio para qualquer embarcação que se encontre no mar, na área de alcance dessas estações. Sendo P o ponto onde está localizada uma embarcação que recebe esses sinais, o computador de bordo da embarcação calcula a diferença, $\overline{PA} - \overline{PB}$, das distâncias da embarcação a cada uma das estações.

Um navio que estava ancorado no mar recebeu o sinal da estação localizada em B e, 120 microssegundos (μs) depois, recebeu o sinal da estação localizada em A, conforme a figura abaixo.



Dados:
- $1s = 10^6 \mu s$
- A velocidade do sinal de rádio é de 300.000 km/s.

Considere as estações de rádio e o ponto P onde esse navio estava ancorado como pontos de um plano cartesiano, onde a unidade de comprimento é o quilômetro e A(– 30; 0) e B(30; 0).

Nesse contexto, é correto afirmar que a hipérbole com focos nos pontos A e B e que contém o ponto P tem como equação a expressão:

a) $\dfrac{x^2}{324} - \dfrac{y^2}{576} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{361} - \dfrac{y^2}{676} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{324} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{676} - \dfrac{y^2}{361} = 1$

e) $\dfrac{x^2}{289} - \dfrac{y^2}{625} = 1$

RESOLUÇÃO:

I) Com base no enunciado:

1) $\Delta t_1 - \Delta t_2 = 120\ \mu s = 120 \cdot 10^{-6} s = \dfrac{12}{10^5}$ **segundos**

2) $V = 300\,000\ km/s = 3 \cdot 10^5\ km/s$

3) $V = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Portanto, resulta $\Delta s = 3 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{12}{10^5} = 36\ km = PA - PB.$

II) Como $PA - PB = 2a = 36 \Leftrightarrow a = 18$, $AB = 2 \cdot f = 60 \Leftrightarrow f = 30$ **e** $a^2 + b^2 = f^2$, **temos:** $18^2 + b^2 = 30^2 \Leftrightarrow b^2 = 576.$

III) A hipérbole, com focos em A e B, tem centro na origem e equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{576} = 1$$

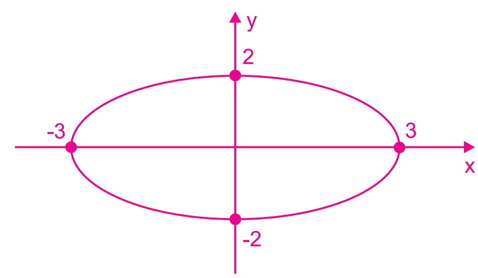
Resposta: A

4. **(IBMEC)** – Faça um esboço do gráfico de cada uma das curvas abaixo:

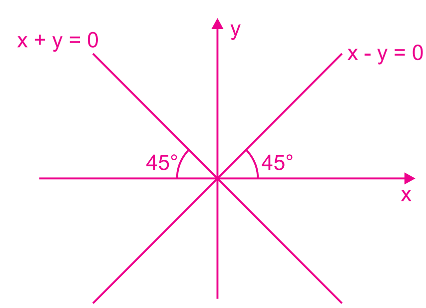
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ b) $x^2 - y^2 = 0$ c) $y = \dfrac{4}{x}$

RESOLUÇÃO:

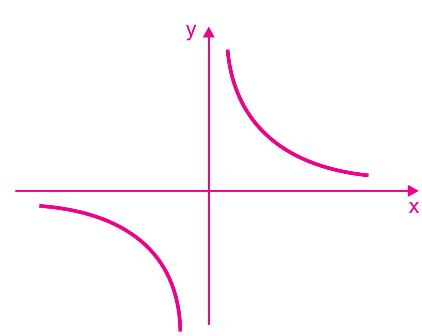
a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y}{4} = 1$ **(elipse)**



b) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y).(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \text{ou} \\ x + y = 0 \end{cases}$



c) $y = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = 4$ **… hipérbole equilátera.**

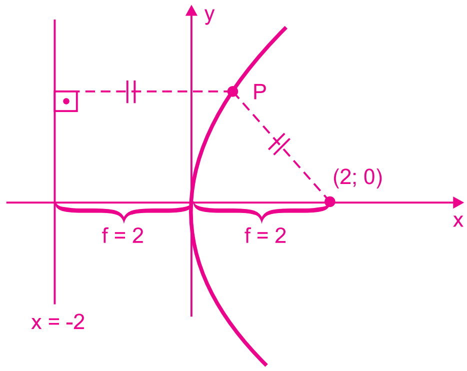


MÓDULO 30

PARÁBOLA

1. **(UNIRP)** – Esboçar o gráfico e obter a equação do L.G. dos pontos do plano que equidistam do ponto F(2; 0) e da reta de equação (r) $x = -2$.

RESOLUÇÃO:
O L.G. é uma parábola com foco em *F* e diretriz *r*.
Gráfico:



Equação: para $f = 2$ e $y^2 = 4 \cdot f \cdot x$, temos: $y^2 = 8 \cdot x$.

2. **(USF)** – Um triângulo, que tem como vértices os focos das parábolas $x^2 = -12y$, $y^2 = 16x$ e $y^2 = -12x$, tem área igual a:

a) 21 b) 13 c) 11 d) 12 e) $\dfrac{21}{2}$

RESOLUÇÃO:

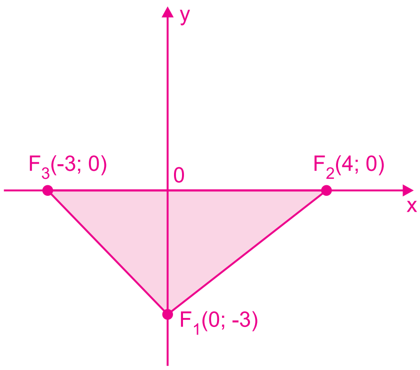
1) Focos das parábolas:

$x^2 = -12 \cdot y \to F_1\ (0; -3)$

$y^2 = 16 \cdot x \to F_2\ (4; 0)$

$y^2 = -12 \cdot x \to F_3\ (-3; 0)$

2) Área do $\Delta F_1F_2F_3$:



$$A = \frac{F_2F_3 \cdot 0F_1}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

Resposta: E

3. **(MACKENZIE)** – A equação da parábola que tem vértice no ponto V(4; 1) e foco F(2; 1) é:

a) $(y - 1)^2 = - 16 . (x - 4)$

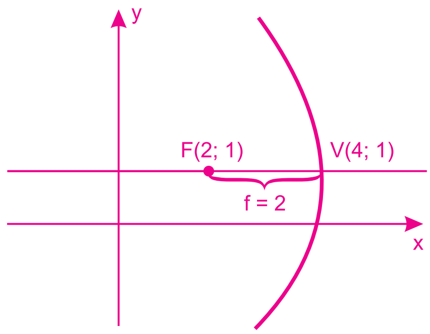
b) $(y - 4)^2 = 8 . (x - 1)$

c) $(y - 1)^2 = 2 . (x - 4)$

d) $(y - 2)^2 = - 4 . (x - 1)$

e) $(y - 1)^2 = - 8 . (x - 4)$

RESOLUÇÃO:



Com base na figura, temos:

$(y - 1)^2 = - 4 . 2 . (x - 4)$

$(y - 1)^2 = - 8 . (x - 4)$

Resposta: E

4. **(UNESP)** – Fixado um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, considere os pontos O(0; 0), A(0; 2) e a reta **r** de equação y = – 1.

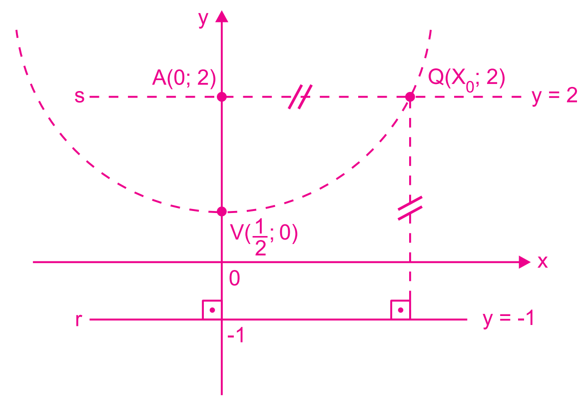
a) Se a distância do ponto $Q(x_0; 2)$ ao ponto A é igual à distância de Q à reta **r**, obtenha o valor de x_0, supondo $x_0 > 0$.

b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos P(x; y) desse plano, cuja distância até o ponto A é igual à distância até a reta **r**.

RESOLUÇÃO:

a) A reta *s*, que passa pelos pontos A(0; 2) e $Q(x_0; 2)$ é horizontal e, portanto, paralela à reta *r*, de equação y = – 1. Assim, a distância entre as retas *r* e *s* é igual a 3.

Se a distância do ponto $Q(x_0; 2)$ ao ponto A é igual à distância de Q à reta *r* (distância entre as retas *r* e *s*), devemos ter AQ = 3 e, portanto, supondo $x_0 > 0$, resulta $x_0 = 3$.



b) O lugar geométrico dos pontos P(x; y) desse plano cuja distância até o ponto A(0; 2) é igual à distância até a reta *r*, de equação y + 1 = 0, é tal que: $d_{P,r} = d_{P,A} \Leftrightarrow |y + 1| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 6 . \left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

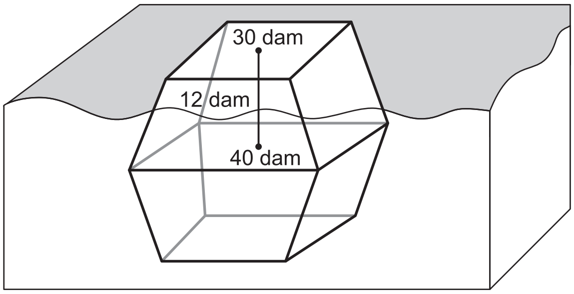
O L.G. representa uma parábola de foco A(0; 2) e diretriz y + 1 = 0.

Respostas: a) $x_0 = 3$ b) $x^2 = 6 . \left(y - \dfrac{1}{2}\right)$

MÓDULO 25

TRONCOS

1. **(UNESP)** – Com o fenômeno do efeito estufa e consequente aumento da temperatura média da Terra, há o desprendimento de *icebergs* (enormes blocos de gelo) das calotas polares terrestres. Para calcular o volume aproximado de um *iceberg*, podemos compará-lo com sólidos geométricos conhecidos. Suponha que o sólido da figura, formado por dois troncos de pirâmides regulares de base quadrada simétricos e justapostos pela base maior, represente aproximadamente um *iceberg*.



As arestas das bases maior e menor de cada tronco medem, respectivamente, 40 dam e 30 dam e a altura mede 12 dam.

Sabendo que o volume V_S da parte submersa do *iceberg* corresponde a aproximadamente 7/8 do volume total V, determine V_S.

RESOLUÇÃO:

1) O volume V, em decâmetros cúbicos, do *iceberg* é dado por:

$$V = 2 \cdot \frac{12}{3}\left(40^2 + 30^2 + \sqrt{40^2 \cdot 30^2}\right) =$$

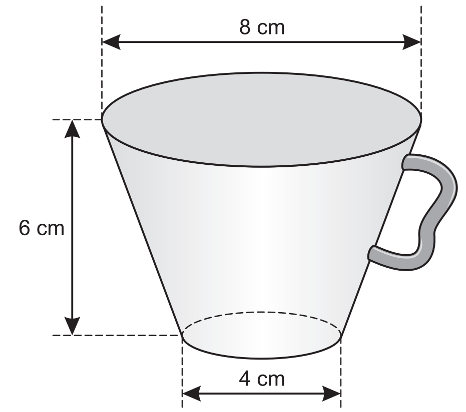
$$= 8 \cdot (1600 + 900 + 1200) = 8 \cdot 3700 = 29600$$

2) O volume V_S, em decâmetros cúbicos, da parte submersa do *iceberg* é dado por:

$$V_S = \frac{7}{8} \cdot (8 \cdot 3700) = 25\,900$$

Resposta: 25 900 decâmetros cúbicos

2. **(MACKENZIE)** – Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura. Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é:



a) $168\ cm^3$
b) $172\ cm^3$
c) $166\ cm^3$
d) $176\ cm^3$
e) $164\ cm^3$

RESOLUÇÃO:

O volume máximo de líquido que a xícara pode conter é o volume do tronco do cone dado por

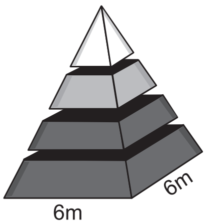
$$V = \frac{6}{3} \cdot \left(\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 + \sqrt{\pi \cdot 4^2 \cdot \pi \cdot 2^2}\right) cm^3 =$$

$$= 2(16\pi + 4\pi + 8\pi)\ cm^3 = 56\pi\ cm^3$$

Supondo $\pi = 3$, resulta $V = 56 \cdot 3\ cm^3 = 168\ cm^3$

Resposta: A

3. **(ENEM)** – Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

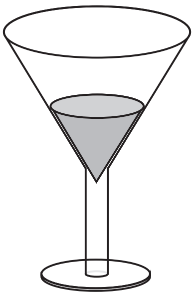
a) 156 cm^3 b) 189 cm^3 c) 192 cm^3
d) 216 cm^3 e) 540 cm^3

RESOLUÇÃO:
De acordo com o enunciado, pode-se concluir que a altura da pirâmide de parafina é 16 cm e que a altura da pirâmide menor, retirada, é 4 cm.
Assim, o volume, em centímetros cúbicos, de parafina para fabricar o novo modelo de vela é igual a:

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot (1,5)^2 \cdot 4 = 192 - 3 = 189$$

Resposta: B

4. **(UFMG)** – Observe a figura.

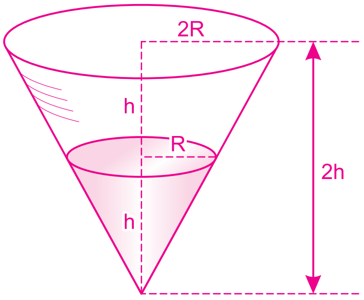


Essa taça, cujo interior tem a forma de um cone, contém suco até a metade da altura do cone interno. Se o volume do cone interno é igual a V, então o volume do suco nele contido é:

a) $\frac{V}{16}$ b) $\frac{V}{9}$ c) $\frac{V}{8}$

d) $\frac{V}{4}$ e) $\frac{V}{3}$

RESOLUÇÃO:



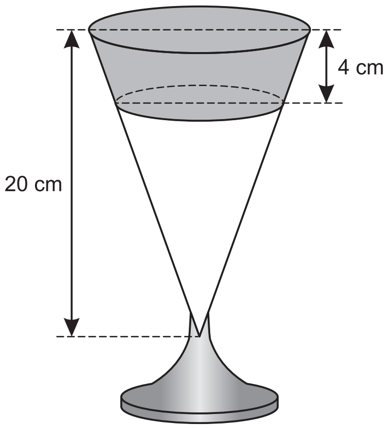
1) $V = \frac{1}{3} \pi (2R)^2 \cdot 2h \Leftrightarrow \pi R^2 h = \frac{3V}{8}$

2) $V_{suco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

Assim, $V_{suco} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3V}{8} \Leftrightarrow V_{suco} = \frac{V}{8}$

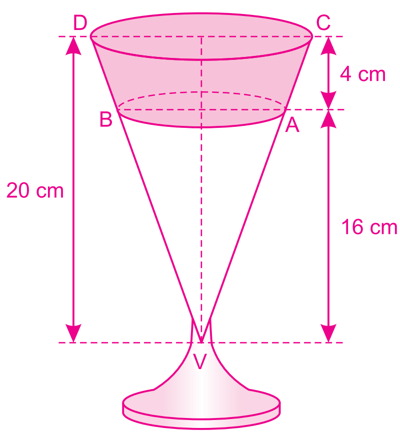
Resposta: C

5. **(MACKENZIE)** – Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura. Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4 cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está mais bem aproximada na alternativa:



a) 65%
b) 60%
c) 50%
d) 45%
e) 70%

RESOLUÇÃO:



Sejam V_E, V_S e V_C, respectivamente, os volumes da espuma, da parte consistente de sorvete e do copo.
Da semelhança dos sólidos VAB e VCD, conforme a figura, temos:

$$\frac{V_S}{V_C} = \left(\frac{16}{20}\right)^3 \Leftrightarrow V_S = \frac{64}{125} \cdot V_C$$

Como

$$V_E = V_C - V_S = V_C - \frac{64}{125} \cdot V_C = \frac{61}{125} \cdot V_C = 0{,}488 \,.\, V_C$$

tem-se: $V_E = 48{,}8\% \,.\, V_C \cong 50\% \,.\, V_C$

Resposta: C

MÓDULO 26

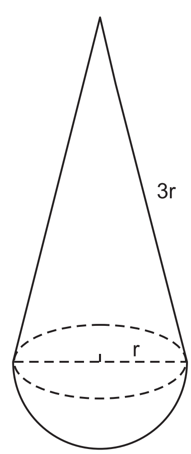
A ESFERA E SUAS PARTES

1. **(FUVEST)** – Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO:
$R = 13$, $d = 12$ e $R^2 = d^2 + r^2$
Assim: $13^2 = 12^2 + r^2 \Rightarrow r = 5$
Resposta: E

2. **(MACKENZIE)** – Uma boia marítima construída de uma determinada liga metálica tem o formato de uma gota que, separada em dois sólidos, resulta em um cone reto e em uma semiesfera, conforme a figura abaixo, na qual r = 50 cm. Se o preço do m^2 da liga metálica é 1200 reais, adotando-se $\pi = 3$, o custo da superfície da boia é, em reais, igual a



a) 4200
b) 5700
c) 4500
d) 5200
e) 3800

RESOLUÇÃO:
Sendo S a área da superfície da gota, em metros quadrados, temos:

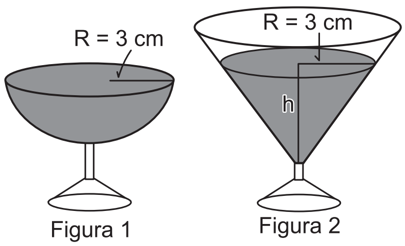
$$S = S_{\text{lateral do cone}} + S_{\text{semiesfera}} =$$

$$= \pi \,.\, r \,.\, 3r + \frac{4\pi r^2}{2} = 3 \,.\, 0{,}5 \,.\, 3 \,.\, 0{,}5 + \frac{4 \,.\, 3 \,.\, (0{,}5)^2}{2} = 3{,}75$$

Assim, o custo da superfície da boia é, em reais, 3,75 . 1200 = 4500
Resposta: C

3. **(ENEM)** – Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad e \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33. b) 6,00. c) 12,00.
d) 56,52. e) 113,04.

RESOLUÇÃO:

1) O volume da semiesfera é $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \,.\, 3^3 = 18\pi \text{ cm}^3$

2) O volume do cone com raio da base 3 cm e altura h é

$\frac{1}{3} \pi \,.\, 3^2 \,.\, h = 3\pi h \text{ cm}^3$

3) Para que os volumes sejam iguais, devemos ter:

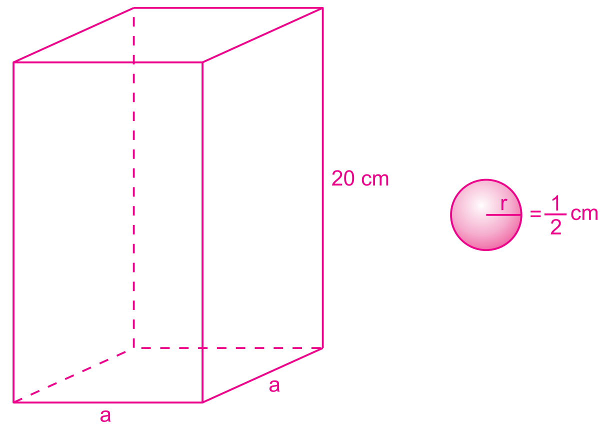
$3\pi h = 18\pi \Rightarrow h = 6$ cm

Resposta: B

4. **(PUC-SP)** – Um artesão dispõe de um bloco maciço de resina, com a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrada e cuja altura mede 20 cm. Ele pretende usar toda a resina desse bloco para confeccionar contas esféricas que serão usadas na montagem de 180 colares. Se cada conta tiver 1 cm de diâmetro e na montagem de cada colar forem usadas 50 contas, então, considerando o volume do cordão utilizado desprezível e a aproximação $\pi = 3$, a área total da superfície do bloco de resina, em centímetros quadrados, é

a) 1250 b) 1480 c) 1650
d) 1720 e) 1850

RESOLUÇÃO:



Sejam *a* a medida, em centímetros, da aresta da base do paralelepípedo retângulo e $r = \frac{1}{2}$ cm o raio da esfera.

O número de contas que serão utilizadas para fazer os 180 colares é 180 . 50 = 9 000

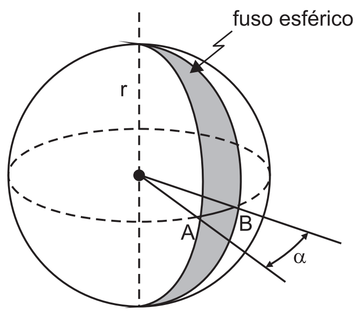
Assim, o volume do paralelepípedo retângulo deve ser igual ao volume das 9 000 contas e, portanto,

$$a^2 \,.\, 20 = 9\,000 \,.\, \frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow a = 15$$

Logo, a área total A_T, em centímetros quadrados, do paralelepípedo retângulo é: $A_T = 2 \,.\, 15^2 + 4 \,.\, 15 \,.\, 20 = 1650$

Resposta: C

5. **(FGV-SP)** – Um observador colocado no centro de uma esfera de raio 5 m vê o arco AB sob um ângulo α de 72°, como mostra a figura. Isso significa que a área do fuso esférico determinado por α é



a) $20\,\pi\,m^2$ b) $15\,\pi\,m^2$ c) $10\,\pi\,m^2$
d) $5\,\pi\,m^2$ e) $\pi\,m^2$

RESOLUÇÃO:
Sendo S a área do fuso, em metros quadrados, temos:

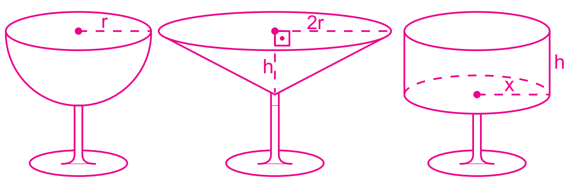
$$S = \frac{72°}{360°} \cdot 4\pi \cdot 5^2 = 20\pi$$

Resposta: A

6. **(FUVEST)** – Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semi-esfera de raio r; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio 2r e altura h; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h. Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{h}$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

RESOLUÇÃO:



Do enunciado, tem-se:

1º) $V_{semiesfera} = V_{cone}$

Assim: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi\,(2r)^2 \cdot h \Leftrightarrow r = 2h$

2º) $V_{semiesfera} = V_{cilindro} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi x^2 h$

Assim: $\frac{2}{3}\,(2h)^3 = x^2 h \Leftrightarrow 16h^3 = 3x^2 h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{h^2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, **pois x > 0 e h > 0**

Resposta: E

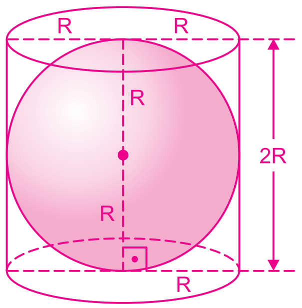
MÓDULO 27

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

1. **(MACKENZIE)** – A razão entre o volume de uma esfera e o volume de um cilindro circular reto circunscrito a esta esfera é igual a:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUÇÃO:



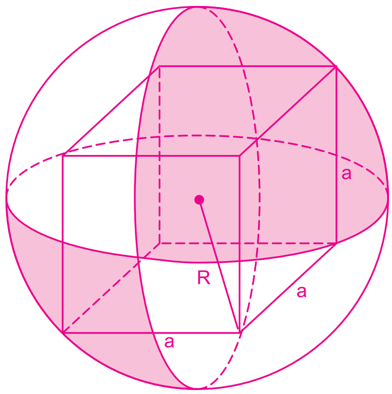
$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 (2R)} = \frac{4\,\pi R^3}{6\,\pi R^3} = \frac{2}{3}$$

Resposta: B

2. **(MACKENZIE)** – Um cubo está inscrito numa esfera. Se a área total do cubo é 8, o volume da esfera é:

a) $\dfrac{8\pi}{3}$ b) $\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\dfrac{16\pi}{3}$ d) 12π e) 8π

RESOLUÇÃO:



Sendo *a* a medida da aresta do cubo, *d* a medida da diagonal do cubo e *R* o raio da esfera, temos:

I) $6a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

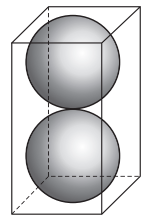
II) $2R = d \Leftrightarrow R = \dfrac{d}{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = 1$

Assim, o volume V da esfera é dado por:

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \Leftrightarrow V = \dfrac{4\pi}{3}$

Resposta: B

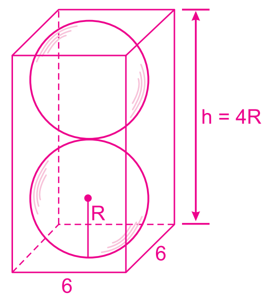
3. **(FATEC)** – Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo.



O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a:

a) 0,144 b) 0,206 c) 1,44
d) 2,06 e) 20,6

RESOLUÇÃO:



Sejam R e h, respectivamente, as medidas, em centímetros, do raio da esfera e da altura do paralelepípedo.

Assim,

a) $R = \dfrac{6}{2} = 3$

b) $h = 4R = 4 \cdot 3 = 12$

Sendo V_L o volume do líquido, V_P o volume do paralelepípedo e V_E o volume da esfera, em centímetros cúbicos, temos:

$V_L = V_P - 2 \cdot V_E = 6^2 \cdot 12 - 2 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 432 - 72\pi \cong 205{,}92$

Logo, o volume do líquido é aproximadamente 0,206 litro.

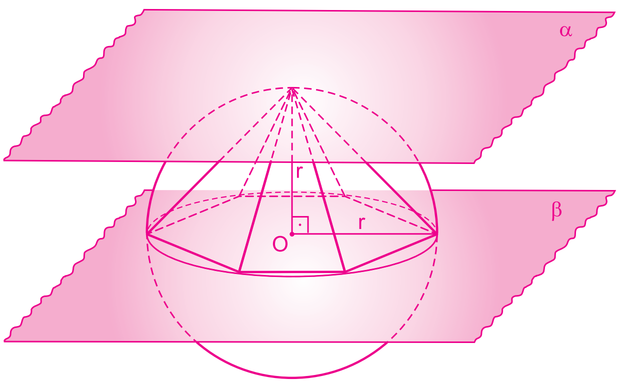
Resposta: B

4. **(FUVEST)** – A esfera ε, de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α. O plano β é paralelo a α e contém O. Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{3}\,r^3}{4}$ b) $\dfrac{5\sqrt{3}\,r^3}{16}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}\,r^3}{8}$

d) $\dfrac{7\sqrt{3}\,r^3}{16}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}\,r^3}{2}$

RESOLUÇÃO:



Sendo, h a medida da altura, A_B a área da base e V o volume da pirâmide, temos:

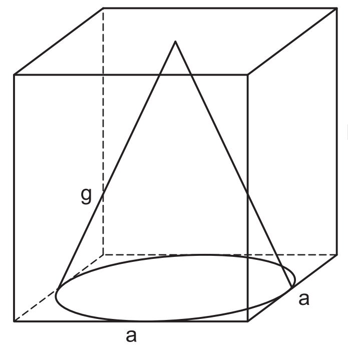
I) $A_B = 6 \cdot \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2}$

II) $h = r$

III) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot r = \dfrac{\sqrt{3}\,r^3}{2}$

Resposta: E

5. **(FUVEST)** – Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é 3/2 e o volume do cone é π. Então, o comprimento **g** da geratriz do cone é:



a) $\sqrt{5}$

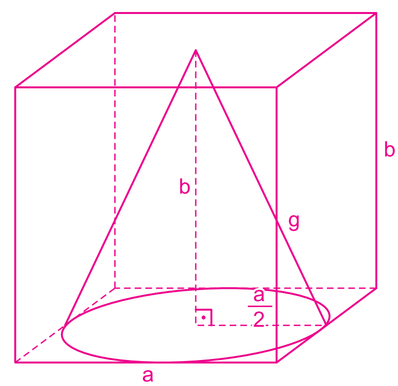
b) $\sqrt{6}$

c) $\sqrt{7}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\sqrt{11}$

RESOLUÇÃO:



De acordo com o enunciado, tem-se:

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b = \dfrac{3a}{2}$ e $\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \cdot b = \pi \Leftrightarrow a^2 b = 12$

Assim: $a^2 \cdot \dfrac{3a}{2} = 12 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$ e $b = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3$

Por outro lado, de acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se:

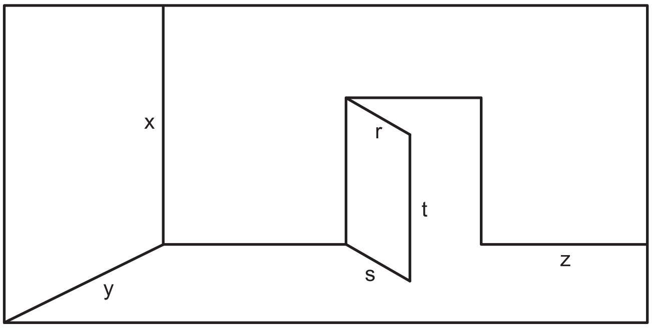
$g^2 = b^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow g^2 = 3^2 + \left(\dfrac{2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow g^2 = 10 \Leftrightarrow g = \sqrt{10}$

Resposta: D

MÓDULO 28

PARALELISMO, PERPENDICULARISMO NO ESPAÇO E PROJEÇÕES ORTOGONAIS

1. **(FAAP)** – A figura abaixo mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



As retas **r** e **s**, **s** e **t**, **x** e **r** têm, respectivamente, as posições relativas:
a) paralelas, paralelas e perpendiculares.
b) paralelas, perpendiculares e reversas.
c) paralelas, perpendiculares e perpendiculares.
d) reversas, paralelas e perpendiculares.
e) perpendiculares, reversas e paralelas.

RESOLUÇÃO:
1) As retas *r* e *s* são paralelas.
2) As retas *s* e *t* são perpendiculares.
3) As retas *x* e *r* são reversas.
Resposta: B

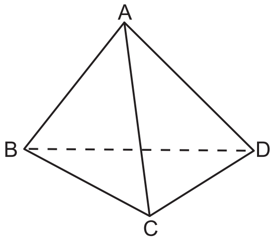
2. **(FAAP)** – Duas retas são reversas quando
a) não existe plano que contém ambas.
b) existe um único plano que as contém.
c) não se interceptam.
d) não são paralelas.
e) são paralelas, mas estão contidas em planos distintos.

RESOLUÇÃO:
Duas retas são reversas quando não são coplanares, ou seja, quando não existe plano que contém ambas.
Resposta: A

3. **(UNICAMP)** – É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme.
Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

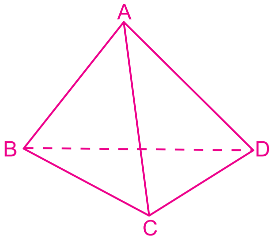
RESOLUÇÃO:
Isso não acontece com uma mesa de três pernas porque, de acordo com o postulado de determinação do plano, pode-se afirmar que três pontos não colineares determinam um e um só plano.

4. **(UNIFESP)** – Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é:



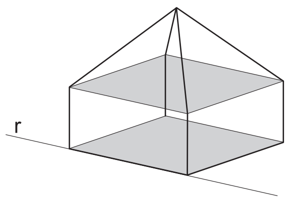
a) 6 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

RESOLUÇÃO:



Considerando-se as arestas do tetraedro ABCD da figura, são reversas as dos seguintes pares: ($\overline{AB}$; $\overline{CD}$), ($\overline{AD}$; $\overline{BC}$) e ($\overline{AC}$; $\overline{BD}$), ou seja, um total de 3 pares.
Resposta: B

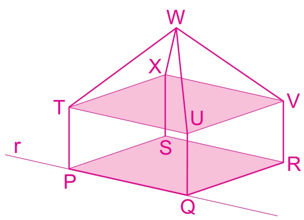
5. **(UNIFESP)** – Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide. Seja **r** a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.



Quantos pares de retas reversas é possível formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo **r** uma das retas do par?

a) 12 b) 10 c) 8 d) 7 e) 6

RESOLUÇÃO:



Supondo o paralelepípedo reto retângulo e a pirâmide regular, são reversas com *r* (não paralelas e não concorrentes) as seguintes retas suportes das arestas do sólido: $\overline{WT}$, $\overline{WU}$, $\overline{WV}$, $\overline{WX}$, $\overline{TX}$, $\overline{UV}$, $\overline{SX}$ e $\overline{RV}$, portanto, 8 retas.

Resposta: C

MÓDULO 29

PARALELISMO, PERPENDICULARISMO NO ESPAÇO E PROJEÇÕES ORTOGONAIS

1. **(PUC-SP)** – Dois planos, β e γ, cortam-se na reta **r** e são perpendiculares a um plano α. Então,

a) β e γ são perpendiculares.

b) **r** é perpendicular a α.

c) **r** é paralela a α.

d) todo plano perpendicular a α encontra **r**.

e) existe uma reta paralela a α e a **r**.

RESOLUÇÃO:

Sendo $s = \beta \cap \alpha$ e $t = \gamma \cap \alpha$, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} r \perp s,\ r \perp t \\ s \subset \alpha,\ t \subset \alpha \\ s \text{ e } t \text{ concorrentes} \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp pl(s, t) \Rightarrow r \perp \alpha$$

Resposta: B

2. **(ESCOLA NAVAL)** – Se α é um plano e **P** é um ponto não pertencente a α, quantos planos e quantas retas, respectivamente, contêm **P** e são perpendiculares a α?

a) 1 e 1. b) Infinitos e zero.

c) Infinitos e 1. d) Zero e 1.

e) Infinitos e infinitas.

RESOLUÇÃO:

Por um ponto não pertencente a um plano, pode-se traçar uma e só uma reta perpendicular a esse plano e infinitos planos perpendiculares ao referido plano.

Resposta: C

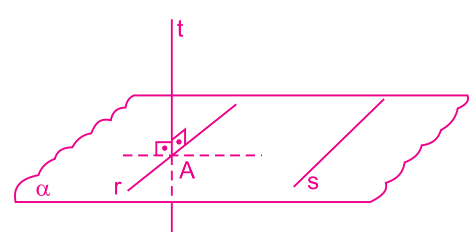
3. **(ESPM)** – Sejam **r** e **s** duas retas distintas, paralelas entre si, contidas em um plano α. A reta **t**, perpendicular ao plano α, intercepta a reta **r** em **A**. As retas **t** e **s** são

a) reversas e não ortogonais. b) ortogonais.

c) paralelas entre si. d) perpendiculares entre si.

e) coplanares.

RESOLUÇÃO:



A reta t é perpendicular a α e $t \cap \alpha = \{A\}$.

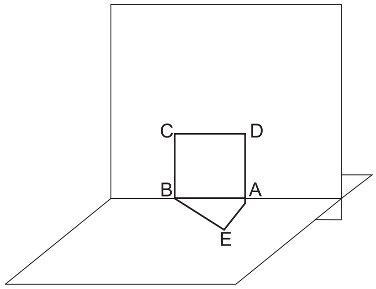
Assim, pode-se afirmar que t é perpendicular a todas as retas de α que passam por A e que t é ortogonal a todas as retas de α que não passam por A.

Portanto:

$$\begin{cases} t \text{ e } r \text{ são perpendiculares} \\ t \text{ e } s \text{ são ortogonais} \end{cases}$$

Resposta: B

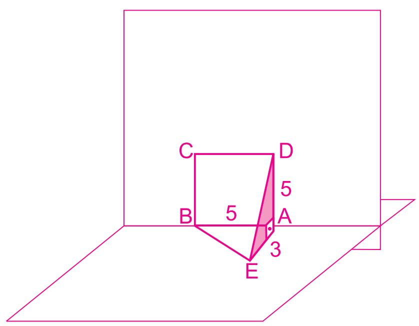
4. **(UFSCar)** – O triângulo ABE e o quadrado ABCD estão em planos perpendiculares, conforme indica a figura.



Se EA = 3 e AB = 5, então ED é igual a:

a) $\sqrt{24}$ b) 5 c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{2}$ e) $\sqrt{34}$

RESOLUÇÃO:



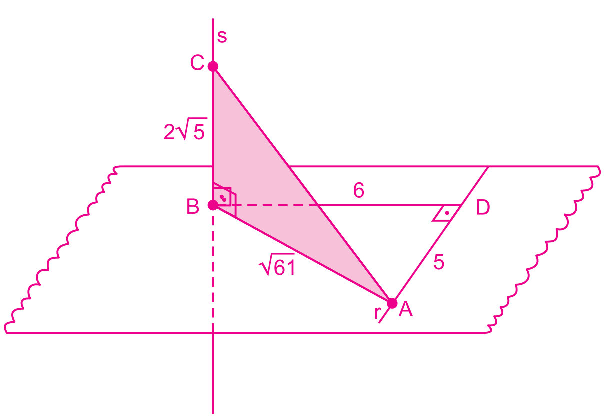
1) **Como ABCD é um quadrado, temos: AD = AB = 5.**
2) **O triângulo ADE é retângulo em A, pois os planos são perpendiculares. Assim, do Teorema de Pitágoras, temos:**
$(ED)^2 = (EA)^2 + (AD)^2 \Leftrightarrow (ED)^2 = 3^2 + 5^2 \Leftrightarrow ED = \sqrt{34}$

Resposta: E

5. **(FATEC)** – O ponto A pertence à reta **r**, contida no plano α. A reta **s**, perpendicular a α, o intercepta no ponto B. O ponto C pertence a **s** e dista $2\sqrt{5}$ cm de B. Se a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ em **r** mede 5 cm e o ponto B dista 6 cm de **r**, então a distância de A a C, em centímetros, é igual a:

a) $9\sqrt{5}$ b) 9 c) 7 d) 4 e) $3\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO:



1) **No triângulo retângulo ADB, temos:**
$(AB)^2 = (6\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 61\text{ cm}^2$
2) **No triângulo retângulo ABC, temos:**
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Leftrightarrow (AC)^2 = 61\text{ cm}^2 + (2\sqrt{5}\text{ cm})^2 \Leftrightarrow AC = 9\text{ cm}$

Resposta: B

MÓDULO 30

POLIEDROS CONVEXOS E REGULARES

1. **(UNICENTRO)** – Segundo o matemático suíço Leonhard Euler, em todo poliedro convexo de **V** vértices, **A** arestas e **F** faces, vale a relação:

a) V + F + A = 2 b) V + 2 = A + F
c) V – F + A = 2 d) V = F + A + 2
e) V – A + F = 2

RESOLUÇÃO:
Em todo poliedro convexo, de acordo com a Relação de Euler, sempre se pode afirmar que: V – A + F = 2.
Resposta: E

2. **(ITA)** – Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas deste poliedro é:

a) 12 b) 18 c) 28 d) 30 e) 32

RESOLUÇÃO:
12 – A + 20 = 2 ⇔ A = 30
Resposta: D

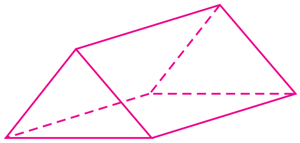
3. **(ITA)** – Numa superfície convexa aberta, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então, o número de arestas é:

a) 8 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

RESOLUÇÃO:
$8 - A + 6 = 1 \Leftrightarrow A = 13$
Resposta: D

4. **(FUVEST)** – Quantas faces tem um poliedro convexo com 6 vértices e 9 arestas? Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

RESOLUÇÃO:
$6 - 9 + F = 2 \Leftrightarrow F = 5$



Resposta: 5 faces

5. **(FUVEST)** – O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui

a) 33 vértices e 22 arestas. b) 12 vértices e 11 arestas.
c) 22 vértices e 11 arestas. d) 11 vértices e 22 arestas.
e) 12 vértices e 22 arestas.

RESOLUÇÃO:
Se uma pirâmide tem exatamente 11 faces triangulares, então a sua base é um polígono de 11 lados. Assim, sendo V o número de vértices e A o número de arestas dessa pirâmide, têm-se:

1) $V = 1 + 11 \Leftrightarrow V = 12$

2) $A = \dfrac{11 \,.\, 3 + 1 \,.\, 11}{2} \Leftrightarrow A = 22$

Resposta: E

6. **(UFTM)** – Um poliedro convexo, com 32 arestas e 14 vértices, possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sendo **q** o número de faces quadrangulares e **t** o número de faces triangulares, então os valores de **q** e **t** são, respectivamente:

a) q = 6 e t = 14 b) q = 16 e t = 4
c) q = 4 e t = 14 d) q = 14 e t = 4
e) q = 4 e t = 16

RESOLUÇÃO:
1) $14 - 32 + (q + t) = 2 \Leftrightarrow t = 20 - q$

2) $\dfrac{4q + 3t}{2} = 32 \Leftrightarrow 4q + 3t = 64$

Assim: $4q + 3(20 - q) = 64 \Leftrightarrow q = 4$

Por outro lado: $t = 20 - q = 20 - 4 = 16$

Resposta: E

7. Faça uma tabela relacionando os cinco poliedros de Platão e os respectivos números de faces, de arestas e de vértices.

RESOLUÇÃO:

	F	A	V
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12