



MÓDULO 49

Impulso e Quantidade de Movimento



1. DEFINIÇÃO DE IMPULSO

Considere uma **força constante** \vec{F} , atuando sobre um corpo, durante um intervalo de tempo Δt .

Define-se **IMPULSO** da força \vec{F} , no referido intervalo de tempo, como a grandeza vetorial \vec{I} dada por:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

□ **Notas**

Nota 1: Se a força \vec{F} for variável, a definição de impulso é feita com recursos de Matemática superior (função integral).

Nota 2: Impulso é uma grandeza vetorial que tem a mesma direção e o mesmo sentido da força \vec{F} .

Assim, o impulso da força peso é sempre vertical e dirigido de cima para baixo.

Nota 3: Impulso não é grandeza instantânea, isto é, não é definido para um dado instante e sim para um certo intervalo de tempo.

Nota 4: Quando a força \vec{F} é variável, usamos o conceito de força média \vec{F}_m .

A força média \vec{F}_m é uma força constante capaz de produzir o mesmo impulso da força variável \vec{F} .

$$\vec{I}_F = \vec{I}_{F_m} = \vec{F}_m \cdot \Delta t$$

2. DEFINIÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Considere uma partícula de massa m animada de uma velocidade vetorial \vec{V} .

Define-se **QUANTIDADE DE MOVIMENTO** da partícula como a grandeza vetorial \vec{Q} dada por:

$$\vec{Q} = m \vec{V}$$

□ **Notas**

Nota 1: Quantidade de movimento é também chamada de **MOMENTO LINEAR** ou simplesmente **MOMENTO**.

Por vezes também é usado, com o mesmo significado, o termo latino **MOMENTUM** (no plural, usa-se **MOMENTA**).

Nota 2: Quantidade de movimento é uma grandeza vetorial que tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade vetorial, ou seja, é sempre tangente à trajetória e tem o sentido do movimento do corpo.

Nota 3: Quantidade de movimento é uma grandeza instantânea, isto é, é definida para um dado instante.

Nota 4: Sendo \vec{F}_R a força resultante que atua em uma partícula, temos:

$$\vec{F}_R = m \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$$

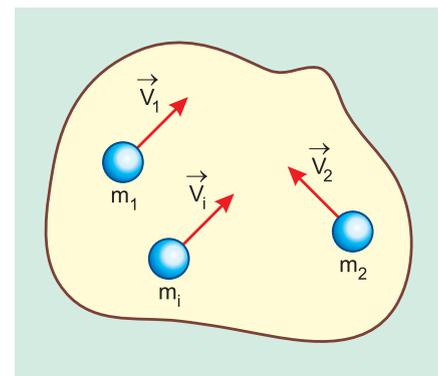
Newton formulou a sua 2ª lei (Princípio Fundamental da Dinâmica)

apoiado na equação $\vec{F}_R = \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t}$.

O enunciado original da 2ª Lei de Newton é o seguinte:

A força resultante é igual à taxa de variação do momento com o tempo.

Nota 5: Para um sistema de várias partículas, a quantidade de movimento do sistema é a soma vetorial das quantidades de movimento das partículas.



$$\vec{Q}_{\text{sistema}} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_i \vec{V}_i$$

Nota 6: Para um corpo extenso, a quantidade de movimento é definida como o produto de sua massa M pela velocidade vetorial \vec{V}_{CM} de seu centro de massa.

$$\vec{Q}_{\text{corpo extenso}} = M \vec{V}_{CM}$$

Nota 7: A quantidade de movimento de uma partícula é constante em dois casos:

a) partícula em repouso:

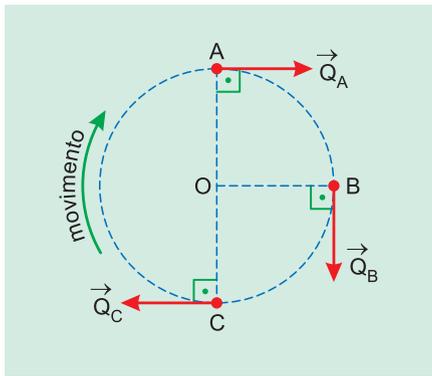
$$\vec{Q} = \text{constante} = \vec{0}$$

b) partícula em movimento retilíneo e uniforme:

$$\vec{Q} = \text{constante} \neq \vec{0}$$

Nota 8: No movimento circular e uniforme, a quantidade de movimento tem intensidade constante (porque o movimento é uniforme), porém tem direção variável (porque a trajetória é curva) e, portanto, é uma **grandeza vetorial variável**.





3. RELAÇÃO ENTRE ENERGIA CINÉTICA E MOMENTO

Considere uma partícula de massa **m** e velocidade com intensidade **V**.

A energia cinética **E_C** e a intensidade da quantidade de movimento **Q** são dadas por:

$$Q = mV \quad (1)$$

$$E_C = \frac{mV^2}{2} \quad (2)$$

De (1), temos: $V = \frac{Q}{m}$

Substituindo-se em (2), vem:

$$E_C = \frac{m}{2} \left(\frac{Q}{m} \right)^2 \Rightarrow E_C = \frac{Q^2}{2m}$$

Observe na expressão $E_C = f(Q)$ que, se duas partículas tiverem quantidades de movimento com a mesma intensidade, então as energias cinéticas serão inversamente proporcionais às respectivas massas.

$$Q_A = Q_B \Leftrightarrow \frac{E_{CA}}{E_{CB}} = \frac{m_B}{m_A}$$

4. UNIDADES E DIMENSÕES

Quantidade de movimento

• Unidade

$$u(Q) = u(m) \cdot u(V)$$

No SI: $u(Q) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

• Dimensões

$$[Q] = [m] [V] \Rightarrow [Q] = \text{MLT}^{-1}$$

Impulso

• Unidade

$$u(I) = u(F) \cdot u(t)$$

No SI: $u(I) = \text{N} \cdot \text{s}$

• Dimensões

$$[I] = [F] [\Delta t] = \text{MLT}^{-2} \cdot \text{T}$$

$$[I] = \text{MLT}^{-1}$$

Segue-se, portanto, que:

$$u(I) = u(Q)$$

$$[I] = [Q]$$

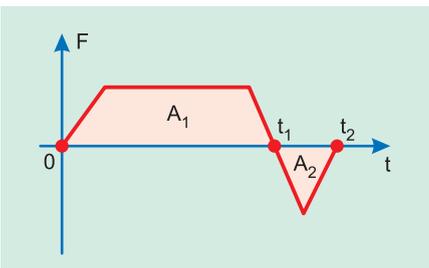
$$\text{N} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

MÓDULO 50

Gráfico Força x Tempo e Teorema do Impulso

1. GRÁFICO FORÇA X TEMPO

Considere uma força \vec{F} com **direção constante** atuando em uma partícula.



No gráfico do valor da força em função do tempo, a área sob o gráfico mede o valor do impulso da força.

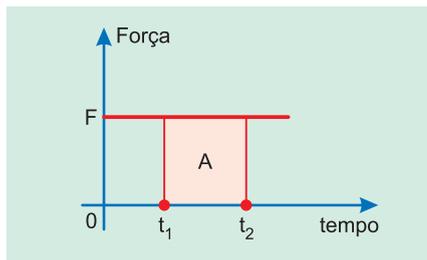
$$\text{Área } (F \times t) \cong \text{Impulso}$$

Na figura apresentada:

$$[I]_0^{t_1} \cong A_1 \quad ; \quad [I]_{t_1}^{t_2} \cong -A_2$$

$$[I]_0^{t_2} \cong A_1 - A_2$$

A demonstração dessa propriedade só é imediata para o caso de força constante:



$$\text{Área } (F \times t) \cong F (t_2 - t_1) = I_F$$

2. TEOREMA DO IMPULSO (TI)

Considere uma partícula de massa **m** sujeita a uma força resultante \vec{F} , durante um intervalo de tempo Δt .

A velocidade vetorial da partícula varia de \vec{V}_i (valor inicial) a \vec{V}_f (valor final).

Usando-se a 2.ª Lei de Newton:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{(\vec{V}_f - \vec{V}_i)}{\Delta t}$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \vec{V}_f - m \vec{V}_i$$

$$\vec{I}_F = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i = \Delta \vec{Q}$$

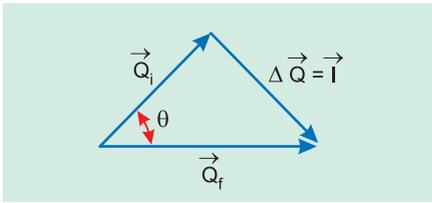
A expressão anterior traduz o teorema do impulso:

O impulso da força resultante, em uma partícula, mede a variação de sua quantidade de movimento, durante o intervalo de tempo considerado.

TI

Nota

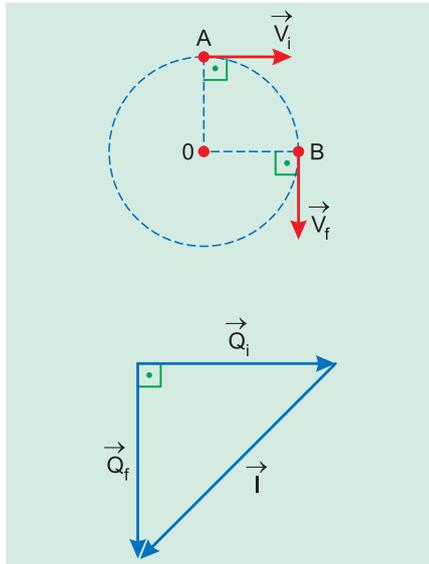
Na aplicação do teorema do impulso, é importante observar que as grandezas envolvidas são vetoriais:



Exemplificando:

Considere uma partícula de massa **m** em movimento circular e uniforme com velocidade de intensidade **V**.

Para um quarto de volta, o impulso da força resultante é calculado como se segue:



$$|\vec{Q}_i| = mV$$

$$|\vec{Q}_f| = mV$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{I}|^2 = |\vec{Q}_i|^2 + |\vec{Q}_f|^2$$

$$|\vec{I}|^2 = (mV)^2 + (mV)^2 = 2(mV)^2$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{2} mV$$

MÓDULOS 51 e 52

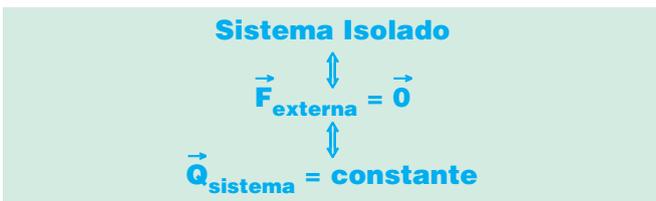
Sistemas Isolados

SISTEMA ISOLADO

Considere um sistema de partículas.

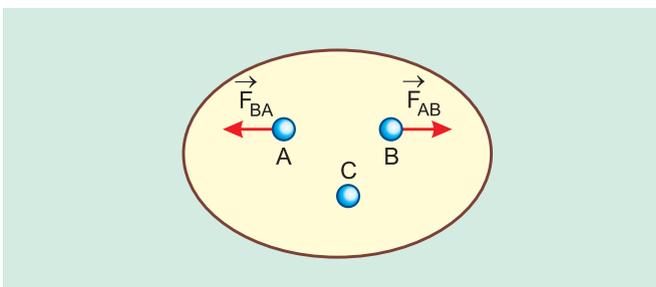
O sistema é chamado **isolado** quando a resultante de todas as forças externas ao sistema é nula.

Sendo nula a força resultante externa, também será nulo o impulso sobre o sistema e, como consequência do teorema do impulso, será **constante a quantidade de movimento do sistema**.



A título de exemplo, consideremos um sistema de três partículas, A, B e C.

As partículas A e B trocam forças entre si (forças internas ao sistema, do tipo ação-reação) e a partícula C está livre de forças.



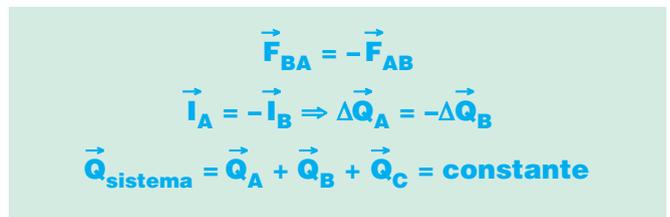
$$\vec{Q}_{\text{sistema}} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B + \vec{Q}_C$$

$$\vec{Q}_A \text{ varia em virtude da ação da força } \vec{F}_{BA}$$

$$\vec{Q}_B \text{ varia em virtude da ação da força } \vec{F}_{AB}$$

\vec{Q}_C permanece constante porque C está livre de forças.

A variação de \vec{Q}_A compensa a variação de \vec{Q}_B e \vec{Q}_{sistema} permanece constante:

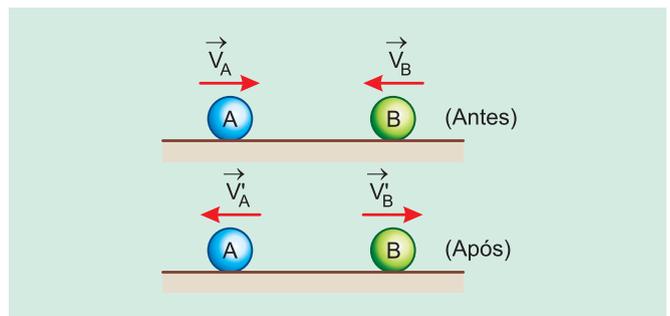


Os sistemas isolados de maior importância em nossos estudos são:

Colisão entre partículas

Quando duas partículas, A e B, colidem, elas constituem um sistema isolado, pois as forças ligadas à colisão são forças internas.

As eventuais forças externas em uma colisão, tais como gravidade e atrito, têm intensidades desprezíveis, quando comparadas com as das forças ligadas à colisão.



$$\vec{Q}_{\text{final}} = \vec{Q}_{\text{inicial}}$$

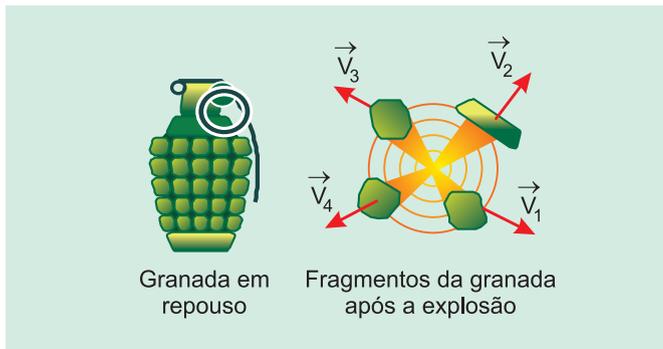
$$m_A \vec{V}'_A + m_B \vec{V}'_B = m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B$$

$$\vec{Q}_{\text{imediatamente após}} = \vec{Q}_{\text{imediatamente antes}}$$

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 + \dots + m_n \vec{V}_n = \vec{0}$$

❑ Explosão de um corpo

Quando um corpo explode, as forças internas ligadas à explosão são muito intensas e as forças externas (como, por exemplo, o peso do corpo) tornam-se desprezíveis, e o corpo é considerado um **sistema isolado**.



NOTAS

Nota 1: Em uma colisão não elástica, embora haja conservação da quantidade de movimento total (sistema isolado), a energia mecânica total diminui porque se transforma em outras formas de energia: térmica, sonora e trabalho em deformações permanentes.

Nota 2: Em uma explosão, embora haja conservação da quantidade de movimento total (sistema isolado), a energia mecânica total aumenta porque a energia potencial química, armazenada nos explosivos, é parcialmente transformada em energia cinética dos fragmentos.

Portanto, nas colisões inelásticas e explosões, temos exemplos de sistemas físicos **isolados**, porém **não conservativos**.

MÓDULO 53

Centro de Massa

1. CONCEITO DE CENTRO DE MASSA

Quando um corpo é tomado como **ponto material**, consideramos toda sua massa concentrada em um ponto geométrico, onde estaria aplicada a resultante das forças externas que atuam no corpo. Este ponto geométrico recebe o nome de **CENTRO DE MASSA** do corpo.

Nota: Se o corpo for homogêneo e apresentar uma forma geométrica regular e simétrica, então o centro de massa coincidirá com o centro geométrico do corpo.

Exemplo 1: O centro de massa de uma esfera homogênea é o seu centro geométrico.

Exemplo 2: O centro de massa de um anel homogêneo é o seu centro geométrico (onde, no caso, não existe massa).

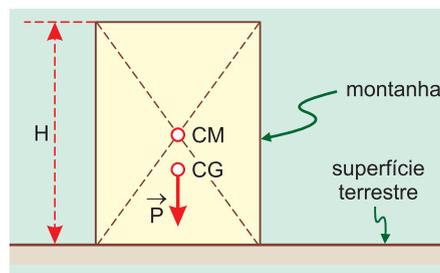
Exemplo 3: O centro de massa de um corpo homogêneo, com formato triangular, é o baricentro do triângulo.

2. CENTRO DE GRAVIDADE

O centro de gravidade de um corpo é o ponto de aplicação da força de gravidade.

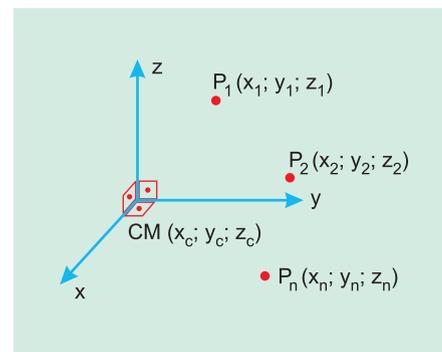
O centro de massa coincidirá com o centro de gravidade se o vetor aceleração da gravidade (\vec{g}) for o mesmo em todos os pontos do corpo.

Como exemplo, imagine uma montanha, suposta homogênea, com formato retangular e de grandes dimensões.



A aceleração da gravidade na base da montanha é maior do que no topo da montanha, de modo que o centro de gravidade ficará mais abaixo do que o centro geométrico (que coincide com o centro de massa).

3. POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA DE UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS



Consideremos um conjunto de n pontos materiais.

Representamos por m_i a massa do ponto material e x_i, y_i, z_i as coordenadas cartesianas que definem sua posição.

A posição do centro de massa (CM) do sistema será definida pelas coordenadas cartesianas x_C, y_C e z_C obtidas por meio de uma média ponderada entre as coordenadas dos pontos materiais, tomando-se como pesos, na média ponderada, as respectivas massas dos pontos materiais.

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

4. VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA DE UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

A velocidade do centro de massa será dada por uma média ponderada entre as velocidades dos pontos materiais, tomando-se como pesos, na média ponderada, as respectivas massas dos pontos materiais.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Observando-se que o produto $m_i \vec{v}_i$ representa a quantidade de movimento do ponto material, resulta que:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}_{sistema}}{M_{sistema}}$$

$$\vec{Q}_{sistema} = M_{sistema} \vec{v}_{CM}$$

Em particular, se o sistema for isolado de forças externas, teremos:

$$\vec{Q}_{sistema} = \text{cte.}$$

$$a) \vec{Q}_{sistema} = \vec{0} \Rightarrow \text{CM em repouso}$$

$$b) \vec{Q}_{sistema} \neq \vec{0} \Rightarrow \text{CM em MRU}$$

5. ACELERAÇÃO DO CENTRO DE MASSA DE UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

A aceleração do centro de massa será dada por uma média ponderada entre as acelerações dos pontos materiais, tomando-se como pesos, na média ponderada, as respectivas massas dos pontos materiais.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Observando-se que o produto $m_i \vec{a}_i$ representa a força resultante no ponto material (2ª Lei de Newton), resulta que:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}_{externa}}{M_{sistema}}$$

$$\vec{R}_{externa} = M_{sistema} \vec{a}_{CM}$$

Teorema do Centro de Massa: Para obtermos a aceleração do centro de massa de um sistema, devemos imaginar toda a massa do sistema concentrada no seu centro de massa e aí aplicada a resultante das forças externas que atuam no sistema.

6. TRAJETÓRIA DO CENTRO DE MASSA

A trajetória do centro de massa depende da velocidade inicial e da aceleração do centro de massa.

Como a aceleração do centro de massa é imposta pela resultante das forças externas (Teorema do Centro de Massa), concluímos que as forças internas ao sistema não podem alterar a trajetória do centro de massa.

EXEMPLOS:

Exemplo 1: Considere um atleta saltando do trampolim de uma piscina. Desprezando-se o efeito do ar, após se desligar do trampolim, o atleta fica sob ação exclusiva da força de gravidade, que determina para o seu centro de massa uma trajetória parabólica. Se o atleta realizar uma série de piruetas e acrobacias, estas não alterarão a trajetória do seu centro de massa, pois estarão ligadas a forças internas musculares.

Exemplo 2: Considere uma granada lançada obliquamente da Terra. Desprezando-se o efeito do ar, a força resultante externa na granada é o seu peso, determinando para o seu centro de massa uma trajetória parabólica. Se a granada explodir em seu trajeto, enquanto nenhum dos fragmentos atingir o chão, o centro de massa dos fragmentos continuará descrevendo a mesma trajetória parabólica descrita pelo centro de massa da granada antes da explosão. Isso se justifica lembrando-se de que as forças ligadas à explosão são forças internas que não podem modificar a trajetória do centro de massa.

MÓDULOS 54 e 55

Colisões

1. FASES DE UMA COLISÃO

❑ Fase de deformação

A fase de deformação começa quando os corpos entram em contato e termina quando suas velocidades tornam-se iguais.

Na fase de deformação, a energia mecânica do sistema pode-se transformar em outras formas de energia:

(1) **energia potencial elástica:** ligada às deformações elásticas.

(2) **energia térmica:** provocando aquecimento nos corpos que colidem.

(3) **energia sonora:** produzindo “barulho” durante a colisão.

(4) **trabalho:** usado para produzir deformações permanentes.

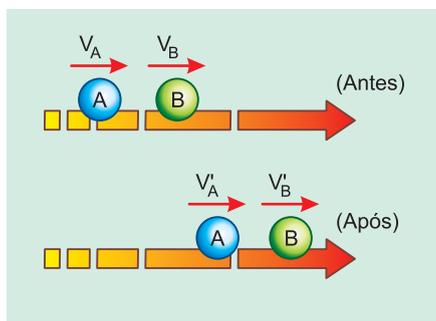
❑ Fase de restituição

A fase de restituição tem início quando as velocidades dos corpos se igualam e termina com a separação dos corpos.

Durante a fase de restituição, desaparecem as deformações elásticas, e a energia potencial elástica, armazenada durante a deformação, é retransformada em energia cinética, podendo haver, ainda, mais produção de energia térmica e sonora.

2. COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

Considere uma colisão unidimensional entre duas partículas, isto é, antes e após a colisão as partículas só se podem mover ao longo de uma mesma reta.



A velocidade relativa entre os corpos, antes da colisão, é chamada **velocidade de aproximação**, e sua intensidade é dada por:

$$V_{ap} = V_A - V_B$$

A velocidade relativa entre os corpos, após a colisão, é chamada **velocidade de afastamento**, e sua intensidade é dada por:

$$V_{af} = V_B' - V_A'$$

O coeficiente de restituição é um número (**E**) que mede a magnitude da fase de restituição e é definido pela relação:

$$E = \frac{V_{af}}{V_{ap}}$$

NOTAS

Nota 1: O coeficiente de restituição é adimensional, isto é, não tem unidades.

Nota 2: Em nossos estudos, o coeficiente de restituição varia no intervalo fechado de 0 a 1:

$$0 \leq E \leq 1$$

3. TIPOS DE COLISÃO

□ Colisão elástica

Quando $E = 1$, teremos uma **COLISÃO PERFEITAMENTE ELÁSTICA** ou simplesmente **COLISÃO ELÁSTICA**.

Na colisão elástica, não há dissipação de energia mecânica.

Na fase de deformação, a energia cinética se transforma exclusivamente em energia potencial elástica e, na fase de restituição, a energia potencial elástica se retransforma totalmente em energia cinética.

No fim da fase de deformação, a energia cinética é mínima (podendo ser zero ou não) e a energia elástica é máxima.

FASE DE DEFORMAÇÃO	FIM DA DEFORMAÇÃO	FASE DE RESTITUIÇÃO
E_{cin} ↓ $E_{elástica}$	E_{cin} mínima e $E_{elástica}$ máxima	$E_{elástica}$ ↓ E_{cin}

□ Colisão inelástica

Quando $0 \leq E < 1$, a colisão é dita **COLISÃO INELÁSTICA**, e pode, ainda, ser subdividida em dois tipos:

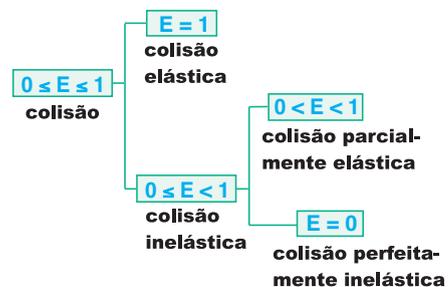
a) $0 < E < 1$: a colisão é chamada **PARCIALMENTE ELÁSTICA** ou **PARCIALMENTE INELÁSTICA**.

Nesse caso, existem as duas fases da colisão (deformação e restituição), os corpos se separam, porém há dissipação de energia mecânica. A porcentagem de energia mecânica dissipada depende do valor do coeficiente de restituição.

E próximo de 1 ⇔ pouca dissipação
E próximo de 0 ⇔ muita dissipação

b) $E = 0$: a colisão é chamada **PERFEITAMENTE INELÁSTICA**.

Nesse caso, não há fase de restituição e os corpos permanecem unidos após a colisão. Corresponde ao caso em que há maior dissipação de energia mecânica.



O termo “inelástica” pode ser substituído por “anelástica”.

4. CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

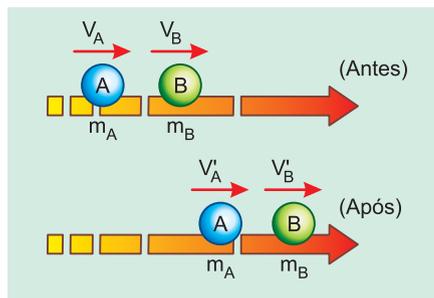
Em qualquer dos modelos citados de colisão, os corpos que colidem constituem um **sistema isolado**, pois, no ato da colisão, desprezamos as forças externas em comparação com as forças internas ligadas à colisão.

O fato de os corpos constituírem um sistema isolado implica a conservação da quantidade de movimento total do sistema.

NAS COLISÕES, HÁ CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO TOTAL DO SISTEMA CONSTITUÍDO PELOS CORPOS QUE COLIDEM.

5. PROBLEMAS-MODELO

□ Colisão unidimensional



Equações:

$$(1) \quad \mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_i$$

$$m_A V_A' + m_B V_B' = m_A V_A + m_B V_B \quad (I)$$

$$(2) \quad E = \frac{V_{af}}{V_{ap}}$$

$$V_B' - V_A' = E (V_A - V_B) \quad (II)$$

As relações (I) e (II) traduzem o equacionamento do problema.

Um caso particular e importante é aquele em que $E = 1$ e $m_A = m_B$.

Em (I):

$$m\mathbf{V}'_A + m\mathbf{V}'_B = m\mathbf{V}_A + m\mathbf{V}_B$$

$$\mathbf{V}'_A + \mathbf{V}'_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B$$

Em (II):

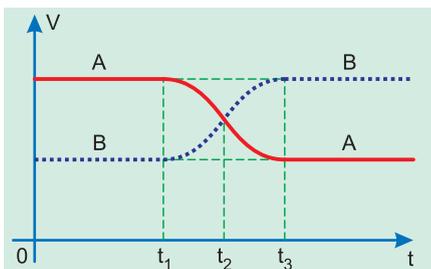
$$\mathbf{V}'_B - \mathbf{V}'_A = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$$

Resolvendo-se o sistema de equações:

$$\mathbf{V}'_A = \mathbf{V}_B$$

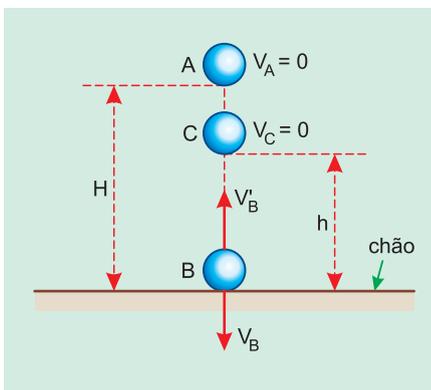
$$\mathbf{V}'_B = \mathbf{V}_A$$

EM UMA COLISÃO UNIDIMENSIONAL, ELÁSTICA, ENTRE DOIS CORPOS DE MASSAS IGUAIS, HÁ TROCA DE VELOCIDADES ENTRE OS CORPOS.



t_1 : início da colisão
 t_2 : fim da deformação
 t_3 : fim da colisão

Colisão com o chão



H = altura máxima inicial

h = altura máxima após a colisão

V_B = módulo da velocidade de chegada ao chão

V'_B = módulo da velocidade de saída do chão

Durante a queda livre de A para B, temos:

$$E_{\text{cinB}} = E_{\text{potA}}$$

$$\frac{m}{2} V_B^2 = m g H \Rightarrow \mathbf{V_B = \sqrt{2 g H}}$$

Durante a subida de B para C, temos:

$$E'_{\text{cinB}} = E_{\text{potC}}$$

$$\frac{m}{2} (V'_B)^2 = m g h \Rightarrow \mathbf{V'_B = \sqrt{2 g h}}$$

O coeficiente de restituição na colisão é dado por:

$$E = \frac{V_{\text{af}}}{V_{\text{ap}}} = \frac{V'_B}{V_B} \Rightarrow \mathbf{E = \sqrt{\frac{h}{H}}}$$

$h = H \Leftrightarrow E = 1 \Leftrightarrow$ **colisão elástica**

$0 < h < H \Leftrightarrow 0 < E < 1 \Rightarrow$ **colisão parcialmente elástica**

$h = 0 \Leftrightarrow E = 0 \Leftrightarrow$ **colisão perfeitamente inelástica**

A altura atingida após n colisões sucessivas é calculada como se segue.

$$h_1 = E^2 H$$

$$h_2 = E^2 h_1 = E^2 \cdot E^2 H = E^4 H$$

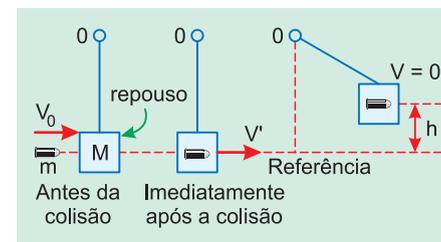
$$h_3 = E^2 h_2 = E^2 \cdot E^4 H = E^6 H$$

Genericamente:

$$\mathbf{h_n = E^{2n} H}$$

Pêndulo balístico

É usado para se obter a velocidade de um projétil disparado contra um bloco suspenso, de modo a formar um pêndulo.



No ato da colisão (perfeitamente inelástica), temos:

$$(M + m)V' = mV_0 \Rightarrow \mathbf{V' = \frac{mV_0}{M + m}} \quad (1)$$

Durante a elevação do sistema, desprezando-se o efeito do ar, temos:

$$\frac{M + m}{2} (V')^2 = (M + m) g h$$

$$\mathbf{V' = \sqrt{2 g h}} \quad (2)$$

Comparando-se (1) e (2), vem:

$$\frac{mV_0}{M + m} = \sqrt{2 g h}$$

$$\mathbf{V_0 = \left(\frac{M + m}{m}\right) \sqrt{2 g h}}$$

MÓDULO 56

Leis de Kepler



1. LEIS DE KEPLER (1571-1630)

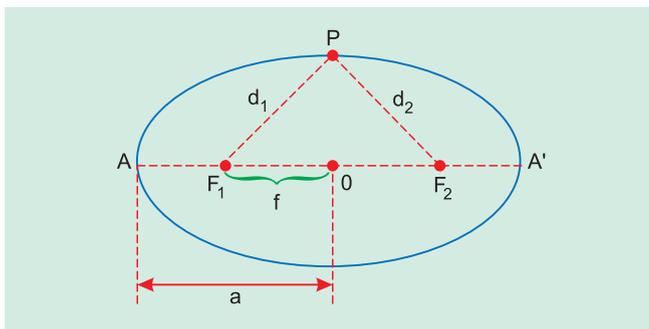
As Leis de Kepler descrevem os movimentos dos planetas em torno do Sol.

1.ª Lei de Kepler ou Lei das Órbitas

a) O que é uma elipse?

A **elipse** é uma curva que corresponde ao lugar geométrico dos pontos de um plano, cujas distâncias, a dois pontos fixos do plano, têm soma constante.

Os pontos fixos são chamados de focos da elipse.



Para qualquer ponto P da elipse, temos:

$$d_1 + d_2 = k \text{ (constante)}$$

A distância entre os pontos A e A' (ver figura) é a medida do **eixo maior da elipse**.

Sendo **a** a medida do semieixo maior e **f** a medida da semidistância focal, define-se **excentricidade** da elipse como sendo o número **E**, dado por:

$$E = \frac{f}{a}$$

$$0 < E < 1$$

Quando **E = 0**, a elipse “degenera” em uma circunferência (os pontos F_1 e F_2 coincidem com O).

Quanto maior o valor de **E**, mais alongada é a elipse.

Quando **E = 1**, a elipse “degenera” em um segmento de reta.

b) Enunciado da 1.ª Lei de Kepler

As órbitas descritas pelos planetas em torno do Sol são elipses, com o Sol localizado em um dos focos.

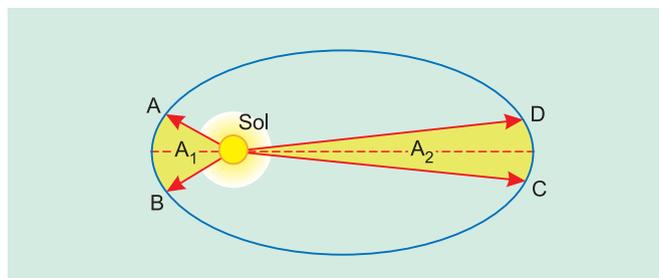
A tabela a seguir mostra que apenas Mercúrio descreve elipse alongada (maior excentricidade); os demais planetas descrevem elipses muito próximas de circunferências (excentricidade muito pequena).

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,047
Netuno	0,009

Cumpramos ressaltar que, **teoricamente**, a órbita de um planeta em torno de uma estrela pode ser circular, mas a órbita elíptica é muito mais provável.

2.ª Lei de Kepler ou Lei das Áreas

a) Raio vetor de um planeta



Para estudarmos o movimento de um planeta, em torno do Sol, tomamos um vetor com origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta. Tal vetor é chamado de **RAIO VETOR** ou **VETOR POSIÇÃO** do planeta.

A 2.ª Lei de Kepler vai referir-se à área “varrida” pelo raio vetor de um planeta, durante um certo intervalo de tempo.

Admitamos que quando o planeta se deslocou de A para B (ver figura) em um intervalo de tempo Δt_1 , o seu raio vetor varreu uma área A_1 e quando o planeta se deslocou de C para D em um intervalo de tempo Δt_2 , o seu raio vetor varreu uma área A_2 .

b) Enunciados da 2.ª Lei de Kepler

1.º enunciado

O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Isso significa que:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2$$

2.º enunciado

A área varrida pelo raio vetor de um planeta é proporcional ao intervalo de tempo gasto.

Isso significa que:

$$A = k \Delta t$$

k = constante de proporcionalidade, que é denominada **velocidade areolar** do planeta.

3.º enunciado

A velocidade areolar (razão entre a área varrida pelo raio vetor e o intervalo de tempo gasto) **de cada planeta é constante.**

Nota: a velocidade areolar varia de um planeta para outro, aumentando com a distância média do planeta ao Sol, isto é, é **mínima para Mercúrio e máxima para Plutão.**

c) Consequências da 2.ª Lei de Kepler

O fato de a velocidade areolar de um planeta ser constante implica que a **velocidade de translação** (razão entre a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto) **seja variável.**

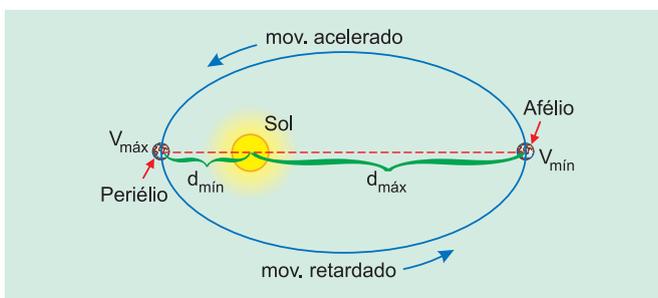
De fato, a igualdade das áreas A_1 e A_2 (ver figura anterior) implica que a medida do arco \widehat{AB} seja maior que a do arco \widehat{CD} e, como o intervalo de tempo é o mesmo, concluímos que a velocidade de translação em \widehat{AB} é maior do que em \widehat{CD} .

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \text{med}(AB) > \text{med}(CD)$$

$$V_{AB} > V_{CD}$$

Isso significa que à medida que o planeta vai aproximando-se do Sol em sua órbita elíptica, a sua velocidade de translação vai aumentando. Isso se torna evidente se observarmos que com a aproximação do Sol, o raio vetor vai diminuindo, e para varrer a mesma área, o planeta deve mover-se mais rapidamente.

A velocidade de translação será máxima no ponto mais próximo do Sol, chamado **periélio**, e será mínima no ponto mais afastado do Sol, chamado **afélio**.



Verifica-se, portanto, que o movimento de translação do planeta não é uniforme, sendo sucessivamente acelerado (do afélio para o periélio) e retardado (do periélio para o afélio).

O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO SOMENTE SERIA UNIFORME SE A ÓRBITA DO PLANETA FOSSE CIRCULAR.

d) Velocidade escalar média de translação

A velocidade escalar média de translação de um planeta é função **decrecente** da distância média do planeta ao Sol.

O planeta mais veloz é Mercúrio (para os gregos era o deus mensageiro: o carteiro do Olimpo), com velocidade escalar média de valor 50km/s, e o mais lento é o planeta-anão Plutão, com velocidade escalar média de valor 5km/s. A velocidade escalar média da Terra tem valor aproximado de 30km/s.

Assumindo-se as órbitas como circulares, a velocidade escalar média tem valor inversamente proporcional à raiz quadrada do raio de órbita:

$$V_m = \frac{k}{\sqrt{R}}$$

Por exemplo, o raio de órbita de Plutão é aproximadamente 100 vezes maior que o de Mercúrio e, portanto, a velocidade escalar média de Mercúrio tem valor 10 vezes maior que a de Plutão.

$$R_p = 100R_M \Leftrightarrow V_p = \frac{V_M}{10}$$

3.ª Lei de Kepler ou Lei dos Períodos

a) Raio médio de uma órbita elíptica

Seja $d_{\text{máx}}$ a distância máxima do planeta ao Sol e $d_{\text{mín}}$ a distância mínima do planeta ao Sol.

Define-se raio médio da órbita elíptica como sendo a média aritmética entre as distâncias do periélio e do afélio até o Sol:

$$R = \frac{d_{\text{mín}} + d_{\text{máx}}}{2}$$

Observe que como $d_{\text{mín}} + d_{\text{máx}}$ é a medida do eixo maior da elipse (AA'), o raio médio coincide com o **semieixo maior da elipse.**

Raio médio (R) = semieixo maior (a)

$$R = a = \frac{d_{\text{mín}} + d_{\text{máx}}}{2}$$

b) Período de translação ou ano de um planeta

Define-se período de translação (ou período de revolução ou ano) de um planeta como sendo o intervalo de tempo (T) para dar uma volta completa em torno do Sol.

c) Enunciado da 3.ª Lei de Kepler

Para todos os planetas do Sistema Solar, é constante a razão entre o cubo do raio médio da órbita e o quadrado do período de translação.

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{constante}$$

Para dois planetas A e B, temos:

$$\frac{R_A^3}{T_A^2} = \frac{R_B^3}{T_B^2} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2$$

Demonstra-se que a constante de proporcionalidade da 3.ª Lei de Kepler é dada por:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G M}{4 \pi^2}, \quad \text{em que:}$$

G = constante de gravitação universal;
M = massa do Sol.

NOTAS

Nota 1: A rigor, a expressão da 3.ª Lei de Kepler é:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}, \quad \text{em que } \mathbf{m} \text{ é a massa do planeta.}$$

Porém, como $\mathbf{M} \gg \mathbf{m}$, desprezamos \mathbf{m} em comparação com \mathbf{M} e chegamos à equação apresentada.

Nota 2: A 3.ª Lei de Kepler mostra que quanto mais próximo do Sol (menor R), menor é o período de translação do planeta. À medida que nos afastamos do Sol, a velocidade escalar média do planeta vai diminuindo e a extensão de sua órbita vai aumentando, o que implica um período de translação crescente.

Define-se **unidade astronômica (ua)** como sendo a distância média da Terra ao Sol ($1 \text{ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{m}$).

A tabela a seguir representa a variação do período com a distância média ao Sol, medida em **ua**.

Planeta	Distância média ao Sol em ua	Período em anos terrestres
Mercúrio	0,39	0,24
Vênus	0,72	0,61
Terra	1,0	1,0
Marte	1,5	1,9
Júpiter	5,2	12
Saturno	9,5	29
Urano	19	84
Netuno	30	165

Nota 3: A velocidade areolar, a velocidade escalar média de translação e o período de translação são funções de órbita, isto é, só dependem da massa do Sol e do raio médio da órbita, e não dependem das características do planeta ou corpo celeste que esteja gravitando.

Isso significa que, se um cometa gravitar em torno do Sol, na mesma órbita da Terra, ele vai ter a mesma velocidade areolar da Terra, a mesma velocidade escalar média de translação (30km/s) e o mesmo período de translação (1 ano).

Nota 4: As três Leis de Kepler não valem apenas para planetas do nosso sistema solar; elas valem para corpos que gravitam em torno de uma grande massa central: planetas em torno de qualquer estrela, satélites naturais ou artificiais em torno de um planeta, corpos celestes em torno da Lua etc.

Nota 5: Em se tratando de satélites da Terra, é importante salientar que:

- a) a órbita pode ser circular ou elíptica.
- b) o ponto mais próximo da Terra é chamado de **perigeu** e o mais afastado é chamado de **apogeu**.
- c) a velocidade areolar, a velocidade escalar média de translação e o período de translação só dependem da massa da Terra e do raio médio da órbita; não dependem da massa ou de outras características do satélite.
- d) a velocidade escalar média de translação da Lua é da ordem de 1,0km/s, do satélite estacionário é da ordem de 3,0km/s e do satélite rasante 8,0km/s (sem efeito do ar).

MÓDULO 57

Lei da Gravitação Universal

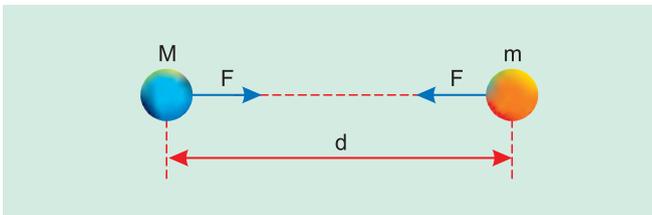
1. ENUNCIADO DA LEI DE NEWTON

Apoiado nos estudos de Copérnico (1473-1543), Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630), Isaac Newton apresentou a Lei da Gravitação Universal.

Entre dois corpos quaisquer, pelo simples fato de terem massa, existe uma força de atração, denominada força gravitacional.

A medida da força gravitacional é traduzida na apresentação da lei:

A força gravitacional entre dois pontos materiais tem intensidade diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.



$$F = \frac{G M m}{d^2}$$

A constante de proporcionalidade **G** é denominada constante de gravitação universal ou constante de Gauss, e seu valor, obtido por Cavendish, é:

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ unidades do S.I.}$$

G é uma constante universal que não depende dos corpos que se atraem, da distância ou do meio interposto entre os corpos.

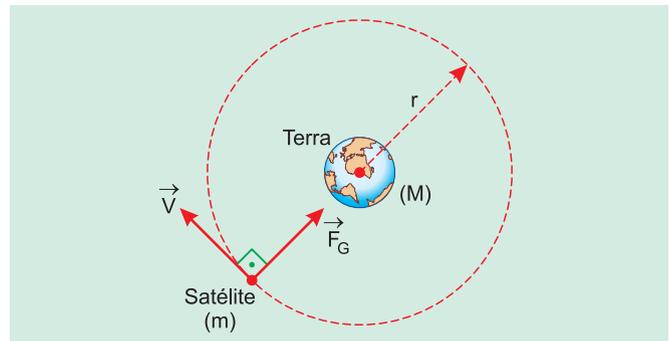
Observe que a força gravitacional varia com a distância, da mesma forma que a força eletrostática, porém existem diferenças marcantes:

(1) a força eletrostática pode ser de atração ou de repulsão, mas a força gravitacional é sempre de atração;

(2) a força eletrostática depende do meio interposto entre os corpos; a força gravitacional não depende do meio.

2. VELOCIDADE ORBITAL

Consideremos um satélite em órbita circular de raio **r** em torno do centro da Terra.



O satélite vai descrever movimento circular uniforme e a força gravitacional aplicada pela Terra faz o papel de resultante centrípeta:

$$F_G = F_{cp}$$

$$\frac{G M m}{r^2} = \frac{mV^2}{r} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Para um satélite rasante (junto à superfície terrestre), desprezando-se o efeito do ar, temos:

$$F_G = F_{cp}$$

$$m g_0 = \frac{mV_0^2}{R} \Rightarrow V_0 = \sqrt{g_0 \cdot R}$$

g_0 = módulo da aceleração da gravidade nas proximidades da Terra = 10 m/s^2 .

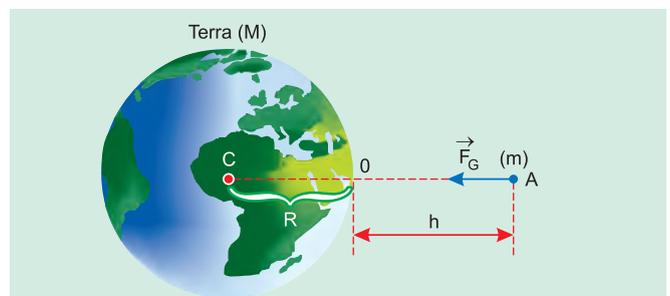
R = raio da Terra = $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$

$$V_0 = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \text{ m/s}$$

$$V_0 = 8,0 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

A velocidade do satélite rasante corresponde à velocidade de lançamento horizontal de um corpo para transformá-lo em um satélite da Terra e é chamada de **VELOCIDADE CÔSMICA PRIMEIRA**.

3. VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE COM A ALTITUDE





Para um ponto material de massa m colocado em um ponto A , a uma altitude h , temos:

$$P_A = F_G$$

$$mg_A = \frac{G M m}{(R + h)^2} \Rightarrow g_A = \frac{GM}{(R + h)^2}$$

Para $h = 0$, temos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

Portanto, a gravidade na superfície de um planeta só depende da massa do planeta (diretamente proporcional à massa) e do raio do planeta (inversamente proporcional ao quadrado do raio). Não consideramos os efeitos ligados à rotação do planeta.

MÓDULO 58

Origem e Evolução do Universo



1. MATÉRIA E ANTIMATÉRIA

Toda partícula (matéria) tem uma correspondente antipartícula (antimatéria).

A partícula e a antipartícula têm massas iguais e diferem em relação a alguma propriedade. Se a partícula e a antipartícula tiverem cargas elétricas, então estas cargas terão módulos iguais e sinais contrários.

Assim: o antielétron tem a mesma massa do elétron e carga positiva $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$; o antipróton tem a mesma massa do próton e carga negativa $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}C$.

Quando a partícula encontra sua antipartícula, ocorre um processo chamado **aniquilamento** e toda a massa m (partícula + antipartícula) é transformada em energia E na forma de radiação eletromagnética, obedecendo à equação de Einstein:

$$E = mc^2$$

$c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s é o módulo da velocidade com que a onda eletromagnética se propaga no vácuo.

2. BURACO NEGRO

Admitamos que a Terra não tenha atmosfera e desprezemos os efeitos de sua rotação.

Se a partir da superfície terrestre lançarmos verticalmente para cima uma pedra, com velocidade de módulo V_0 , esta pedra voltará a cair na Terra?

A resposta correta é: depende do valor de V_0 .

Se $V_0 \geq 11,2$ km/s (denominada velocidade de escape ou velocidade cósmica segunda), a pedra conseguirá escapar do campo gravitacional

criado pela Terra e não mais retornará à sua superfície.

Esta velocidade de escape, no caso de um corpo celeste esférico de raio R e massa M , ignorando-se a presença de atmosfera e os efeitos de rotação, é calculada pela expressão:

$$V_E = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

em que $G =$ constante de gravitação universal.

Se V_E for maior que $3,0 \cdot 10^8$ m/s (módulo da velocidade da luz no vácuo), nem mesmo a luz conseguirá escapar do campo gravitacional criado pelo corpo celeste.

Buraco Negro é um corpo celeste ou uma região do espaço onde a concentração de massa é tão grande, o campo gravitacional é tão intenso, que **nada**, nem mesmo a luz, consegue escapar de seu campo gravitacional.

Como o **buraco negro** não emite luz, ele não pode ser visto e sua presença só pode ser detectada pelo efeito gravitacional que ele provoca em suas redondezas, capaz mesmo de desviar a trajetória da luz.

3. BIG BANG

A teoria do *Big Bang* (nome pejorativo dado por Fred Hoyle) procura explicar a origem e a evolução do Universo.

De acordo com esta teoria, há $13,7 \cdot 10^9$ anos (13,7 bilhões de anos) toda energia e massa que hoje existem no Universo estavam armazenadas em uma pequena esfera de menos de 1 cm de diâmetro (que

se convencionou chamar de “**ovo cósmico**”) a uma temperatura incrivelmente alta.

Num dado instante, esta energia começou a se expandir rapidamente e a temperatura começou a baixar.

A primeira consequência desta expansão foi a transformação de energia em massa (de acordo com a equação $E = mc^2$), formando-se as primeiras partículas e antipartículas: **quarks** e **antiquarks**.

Em seguida, quarks e antiquarks começaram a se aniquilar, gerando energia na forma de radiações eletromagnéticas (fótons), sempre obedecendo à equação de Einstein ($E = mc^2$).

Porém, a quantidade de *quarks* era muito maior que a de *antiquarks* e após o processo de aniquilamento sobraram **quarks**.

Em seguida, os *quarks* começam a se juntar para formarem prótons e nêutrons. Três tipos de *quarks* (*up*, *up*, *down*) formam os prótons e outros três tipos de *quarks* (*up*, *down*, *down*) formam os nêutrons e a força responsável por estas fusões de *quarks* é a **força nuclear forte**.

Quando o Universo tinha uma idade de $1\mu s$ ($10^{-6}s$), a fusão de quarks foi concluída e os quarks desapareceram.

Nesse instante, o Universo é formado por prótons, nêutrons e radiação eletromagnética na forma de fótons.

Em seguida, por meio da **força nuclear fraca**, o nêutron emite um elétron e um neutrino (ou antineutrino) e se transforma em um próton. Mas o próton também é capaz de capturar um elétron e um neutrino (ou antineutrino) e se transforma em um nêutron.



Quando o Universo tinha uma idade de 1s, a queda de temperatura fez com que o próton não conseguisse mais capturar o elétron e o neutrino (ou antineutrino) e não conseguisse mais se transformar em nêutron. Porém, o nêutron continuava transformando-se em próton. Esse fato tem duas implicações: a presença de elétrons e neutrinos (ou antineutrinos) no Universo e um número muito maior de prótons do que de nêutrons, na proporção de quatro prótons para cada nêutron.

Quando o Universo tinha idade de 10s, os prótons e nêutrons começaram a se juntar, **por meio da força nuclear forte**, para formarem os núcleos atômicos:

- o próton sozinho é o núcleo de hidrogênio.
- o próton unido a um nêutron é o núcleo do **deutério**, que é um isótopo do hidrogênio.
- o próton unido a dois nêutrons é o núcleo do **trítio**, que é outro isótopo do hidrogênio.
- dois prótons unidos a dois nêutrons é o núcleo do hélio (também chamado de partícula α), que é o mais estável dos núcleos formados.
- três prótons unidos a três nêutrons é o núcleo do **lítio**.

Quando o Universo tinha a idade de 3 minutos, as fusões terminam e o Universo tinha aproximadamente 75% de núcleos de hidrogênio, quase 25% de núcleos de hélio e quantidades ínfimas dos demais núcleos.

Nessa época, o Universo era considerado opaco porque as radiações eletromagnéticas não conseguiam expandir-se por estarem confinadas por uma espécie de barreira formada por elétrons, neutrinos e pelos núcleos atômicos.

Quando o Universo tinha uma idade aproximada de 380 000 anos, a temperatura já era suficientemente baixa (6000K) para que, por meio da **força eletromagnética**, os núcleos comesçassem a capturar os elétrons para formarem os primeiros átomos. Com isto, a barreira que confinava a radiação eletromagnética desapareceu e o Universo se tornou transparente e a radiação começou a se expandir e preencher o Universo até hoje, sendo chamada de **radiação cósmica de fundo**, com uma temperatura atual de 2,7K e comprimento de onda da ordem de 1mm.

Quando o Universo tinha uma idade aproximada de 200 milhões de anos, pela ação da **força gravitacional**, começaram a se formar as galáxias.

4. AS EVIDÊNCIAS DO BIG BANG

□ Lei de Hubble

Em 1929, o astrônomo Edwin Powell Hubble, analisando a luz proveniente das estrelas, conseguiu mostrar que o Universo estava em expansão, e que portanto, em um passado remoto, deveria estar confinado no “ovo cósmico”.

A descoberta de Hubble se baseou no chamado Efeito Doppler-Fizeau, que afirma que quando uma fonte de ondas se aproxima ou se afasta do observador, há uma variação aparente na frequência da onda, isto é, a frequência da onda emitida é diferente da frequência

captada pelo observador.

O Efeito Doppler torna-se evidente para o som: quando uma ambulância com a sirene ligada se aproxima de nós, o seu som torna-se mais agudo (frequência maior) e quando se afasta, o som torna-se mais grave (frequência menor).

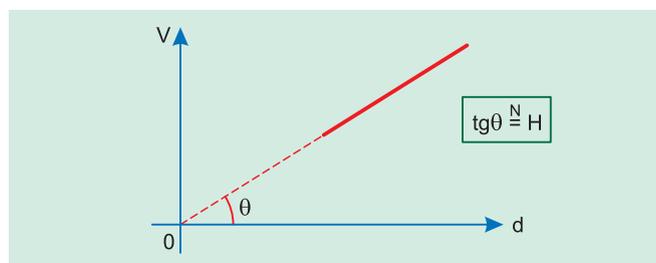
Da mesma forma, quando uma estrela se afasta da Terra, o espectro de sua radiação se desloca para o lado da cor vermelha, que é a de menor frequência. Esse desvio para o vermelho verificado por Hubble (*red shift*) foi a evidência de que as estrelas se afastavam da Terra e portanto o Universo estava em expansão.

Usando a equação do Efeito Doppler, Hubble conseguiu medir a velocidade de afastamento **V** das estrelas e pelo brilho delas conseguiu obter a distância **d** até nós, verificando que **V** e **d** eram proporcionais, o que traduz a chamada Lei de Hubble:

$$V = H d$$

H = constante de Hubble, cujo valor é estimado entre $19 \cdot 10^{-19}\text{Hz}$ e $26 \cdot 10^{-19}\text{Hz}$.

A velocidade com que uma estrela se afasta de nossa galáxia é proporcional à sua distância até nossa galáxia.



□ Radiação cósmica de fundo

Em 1965, dois astrônomos norte-americanos, Penzias e Wilson, descobriram acidentalmente a presença de uma radiação que parecia provir de todas as direções e que mantinha sempre as mesmas características: comprimento de onda da ordem de 1mm e temperatura de 2,7K.

Esta radiação foi identificada como a radiação cósmica de fundo prevista pelo *big bang* e usualmente citada como os ecos da criação do Universo. Corresponde àquele chuveiro que observamos na televisão quando o canal não está sintonizado.

Contudo, um problema foi levantado: a radiação cósmica de fundo não podia ser absolutamente uniforme como parecia de início, pois ela deveria ser afetada pela presença das galáxias que preenchem o Universo. Se não se detectassem flutuações de comprimento de onda e, portanto, de temperatura na radiação cósmica de fundo, isto inviabilizaria a existência de galáxias e toda a teoria do *big bang* cairia por terra.

Em 1992, um satélite de pesquisas espaciais norte-americano conseguiu detectar flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo da ordem de 30 milésimos de Kelvin e com isto salvar a teoria do *big bang*.

Em 2003, outro satélite norte-americano conseguiu medir flutuações ainda mais precisas, da ordem de milionésimo de Kelvin, e permitiu estabelecer a idade do Universo em 13,7 bilhões de anos com um desvio máximo da ordem de 200 milhões de anos:

$$\text{Idade do Universo} = (13,7 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ anos}$$

MÓDULO 59

Noções de Física Moderna

1. FÓTONS DE LUZ

Max Planck concluiu que a energia luminosa é emitida de modo **descontínuo**, isto é, agrupada em quantidades bem definidas (pacotes de energia) que foram chamadas de **fótons** de energia.

Cada radiação eletromagnética é definida por sua frequência **f**, que, para a luz visível, cresce do vermelho para o violeta na sequência em que as cores aparecem no arco-íris: vermelho – alaranjado – amarelo – verde – azul – anil e violeta.

O **“quantum”** de energia, isto é, a quantidade de energia **E**, associada a cada fóton de luz, é proporcional à frequência **f** da radiação:

$$E = h f$$

$h =$ constante de Planck $= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Einstein comprovou que a energia luminosa também se **propaga** e é **absorvida** de modo descontínuo, isto é, através dos fótons de luz.

Assim, quando a luz se propaga no espaço, a energia luminosa não está presente em toda a região varrida pela luz, mas sim concentrada em “pacotes” de energia, verdadeiros grãos de energia que são os **fótons** de luz e correspondem aos **“quanta”** de energia apresentados por Planck.

2. EFEITO FOTOELÉTRICO

Quando determinado tipo de luz atinge a superfície de um metal, observa-se que o metal passa a emitir elétrons. Esse fenômeno é chamado de efeito fotoelétrico.

O efeito fotoelétrico foi explicado em 1905 por Einstein e lhe valeu o Prêmio Nobel de Física.

Einstein propôs que, no efeito fotoelétrico, um fóton é inteiramente absorvido por um único elétron em um tipo de interação semelhante à colisão entre duas partículas.

Para que o elétron seja emitido, é necessário que a energia transportada pelo fóton de luz ($E = h f$) seja superior à energia de ligação (τ) entre o elétron e o núcleo do átomo.

❑ Paradoxo de Olbers

O paradoxo de Olbers refere-se à escuridão da noite: como a noite é escura se existem no Universo bilhões e bilhões de estrelas enviando luz para nós?

Isto se explica pelo fato de que, como o Universo tem uma idade finita (e daí a comprovação do *big bang*), a luz da maior parte das estrelas não teve tempo suficiente para chegar até nós.

Se o Universo fosse eterno, isto é, sempre tivesse existido, a luz de todas as estrelas do Universo teria chegado até nós e a noite seria necessariamente clara.

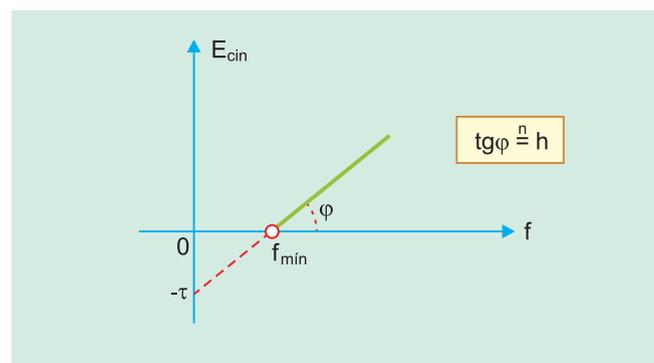
A energia cinética com que o elétron abandona o átomo é a diferença entre a energia do fóton e a energia de ligação a ser vencida.

$$E_{\text{cin}} = h f - \tau$$

Portanto, para que uma luz consiga arrancar elétrons de um metal, ela deve ter uma frequência adequada dada por:

$$h f > \tau \Rightarrow f > \frac{\tau}{h}$$

Se fizermos um gráfico da energia cinética do elétron emitido em função da frequência da luz incidente, teremos:



Observe que, como cada elétron só pode absorver um único fóton, é irrelevante para o valor da energia cinética a intensidade da luz incidente, importando apenas a frequência (cor) dessa luz.

O aumento da intensidade da luz incidente faz com que aumente a quantidade de elétrons emitidos, mas não a energia cinética de cada um.

3. DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA: LOUIS DE BROGLIE

O efeito fotoelétrico mostrou que a luz, embora tenha natureza ondulatória, pode ter comportamento análogo ao de uma partícula (partícula de energia, que é o fóton).

Este comportamento dual onda-partícula aplica-se não apenas para a luz, mas para todas as partículas.

Assim, para uma partícula em movimento, a intensidade da onda associada, num dado ponto, é proporcional à probabilidade de se encontrar a partícula naquele ponto.

Um fóton de luz monocromática de frequência f e comprimento de onda $\lambda = \frac{c}{f}$ transporta energia E e quantidade de movimento Q dados por:

$$E = h f$$

$$Q = \frac{h}{\lambda}$$

Analogamente, a uma partícula em movimento, com quantidade de movimento Q e energia cinética E , associamos uma onda de frequência f e comprimento de onda λ dados por:

$$f = \frac{E}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{Q}$$

Observe que se a partícula se move com velocidade cujo módulo é muito pequeno em comparação com c ($3,0 \cdot 10^8$ m/s), então sua massa é igual à de repouso e $Q = m_0 v$.

Porém, se o valor de v é próximo de c , então

$$Q = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v$$

em que $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ representa a massa

da partícula quando está com velocidade de módulo v .

4. PRINCÍPIO DA COMPLEMENTARIDADE DE BOHR

De acordo com o princípio da dualidade onda-partícula, a luz ora se comporta como onda ora como partícula, dependendo do fenômeno estudado, porém

nunca a luz tem simultaneamente os dois comportamentos. Esse fato é chamado **Princípio da complementaridade de Bohr.**

5. PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

Consideremos uma partícula com velocidade v , cuja posição é definida por uma coordenada x .

A Física Moderna ensina que não podemos especificar **simultaneamente** a posição e a velocidade (ou a quantidade de movimento) da partícula de um modo exato. Esta impossibilidade é denominada **“Princípio da Incerteza”**.

Seja Δx a incerteza na medida da posição x da partícula e ΔQ a incerteza na medida da quantidade de movimento Q da partícula.

Heisenberg mostrou que:

$$(\Delta x) \cdot (\Delta Q) \geq \frac{h}{4\pi}$$

em que h é a constante de Planck, cujo valor numérico é muito pequeno ($6,625 \cdot 10^{-34}$ J . s).

O princípio da incerteza nada tem que ver com falhas de nossos instrumentos de medição ou com limitações de nossos modelos. A incerteza prevista é irreduzível, mesmo usando-se perfeitos instrumentos de medição.

A restrição dada pelo Princípio da Incerteza não se refere à precisão com que x ou Q podem ser medidos, mas sim ao produto das incertezas $\Delta Q \cdot \Delta x$ numa medida simultânea de ambos. Quanto mais modificamos uma experiência de modo a melhorar a precisão na medida de uma das duas grandezas (x ou Q), mais estaremos aumentando a incerteza com que medimos a outra.

O princípio da incerteza também pode ser formulado em relação às incertezas na medida do instante (Δt) e da energia (ΔE) associados ao movimento de uma partícula elementar

$$(\Delta t) \cdot (\Delta E) \geq \frac{h}{4\pi}$$

As incertezas nas medidas estão ligadas às perturbações introduzidas pelos processos de observação e medida como, por exemplo, a interação entre o fóton de luz usado na observação e a partícula elementar em estudo. A interação entre o fóton de luz e a partícula pode modificar a sua posição, a sua quantidade de movimento e a sua energia.

MÓDULO 60

Análise Dimensional



1. EQUAÇÕES DIMENSIONAIS

É usual, na Mecânica, escolhermos como grandezas fundamentais: a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T).

Qualquer outra grandeza (G) da Mecânica pode ser escrita em função de M, L e T, elevados a expoentes adequados.

A expressão de G em função de M, L e T é chamada de equação dimensional de G e os expoentes respectivos são as dimensões de G em relação a M, L e T.

$$[G] = M^x L^y T^z$$

x = dimensão de G em relação à massa M.

y = dimensão de G em relação ao comprimento L.

z = dimensão de G em relação ao tempo T.

Exemplos

a) Velocidade

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow [V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} = M^0 L^1 T^{-1}$$

A **velocidade** tem dimensões 0, 1 e -1 em relação à massa, comprimento e tempo.

b) Aceleração

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} = M^0 L^1 T^{-2}$$

A **aceleração** tem dimensões 0, 1 e -2 em relação à massa, comprimento e tempo.

c) Força

$$F = ma \Rightarrow [F] = MLT^{-2}$$

A **força** tem dimensões 1, 1 e -2 em relação à massa, comprimento e tempo.

d) Energia

$$E = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow E = M(LT^{-1})^2 = ML^2 T^{-2}$$

A **energia** tem dimensões 1, 2 e -2 em relação à massa, comprimento e tempo.

2. HOMOGENEIDADE DAS EQUAÇÕES FÍSICAS

Para que uma equação física possa ser verdadeira, é necessário que os dois membros da equação tenham as mesmas dimensões. Em particular, se um dos membros for constituído por uma soma de parcelas, todas as parcelas devem ter as mesmas dimensões.

$$Y = X \Rightarrow [Y] = [X]$$

$$Y = X + Z + W \Rightarrow [Y] = [X] = [Z] = [W]$$

3. PREVISÃO DE FÓRMULAS

A partir de experiências, um cientista pode prever de que grandezas físicas (A, B, C) deve depender uma certa grandeza G.

Por meio de uma análise dimensional, é possível ao cientista determinar os expoentes x, y e z com que as grandezas A, B e C figuram na expressão de G.

$$G = kA^x B^y C^z$$

análise dimensional

obtemos **x**, **y** e **z**

k é uma constante numérica (adimensional) que não pode ser obtida pela análise dimensional.

Exemplo

No estudo da queda livre, o cientista prevê que o tempo de queda deve depender da massa do corpo (m), do módulo da aceleração da gravidade (g) e da altura de queda (H).

Isto posto, o cientista escreve a equação:

$$t_q = km^x g^y H^z$$

Impondo-se que os dois membros tenham a mesma equação dimensional, podemos determinar os valores de x, y e z:

$$[t_q] = [m]^x [g]^y [H]^z$$

$$M^0 L^0 T = M^x (LT^{-2})^y \cdot L^z$$

$$M^0 L^0 T = M^x L^{y+z} T^{-2y}$$

Identificando-se as dimensões:

$$x = 0$$

$$y + z = 0$$

$$-2y = 1$$

$$x = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

O fato de $x = 0$ indica que o tempo de queda não depende da massa, corrigindo a hipótese inicial do cientista, que estava errada. (Veja a força da análise dimensional.)

A equação assume o aspecto:

$$t_q = k g^{(-1/2)} H^{(1/2)}$$

ou

$$t_q = k \sqrt{\frac{H}{g}}$$

Apenas o valor de **k** não pode ser obtido por análise dimensional e sim por meio de um ensaio experimental ou de alguma teoria física.



MÓDULO 25

Instrumentos de Óptica



1. INTRODUÇÃO

Os instrumentos de óptica destinam-se a melhorar as condições de visão dos objetos e podem ser classificados em duas categorias: de observação subjetiva e de projeção.

a) **Instrumentos de observação subjetiva**

Tais instrumentos fornecem, de um objeto real, uma imagem final virtual. Esses instrumentos podem ser de dois tipos:

1º) **Instrumentos de aumento:** fornecem uma imagem ampliada em relação ao objeto.

Exemplos: **lupa** e **microscópio composto**.

2º) **Instrumentos de aproximação:** permitem a visão dos objetos distantes sob ângulo visual maior, embora a imagem seja reduzida em relação ao objeto.

Exemplos: **lunetas** e **telescópios**.

b) **Instrumentos de projeção**

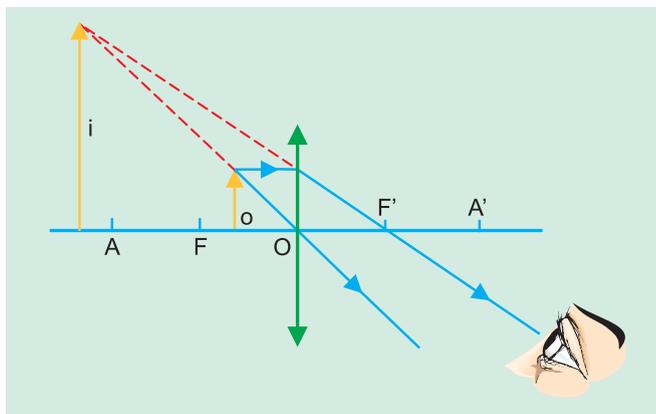
Tais instrumentos fornecem, de um objeto real, uma imagem final real que deve ser recebida em uma tela ou filme.

Exemplos: **projektor de "slides"** e **máquina fotográfica**.

2. LUPA

É constituída por uma única lente convergente ou por uma associação de duas lentes justapostas. A distância focal é da ordem de centímetro.

De um objeto real colocado entre o foco objeto e o centro óptico, a lupa conjuga uma imagem virtual, direita e ampliada.



3. MICROSCÓPIO COMPOSTO

É constituído por duas lentes (ou duas associações de lentes justapostas) convergentes: **a objetiva** (distância focal da ordem de milímetro) e **a ocular** (que funciona como lupa).

O objeto real **o** é colocado antes do foco objeto da objetiva (F_{ob}). Esta conjuga uma imagem i_1 real, ampliada e invertida.

A imagem i_1 comporta-se como objeto real para a ocular, a qual funciona como lupa.

A imagem final i_2 **é virtual, invertida e ampliada.**

Distância entre a objetiva e a ocular:

$$d = p'_{ob} + p_{oc}$$

$$\text{Aumento da objetiva: } A_{ob} = \frac{i_1}{o}$$

$$\text{Aumento da ocular: } A_{oc} = \frac{i_2}{i_1}$$

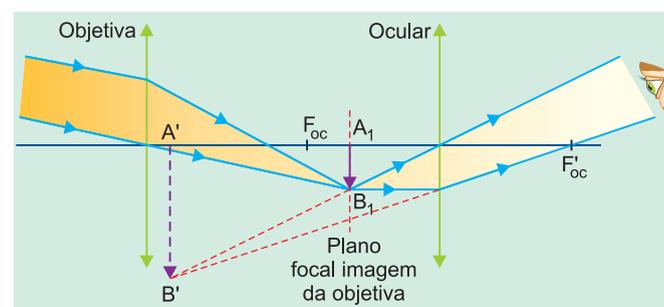
Aumento do microscópio: A_m

$$A_m = \frac{i_2}{o}$$

$$A_m = \frac{i_2}{i_1} \cdot \frac{i_1}{o} \Rightarrow A_m = A_{oc} \cdot A_{ob}$$

4. LUNETAS ASTRONÔMICA

É constituída por duas lentes (ou duas associações de lentes justapostas): a **objetiva** (distância focal da ordem de metro) e a **ocular** (que funciona como lupa).



De um objeto impróprio, a objetiva conjuga uma imagem real i_1 , situada no plano focal imagem da objetiva. A imagem i_1 comporta-se como objeto real para a ocular, a qual funciona como lupa.

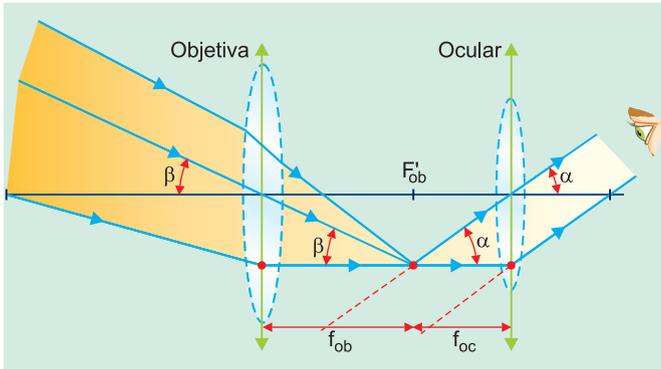
❑ **Aumento angular**

Sejam β o ângulo visual do objeto impróprio, quando visto a olho nu, e α o ângulo visual sob o qual é vista a imagem final i_2 .

❑ **Definição de aumento angular, A_g**

$$A_g = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta}$$



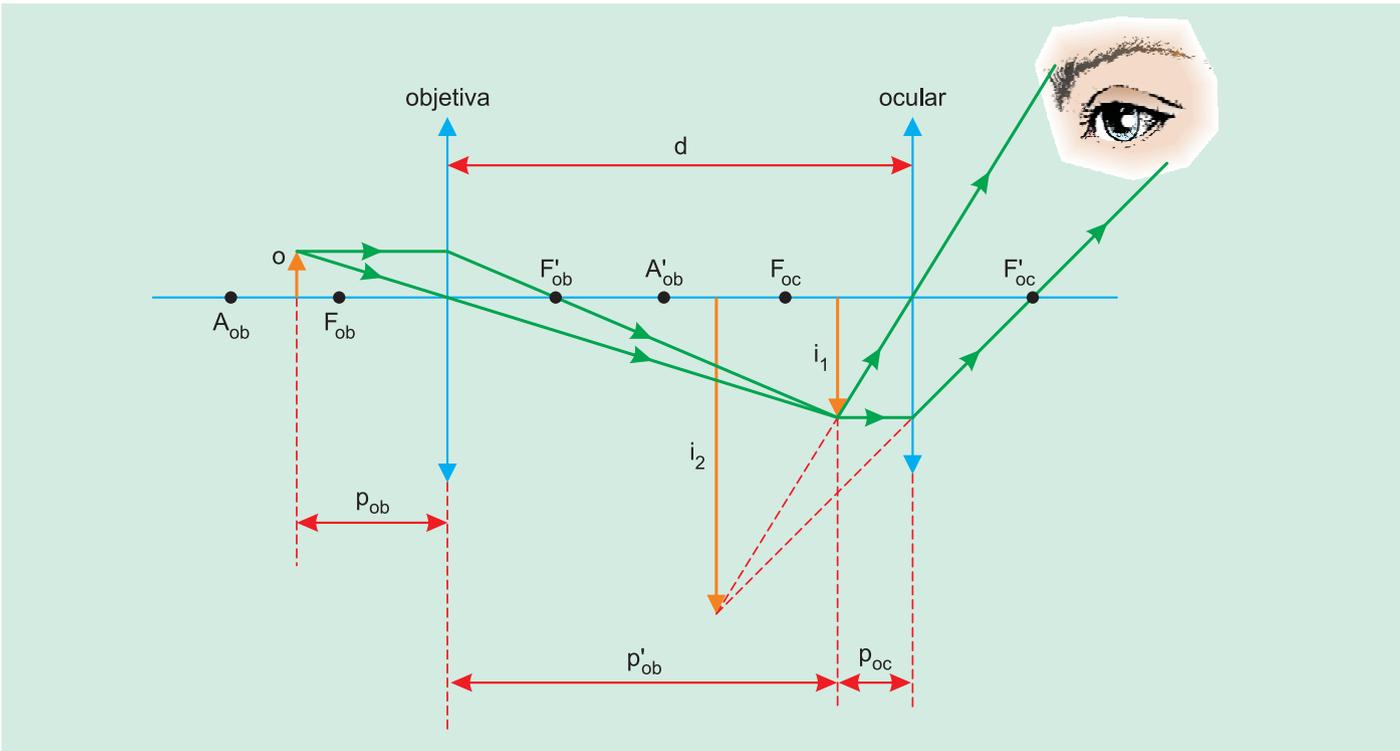


Seja f_{ob} e f_{oc} as distâncias focais da objetiva e da ocular, quando a imagem final está focalizada no infinito, demonstra-se que:

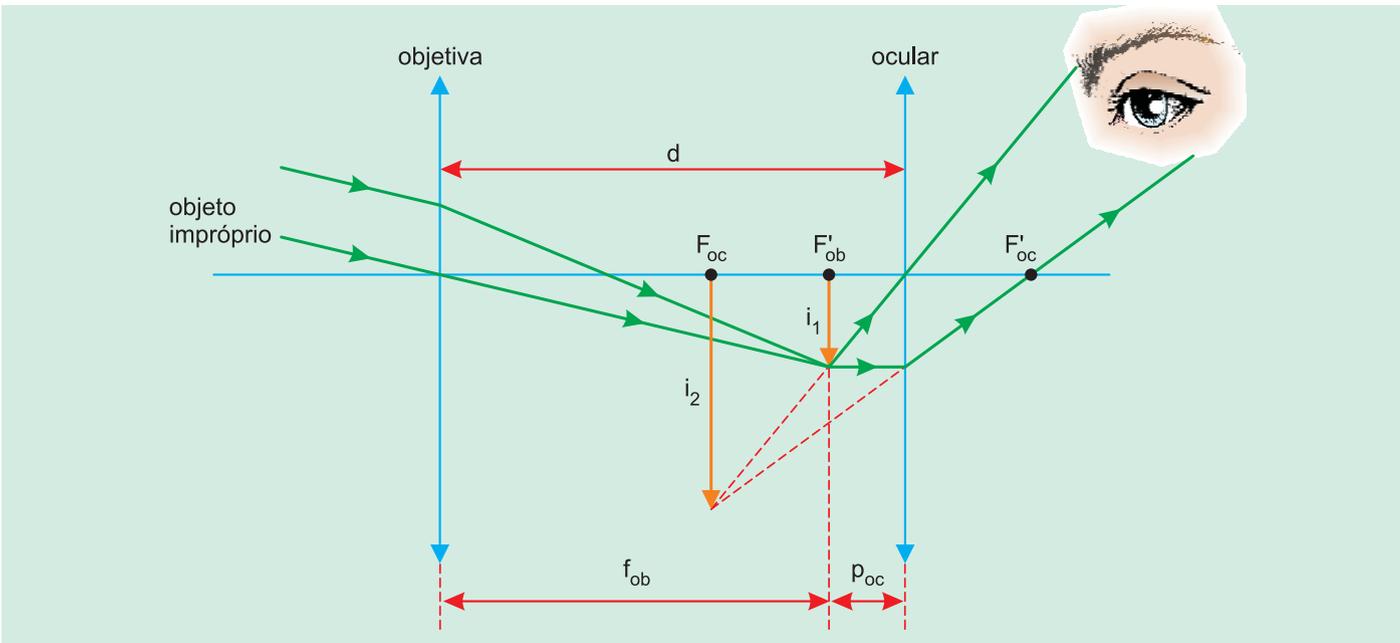
$$A_g = \frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

Observação

A diferença básica entre as lunetas astronômicas e os **telescópios** é que nestes últimos utiliza-se como objetiva um espelho parabólico côncavo, de grande distância focal.



Microscópio composto



Luneta astronômica – Distância entre a objetiva e a ocular: $d = f_{ob} + f_{oc}$

MÓDULO 26

Classificação das Ondas
e Velocidades do Som e da Luz

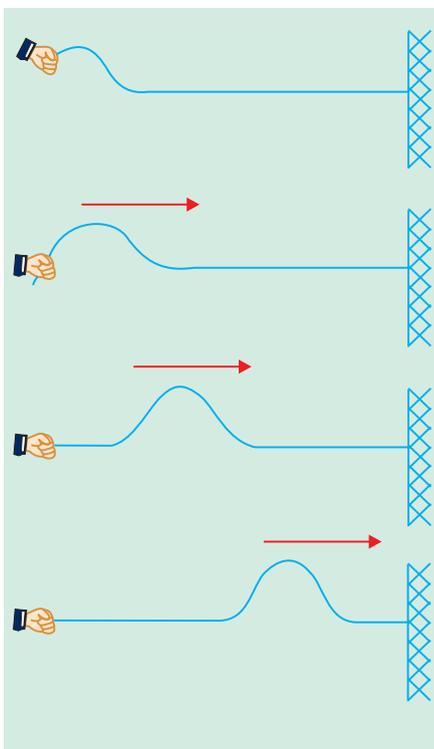
1. CONCEITO DE ONDA

Dizemos que um meio sofre uma **perturbação** quando qualquer uma das propriedades físicas associadas a um de seus elementos de volume é alterada.

Se a perturbação se estender a outros elementos de volume do meio, originar-se-á uma **onda**.

Dizemos, então, que:

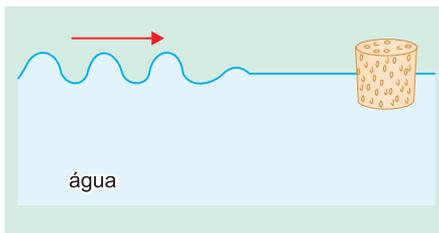
Onda é qualquer perturbação que se propaga através de um meio.



No exemplo acima, a pessoa dá um solavanco na extremidade esquerda da corda, produzindo uma onda que se propaga através da mesma.

2. PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS ONDAS

Uma onda transmite energia, sem propagação de matéria.



É o caso, por exemplo, das ondas esquematizadas ao lado, que, ao atingirem a rolha, fazem com que esta execute um movimento de sobe-e-desce, sem que seja arrastada para a direita.

3. NATUREZA DAS ONDAS

□ Ondas mecânicas

São perturbações mecânicas que se propagam através das partículas de um meio material.

Exemplos

Ondas numa corda, ondas na superfície da água, ondas numa mola, o som etc.

O som constitui-se de ondas mecânicas que se podem propagar em meios sólidos, líquidos e gasosos.

É importante destacar que as ondas mecânicas não se propagam no vácuo.

Assim:

O som não se propaga no vácuo.

□ Ondas eletromagnéticas

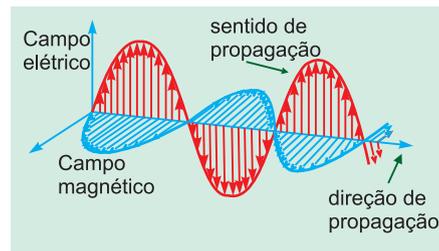
Constituem-se do conjunto de um campo elétrico e um campo magnético, variáveis e perpendiculares entre si, que se propagam no vácuo e também em alguns meios materiais.

Exemplos

Ondas de rádio e TV, microondas, infravermelho, luz, ultravioleta, raios X etc.

As radiações eletromagnéticas propagam-se no vácuo com a maior velocidade fisicamente concebível:

$$c = 3,0 \cdot 10^5 \text{ km/s} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



Representação esquemática de uma onda eletromagnética.

Resumindo:

A luz é onda eletromagnética que se propaga no vácuo e em alguns meios materiais. Sua velocidade no vácuo vale $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

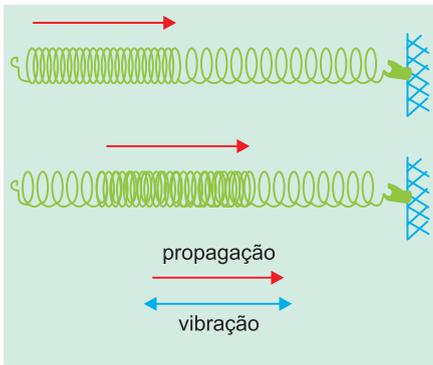


Os raios X têm grande utilização na medicina como, por exemplo, no diagnóstico e avaliação de fraturas ósseas. Essas radiações se propagam através dos músculos, mas são bloqueadas pelos ossos. Assim, utilizando-se chapas sensíveis aos raios X, é possível fazer uma "foto" de partes do corpo de uma pessoa na qual ficam evidenciados os ossos com seus possíveis problemas.

4. ONDAS QUANTO ÀS DIREÇÕES DE VIBRAÇÃO E PROPAGAÇÃO

□ Ondas longitudinais

A direção de vibração coincide com a de propagação.

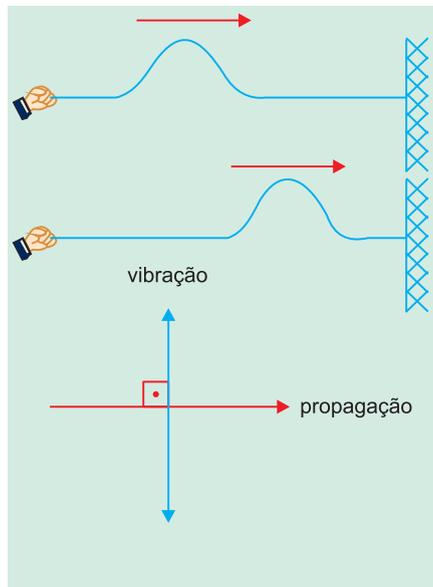


Na mola acima, a onda representada é longitudinal, pois, enquanto a propagação ocorre da esquerda para a direita, as partículas vibram horizontalmente, isto é, na mesma direção.

São também longitudinais as ondas sonoras nos meios fluidos (líquidos ou gasosos).

❑ Ondas transversais

A direção de vibração é perpendicular à de propagação.

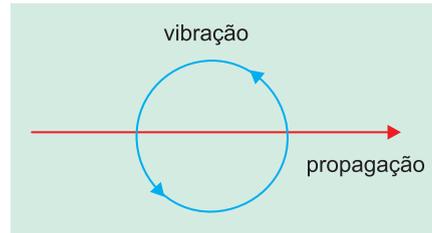


Na corda acima, a onda representada é transversal, pois, enquanto a propagação ocorre da esquerda para a direita, as partículas vibram verticalmente, isto é, na direção perpendicular.

São também transversais todas as radiações eletromagnéticas, inclusive a luz.

❑ Ondas mistas

Têm caráter longitudinal e transversal.

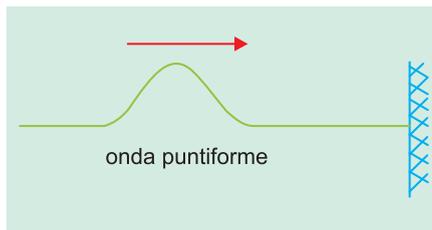


As ondas nas superfícies líquidas são mistas.

5. ONDAS QUANTO À FRENTE DE ONDA E À DIMENSÃO

❑ A frente de onda é um ponto

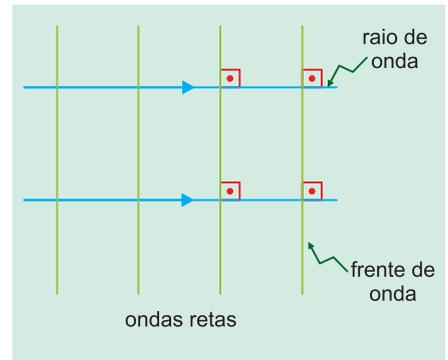
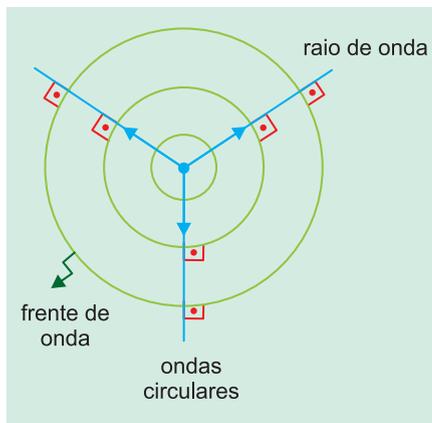
ONDAS UNIDIMENSIONAIS



Uma onda se propagando ao longo de uma corda tem por frente de onda um "ponto", o que significa que essa onda é unidimensional.

❑ A frente de onda é uma linha

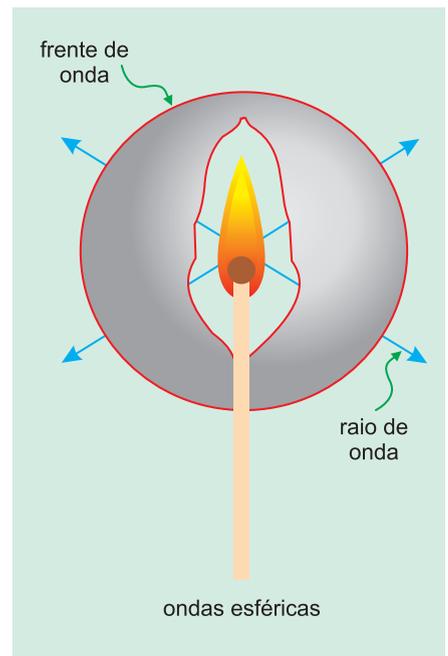
ONDAS BIDIMENSIONAIS



Podemos observar na superfície da água ondas circulares ou retas. Em ambos os casos, a frente de onda é uma "linha" e, por isso, essas ondas são bidimensionais.

❑ A frente de onda é uma superfície

ONDAS TRIDIMENSIONAIS



As ondas luminosas emitidas, por exemplo, por um palito de fósforo aceso propagam-se em todas as direções em torno do palito. Isso mostra que as frentes de onda são "superfícies" (no caso, superfícies esféricas) e, por isso, essas ondas são tridimensionais.



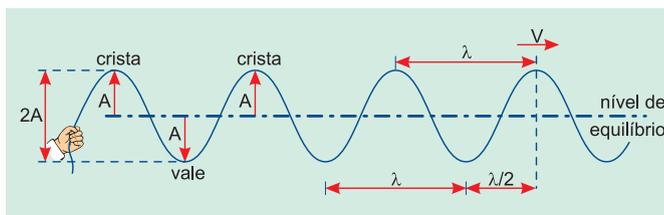
MÓDULO 27

Equação Fundamental da Ondulatória



1. PERÍODO, FREQUÊNCIA, AMPLITUDE E COMPRIMENTO DE ONDA

Suponhamos que um homem, segurando uma das extremidades de uma corda tensa, passe a movimentar ritmadamente sua mão para cima e para baixo.



Admitamos que o intervalo de tempo decorrido em um sobe e desce da mão seja sempre constante e que a altura da posição mais alta da mão em relação à posição mais baixa seja invariável.

Esses movimentos cadenciados da mão do homem produzirão uma sucessão de ondas senoidais que percorrerão a corda com velocidade de intensidade V , conforme ilustra o esquema acima.

Chama-se período (T) da onda o intervalo de tempo necessário para que um ponto vibrante realize um ciclo completo.

No caso do exemplo, o período da onda é igual ao intervalo de tempo gasto pela mão do homem para executar uma oscilação, isto é, um sobe e desce completo.

Chama-se frequência (f) da onda o número de ciclos realizados por um ponto vibrante numa unidade de tempo.

Matematicamente: $f = \frac{n}{\Delta t}$

Se $n = 1$ ciclo, teremos $\Delta t = T$. Assim:

$$f = \frac{1}{T} \text{ ou } T = \frac{1}{f}$$

Se a unidade de tempo for o segundo (s), decorrerá que:

$$\text{unid (f)} = \frac{1}{s} = s^{-1} = \text{hertz (Hz)}$$

Recordemos que:

$$1\text{kHz} = 10^3\text{Hz}, \quad 1\text{MHz} = 10^6\text{Hz} \quad \text{e} \quad 1\text{GHz} = 10^9\text{Hz}$$

Chama-se amplitude (A) da onda a distância de uma crista ou um vale ao nível de equilíbrio.

Chama-se comprimento de onda (λ) a distância percorrida pela perturbação durante um período.

Referindo-nos ao exemplo da corda, podemos dizer que o comprimento de onda λ é a distância entre duas cristas ou entre dois vales consecutivos.

É evidente que a distância entre uma crista e um vale consecutivos equivale a meio comprimento de onda ($\lambda/2$).

2. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA ONDULATÓRIA

Geralmente, uma onda propaga-se em movimento uniforme, valendo a relação:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Recordando que durante um período (T) a perturbação percorre um comprimento de onda (λ) e que a frequência (f) é o inverso do período, podemos escrever que:

$$V = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

MÓDULO 28

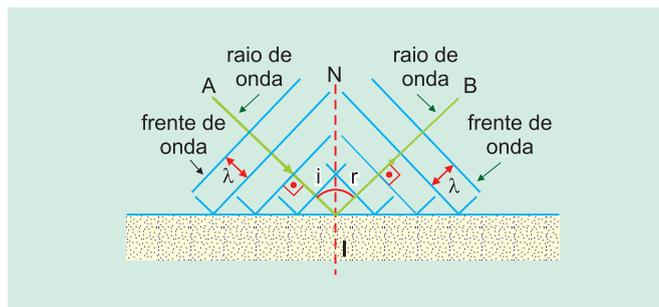
Reflexão e Refração de Ondas



1. REFLEXÃO

É o fenômeno pelo qual uma onda retorna ao meio de origem, após incidência em superfície refletora.

Na figura abaixo, está ilustrada a reflexão de um trem de ondas retas que incidem sobre uma superfície plana.



Além das frentes de onda incidente e refletida, destacam-se:

AI = raio incidente

IB = raio refletido

N = reta normal

i = ângulo de incidência

r = ângulo de reflexão

2. LEIS DA REFLEXÃO

1.ª Lei: o raio incidente, a reta normal no ponto de incidência e o raio refletido são coplanares (pertencentes ao mesmo plano).

2.ª Lei: o ângulo de reflexão é sempre igual ao ângulo de incidência.

$$r = i$$

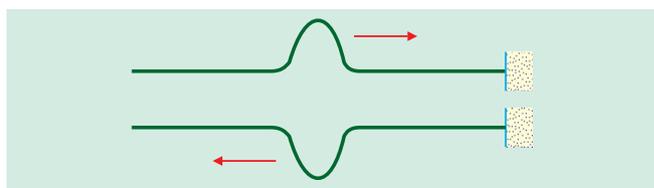
3. PROPRIEDADES DA REFLEXÃO

P.1. Na reflexão, a frequência, a velocidade de propagação e o comprimento de onda não se alteram.

P.2. A fase da onda pode variar ou não.

□ **1.º CASO: Reflexão com inversão de fase.**

Um pulso que se propaga ao longo de uma corda elástica reflete-se com inversão de fase depois de incidir sobre uma parede de concreto.



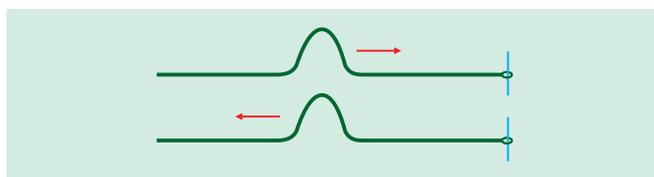
Ocorre nas seguintes condições:

Ondas mecânicas: a rigidez e a inércia do meio de destino são **maiores** que as do meio de origem.

Ondas eletromagnéticas: o meio de destino é **mais** refringente que o meio de origem.

□ **2.º CASO: Reflexão sem inversão de fase.**

Um pulso que se propaga ao longo de uma corda elástica reflete-se sem inversão de fase depois de incidir sobre uma argola de peso desprezível que corre sem atrito por uma haste vertical.



Ocorre nas seguintes condições:

Ondas mecânicas: a rigidez e a inércia do meio de destino são **menores** que as do meio de origem.

Ondas eletromagnéticas: o meio de destino é **menos** refringente que o meio de origem.

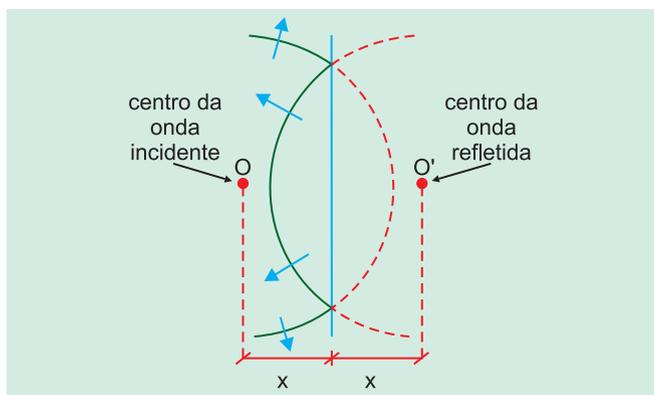
Observação

Entenda-se por “meio de destino” aquele para onde a onda iria se não houvesse reflexão.

4. REFLEXÃO DE UM PULSO CIRCULAR

Consideremos um pulso circular propagando-se na superfície da água de uma cuba de ondas.

Ao incidir sobre uma das bordas planas da cuba, o pulso sofrerá reflexão, conforme ilustra a figura a seguir.

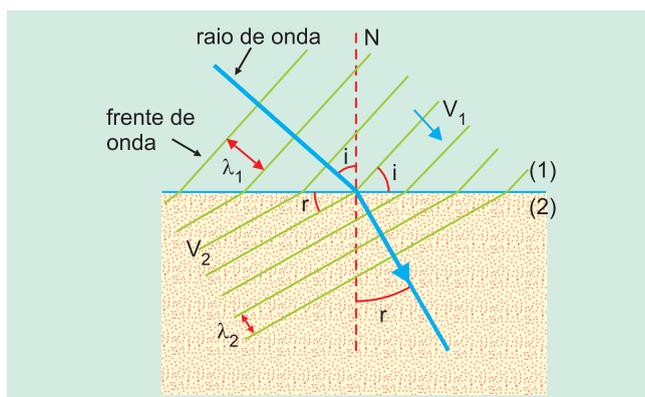


Devemos observar que os pontos O e O', que correspondem respectivamente aos centros das frentes de onda incidente e refletida, são **simétricos** em relação à superfície refletora (borda da cuba).

5. REFRAÇÃO

É o fenômeno pelo qual uma onda passa de um meio para outro diferente.

Na figura seguinte, está ilustrada a refração de um trem de ondas retas que passam de um meio (1) para outro (2).



i = ângulo de incidência
 r = ângulo de refração

6. PROPRIEDADES DA REFRAÇÃO

P.1. Na refração, a velocidade de propagação da onda sempre se altera.

Recordemos que as velocidades e os índices absolutos de refração são inversamente proporcionais:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

P.2. Na refração, a frequência da onda e a fase não se alteram.

$$\text{Meio (1): } V_1 = \lambda_1 f$$

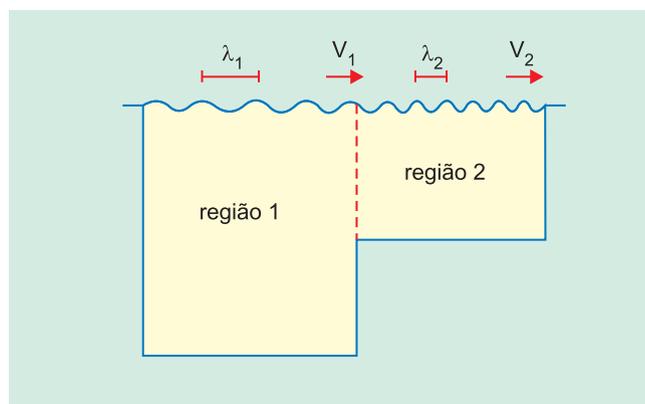
$$\text{Meio (2): } V_2 = \lambda_2 f$$

Portanto:
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

As velocidades de propagação e os comprimentos de onda são diretamente proporcionais.

Na figura seguinte, está representado o corte de uma cuba de ondas, dotada de duas regiões: região 1 – **profunda**, e região 2 – **rasa**.

Ondas retas geradas na superfície da água da cuba refratam-se da região 1 para a região 2.



Ao passarem de (1) para (2), as ondas têm sua velocidade de propagação e seu comprimento de onda reduzidos na mesma proporção, porém a frequência nas duas regiões é a mesma.

7. LEIS DA REFRAÇÃO

1.ª LEI:

O raio incidente, a reta normal no ponto de incidência e o raio refratado são coplanares.

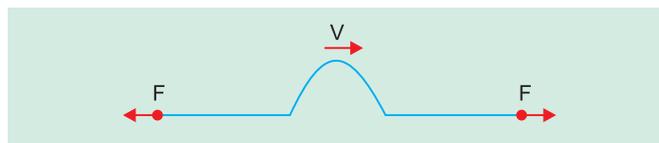
2.ª LEI: Lei de Snell-Descartes

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

8. VELOCIDADE DE UM PULSO TRANSVERSAL NUMA CORDA (OU MOLA) TENSA

Consideremos uma corda (ou mola) de densidade linear ρ submetida a uma força de tração de intensidade F .

Um pulso gerado na corda (ou mola) propaga-se com velocidade V , conforme ilustra o esquema.



Podemos relacionar V com F e ρ , conforme a equação abaixo, conhecida por **fórmula de Taylor**.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

Convém observar que a densidade linear ρ traduz a massa por unidade de comprimento.

$$\rho = \frac{m}{L}$$

MÓDULO 29

Interferência de Ondas



1. O FENÔMENO

Ocorre interferência quando há superposição de ondas de mesma natureza se propagando num mesmo meio.

2. INDEPENDÊNCIA DA PROPAGAÇÃO ONDULATÓRIA

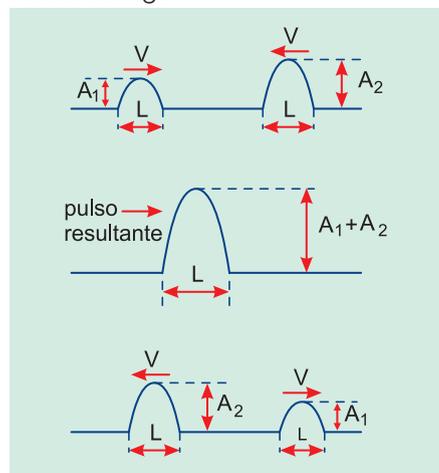
Pode ser verificado experimentalmente que, após a interferência (superposição), cada onda segue sua propagação como se nada tivesse ocorrido; as ondas propagam-se independentemente, apresentando as mesmas características depois de eventuais superposições.

3. TIPOS PARTICULARES DE INTERFERÊNCIA

□ Interferência construtiva (IC) ou reforço

Consideremos uma corda elástica e não dispersiva, na qual se propagam dois pulsos de mesma largura L , porém de amplitudes A_1 e A_2 , respectivamente.

Supondo que os pulsos estejam em **corcondância de fase**, poderemos observar as três situações ilustradas a seguir:



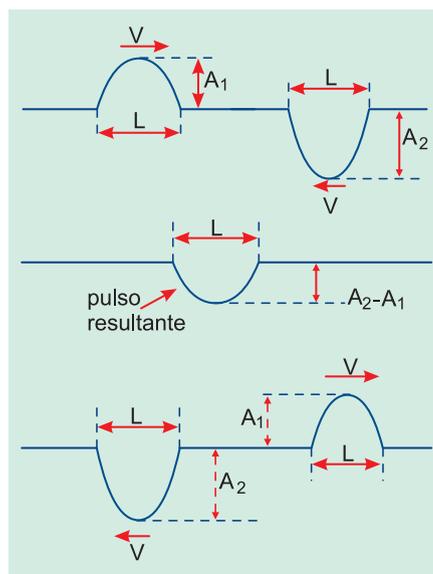
Observemos que no instante da superposição (interferência), os pulsos se reforçam, gerando um pulso resultante de amplitude $A = A_1 + A_2$.

Depois da superposição, entretanto, cada pulso segue sua propagação, mantendo suas características iniciais.

□ Interferência destrutiva (ID) ou anulamento

Retomemos a corda e os pulsos referidos anteriormente.

Supondo, agora, que os pulsos estejam em **oposição de fase**, poderemos observar as três situações ilustradas a seguir:



Observemos que, no instante da superposição (interferência), os pulsos se subtraem ("anulamento"), gerando um pulso resultante de amplitude $A = A_2 - A_1$ ($A_2 > A_1$).

Como no caso anterior, depois da superposição, cada pulso segue sua propagação, mantendo suas características iniciais.

4. CÁLCULO DA DEFASAGEM DE DUAS ONDAS NUM PONTO

Na situação esquematizada, F_1 e F_2 são fontes que emitem ondas de frequência f (período $T = \frac{1}{f}$) e comprimento de onda λ , que, depois de percorrerem respectivamente as distâncias x_1 e x_2 , atingem o ponto P , onde sofrem interferência.

Para que no ponto P ocorra interferência construtiva (IC), a defasagem das ondas que lá chegam deve ser múltipla par de π rad.

$$(IC) \Rightarrow \Delta\varphi_P = 2k\pi$$

Para que no ponto P ocorra interferência destrutiva (ID), a defasagem das ondas que lá chegam deve ser múltipla ímpar de π rad.

$$(ID) \Rightarrow \Delta\varphi_P = (2k + 1)\pi$$

Ao atingirem o ponto P , as ondas podem estar defasadas, sendo três os principais fatores de defasagem:

(I) Defasagem inicial ($\Delta\varphi_0$):

uma fonte entra em operação primeiro que a outra.

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\Delta t}{T} 2\pi$$

(II) Defasagem por diferença de percursos ($\Delta\varphi_1$):

as ondas de uma fonte percorrem até o ponto P uma distância maior que a percorrida pelas ondas da outra fonte.

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi$$

(III) Defasagem por reflexões com inversão de fase ($\Delta\varphi_2$):

$$\Delta\varphi_2 = n\pi$$

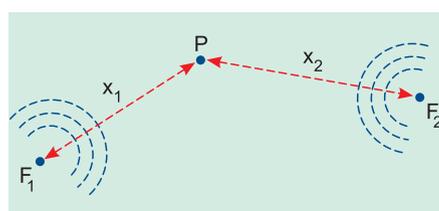
n = número de reflexões com inversão de fase.

Cálculo da defasagem total em P :

$$\Delta\varphi_P = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \quad \text{ou}$$

$$\Delta\varphi_P = \frac{\Delta t}{T} 2\pi + \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi + n\pi$$

Para que no ponto P ocorra interferência construtiva (IC), a defasagem das ondas que lá chegam deve ser múltipla par de π rad.



5. CONDIÇÕES PARTICULARES E SIMPLIFICADAS DE IC E ID NUM PONTO P

Consideremos duas fontes de ondas coerentes (em concordância de fase) enviando ondas de mesma natureza e mesma frequência f a um ponto **P** situado no mesmo meio das fontes.

Admitamos que essas ondas se propaguem até **P** sem sofrer reflexões com inversão de fase.

Sendo λ o comprimento de onda e Δx a diferença de percursos entre as ondas até o ponto **P**, são válidas as seguintes condições:

- Interferência Construtiva (**IC**) em **P**:

Δx deve ser um múltiplo par de meio comprimento de onda.

$$\Delta x = p \lambda / 2 \quad (p = 0, 2, 4, \dots)$$

- Interferência Destrutiva (**ID**) em **P**:

Δx deve ser um múltiplo ímpar de meio comprimento de onda.

$$\Delta x = i \lambda / 2 \quad (i = 1, 3, 5, \dots)$$

Notas

(I) No caso de uma das ondas sofrer uma reflexão com inversão de fase, as condições citadas acima invertem-se.

(II) Podemos dizer genericamente que a condição de **IC** ou **ID** para duas ondas emitidas de fontes coerentes é:

$$\Delta x = N \frac{\lambda}{2} \quad (N = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

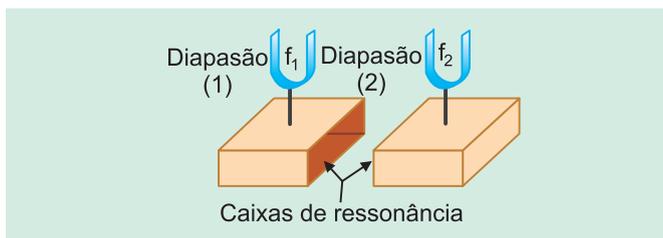
MÓDULO 30

Fenômenos Ondulatórios

1. BATIMENTO

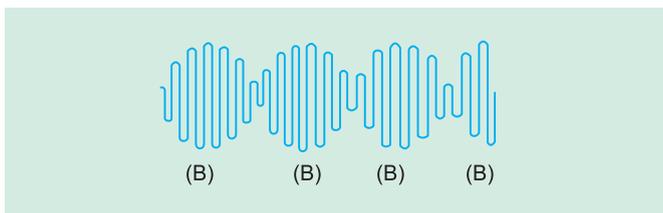
É o fenômeno resultante da superposição de duas ondas de mesma direção, mesma amplitude e frequências próximas.

Consideremos os dois diapasões esquematizados abaixo; suas frequências naturais de vibração valem, respectivamente, f_1 e f_2 , com f_1 bem próxima de f_2 .



Percutindo-se os dois diapasões simultaneamente e com a mesma intensidade, as ondas sonoras emitidas por ambos interferirão, gerando um som resultante de **frequência constante**, porém de **intensidade oscilante** entre máximos e mínimos bem determinados.

Cada vez que a intensidade do som resultante passa por um máximo, dizemos que ocorreu um **batimento**.



Na figura acima, está esquematizada a onda resultante da superposição dos sons dos diapasões (1) e (2). Os batimentos estão indicados por (B).

□ Cálculo da frequência dos batimentos (f_b)

$$f_b = |f_2 - f_1|$$

Para que os batimentos sejam percebidos distintamente pelo ouvido humano, f_b não deve exceder 10Hz.

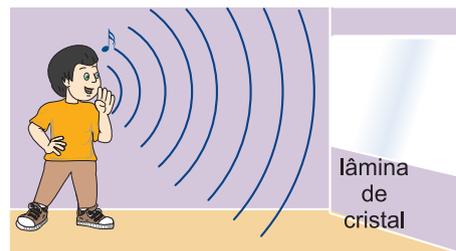
□ Cálculo da frequência da onda resultante (f_r)

$$f_r = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

2. RESSONÂNCIA

É o fenômeno que ocorre quando um sistema recebe energia periodicamente numa frequência igual a uma de suas frequências próprias de vibração.

Na ilustração abaixo, o garoto está emitindo uma nota musical de frequência igual a uma das frequências próprias de vibração da lâmina de cristal.



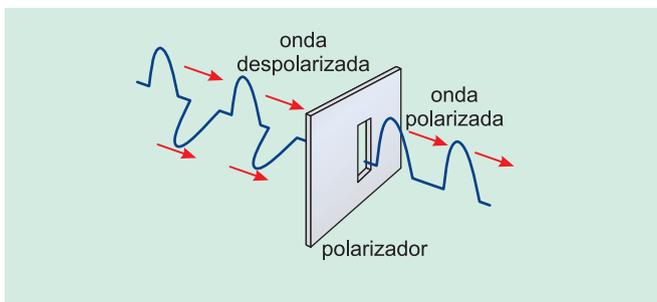
Neste caso, a lâmina entra em **ressonância** com o agente excitador (onda sonora), passando a vibrar com amplitude crescente.

Dependendo da duração da ressonância e da intensidade do som emitido pelo garoto, a lâmina de cristal, cuja espessura é relativamente pequena, poderá quebrar-se.

3. POLARIZAÇÃO

É o fenômeno que consiste em todos os pontos atingidos por uma onda vibrarem numa **mesma direção** e num **mesmo plano**.

Apenas as ondas transversais podem ser polarizadas.

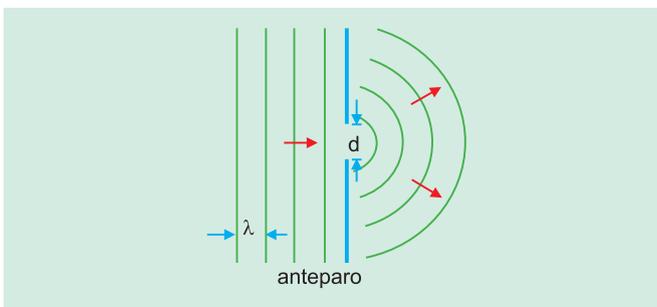


Ondas eletromagnéticas, como a luz, podem sofrer polarização. O som no ar, entretanto, por ser uma onda longitudinal, não pode ser polarizado.

4. DIFRAÇÃO

É o fenômeno que consiste em uma onda “contornar” obstáculos.

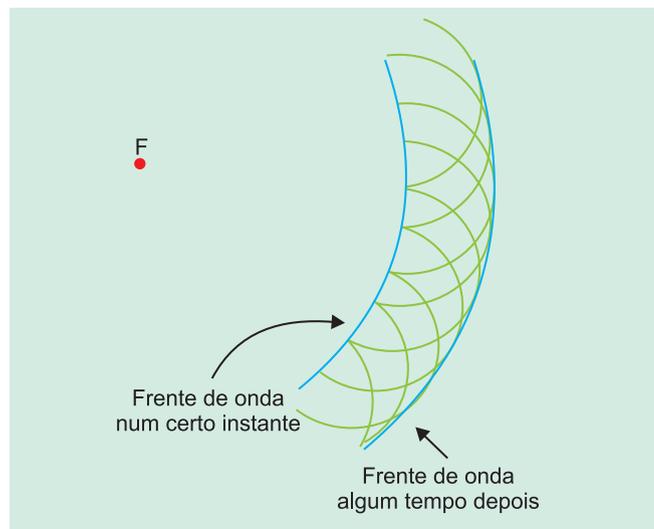
Isso ocorre quando a dimensão dos obstáculos ou fendas é menor ou da ordem do comprimento de onda.



Na ilustração anterior, a largura da fenda (d) é menor que o comprimento de onda (λ). Nesse caso, a onda difrata-se intensamente, transpondo a fenda e atingindo a região à direita do anteparo.

5. EXPLICAÇÃO DA DIFRAÇÃO: PRINCÍPIO DE HUYGENS

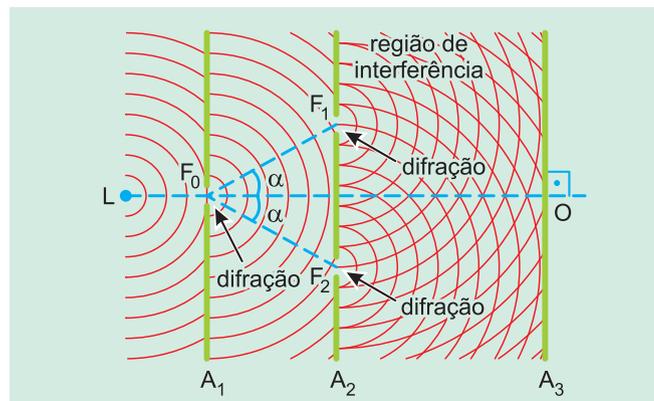
Cada ponto de uma frente de onda comporta-se como uma nova fonte de ondas elementares, que se propagam para além da região já atingida pela onda com a mesma frequência da onda original.



6. DIFRAÇÃO EM FENDA DUPLA: EXPERIÊNCIA DE YOUNG

Thomas Young (1773-1829) – físico e médico inglês – propôs uma experiência que deu forte sustentação à Teoria Ondulatória da Luz. Por meio do seu experimento, foi possível verificar que a luz, a exemplo do que ocorre com outros tipos de ondas, também exhibe os fenômenos de difração e interferência.

Na situação esquematizada abaixo, L é uma fonte de luz monocromática, A_1 , A_2 e A_3 são anteparos opacos paralelos entre si e F_0 , F_1 e F_2 são fendas estreitas – de largura da ordem de milímetros. A figura representa o aparato experimental visto de cima.



A luz emitida por L difrata-se na fenda F_0 , equidistante de F_1 e F_2 , e, em seguida, nas fendas F_1 e F_2 . Estas duas fendas comportam-se como fontes coerentes de luz (que operam em concordância de fase). A luz proveniente de F_1 e F_2 sofre então interferência na região entre A_2 e A_3 , fazendo com que no anteparo A_3 apareçam faixas claras intercaladas com faixas escuras. Essas faixas, denominadas franjas de interferência, permitem localizar em A_3 os locais onde ocorre interferência construtiva (franjas claras) e os locais onde ocorre interferência destrutiva (franjas escuras). No ponto O , equidistante de F_1 e F_2 , ocorre interferência construtiva e nessa região situa-se a chamada franja central – a mais brilhante de todas.

Sendo λ o comprimento de onda da luz utilizada e Δx a diferença de percursos das luzes emitidas de F_1 e F_2 até atingirem o anteparo A_3 , tem-se:

$$\Delta x = N \frac{\lambda}{2} \quad (N = 0, 1, 2, 3, 4 \dots)$$

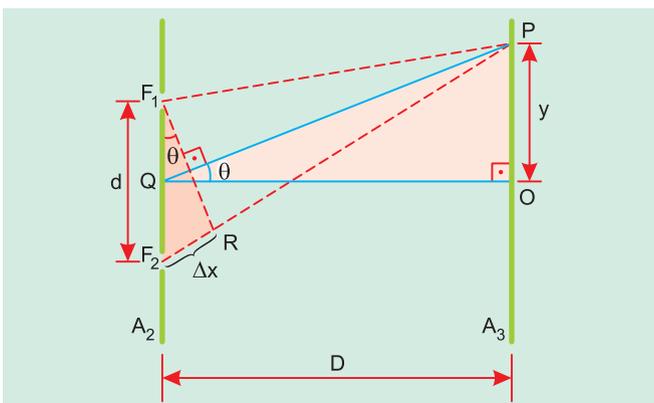
A figura abaixo mostra uma vista frontal do anteparo A_3 . Nesta figura, foram representadas algumas franjas de interferência com os respectivos valores assumidos por N .



Vista frontal do anteparo A_3 .

7. DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDA DA LUZ POR MEIO DA EXPERIÊNCIA DE YOUNG

No esquema a seguir, y é a distância de uma determinada franja (clara ou escura) à franja central O , d é a distância entre as fendas F_1 e F_2 e D é a distância entre os anteparos A_2 e A_3 . Deve-se considerar $D \gg d$.



• **No triângulo retângulo PQO:**

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{D} \quad \textcircled{1}$$

• **No triângulo aproximadamente retângulo F_1F_2R :**

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\Delta x}{d}$$

Como o ângulo θ é muito pequeno, é permitida a aproximação:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta = \frac{\Delta x}{d} \quad \textcircled{2}$$

Comparando-se ① e ②, vem:

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{y}{D} \quad \textcircled{3}$$

Sendo a diferença de percursos Δx dada por $\Delta x = N \frac{\lambda}{2}$, de ③, segue-se que

$$N \frac{\lambda}{2d} = \frac{y}{D}$$

Obtendo-se o comprimento de onda λ

$$\lambda = \frac{2dy}{ND} \quad (N = 1, 2, 3 \dots)$$

Os comprimentos y , d e D podem ser medidos com grande precisão, o que possibilita excelentes valores para λ (e também para a frequência f da luz, já que $V = \lambda f$, com $V \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

MÓDULO 49

Capacitores



1. INDUÇÃO TOTAL

Consideremos dois condutores elétricos:

A = condutor eletrizado com carga +Q

B = condutor neutro

Ocorre indução total quando, ao aproximarmos **A** de **B**, todas as linhas de indução que "partem" do indutor (**A**) atingem o induzido (**B**).

Um exemplo de indução quase total ocorre entre dois condutores planos, dispostos em paralelo:

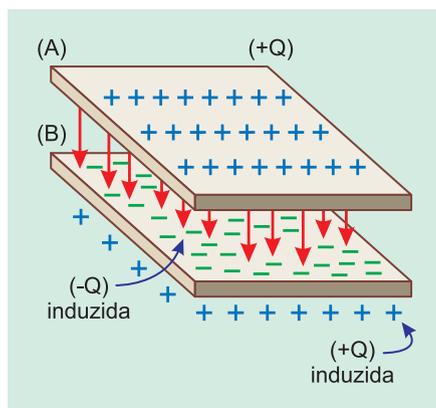


Fig. 1

Na figura, a carga induzida no "plano superior" de **B** é negativa (-Q) e a carga induzida no "plano inferior" de **B** é positiva (+Q).

2. CAPACITORES OU CONDENSADORES ELÉTRICOS

Chamaremos de capacitores (ou condensadores elétricos) a todo par de condutores entre os quais há indução total.

Cada um dos elementos condutores é chamado de armadura (capa de metal). Entre elas o meio deve ser isolante. Pode haver uma substância isolante ou mesmo o vácuo.

Há três formatos básicos: o esférico, o plano e o cilíndrico.

Qualquer que seja o formato, o capacitor é representado por dois traços paralelos e iguais, preferencialmente mais cheios do que os seus terminais.

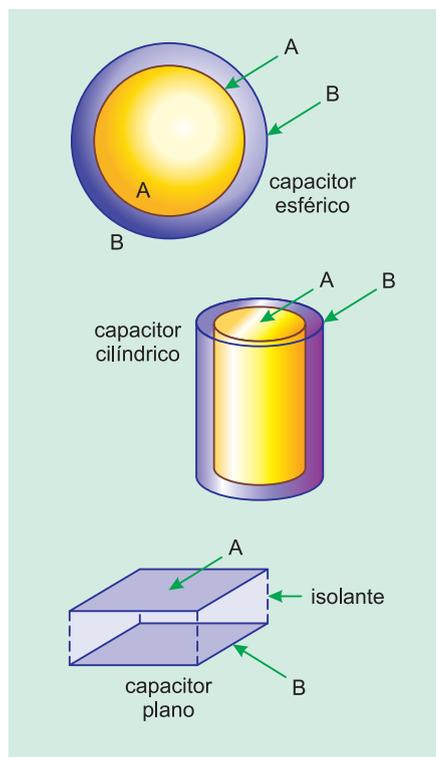


Fig. 2

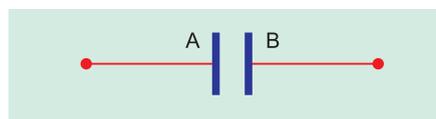


Fig. 3 – Símbolo de um capacitor.

3. LIGAÇÃO DO CAPACITOR A UMA BATERIA

A ligação pode ser direta ou através da terra. Nos automóveis, liga-se como na figura 4b, na qual a carcaça do carro faz papel de terra.

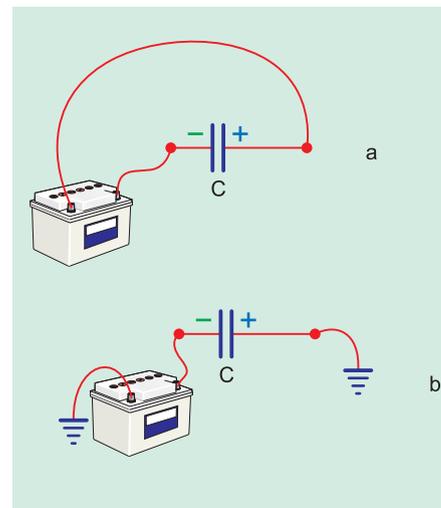


Fig. 4a e 4b

4. CARGA ELÉTRICA E CAPACITÂNCIA

□ Carga elétrica: Q

No capacitor a indução é total e, portanto, ambas as armaduras têm cargas de módulos iguais e sinais contrários.

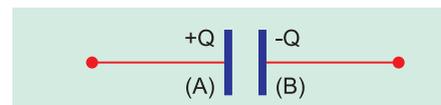


Fig. 5

A fim de facilitar a linguagem, bem como a notação, usaremos simplesmente o valor **Q**, correspondente à carga elétrica da armadura positiva.

□ Diferença de potencial: U

Entre as armaduras, há uma ddp. Se o capacitor estiver ligado a uma bateria, esta ddp será igual à ddp da bateria.

V_A = potencial da armadura positiva (A).

V_B = potencial da armadura negativa (B).

U = ddp entre as armaduras.

$$U = V_A - V_B$$

Capacitância: C

Por definição:

$$C = \frac{Q}{U}$$

ou, então:

$$Q = C \cdot U$$

5. ENERGIA ELÉTRICA NO CAPACITOR

Como as cargas elétricas estão em repouso nas armaduras do capacitor, a energia elétrica no capacitor está armazenada, isto é, trata-se de uma **energia potencial**.

Para calculá-la, usaremos o gráfico da figura a seguir.

$$Q = C \cdot U$$

$$U = \frac{1}{C} \cdot Q$$

Logo, o gráfico é linear.

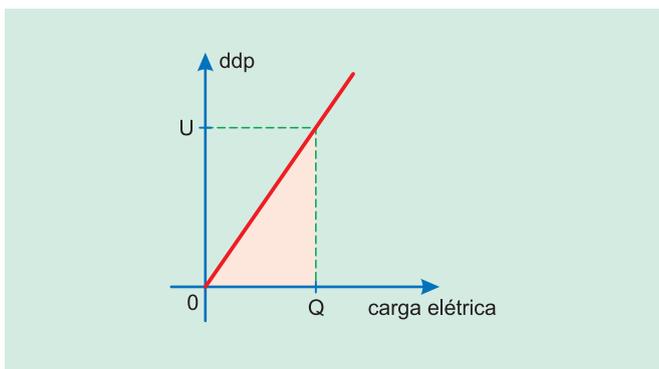


Fig. 6

A energia potencial elétrica do capacitor é numericamente igual à área colorida:

$$E_{\text{pot}} \stackrel{N}{=} \text{área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{Q \cdot U}{2}$$

Lembrando que:

$$Q = C \cdot U \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{C U U}{2} \rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{C \cdot U^2}{2}$$

ou, ainda, que:

$$U = \frac{Q}{C} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{Q \cdot Q/C}{2} \rightarrow E_{\text{pot}} = \frac{Q^2}{2C}$$

Observações

1ª) A energia mede-se em **joule** no SI.

2ª) Um bom uso para o capacitor é no *flash* de uma máquina fotográfica. Sua energia é bastante para acender intensamente uma lâmpada por curtíssimo intervalo de tempo. É um circuito RC paralelo.

6. CAPACITOR PLANO

O capacitor plano é constituído por duas placas planas, paralelas. Por estarem eletrizadas com sinais contrários, há formação de um campo elétrico uniforme entre elas.

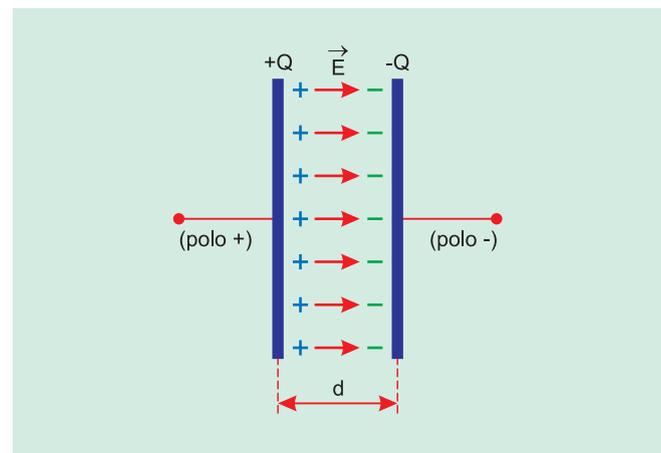


Fig. 7

Sendo **U** a ddp e **d** a distância entre as armaduras, vale o teorema:

$$E \cdot d = U$$

7. CAPACITÂNCIA

Para calcular a capacitância de um condensador plano, usamos a equação:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

em que:

A = área de cada uma das placas.

d = distância entre as placas.

ϵ = permissividade absoluta do isolante entre as placas.

Na realidade, ϵ é uma constante que varia de acordo com o isolante usado.

Observação: A relação entre as constantes K e ϵ é:

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$$

Sendo ϵ_0 a permissividade absoluta do vácuo, define-se **constante dielétrica relativa** ϵ_r de um isolante (de permissividade absoluta ϵ) como sendo o quociente:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

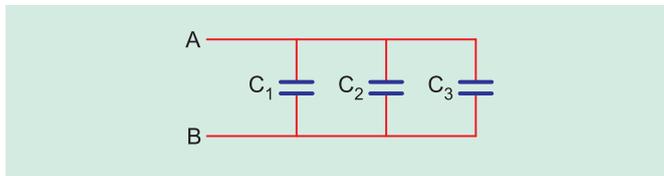
MÓDULO 50

Associação de Capacitores

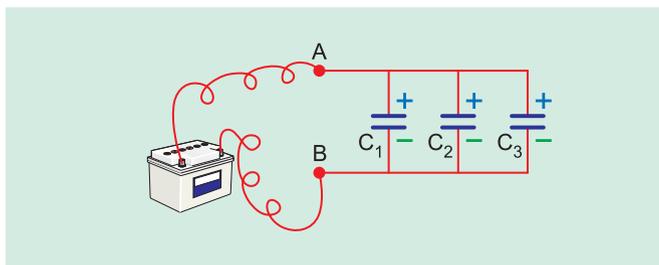


1. ASSOCIAÇÃO EM PARALELO

Numa associação em paralelo, os capacitores ficam dispostos como na figura a seguir.



Se ligarmos os terminais A e B a uma bateria de corrente contínua constante, teremos:



Observe que as armaduras positivas ficam ligadas entre si e ao polo (+) do gerador. Do mesmo modo ocorre com as armaduras negativas.

□ Propriedades

1ª) Todos os capacitores em paralelo ficam sob a mesma ddp (U). Esta é também a ddp da bateria.

2ª) Cada capacitor adquire a sua própria carga elétrica.

$$Q_1 = C_1 \cdot U$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U$$

Observação

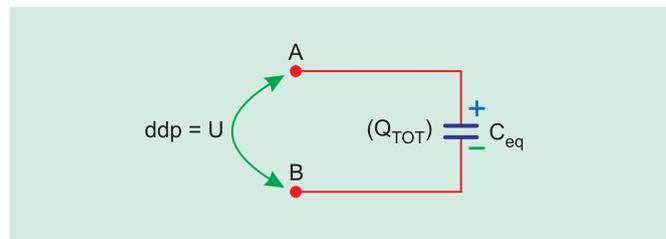
Se $C_1 = C_2 = C_3 \rightarrow Q_1 = Q_2 = Q_3$

3ª) A carga elétrica total, acumulada na associação, é a soma das cargas parciais.

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

4ª) **Capacitância equivalente**

Imaginemos um capacitor equivalente à associação: mesma ddp (U) e com carga total (Q_{TOT}) dela.



Teremos, então:

$$Q_{TOT} = C_{eq} \cdot U \rightarrow C_{eq} \cdot U = Q_{TOT}$$

$$C_{eq} \cdot U = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C_{eq} \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + C_3 \cdot U \dots (\div U)$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \text{ (PARALELO)}$$

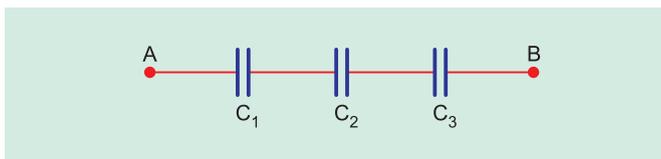
A equação acima vale para **n** capacitores em paralelo.

Observação

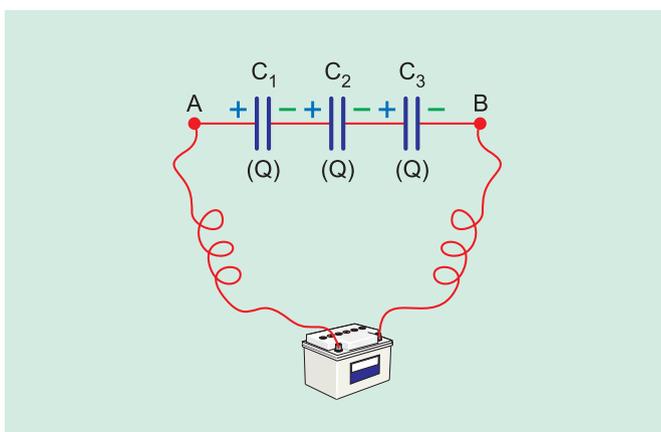
A equação anterior é semelhante à da associação em série de resistores.

2. ASSOCIAÇÃO EM SÉRIE

Numa associação em série, os capacitores estão dispostos como na figura abaixo, na qual dois capacitores vizinhos têm em comum um único terminal.



Vamos supor que os capacitores estejam todos "descarregados" inicialmente. Agora, liguemos os terminais **A** e **B** aos polos de uma bateria de corrente contínua constante, cuja tensão seja **U**.



Observações

a) Durante a carga dos capacitores, ocorre indução total em cada um deles.

b) A armadura **negativa** de cada um deles está ligada à **positiva** de um "vizinho".

Propriedades

1ª) Após o término da eletrização, todos os capacitores adquirem a mesma carga elétrica (**Q**).

Esta propriedade é uma decorrência da indução total em cada um deles.

2ª) Consideram-se como carga total da associação apenas as cargas vistas pelos dois terminais A e B, ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} \text{em A: } +Q \\ \text{em B: } -Q \end{array} \right\} \text{ carga da associação: } \mathbf{Q}$$

Observação

Não se somam cargas nas associações em série.

3ª) A ddp de cada capacitor é:

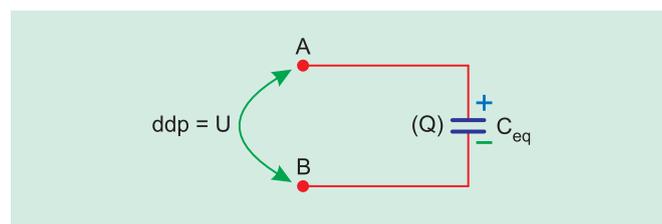
$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}$$

4ª) A soma das ddp(s) parciais é a ddp total da associação e é igual à ddp da bateria.

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

5ª) **Capacitância equivalente**

Imaginemos um capacitor equivalente à associação: mesma ddp total (**U**) e mesma carga elétrica (**Q**).



Teremos, então:

$$Q = C_{eq} \cdot U \rightarrow U = \frac{Q}{C_{eq}} \rightarrow \frac{Q}{C_{eq}} = U$$

mas:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \dots (\div Q)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \dots \text{ (SÉRIE)}$$

A fórmula anterior vale para **n** capacitores em série.

Observação

A fórmula anterior é semelhante à da associação de resistores em paralelo.

MÓDULO 51

Densidade e Pressão



1. OBJETO DE ESTUDO

A Hidrostática é a parte da Física que estuda as propriedades associadas aos líquidos em equilíbrio. A Hidrostática fundamenta-se em três leis básicas:

- Lei de Stevin
- Lei de Pascal
- Lei de Arquimedes

2. DENSIDADE ABSOLUTA

Definição de densidade absoluta de um corpo

Considere um corpo de massa m que ocupa um volume V .

Define-se **densidade absoluta** do corpo (μ) como a razão entre sua massa (m) e o volume ocupado (V):

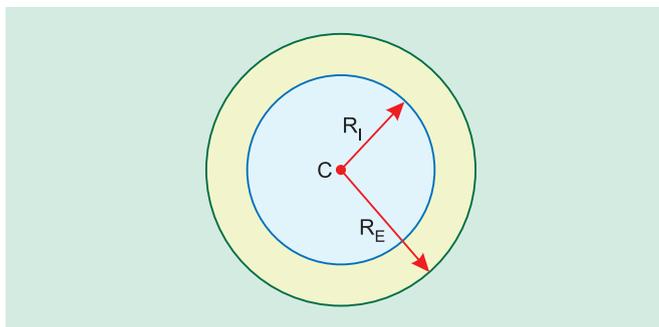
$$\mu = \frac{m}{V}$$

Densidade ou massa específica de um material ou substância

Não se deve confundir a densidade de um corpo com a densidade do material (substância) que o constitui.

Se o corpo for maciço e homogêneo, a densidade do corpo coincidirá com a densidade do material, porém quando o corpo apresentar partes ocas, a densidade do corpo será menor do que a densidade do material.

Como exemplo, consideremos uma esfera de raio externo R_E com uma parte oca de raio R_I . Sendo m a massa da parte maciça e desprezando-se a massa de ar contida na parte oca, tem-se:



$$\mu_{\text{esfera}} = \frac{m}{V_E} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R_E^3}$$

$$\mu_{\text{material}} = \frac{m}{V_E - V_{\text{oco}}}$$

$$\mu_{\text{material}} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi (R_E^3 - R_I^3)}$$

Verifica-se pelas expressões apresentadas que:

$$\mu_{\text{esfera}} < \mu_{\text{material}}$$

Assim, uma esfera oca de alumínio pode flutuar em água por ter densidade menor que a da água, ao passo que uma esfera maciça de alumínio afunda por ser mais densa do que a água.

Unidades de densidade

- No **sistema internacional**, temos:

$$\text{uni}(\mu) = \frac{\text{uni}(m)}{\text{uni}(V)} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

- No **sistema CGS**, temos:

$$\text{uni}(\mu) = \frac{\text{uni}(m)}{\text{uni}(V)} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Relação entre as unidades

Sendo $1\text{kg} = 10^3\text{g}$ e

$1\text{m}^3 = 10^6\text{cm}^3$, vem:

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{10^3\text{g}}{10^6\text{cm}^3} = 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Sendo $10^3\text{kg} = 1\text{t}$ (tonelada), temos ainda:

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

❑ Equação dimensional

Tomando-se como grandezas fundamentais a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T), tem-se:

$$[\mu] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3}$$

$$[\mu] = M L^{-3} = M L^{-3} T^0$$

❑ Densidade relativa

Consideremos dois corpos, A e B, de densidades absolutas μ_A e μ_B .

Define-se **densidade relativa** do corpo A em relação ao corpo B como o número μ_{AB} dado por:

$$\mu_{AB} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

A densidade relativa é uma grandeza adimensional.

$$[\mu_{rel}] = M^0 L^0 T^0$$

Se falarmos em densidade relativa de um dado corpo, sem especificarmos em relação a que outro corpo, fica convencionado que este outro corpo é a água.

Neste caso, a **densidade relativa mede quantas vezes o corpo é mais denso que a água**.

❑ Densidade da água

A densidade da água é dada por:

$$\mu_{\text{água}} = 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,0 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = 1,0 \frac{\text{kg}}{\ell}$$

Se a densidade relativa de um corpo for igual a **n** (sem especificar em relação a que), devemos entender que:

$$\mu_{\text{corpo}} = n \cdot \mu_{\text{água}} = n \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

3. PESO ESPECÍFICO

❑ Definição

Considere um corpo de peso \vec{P} que ocupa um volume V.

Define-se **peso específico** (γ) do corpo como a razão entre a intensidade de seu peso (P) e o volume ocupado (V):

$$\gamma = \frac{P}{V}$$

❑ Relação com a massa específica

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{m}{V} g \Rightarrow \gamma = \mu g$$

g = intensidade da aceleração da gravidade

❑ Unidade no SI

$$\text{uni}(\gamma) = \frac{\text{uni}(P)}{\text{uni}(V)} = \frac{N}{\text{m}^3} = N \cdot \text{m}^{-3}$$

❑ Equação dimensional

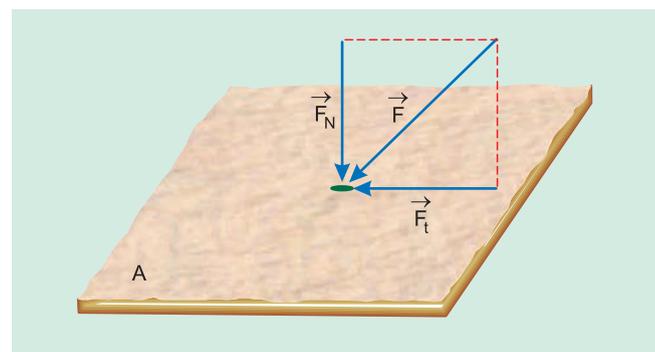
Tomando-se como grandezas fundamentais a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T), tem-se:

$$[\gamma] = \frac{[P]}{[V]} = \frac{MLT^{-2}}{L^3} = ML^{-2}T^{-2}$$

4. PRESSÃO

❑ Definição

Considere uma superfície plana de área A submetida a uma força \vec{F} .



A força \vec{F} pode ser decomposta em uma componente tangencial \vec{F}_t e uma componente normal \vec{F}_N . Dessas componentes, apenas \vec{F}_N está ligada ao efeito de pressão.

Define-se pressão média sobre a superfície como a grandeza escalar dada pela razão entre a intensidade da componente normal da força atuante e a área da superfície.

$$p = \frac{|\vec{F}_N|}{A}$$



□ Unidades de pressão

• Sistema internacional

$$\text{uni}(p) = \frac{\text{uni}(F)}{\text{uni}(A)} = \frac{N}{m^2} = N \cdot m^{-2}$$

A unidade de pressão do SI recebe o nome de pascal, Pa:

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

• Unidade prática: atm

A pressão exercida pela atmosfera no nível do mar é tomada como unidade de pressão e indicada por **atm**:

$$1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

□ Equação dimensional

• Tomando-se como grandezas fundamentais a massa (M), o comprimento (L) e o tempo (T), tem-se:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

• Tomando-se como grandezas fundamentais a força (F), o comprimento (L) e o tempo (T), tem-se:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{F}{L^2} = FL^{-2} = FL^{-2}T^0$$

MÓDULO 52

Pressão Hidrostática e Lei de Stevin

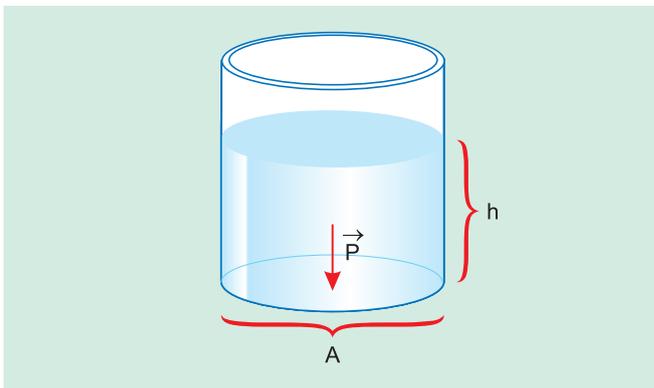


1. PRESSÃO EXERCIDA POR UMA COLUNA LÍQUIDA EM EQUILÍBRIO

□ Pressão hidrostática (p_H)

Considere um recipiente cilíndrico de área de base **A**, contendo um líquido homogêneo, de densidade (μ) e em equilíbrio.

Calculemos a pressão exercida por esta coluna líquida, de altura **h**, na base do recipiente.



A força exercida pelo líquido sobre a base do recipiente tem intensidade igual ao peso do líquido:

$$p_H = \frac{|\vec{P}|}{A} = \frac{mg}{A} \quad (1)$$

Sendo $\mu = \frac{m}{V}$ e $V = A \cdot h$, vem:

$$m = \mu V = \mu A h(2)$$

Substituindo-se (2) em (1), vem:

$$p_H = \frac{\mu A h g}{A} \Rightarrow p_H = \mu g h$$

A pressão exercida por uma coluna líquida é chamada **pressão hidrostática** ou **pressão efetiva** e não depende da espessura da coluna líquida e sim de sua altura.

Surge então a ideia de se medir pressão por meio de altura de coluna líquida.

□ Pressão em “cm de Hg”

Calculemos que altura de coluna de mercúrio exerce pressão de uma atmosfera:

$$p_H = \mu_M g h_M$$

$$p_H = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}; g = 9,8 \text{ m/s}^2;$$

$$\mu_M = 13,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$1,0 \cdot 10^5 = 13,5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot h_M$$

$$h_M \approx 0,76 \text{ m}$$

Uma coluna de mercúrio de altura 76cm exerce uma pressão de 1,0 atm.



□ Pressão em “metros de água”

Calculemos que altura de água exerce pressão de uma atmosfera:

$$\rho_H = \mu_a g h_a$$

$$\rho_H = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}; g = 10 \text{ m/s}^2;$$

$$\mu_a = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

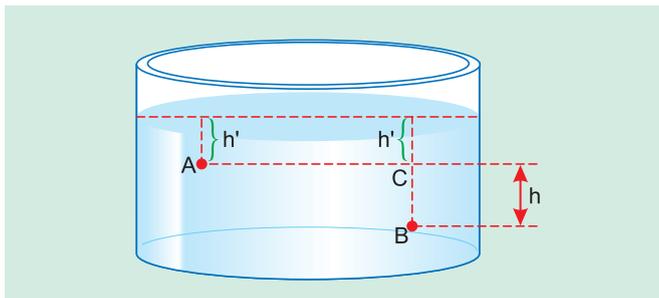
$$1,0 \cdot 10^5 = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 h_a$$

$$h_a = 10 \text{ m}$$

Uma coluna de água de altura 10m exerce uma pressão de 1,0 atm.

2. LEI DE STEVIN

A Lei de Stevin permite calcular a diferença de pressão entre dois pontos de um fluido homogêneo, em equilíbrio e sob a ação da gravidade.



Consideremos um fluido homogêneo contido em um recipiente qualquer e em equilíbrio.

Desejamos obter a diferença de pressão entre dois pontos quaisquer, A e B, com desnível h.

Admitamos um ponto C na mesma horizontal de A e na mesma vertical de B.

A diferença de pressão entre os pontos B e C é dada pela pressão da coluna fluida de altura h:

$$p_B - p_C = \mu g h \quad (1)$$

Por outro lado, como os pontos A e C estão à mesma profundidade (mesma altura h' de coluna fluida acima dos pontos), eles suportam a mesma pressão:

$$p_A = p_C \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1), vem:

$$p_B - p_A = \mu g h$$

A relação obtida traduz a Lei de Stevin:

A diferença de pressão entre dois pontos quaisquer de um fluido homogêneo, em equilíbrio e sob a ação da gravidade, é dada pelo produto do peso específico do fluido (μg) pelo desnível (diferença de profundidade) entre os pontos considerados.

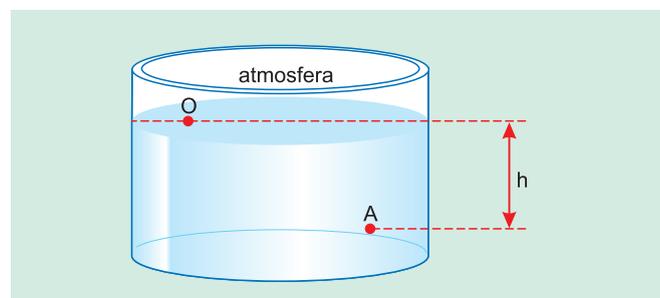
NOTA: A Lei de Stevin é válida para líquidos e gases, porém como a densidade de um gás é relativamente pequena, a diferença de pressão só se torna relevante para alturas muito grandes.

Assim, para um gás contido em um recipiente de dimensões normais, consideramos a pressão como a mesma em todos os pontos da massa gasosa.

3. APLICAÇÕES DA LEI DE STEVIN

□ Pressão total em um ponto de um líquido em equilíbrio

Consideremos um líquido homogêneo, em equilíbrio e sob ação da gravidade, contido em um recipiente exposto à atmosfera.



Para obtermos a pressão total em um ponto A do líquido, basta aplicar a Lei de Stevin entre o ponto A e um ponto O da superfície do líquido.

$$p_A - p_O = \mu g h$$

Como o ponto O está em contato com a atmosfera, a pressão p_O é igual à pressão atmosférica.

Assim:

$$p_A - p_{atm} = \mu g h$$

$$p_A = p_{atm} + \mu g h$$

p_A = pressão total ou absoluta no ponto A.

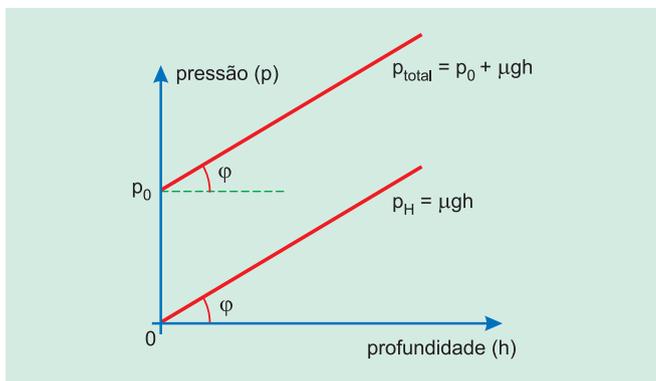
p_{atm} = pressão atmosférica local.

$\mu g h$ = pressão hidrostática ou efetiva.

A pressão, no interior de um líquido, aumenta linearmente com a profundidade.

□ Gráficos de pressão

Mostremos os gráficos das pressões hidrostática e total em função da profundidade h .



As retas representativas são paralelas e o ângulo φ é tal que:

$$\text{tg } \varphi = \mu g$$

Quanto mais denso for o líquido (maior μ), maior será o ângulo φ .

□ Regiões isobáricas

Para um líquido homogêneo, em equilíbrio e sob ação da gravidade, de acordo com a Lei de Stevin, temos:

$$p_B - p_A = \mu g h$$

Se impusermos a igualdade de pressões entre os pontos genéricos B e A, teremos:

$$p_B = p_A \Rightarrow p_B - p_A = 0 \Rightarrow h = 0$$

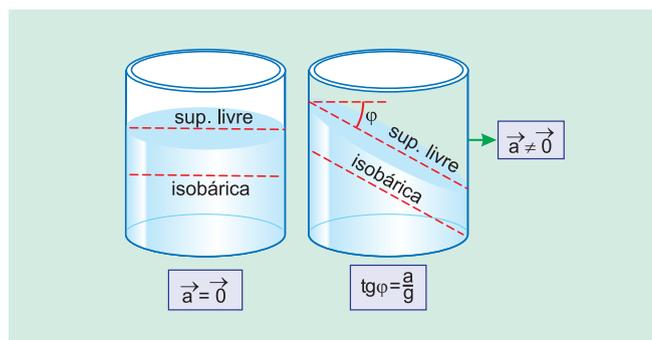
Isto significa que todos os pontos que suportam a mesma pressão estão no mesmo nível, isto é, pertencem ao mesmo plano horizontal.

Em um líquido homogêneo, em equilíbrio e sob a ação da gravidade, as regiões isobáricas (pontos de mesma pressão) são planos horizontais.

Em particular, como a superfície livre do líquido é isobárica (pressão igual à pressão atmosférica), concluímos que:

A superfície livre de um líquido em equilíbrio e sob a ação da gravidade é horizontal.

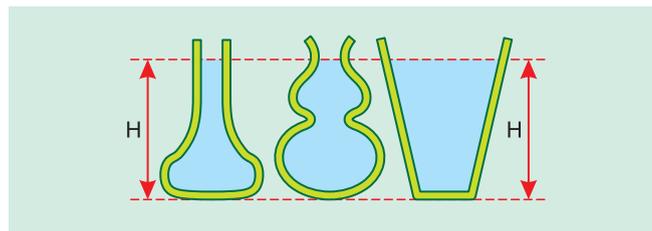
NOTA: Se o recipiente que contém o líquido tiver aceleração horizontal constante (não nula) em relação à superfície terrestre, a superfície livre ficará inclinada de um ângulo φ que dependerá da aceleração e as regiões isobáricas serão planos paralelos à superfície livre.



□ Paradoxo hidrostático

Consideremos recipientes com formatos diferentes contendo o mesmo líquido homogêneo e em equilíbrio sob a ação da gravidade.

Admitamos que a altura líquida H seja a mesma em todos os recipientes.



A pressão que o líquido exerce no fundo do recipiente é dada por:

$$p = p_0 + \mu g H$$

e será a mesma em todos os casos esquematizados (mesmo líquido e mesma altura), não importando a forma do recipiente nem a quantidade de líquido.

A força que o líquido exerce no fundo do recipiente tem intensidade dada pelo produto da pressão pela área (A) da base do recipiente: $\mathbf{F} = p \cdot \mathbf{A}$. Se todos os recipientes tiverem a mesma área de base, as forças também terão a mesma intensidade.

O fato de a pressão e a força não dependerem da forma do recipiente nem da quantidade de líquido é chamado de PARADOXO HIDROSTÁTICO.



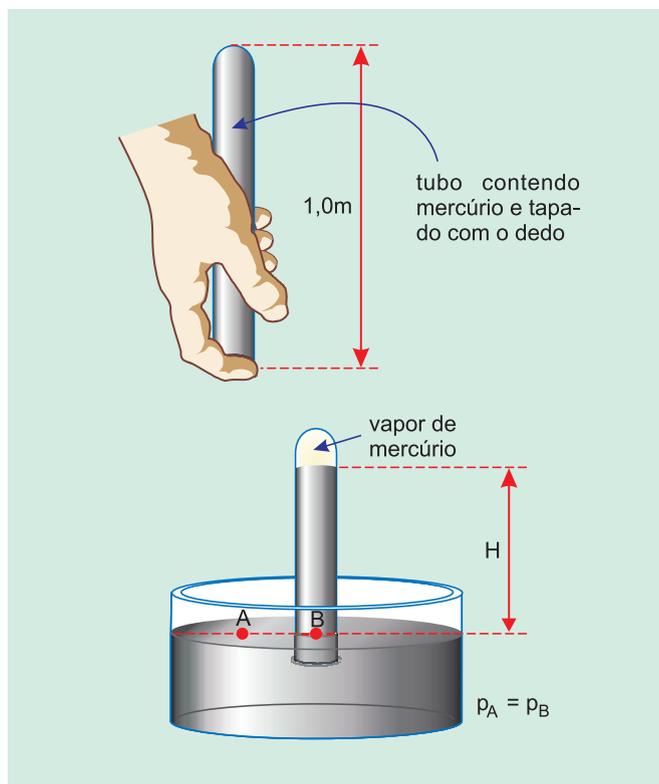
MÓDULO 53

Aplicações da Lei de Stevin



1. BARÔMETRO DE TORRICELLI

Denomina-se **barômetro** todo aparelho ou dispositivo que se destina a medir a pressão atmosférica.



O barômetro mais simples que existe é o barômetro de cuba ou de Torricelli.

Um tubo de vidro de comprimento da ordem de 1,0m é totalmente cheio com mercúrio e sua extremidade livre é tapada com o dedo. Em seguida, o tubo é emborcado em uma cuba contendo mercúrio, com a extremidade livre para baixo, e o dedo é retirado.

A coluna de mercúrio desce até estabilizar-se em uma altura H acima da superfície do mercúrio na cuba, como mostra a figura.

Na região do tubo acima da coluna de mercúrio, existe apenas uma pequena quantidade de vapor de mercúrio que exerce uma pressão considerada desprezível em comparação com a pressão da coluna líquida de altura H . É usual dizermos que acima da coluna de mercúrio temos o “**vácuo torriceliano**”.

Como os pontos A e B pertencem ao mesmo plano horizontal no interior de um líquido homogêneo, em equilíbrio e sob a ação da gravidade, eles suportam a mesma pressão e, portanto, a pressão atmosférica

(pressão no ponto A) é igual à pressão de uma coluna de mercúrio de altura H (pressão no ponto B).

Assim, em Santos (no nível do mar), temos $H = 76\text{cm}$, o que significa que a pressão atmosférica é de 76cm de Hg.

Em São Paulo, temos $H = 70\text{cm}$, o que significa que a pressão atmosférica é de 70cm de Hg.

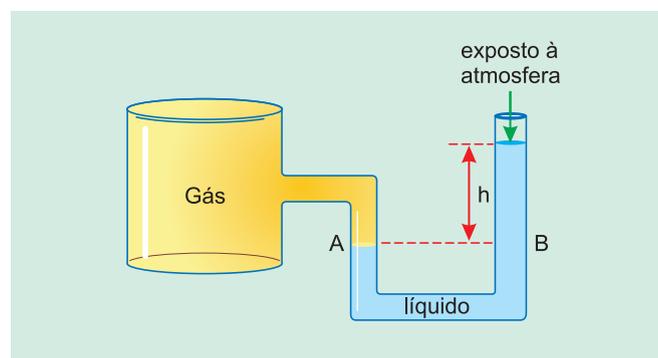
Se quisermos obter esta pressão em pascal, fazemos:

$$P_{\text{atm}} = \mu_{\text{Hg}} g h$$

$$p_{\text{atm}} = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,70 \text{ (Pa)}$$

$$P_{\text{atm}} = 0,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2. MANÔMETRO DE TUBO ABERTO



Denomina-se **manômetro** todo aparelho ou dispositivo para se medir a pressão de um fluido (em geral, um gás).

O manômetro mais simples é o de tubo aberto à atmosfera, representado na figura. Trata-se de um tubo recurvado em U contendo um líquido em equilíbrio (em geral, mercúrio), com uma das extremidades em contato com o local onde se deseja medir a pressão p e a outra extremidade aberta e exposta à atmosfera.

Sendo μ a densidade do líquido e igualando-se as pressões em A e B, vem:

$$P = P_{\text{atm}} + \mu g h$$

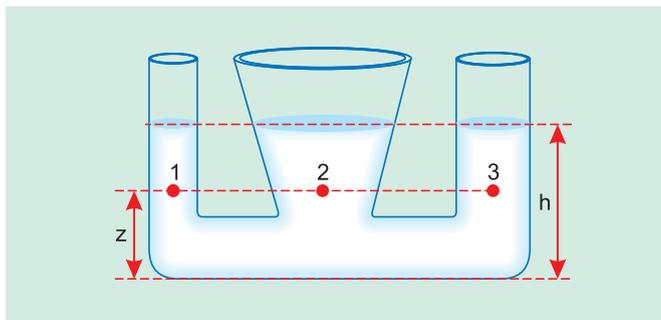


Se a pressão for medida em coluna líquida, escrevemos apenas:

$$H = H_{\text{atm}} + h$$

3. SISTEMAS DE VASOS COMUNICANTES

□ Consideremos um recipiente formado por diversos ramos que se comunicam entre si. Esse recipiente constitui um sistema de vasos comunicantes.



Se um único líquido em equilíbrio estiver contido no recipiente, então:

• **A superfície livre do líquido, em todos os ramos, é horizontal e atinge a mesma altura h.**

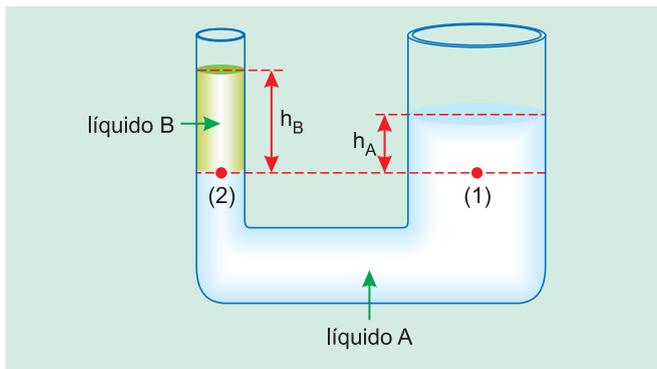
Esse fato é conhecido como “**princípio dos vasos comunicantes**”.

• **Em todos os pontos do líquido, que estão à mesma altura (z), a pressão é a mesma:**

$$p_1 = p_2 = p_3$$

As propriedades expostas acima decorrem imediatamente da Lei de Stevin.

□ Considere um sistema de vasos comunicantes contendo dois líquidos homogêneos, A e B, imiscíveis.



Estando o sistema em equilíbrio e sob a ação da gravidade, podemos igualar as pressões nos pontos (1) e (2) que pertencem ao mesmo líquido A e ao mesmo plano horizontal.

$$p_1 = p_2$$

$$p_0 + \mu_A g h_A = p_0 + \mu_B g h_B$$

$$\mu_A h_A = \mu_B h_B$$

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{\mu_B}{\mu_A}$$

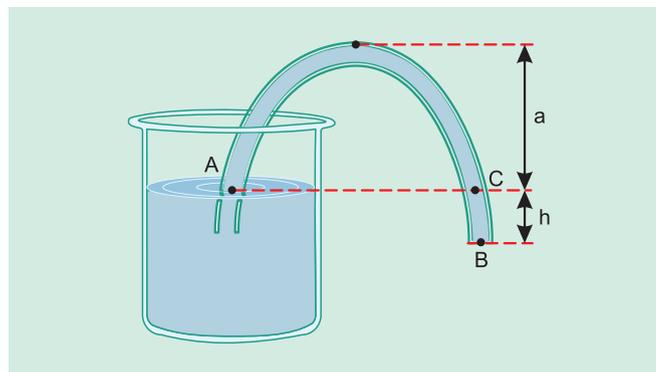
As alturas líquidas, medidas a partir da superfície de separação dos líquidos, são inversamente proporcionais às respectivas densidades.

4. PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM SIFÃO

Consideremos um sifão escorvado, isto é, fechado na extremidade indicada por B e completamente cheio do mesmo líquido que está contido em um recipiente.

Seja A um ponto no interior do sifão e ao nível da superfície do líquido contido no recipiente.

Seja μ a densidade do líquido e g o módulo da aceleração da gravidade.



Estando o sistema, na situação mostrada na figura, em equilíbrio hidrostático, de acordo com a Lei de Stevin, temos:

$$p_C = p_A = p_{\text{atm}} \quad \text{e} \quad p_B - p_C = \mu g h$$

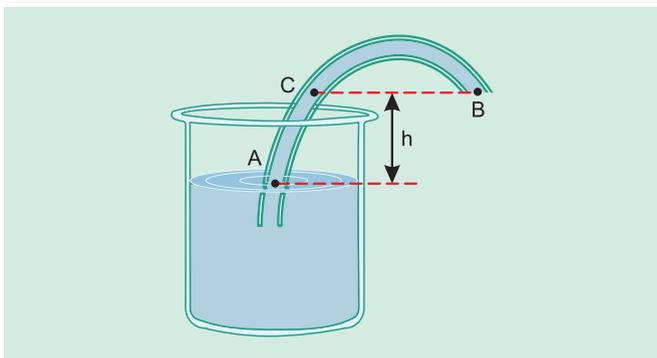
$$p_B = p_{\text{atm}} + \mu g h$$



Portanto, se abirmos a extremidade B, a pressão interna p_B será maior do que a pressão externa (atmosférica) e o líquido vai escoar, não importando qual seja a altura a do chamado “cotovelo” do sifão, desde que $\mu g a < p_{atm}$.

A condição de escoamento, com o sifão escorvado, é que a extremidade B esteja em nível inferior ao da superfície livre do líquido no interior do recipiente.

Na situação esquematizada abaixo, temos:



$$p_B = p_C$$

$$p_A = p_{atm} = p_C + \mu g h$$

$$p_B = p_{atm} - \mu g h$$

A pressão no ponto B é menor do que a pressão externa (atmosférica) e o líquido retorna ao recipiente.

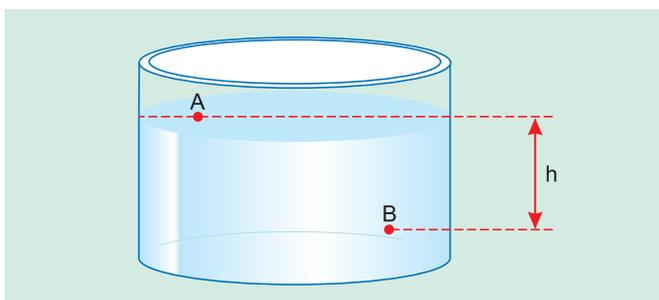
MÓDULO 54

Lei de Pascal e Princípio de Arquimedes



1. LEI DE PASCAL (1663)

Considere um líquido homogêneo, em equilíbrio e sob ação da gravidade.



De acordo com a Lei de Stevin, temos:

$$p_B - p_A = \mu g h$$

$$p_B = p_A + \mu g h$$

Sendo o líquido incompressível (volume constante), sua densidade μ permanece constante e, portanto, a parcela $\mu g h$ permanece constante.

Isso significa que, se acontecer uma variação de pressão no ponto A, a mesma variação de pressão ocorrerá em B.

$$\Delta p_B = \Delta p_A, \text{ pois } \mu g h \text{ é constante}$$

Esse fato traduz a Lei de Pascal:

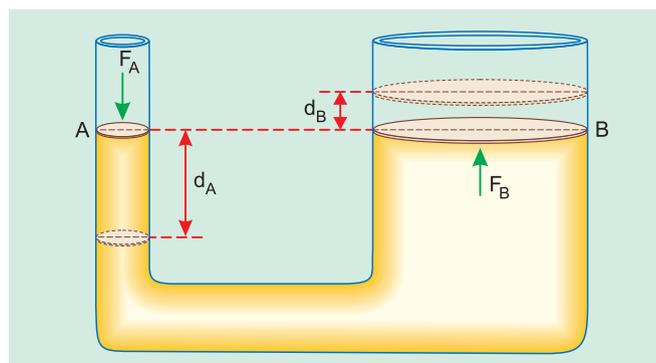
Os líquidos transmitem integralmente as variações de pressão que recebem.

Isso significa que qualquer variação de pressão, provocada em qualquer ponto de um líquido em equilíbrio, é transmitida integralmente para todos os demais pontos da massa líquida.

2. PRENSA HIDRÁULICA

□ Descrição

A prensa hidráulica é uma máquina simples capaz de multiplicar forças e fundamentada na Lei de Pascal.



Os vasos comunicantes da figura contêm um líquido homogêneo e estão vedados por dois êmbolos móveis sem atrito e com áreas S_A (êmbolo menor) e S_B (êmbolo maior).

Uma força de intensidade F_A é aplicada ao êmbolo A, o que permite transmitir ao êmbolo B uma força de intensidade F_B .

De acordo com a Lei de Pascal:

$$\Delta p_B = \Delta p_A$$

$$\frac{F_B}{S_B} = \frac{F_A}{S_A} \Rightarrow \frac{F_B}{F_A} = \frac{S_B}{S_A} \quad (I)$$

Em uma prensa hidráulica, as forças têm intensidades diretamente proporcionais às áreas dos respectivos êmbolos.

□ Vantagem mecânica

O número pelo qual a força é multiplicada é chamado de **vantagem mecânica (V_m)**.

$$V_m = \frac{F_B}{F_A} = \frac{S_B}{S_A}$$

Se os êmbolos têm forma cilíndrica, suas áreas são dadas por:

$S_A = \pi R_A^2$ e $S_B = \pi R_B^2$, sendo R_A e R_B os raios dos êmbolos.

Portanto:

$$V_m = \frac{S_B}{S_A} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2$$

□ Conservação do trabalho

Sendo d_A o deslocamento do êmbolo A e d_B o deslocamento do êmbolo B e lembrando que o líquido é incompressível (volume constante), temos que o volume líquido que desce em A é igual ao volume líquido que sobe em B:

$$\Delta V_A = \Delta V_B$$

$$S_A \cdot d_A = S_B \cdot d_B$$

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{d_A}{d_B} \quad (II)$$

Comparando-se as relações I e II, vem:

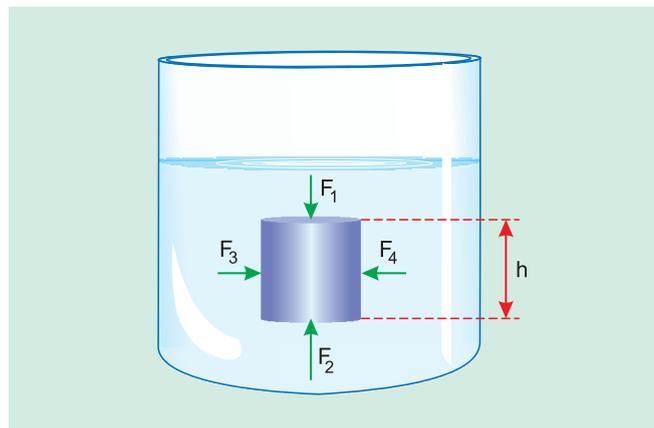
$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{d_A}{d_B} \Rightarrow \mathbf{F_B d_B = F_A d_A}$$

O trabalho da força transmitida é igual ao trabalho da força aplicada.

A relação anterior traduz a conservação do trabalho nas máquinas simples.

3. PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES (sec. III a.C.)

Para demonstrar a Lei de Arquimedes, consideremos um corpo sólido, com formato cilíndrico, imerso em um líquido homogêneo, em equilíbrio, sob a ação da gravidade e com densidade μ_L .



O líquido atua sobre todas as faces do cilindro com forças de compressão e normais às regiões de contato entre o líquido e o cilindro.

As forças horizontais F_3 e F_4 , nas faces laterais, têm a mesma intensidade, pois estão aplicadas em pontos de mesma profundidade, ou seja, de mesma pressão. Portanto, as forças horizontais se equilibram e a resultante das forças horizontais é nula.

Na direção vertical, não há equilíbrio entre as forças F_1 e F_2 , pois a força F_2 na face inferior é mais intensa que a força F_1 na face superior, já que a pressão é maior nos pontos de maior profundidade.

Chamando de A a área da secção transversal do cilindro, temos:

$$F_2 - F_1 = (p_2 - p_1) A$$

Usando-se a Lei de Stevin:

$$p_2 - p_1 = \mu_L g h$$

$$F_2 - F_1 = \mu_L g h A$$

O produto $A \cdot h$ representa o volume do corpo que está imerso (no caso é o volume total).

$$F_2 - F_1 = \mu_L g V_i$$

O produto $\mu_L \cdot V_i$ representa a massa de líquido que ocuparia o volume V_i .

$$F_2 - F_1 = m_L g$$

O produto $m_L \cdot g$ representa o peso do líquido que ocuparia o volume V_i .

$F_2 - F_1$ representa a intensidade da **força resultante que o líquido exerce sobre o corpo** e que é denominada **empuxo** (\vec{E}).

Lei de Arquimedes:

Quando um sólido é mergulhado total ou parcialmente em um fluido homogêneo, em equilíbrio e sob ação da gravidade, ele fica sujeito a uma força, aplicada pelo fluido, denominada EMPUXO, com as seguintes características:

- I) Intensidade:** igual ao peso do fluido deslocado pela presença do sólido.
- II) Direção:** vertical.
- III) Sentido:** de baixo para cima.

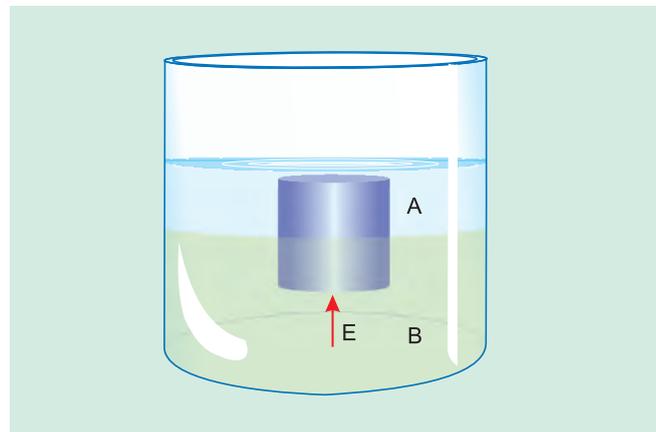
$$E = P_{\text{fluido}} = \mu_{\text{fluido}} V_{\text{imerso}} g$$

deslocado

NOTAS

Nota 1: O ponto de aplicação do empuxo é o centro de gravidade da porção de fluido que foi deslocada pela presença do sólido.

Nota 2: A Lei de Arquimedes pode ser aplicada mesmo no caso em que o sólido esteja mergulhado simultaneamente em dois fluidos, como na figura:



$$E = E_A + E_B = \mu_A V_A g + \mu_B V_B g$$

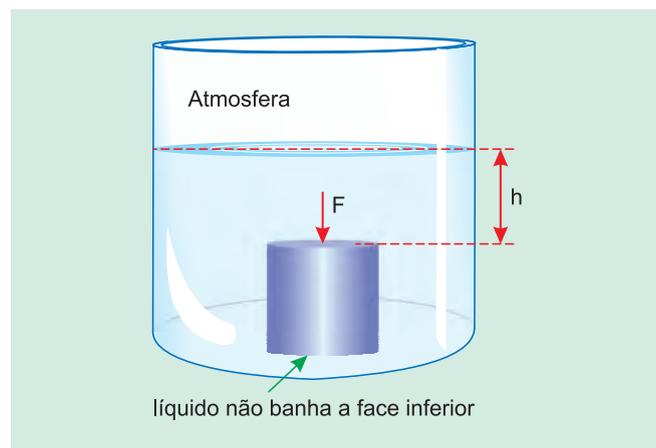
μ_A = densidade do fluido A

μ_B = densidade do fluido B

V_A = volume do sólido imerso em A

V_B = volume do sólido imerso em B

Nota 3: A Lei de Arquimedes não pode ser aplicada quando o fluido não banha a face inferior do sólido, como na figura:



Neste caso, a força resultante aplicada pelo fluido é a força F indicada, calculada como se segue:

$$F = p \cdot A = (p_0 + \mu g h) A$$

A = área da face superior do sólido.

Nota 4: A Lei de Arquimedes é válida quer o sólido esteja totalmente imerso ou flutuando na superfície do líquido.

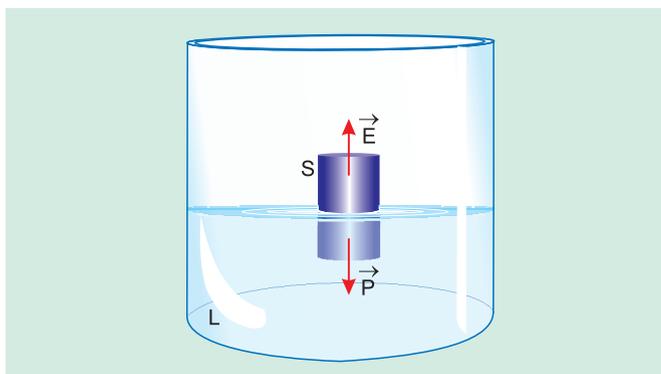
MÓDULO 55

Aplicação de Arquimedes



1. DENSIDADE DE UM SÓLIDO EM RELAÇÃO A UM LÍQUIDO

Considere um sólido (S) flutuando na superfície de um líquido (L) homogêneo, em equilíbrio e sob ação da gravidade.



Para o equilíbrio do sólido, temos:

$$E = P$$

$$\mu_L V_i g = \mu_S V g$$

$$\frac{\mu_S}{\mu_L} = \frac{V_i}{V}$$

A densidade do sólido, em relação ao líquido, é igual à fração do sólido que fica imersa no líquido.

2. PESO APARENTE DE UM SÓLIDO IMERSO EM UM LÍQUIDO

Definição

Considere um sólido S **totalmente imerso** em um líquido homogêneo e em equilíbrio.

Seja **P** o peso do sólido e **E** a intensidade do empuxo que o líquido exerce sobre o sólido.

Define-se **peso aparente (P_{ap})** do sólido S, imerso no líquido, pela relação:

$$P_{ap} = P - E$$

Relação com as densidades

Seja μ_S a densidade do sólido e μ_L a densidade do líquido, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \mu_S V g \\ E = \mu_L V g \end{array} \right\} \rightarrow \frac{E}{P} = \frac{\mu_L}{\mu_S}$$

$$E = \frac{\mu_L}{\mu_S} \cdot P$$

Substituindo-se na expressão do peso aparente, vem:

$$P_{ap} = P - \frac{\mu_L}{\mu_S} P$$

$$P_{ap} = P \left(1 - \frac{\mu_L}{\mu_S} \right)$$

$$P_{ap} = P \left(\frac{\mu_S - \mu_L}{\mu_S} \right)$$

Analisando-se a expressão anterior, concluímos:

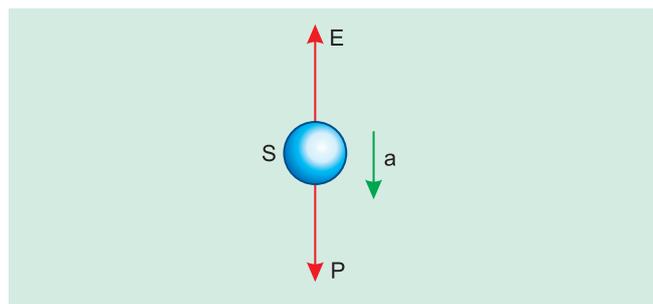
- (I) Quando $\mu_S > \mu_L \Leftrightarrow P_{ap} > 0$ e o sólido afunda.
- (II) Quando $\mu_S < \mu_L \Leftrightarrow P_{ap} < 0$ e o sólido aflora.
- (III) Quando $\mu_S = \mu_L \Leftrightarrow P_{ap} = 0$

Neste último caso, o sólido fica em equilíbrio totalmente imerso, em qualquer posição no interior do líquido.

3. ACELERAÇÃO NO INTERIOR DE UM LÍQUIDO

Consideremos um sólido S movendo-se no interior de um líquido, de modo a não perturbar muito a condição de equilíbrio do líquido (para continuar valendo a Lei de Arquimedes).

Aplicando-se a 2.^a Lei de Newton:



$$P - E = m a$$

$$\mu_S V g - \mu_L V g = \mu_S V a$$

$$g (\mu_S - \mu_L) = \mu_S a$$

$$a = \left(\frac{\mu_S - \mu_L}{\mu_S} \right) g$$

- (I) Quando $\mu_S = \mu_L \Leftrightarrow a = 0$ (MRU)
- (II) Quando $\mu_S > \mu_L \Leftrightarrow \downarrow \vec{a}$
- (III) Quando $\mu_S < \mu_L \Leftrightarrow \uparrow \vec{a}$

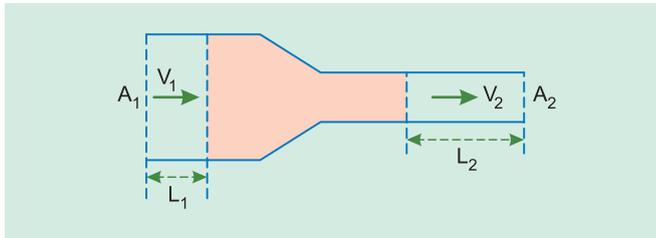
MÓDULO 56

Noções de Hidrodinâmica

1. OBJETO DE ESTUDO

A **Hidrodinâmica** estuda os fluidos em movimento.

2. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE



Considere um líquido homogêneo escoando ao longo da tubulação cilíndrica indicada.

Em virtude da conservação da massa, a quantidade de líquido na região hachurada permanece constante.

Em um intervalo de tempo Δt , o líquido percorreu uma distância L_1 no trecho de área A_1 , com velocidade de módulo V_1 e uma distância L_2 no trecho de área A_2 , com velocidade de módulo V_2 , de tal forma que os volumes líquidos, contidos nos cilindros de área A_1 e altura h_1 , e de área A_2 e altura h_2 , devem ser iguais:

$$\text{Vol}_1 = \text{Vol}_2$$

$$A_1 L_1 = A_2 L_2$$

A vazão Z do líquido é dada por:

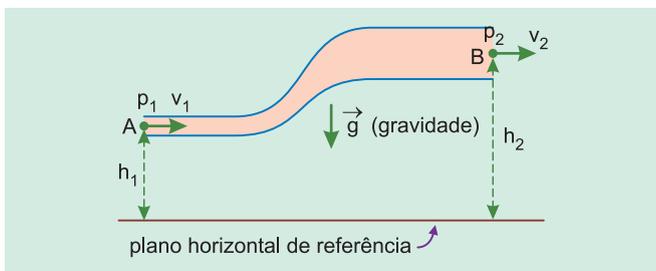
$$Z = \frac{\text{Vol}}{\Delta t} = \frac{A_1 L_1}{\Delta t} = \frac{A_2 L_2}{\Delta t}$$

$$Z = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Esta equação traduz a **conservação da massa** e é chamada **equação da continuidade**.

3. PRINCÍPIO DE BERNOULLI

Consideremos um líquido homogêneo, de densidade μ , escoando ao longo de uma tubulação e admitamos que haja conservação da energia mecânica.



Em um ponto A do líquido, a velocidade de escoamento tem módulo V_1 , a pressão é p_1 e a altura em relação a um plano de referência horizontal é h_1 .

Em um ponto B do líquido, a velocidade de escoamento tem módulo V_2 , a pressão é p_2 e a altura em relação ao plano horizontal de referência é h_2 .

Aplicando-se o teorema da energia cinética entre os pontos A e B, chegamos a:

$$p_1 + \mu g h_1 + \frac{\mu V_1^2}{2} = p_2 + \mu g h_2 + \frac{\mu V_2^2}{2}$$

Isto significa que:

$$p + \mu g h + \frac{\mu V^2}{2} = \text{constante}$$

Esta equação traduz a conservação de energia mecânica, escrita na forma de parcelas que representam pressão.

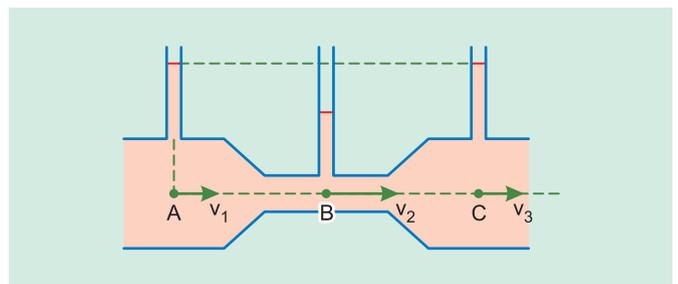
A parcela $\frac{\mu V^2}{2}$ é chamada **pressão dinâmica**.

A soma $p + \mu g h$ é chamada **pressão estática**.

Em particular, analisando-se pontos de mesma altura h (canalização horizontal), temos:

$$p + \frac{\mu V^2}{2} = \text{constante}$$

Nesse caso, se houver um estrangulamento (redução de área), a velocidade aumenta (equação da continuidade) e a pressão p diminui, conforme esquematizado na figura.



$$V_1 = V_3 < V_2 \Leftrightarrow p_1 = p_3 > p_2$$

Um estrangulamento em uma canalização objetivando um aumento de velocidade de líquido e a consequente **redução de pressão** é chamado **tubo de Venturi**.



1. ONDAS ESTACIONÁRIAS

□ Apresentação

Admitamos que um homem provoque numa das extremidades de uma corda tensa uma sucessão de ondas harmônicas de amplitude a .

Essas ondas sofrerão **reflexão** na extremidade fixa da corda e, ao retornarem, irão superpor-se às ondas incidentes, que continuam sendo produzidas pelo homem.

Isso determinará **interferência** entre as ondas incidentes e as ondas refletidas, dando como produto final **ondas estacionárias**.

Ondas estacionárias são resultantes da superposição de ondas iguais que se propagam em sentidos opostos em um mesmo meio.

As ondas estacionárias, embora sejam portadoras de energia, não transmitem essa energia, pois têm velocidade de propagação nula, daí o seu nome.

Ao longo da corda, poderão ser observados **ventres** e **nós** (ou **nodos**), conforme ilustra a figura.

Ventres: são pontos onde ocorre sempre **interferência construtiva**. Esses pontos vibram com amplitude máxima A_v , dada por:

$$A_v = a + a \Rightarrow \mathbf{A_v = 2a}$$

Nós (ou **nodos**): são pontos onde ocorre sempre **interferência destrutiva**. Esses pontos vibram com amplitude A_n nula.

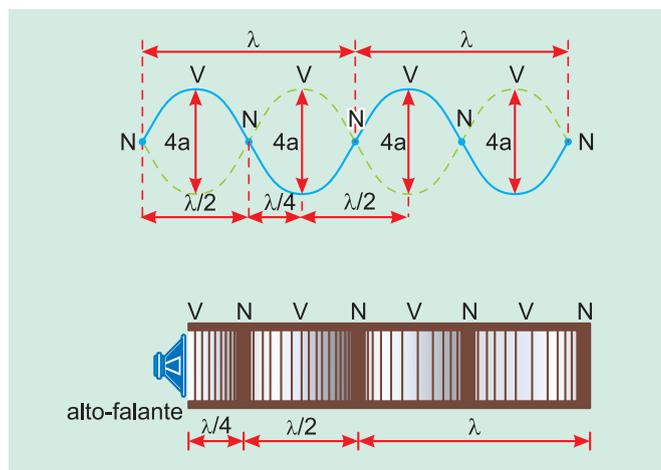
$$A_n = a - a \Rightarrow \mathbf{A_n = 0}$$

É importante frisar que tanto os ventres como os nós não se propagam, apresentando-se durante todo o tempo nas mesmas posições.

□ Uma situação importante

Colocando-se uma fonte sonora diante da boca de um tubo fechado, pode-se observar a formação de ondas estacionárias.

O som incidente interfere com o som refletido do tubo, determinando ventres e nós, conforme ilustra o esquema a seguir.



□ Propriedades das ondas estacionárias

- P.1. Ventres vibram com amplitude $2a$.
- P.2. Nós não vibram (amplitude de vibração nula).
- P.3. Pontos intermediários entre nós e ventres vibram com amplitudes entre 0 e $2a$.
- P.4. Todos os pontos de um mesmo "gomo" ou lóbulo vibram em concordância de fase.
- P.5. A velocidade de propagação de uma onda estacionária é nula. Por isso, embora tenham energia, as ondas estacionárias não propagam essa energia.
- P.6. Distância entre:
 - nós consecutivos: $\lambda/2$.
 - ventres consecutivos: $\lambda/2$.
 - ventres e nós consecutivos: $\lambda/4$.

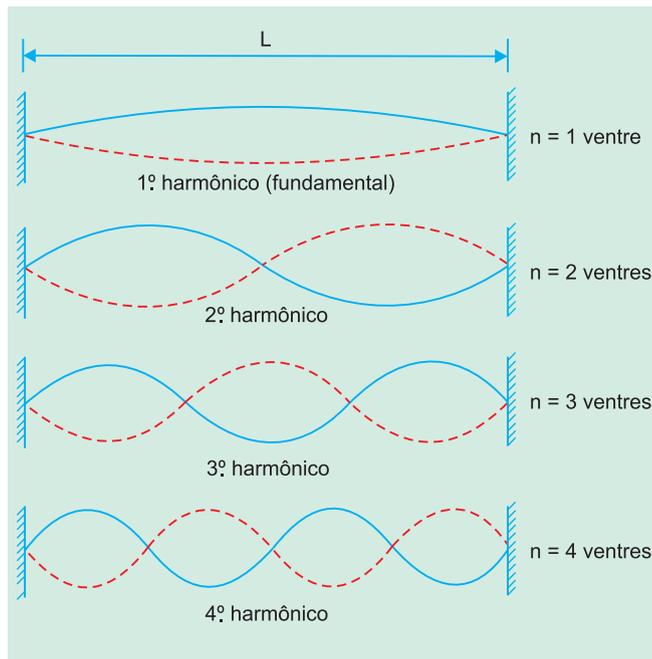
2. CORDAS SONORAS

Consideremos uma corda de náilon presa nas duas extremidades e tensa, como, por exemplo, uma das cordas de um violão.

Tangendo-se essa corda, ela vibrará e fará com que o ar dos arredores vibre também com a mesma frequência. Isso dará origem a ondas sonoras e, por isso, a corda é denominada **corda sonora**.

3. ONDAS ESTACIONÁRIAS NUMA CORDA SONORA

Representamos a seguir os quatro primeiros modos de vibração de uma corda sonora de comprimento L .



❑ Cálculo da frequência

$$1^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 1 \frac{\lambda}{2}$$

$$2^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 2 \frac{\lambda}{2}$$

$$3^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 3 \frac{\lambda}{2}$$

•
•
•

$$n^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2L}{n} \quad (I)$$

$$\text{Mas } v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$f = n \frac{v}{2L}$$

em que n é a ordem do harmônico ou o número de ventres.

4. EQUAÇÃO DE LAGRANGE-HELMHOLTS

Sendo F a intensidade da força de tração na corda e ρ sua densidade linear ($\rho = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento}}$), podemos expressar v em termos da **Fórmula de Taylor**.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

Assim, sendo $f = n \frac{v}{2L}$, obtemos a chamada

Equação de Lagrange-Helmholts.

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

Para um determinado harmônico, podemos dizer que:

(I) f é inversamente proporcional à L .

(II) f é diretamente proporcional à raiz quadrada de F .

(III) f é inversamente proporcional à raiz quadrada de ρ .

MÓDULO 58

Tubos Sonoros

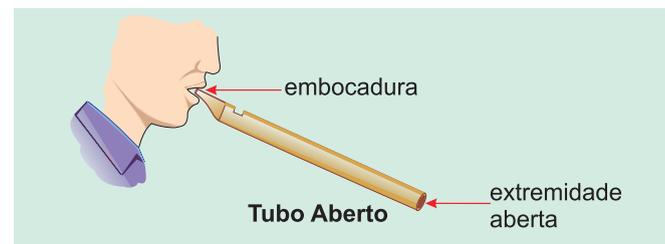
1. INTRODUÇÃO

São tubos que, soprados adequadamente, emitem som. Uma flauta, por exemplo, é um tubo sonoro.

As ondas estacionárias formadas dentro do tubo fazem o ar dos arredores ressoar, havendo assim a produção do som.

❑ Tubos abertos

Têm as duas extremidades abertas.



Nas extremidades abertas do tubo, formam-se sempre ventres.

❑ Tubos fechados

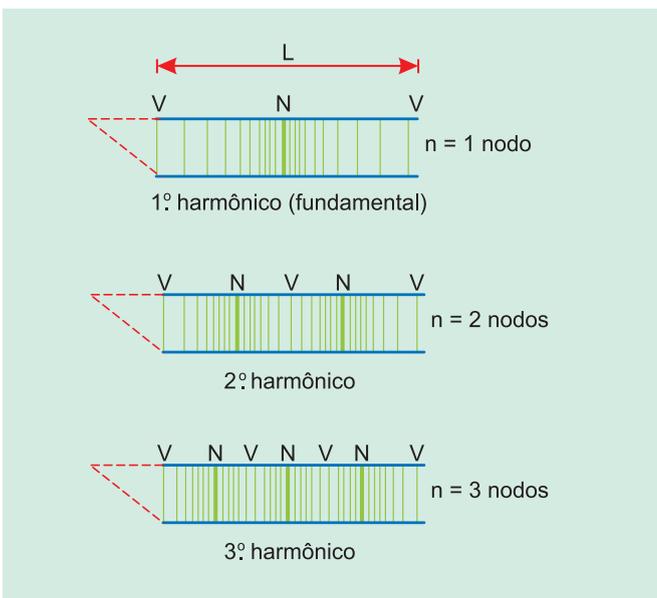
Têm uma das extremidades fechada.



Na extremidade fechada do tubo, forma-se sempre um nodo.

2. TUBOS SONOROS ABERTOS

Representamos a seguir os três primeiros modos de vibração da coluna de ar existente no interior de um tubo sonoro aberto de comprimento L .



❑ Cálculo da frequência

$$1^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 1 \frac{\lambda}{2}$$

$$2^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 2 \frac{\lambda}{2}$$

$$3^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 3 \frac{\lambda}{2}$$

•
•
•

$$n^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2L}{n} \quad (I)$$

$$\text{Mas } v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \quad (II)$$

Substituindo-se (I) em (II), vem:

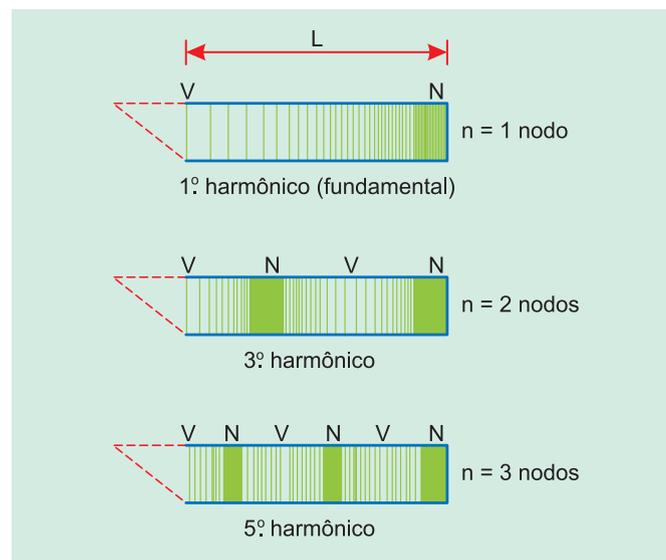
$$f = n \frac{v}{2L}$$

em que n é a ordem do harmônico ou o número de nós.

Os tubos sonoros abertos emitem tanto os harmônicos de ordem par, como os de ordem ímpar.

3. TUBOS SONOROS FECHADOS

Representamos a seguir os três primeiros modos de vibração da coluna de ar existente no interior de um tubo sonoro fechado de comprimento L .



❑ Cálculo da frequência

$$1^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 1 \frac{\lambda}{4}$$

$$3^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 3 \frac{\lambda}{4}$$

$$5^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = 5 \frac{\lambda}{4}$$

•
•
•

$$(2n - 1)^{\circ} \text{ HARMÔNICO: } L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\therefore \lambda = \frac{4L}{2n-1} \quad (I)$$

$$\text{Mas } V = \lambda f \Rightarrow f = \frac{V}{\lambda} \quad (II)$$

Substituindo-se (I) em (II), vem:

$$f = (2n-1) \frac{V}{4L}$$

sendo **n** o número de nodos.

Os tubos sonoros fechados emitem apenas os harmônicos de ordem ímpar.

MÓDULO 59

Qualidades Fisiológicas do Som

O ouvido humano normal distingue no som três qualidades distintas, denominadas qualidades fisiológicas do som. São elas: a **altura**, a **intensidade** e o **timbre**.

□ Altura (ou tom)

É a qualidade que permite ao ouvido diferenciar um som **grave** (baixo) de um som **agudo** (alto).

Os sons graves (ou baixos) têm baixa frequência, enquanto os sons agudos (ou altos) têm alta frequência.

Destaquemos que a altura de um som está relacionada exclusivamente com sua frequência.

• INTERVALO ACÚSTICO (I)

Chama-se intervalo acústico entre dois sons de frequências f_1 e f_2 o quociente dessas frequências.

$$i = \frac{f_2}{f_1} \quad (f_2 > f_1)$$

Um intervalo acústico importante é a **oitava**. Nesse caso, $i = 2$, o que significa que $f_2 = 2 f_1$.

□ Nível relativo de intensidade (ou sonoridade)

É a qualidade que permite ao ouvido diferenciar um som **forte** de um som **fraco**.

Som Forte → grande intensidade
Som Fraco → pequena intensidade

• Lei de Weber-Fechner

Sendo:

S_0 = sonoridade de referência.

S = sonoridade do som considerado.

I_0 = intensidade sonora de referência.

I = intensidade sonora do som considerado.

$\Delta S = S - S_0$ = magnitude da sensação auditiva, temos:

$$S - S_0 = K \log \frac{I}{I_0}$$

Se $K = 1 \rightarrow S$ em **bel**

Se $K = 10 \rightarrow S$ em **decibel** (dB)

Recordemos que a intensidade de um som, num ponto situado a uma distância x de uma fonte de ondas esféricas de potência P , é dada por:

$$I = \frac{P}{4\pi x^2}$$

A seguir, temos alguns níveis de intensidade sonora:

Casa calma	40dB
Conversa normal	60dB
Conversa em voz "alta"	70dB
Rua barulhenta	90dB
Grande explosão	110dB
Motor de avião a 3m de distância	130dB

□ Timbre

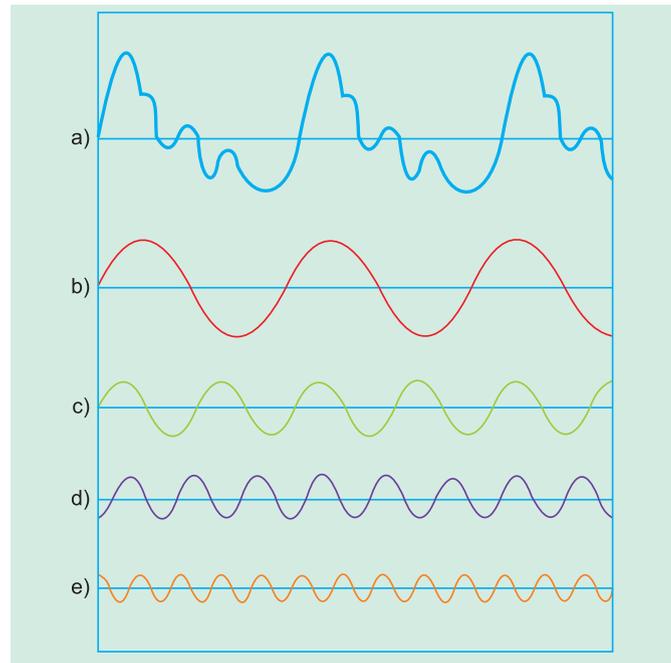
É a qualidade que permite ao ouvido distinguir sons de mesma altura e mesma intensidade, porém emitidos por fontes sonoras diferentes.

Os responsáveis pelo timbre são os harmônicos, que acompanham o som fundamental.

O timbre de um som relaciona-se com a forma de onda do som que o caracteriza.

Em **(a)** temos a forma de onda correspondente a uma nota emitida por um violino.

Em **(b)**, **(c)**, **(d)** e **(e)** estão os quatro principais harmônicos que compõem essa nota.



MÓDULO 60

Efeito Doppler-Fizeau

É o fenômeno que ocorre quando há aproximação ou afastamento entre um observador e uma fonte de ondas e que consiste na variação aparente da frequência da onda.

□ Aproximação

Quando há **aproximação** entre o observador e a fonte, o observador recebe mais frentes de onda do que receberia se ambos estivessem em repouso.

Se f_0 a frequência aparente percebida pelo observador e f_F a frequência real emitida pela fonte, tem-se, neste caso:

$$f_0 > f_F$$

□ Afastamento

Quando há afastamento entre o observador e a fonte, o observador recebe menos frentes de onda do que receberia se ambos estivessem em repouso.

Nesse caso:

$$f_0 < f_F$$

□ Cálculo da frequência aparente

Sendo:

f_0 = frequência (aparente) recebida pelo observador.

f_F = frequência emitida pela fonte.

v = velocidade de propagação da onda.

v_0 = velocidade do observador.

v_F = velocidade da fonte.

e considerando o meio de propagação da onda em repouso em relação à Terra, pode-se demonstrar que:

$$\frac{f_0}{v \pm v_0} = \frac{f_F}{v \pm v_F}$$

Na demonstração da fórmula anterior, convencionase como positivo o sentido observador \rightarrow fonte.

