

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

## Módulo 49 – Permutações

1. (UFABC)

## A América em busca de ouro

No mês de julho, a cidade do Rio de Janeiro sediou a 15.<sup>a</sup> edição dos Jogos Panamericanos, a maior competição esportiva das Américas. Numa participação recorde na história do evento, mais de 5 500 atletas de 42 países disputaram as medalhas de ouro, prata e bronze.



A figura mostra a medalha utilizada na premiação dos atletas.

Nela estão estampados 5 pássaros distintos. Suponha que cada pássaro pudesse ser colorido com uma cor diferente (verde, amarelo, azul, branco e vermelho). O número de composições distintas que podem ser formadas na distribuição das cores entre os cinco pássaros é

- a) 25.   b) 40.   c) 60.   d) 120.   e) 240.

## Resolução

O número de composições distintas que podem ser formadas na distribuição das cinco cores entre os cinco pássaros é dado por:  $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Resposta: D

2. (FGV) – O número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O é

- a) 9 400.   b) 9 600.   c) 9 800.
- 
- d) 10 200.   e) 10 800.

## Resolução

- a) O número total de permutações da palavra economia é  $P_8^2$ .  
b) O número de permutações que começam com O é  $P_7$ . O número das que terminam em O também é  $P_7$ .  
c) O número de permutações que começam e terminam com O é  $P_6$ .  
d) O número de permutações pedidas é  $P_8^2 - 2 \cdot P_7 + P_6 = 10 800$

Resposta: E

## Módulo 50 – Combinações Simples e Arranjos e Combinações com Repetição

3. (IBMEC) – Considere um cubo ABCDEFGH, cujas arestas medem 2 cm. O número de maneiras diferentes de escolher três de seus vértices de modo que a área do triângulo por eles determinados seja maior do que  $2 \text{ cm}^2$  é igual a

- a) 32   b) 36   c) 40   d) 48   e) 56

## Resolução

Para que a área de um dos triângulos seja maior que  $2 \text{ cm}^2$ , seus

3 vértices não podem pertencer a uma mesma face do cubo. Resulta, então  $C_{8,3} - 6 \cdot C_{4,3} = 56 - 6 \cdot 4 = 32$

Resposta: A

4. Um fabricante de doces dispõe de embalagens com capacidade de 4 doces cada uma. Sabendo-se que ele fabrica 10 tipos diferentes de doces, pergunta-se: quantos tipos de embalagens com 4 doces diferentes ele poderá oferecer?

## Resolução

O fabricante deve escolher 4 doces diferentes, em que só importa a natureza, pois se mudarmos a ordem dos doces dentro da embalagem, o resultado não se altera. Assim, temos que o número procurado é dado por:

$$C_{10,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

## Módulo 51 – Combinações Simples e Arranjos e Combinações com Repetição

5. Seis pessoas serão distribuídas em duas equipes para concorrer a uma gincana. O número de maneiras diferentes de formar duas equipes é

- a) 10   b) 15   c) 20   d) 25   e) 30

## Resolução

$$\frac{C_{6,3}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Resposta: A

6. (FGV) – O total de maneiras de distribuímos n objetos diferentes em duas caixas diferentes de forma que nenhuma delas fique vazia é igual a

- a)
- $2^n - 1$
- .   b)
- $2^n - 2$
- .   c)
- $2^n - 1$
- .
- 
- d)
- $2^n - 2$
- .   e)
- $2^n$
- .

## Resolução

O número de maneiras de distribuímos n objetos diferentes em duas caixas diferentes é dado por:

$$C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,3} + \dots + C_{n,n-1} = \\ = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - \binom{n}{0} = 2^n - 1$$

Resposta: D

## Módulo 52 – Probabilidade, Definição e União de Eventos

7. (FGV) – As seis faces do dado A estão marcadas com 1, 2, 3, 3, 5, 6; e as seis faces do dado B estão marcadas com 1, 2, 4,

4, 5 e 6. Considere que os dados A e B são honestos no sentido de que a chance de ocorrência de cada uma de suas faces é a mesma. Se os dados A e B forem lançados simultaneamente, a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja ímpar é igual a

- a)  $\frac{5}{9}$ .   b)  $\frac{1}{2}$ .   c)  $\frac{4}{9}$ .   d)  $\frac{1}{3}$ .   e)  $\frac{2}{9}$ .

### Resolução

A partir do enunciado, as possibilidades das somas dos números obtidos, está representada na tabela abaixo.

	1	2	3	3	5	6
1	2	3	4	4	6	7
2	3	4	5	5	7	8
4	5	6	7	7	9	10
4	5	6	7	7	9	10
5	6	7	8	8	10	11
6	7	8	9	9	11	12

Notando que dentre as 36 possibilidades, a soma obtida é ímpar em 20 possibilidades, conclui-se que, a probabilidade de que a soma dos números obtidos seja ímpar é:

$$P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

**Resposta: A**

8. (UFSCar) – Um dado convencional e honesto foi lançado três vezes. Sabendo que a soma dos números obtidos nos dois primeiros lançamentos é igual ao número obtido no terceiro lançamento, a probabilidade de ter saído um número 2 em ao menos um dos três lançamentos é igual

- a)  $\frac{91}{216}$ .   b)  $\frac{7}{15}$ .   c)  $\frac{8}{15}$ .   d)  $\frac{7}{12}$ .   e)  $\frac{3}{5}$ .

### Resolução

Se a soma dos números obtidos nos dois primeiros lançamentos for igual ao número obtido no terceiro lançamento, então os ternos possíveis são 15, a saber:

1,1	2	1,2	3	1,3	4	1,4	5	1,5	6
2,1	3	2,2	4	2,3	5	2,4	6		
3,1	4	3,2	5	3,3	6				
4,1	5	4,2	6						
5,1	6								

Desses 15 resultados possíveis e igualmente prováveis, em apenas 8 saiu o número 2 pelo menos uma vez.

A probabilidade pedida é  $\frac{8}{15}$ .

**Resposta: C**

## Módulo 53 – Probabilidade Condicional e Intersecção de Eventos

9. (UFABC) – Os dados da tabela foram obtidos a partir de um estudo realizado com 9 800 indivíduos da mesma faixa etária.

	Pratica exercícios regularmente	Pratica exercícios irregularmente	Não pratica exercícios	Total
Possui doença cardíaca	95	297	712	1 104
Não possui doença cardíaca	891	6811	994	8 696
Total	986	7108	1706	9 800

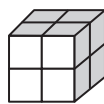
Sorteando-se ao acaso um indivíduo dentre os pesquisados, calcule a probabilidade de que ele seja portador de doença cardíaca, apesar de praticar regularmente ou irregularmente exercícios. O resultado do seu cálculo deve ser dado em porcentagem.

### Resolução

- O número total de indivíduos, dentre os pesquisados, que pratica exercícios, regularmente ou irregularmente, é  $986 + 7108 = 8094$
- Entre todos os indivíduos do item (1), o número total dos portadores de doença cardíaca é  $95 + 297 = 392$
- A probabilidade pedida é  $\frac{392}{8094} \approx 0,0484 = 4,84\%$

**Resposta: A probabilidade é aproximadamente 4,84%.**

10. (ESPM) – Um cubo de 2 cm de aresta tem duas faces adjacentes pintadas de azul e as demais são pintadas de branco. Esse cubo é, então, dividido em 8 cubinhos de 1 cm de aresta, como mostra a figura ao lado. Se um desses cubinhos for escolhido ao acaso e lançado sobre uma mesa, a probabilidade de que a face voltada para cima esteja pintada de azul é:



- a)  $1/3$    b)  $1/2$    c)  $1/12$    d)  $1/4$    e)  $1/6$

### Resolução

Dos 8 “cubinhos” obtidos temos três tipos:

A: 2 com apenas 2 faces azuis;

B: 4 com apenas 1 face azul;

C: 2 com nenhuma face azul.

A probabilidade de se escolher um desses 8 “cubinhos”, lançá-lo sobre a mesa e a face voltada para cima ser azul é igual à probabilidade de se escolher um cubo do tipo A e lançando-o sobre a mesa obter-se face azul para cima ou escolher um cubo do tipo B e lançando-o sobre a mesa obter-se face azul para cima. Resulta, então igual a

$$p = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{48} \cdot \frac{1}{6}$$

**Resposta: E**



Pede-se:

- a) amplitude
- b) média
- c) tabela de desvios
- d) desvio médio
- e) variância
- f) desvio padrão

**Resolução**

a) A amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor da amostra.

$$H = 2250 - 250 = 2000$$

b) média:

$$\bar{x} = \frac{10.250 + 4.750 + 2.1250 + 2.1750 + 2.2250}{10 + 4 + 2 + 2 + 2} = \frac{16\ 000}{20} = 800$$

c) Para calcular o desvio médio, a variância e o desvio padrão é oportuno construir a tabela os desvio de cada valor da variável.

x	f	D	D	f ·  D	D <sup>2</sup>	f · D <sup>2</sup>
250	10	- 550	550	5 500	302 500	3 025 000
750	4	- 50	50	200	2 500	10 000
1250	2	450	450	900	202 500	405 000
1750	2	950	950	1 900	902 500	1 805 000
2250	2	1450	1450	2 900	2 102 500	4 205 000
Σ				11 400		9 450 000

d) O desvio médio D<sub>m</sub> é dado por

$$D_m = \frac{\sum f \cdot |D|}{n} = \frac{11\ 400}{20} = 570$$

e) Variância =  $\frac{\sum f \cdot D^2}{n} = \frac{9\ 450\ 000}{20} = 472\ 500$

f) Desvio padrão =  $\sqrt{\text{variância}} = \sqrt{472\ 500} \cong 687,39$

## Módulo 58 – Grandezas Proporcionais

18. Dividir o número 81 em três partes inversamente proporcionais aos números  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  e 1.

**Resolução**

O problema equivale a dividir 81 em partes diretamente proporcionais aos inversos  $2$ ,  $\frac{3}{2}$  e 1.

Assim, sendo x, y e z as partes, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x + y + z}{2 + \frac{3}{2} + 1} = \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{81}{\frac{9}{2}} = \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 18 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 36 \\ 18 = \frac{y}{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 27 \\ 18 = \frac{z}{1} \Rightarrow z = 18 \end{cases}$$

**Resposta: As partes são: 36, 27 e 18.**

19. Repartir uma herança de R\$ 495.000,00 entre três pessoas na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada uma delas. Sabe-se que a 1ª pessoa tem 30 anos e 2 filhos, a 2ª pessoa tem 36 anos e 3 filhos e a 3ª pessoa, 48 anos e 6 filhos.

**Resolução**

Se x, y e z forem as quantias que cada uma das 3 pessoas deve receber, então:

$$\begin{cases} \frac{x}{2 \cdot \frac{1}{30}} = \frac{y}{3 \cdot \frac{1}{36}} = \frac{z}{6 \cdot \frac{1}{48}} \\ x + y + z = 495\ 000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\frac{2}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \\ x + y + z = 495\ 000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x + y + z}{\frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}} = \frac{x}{\frac{1}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \\ x + y + z = 495\ 000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{495\ 000}{\frac{33}{120}} = \frac{x}{\frac{1}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\ 800\ 000 = 15x = 12y = 8z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 120\ 000, y = 150\ 000, z = 225\ 000$$

**Resposta: A primeira pessoa deve receber R\$ 120 000,00, a segunda, R\$ 150 000,00 e a terceira, R\$ 225 000,00.**

## Módulo 59 – Regra de Três

20. Se 25 operários trabalhando 10 horas por dia abriram um canal de 238 metros de comprimento em 17 dias, quantos operários serão necessários para abrir 686 metros do mesmo canal em 25 dias de 7 horas de trabalho?

**Resolução**

Pela técnica operatória da regra de três composta, temos:

Número de operários	Número de horas por dia	Comprimento	Número de dias
25	10	238	17
x	7	686	25

Comparando a grandeza número de operários com as demais, temos:

Número de operários e número de horas são **GIP**.

Número de operários e comprimento são **GDP**.

Número de operários e número de dias são **GIP**.

Assim sendo:

$$\frac{25}{x} = \frac{7}{10} \cdot \frac{238}{686} \cdot \frac{25}{17} \Leftrightarrow \frac{25}{x} = \frac{7 \cdot 238 \cdot 25}{10 \cdot 686 \cdot 17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \cdot 686 \cdot 17 \cdot 25}{7 \cdot 238 \cdot 25} \Leftrightarrow x = 70$$

**Resposta: Serão necessários 70 operários.**

21. (PUCCAMP) – Um industrial encomendou a uma gráfica 100 000 cópias de um panfleto publicitário. Esse serviço foi realizado em 5 dias por 4 máquinas de mesmo rendimento, funcionando 6 horas por dia. Se uma dessas máquinas tivesse quebrado, as outras três teriam realizado a metade do serviço no mesmo prazo se funcionassem, por dia:

- a) 3 horas e 10 minutos                      b) 4 horas  
c) 5 horas    d) 5 horas e 20 minutos  
e) 6 horas

**Resolução**

↓ cópias	dias	↑ máquinas	↓ h/ dia	
100 000	5	4	6	⇒
50 000	5	3	x	

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{50\,000}{100\,000} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4$$

**Resposta: B**

## Módulo 60 – Porcentagem e Juros

22. (UFMG) – Francisco resolveu comprar um pacote de viagem que custava R\$ 4 200,00, já incluídos R\$ 120,00 correspondentes a taxas de embarque em aeroportos.

Na agência de viagens, foi informado de que, se fizesse o pagamento à vista, teria um desconto de 10%, exceto no valor referente às taxas de embarque, sobre o qual não haveria nenhum desconto. Decidiu, pois, pagar o pacote de viagem à vista. Então, é CORRETO afirmar que Francisco pagou por esse pacote de viagem

- a) R\$ 3 672,00.                                      b) R\$ 3 780,00.  
c) R\$ 3 792,00.                                      d) R\$ 3 900,00.

**Resolução**

Francisco pagou por esse pacote de viagem o valor, em reais, de  $(4200 - 120) \cdot 0,90 + 120 = 4080 \cdot 0,90 + 120 = 3672 + 120 = 3792$

**Resposta: C**

23. (MACKENZIE) – O dono de uma loja sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de determinado produto deve ser, no mínimo, 30% superior ao preço de custo. Visando atender clientes que pedem desconto, o dono da loja define o preço de venda, acrescentando 60% ao preço de custo. Dessa forma, o maior desconto que ele pode conceder, sem ter prejuízo, é de

- a) 16,25%                                      b) 18,75%                                      c) 18%  
d) 17,75%                                      e) 18,25%

**Resolução**

Seja  $c$  o preço de custo do produto, temos:

- 1) O preço mínimo de venda é  $1,30c$   
2) O preço definido para venda é  $1,60c$ .  
3) O maior desconto que o dono da loja pode conceder é  $1,60c - 1,30c = 0,30c$ , que, sobre o preço de venda, corresponde a

$$\frac{0,30c}{1,60c} = \frac{3}{16} = 0,1875 = 18,75\%$$

**Resposta: B**

24. (FUVEST) – Uma fazenda estende-se por dois municípios A e B. A parte da fazenda que está em A ocupa 8% da área desse município. A parte da fazenda que está em B ocupa 1% da área desse município. Sabendo-se que a área do município B é dez vezes a área do município A, a razão entre a área da parte da fazenda que está em A e a área total da fazenda é igual a

- a)  $\frac{2}{9}$                                       b)  $\frac{3}{9}$                                       c)  $\frac{4}{9}$                                       d)  $\frac{5}{9}$                                       e)  $\frac{7}{9}$

**Resolução**

Seja  $A$  a área do município A,  $B$  a área do município B e  $F$  a área da fazenda temos:

$$\begin{cases} F = 8\% \cdot A + 1\% \cdot B \\ B = 10 \cdot A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 8\% \cdot A + 1\% \cdot 10 \cdot A \Leftrightarrow F = 18\% \cdot A$$

A razão entre a área da fazenda que está em A e a área total da fazenda é

$$\frac{8\% \cdot A}{F} = \frac{8\% \cdot A}{18\% \cdot A} = \frac{4}{9}$$

**Resposta: C**

## EXERCÍCIOS-TAREFA

### Módulo 49 – Permutações

1. Calcular o número total de anagramas da palavra VESTIBULAR.

Questões de 2 a 17

Considerando-se os anagramas da palavra ALIMENTO, qual é o número total dos que:

2. começam com a letra M?

3. terminam com a letra O?

4. começam com a letra M e terminam com a letra L?

5. possuem a letra N em segundo lugar e a letra O em quinto lugar?

6. começam com AL, nessa ordem, e terminam em I?

7. começam com a letra L ou terminam com a letra I?

8. possuem as letras LIM juntas e nesta ordem?



9. possuem as letras LIM juntas?
10. começam com uma vogal?
11. terminam com uma consoante?
12. começam com vogal e terminam em consoante?
13. começam e terminam com vogal?
14. começam com vogal ou terminam em consoante?
15. começam ou terminam com vogal?
16. não possuem duas vogais juntas nem duas consoantes juntas?
17. possuem todas as letras em ordem alfabética?

18. (MACKENZIE) – Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 120    b) 320    c) 500    d) 600    e) 720

19. (GV) – Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.

- a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve anteceder B?
- b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo?

20. Um estudante ganhou numa competição quatro diferentes livros de Matemática, três diferentes de Física e dois diferentes de Química. Querendo manter juntos os da mesma disciplina, calculou que poderá enfileirá-los numa prateleira da estante, de modos diversos, num total de:

a)  $A_{9,3}$     b)  $A_{9,3} \cdot A_{9,3} \cdot A_{9,2}$     c)  $P_9$   
d)  $P_4 \cdot P_3 \cdot P_2$     e)  $P_3 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2$

21. (UNESP) – O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia, é

a) 3.    b) 6.    c) 9.    d) 12.    e) 15.

22. (UNESP) – Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.
- b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

23. (UNIFESP) – As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

a) PROVA.    b) VAPOR.    c) RAPOV.  
d) ROVAP.    e) RAOPV.

24. (UFOP) – Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, formam-se todos os números de três algarismos distintos possíveis. Dentre estes, o número de múltiplos de três é:

a) 0    b) 6    c) 12    d) 24

## Módulo 50 – Combinações Simples e Arranjos e Combinações com Repetição

1. Considere o conjunto  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Calcular o número de subconjuntos de A com 3 elementos.

a) 2    b) 18    c) 20    d) 120    e) 216

2. De um grupo de estudos de vinte pessoas, em que só seis são médicos, deseja-se formar comissões de dez pessoas, sendo que todos os médicos devem ser incluídos em cada comissão. O número de formas para elaborar as comissões pode ser dado por:

a)  $A_{14,4}$     b)  $A_{20,4}$     c)  $A_{20,6}$   
d)  $C_{20,4}$     e)  $C_{14,4}$

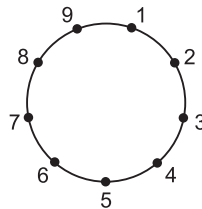
3. Considere 21 pontos, dos quais 3 nunca são colineares. Qual o número total de retas determinadas por estes pontos?

4. Considere 21 pontos, dos quais 3 nunca são colineares. Qual o número total de triângulos com vértices nestes pontos?

5. São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 dos 12 pontos?

6. (MACKENZIE) – Os polígonos de  $k$  lados ( $k$  múltiplo de 3), que podemos obter com vértices nos 9 pontos da figura, são em número de:

a) 83    b) 84  
c) 85    d) 168  
e) 169



7. (UEL) – Em uma floricultura, estão à venda 8 mudas de cravos e 12 mudas de rosas, todas diferentes entre si. Um cliente pretende comprar 3 mudas de cravos e 4 de rosas. De quantos modos ele pode selecionar as 7 mudas que quer comprar?

a)  $C_{20,7}$     b)  $A_{20,7}$     c) 7!  
d)  $A_{8,3} \cdot A_{12,4}$     e)  $C_{8,3} \cdot C_{12,4}$

8. (VUNESP) – De um grupo constituído de 6 enfermeiros e 2 médicos, deseja-se formar comissões de 5 pessoas. Quantas dessas comissões podem ser formadas se os 2 médicos devem, necessariamente, fazer parte de todas as comissões?

a) 10    b) 15    c) 20    d) 168    e) 336

9. (GV) – Em uma Universidade, no Departamento de Veterinária, existem 7 professores com especialização em Parasitologia e 4 em Microbiologia. Em um congresso, para a exposição dos seus trabalhos, serão formadas equipes da seguinte forma: 4 com especialização em Parasitologia e 2 com especialização em Microbiologia. Quantas equipes diferentes poderão ser formadas?

10. Uma empresa é formada por 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. De quantos modos podemos formar uma diretoria de 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses?

11. De quantas maneiras doze brinquedos diferentes podem ser distribuídos entre três crianças, de modo que a mais nova ganhe cinco brinquedos, a mais velha quatro, e a outra três?

12. Calcular o número total de “palavras” (com sentido ou não) de 4 letras, que podem ser formadas com as 10 primeiras letras do alfabeto.

13. Quantos são os anagramas da palavra SAPATO?

14. Quantos números naturais de 4 algarismos existem, ao todo, no sistema decimal de numeração, tendo cada um pelo menos dois algarismos iguais?

15. Quantos números de três algarismos podemos formar, ao todo, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4?

16. Quantos números de três algarismos existem no sistema decimal de numeração?

17. (MACKENZIE) – O frentista de um posto de gasolina deve calibrar os 4 pneus de um carro. Como está com pressa, escolhe, ao acaso, apenas 2 deles para calibrar. A probabilidade de ele ter calibrado os dois pneus dianteiros é

- a)  $\frac{1}{4}$ .      b)  $\frac{1}{3}$ .      c)  $\frac{1}{2}$ .      d)  $\frac{1}{5}$ .      e)  $\frac{1}{6}$ .

18. (PUC) – Joel e Jane fazem parte de um grupo de dez atores: 4 mulheres e 6 homens. Se duas mulheres e três homens forem escolhidos para compor o elenco de uma peça teatral, a probabilidade de que Joel e Jane, juntos, estejam entre eles é

- a)  $\frac{3}{4}$       b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{1}{4}$       d)  $\frac{1}{6}$       e)  $\frac{1}{8}$

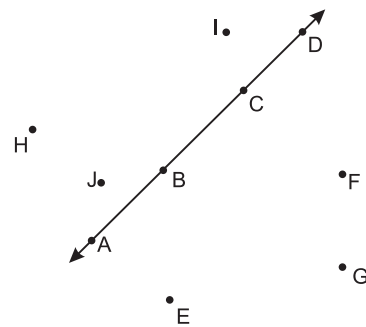
19. (FGV) – No estoque de uma loja há 6 blusas pretas e 4 brancas, todas de modelos diferentes. O número de diferentes pares de blusas, com cores diferentes que uma balconista pode pegar para mostrar a uma cliente, pode ser calculado assim:

- a)  $A_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$       b)  $C_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$   
 c)  $A_{10,2} - A_{6,4}$       d)  $C_{10,2} - C_{6,4}$   
 e)  $C_{10,2} - A_{6,4}$ .

20. (UNESP) – Considere os algarismos 2, 3, 5, 7 e 11. A quantidade total de números distintos que se obtêm multiplicando-se dois ou mais destes algarismos, sem repetição, é

- a) 120.      b) 52.      c) 36.      d) 26.      e) 21.

21. (UNESP) – Marcam-se, num plano, 10 pontos, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, dos quais 4 estão sobre a mesma reta e três outros pontos quaisquer nunca estão alinhados, conforme a figura.



O número total de triângulos que podem ser formados, unindo-se três quaisquer desses pontos, é

- a) 24.      b) 112.      c) 116.      d) 120.      e) 124.

22. (UNESP) – A turma de uma sala de  $n$  alunos resolve formar uma comissão de três pessoas para tratar de um assunto delicado com um professor.

- a) Explícite, em termos de  $n$ , o número de comissões possíveis de serem formadas com estes alunos.  
 b) Determine o número de comissões possíveis, se o professor exigir a participação na comissão de um determinado aluno da sala, por esse ser o representante da classe.

23. (FUVEST) – Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

- a) 12      b) 18      c) 36      d) 72      e) 108

24. (FUVEST) – Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem.

Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

- a) 16      b) 17      c) 18      d) 19      e) 20

25. (UEG) – A UEG realiza seu Processo Seletivo em dois dias. As oito disciplinas, Língua Portuguesa-Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia, Matemática, História, Geografia, Química e Física, são distribuídas em duas provas objetivas, com quatro disciplinas por dia. No Processo Seletivo 2005/2, a distribuição é a seguinte: primeiro dia: Língua Portuguesa-Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia e Matemática; segundo dia: História, Geografia, Química e Física.

A UEG poderia distribuir as disciplinas para as duas provas objetivas, com quatro por dia, de

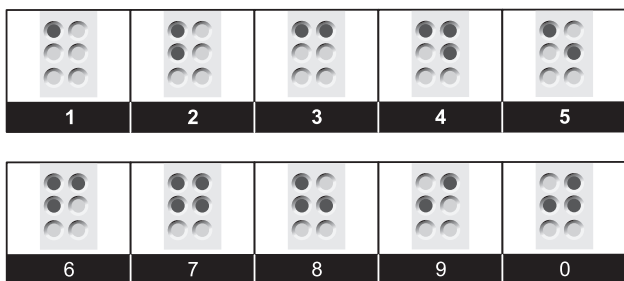
- a) 1.680 modos diferentes.      b) 256 modos diferentes.  
 c) 140 modos diferentes.      d) 128 modos diferentes.  
 e) 70 modos diferentes.

26. (UFMT) – Braille é o sistema de leitura e escrita mais utilizado pelos deficientes visuais em todo mundo. Esse método tátil consiste em pontos em relevo, dispostos de maneiras diferentes para cada letra do alfabeto, números, símbolos e pontuação.

A unidade de leitura onde são assinalados os pontos para representar cada algarismo é denominada CELA. A figura ao lado ilustra uma CELA.



Admita que na ilustração abaixo estão as representações dos algarismos da base decimal nesse sistema.



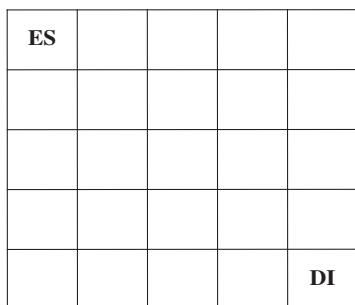
(Adaptado da Revista Galileu, maio/2005, p.82.)

A partir das informações acima, quantas celas distintas, no sistema Braille, podem ser assinaladas com 1, 2, 3 e 4 pontos e NÃO representam algarismos da base decimal?

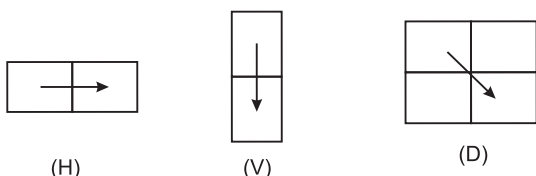
- a) 78      b) 109      c) 380      d) 46      e) 506

## Módulo 51 – Combinações Simples e Arranjos e Combinações com Repetição

1. (UNB) – Em um tabuleiro quadrado, de 5 x 5, mostrado na figura a seguir, deseja-se ir do quadrado esquerdo superior (ES) ao quadrado direito inferior (DI).



Somente são permitidos os movimentos horizontal (H), vertical (V) e diagonal (D), conforme ilustrado nas representações seguintes.



Com base nessa situação e com o auxílio dos princípios de análise combinatória, julgue os itens que se seguem.

### 8 – OBJETIVO

- (0) Se forem utilizados somente movimentos horizontais e verticais, então o número de percursos possíveis será igual a 70.
- (1) Se forem utilizados movimentos horizontais, verticais e apenas um movimento diagonal, o número de percursos possíveis será igual a 140.
- (2) Utilizando movimentos horizontais, verticais e três movimentos diagonais, o número de percursos possíveis é igual a 10.

2. (MACKENZIE) – Dentre os anagramas distintos que podemos formar com  $n$  letras, das quais somente duas são iguais, 120 apresentam estas duas letras iguais juntas. O valor de  $n$  é:

- a) 4      b) 5      c) 6      d) 7      e) 122

3. Um feirante possui, em sua banca, maçãs, peras e laranjas em grande quantidade. Desejando atender melhor a sua clientela, o feirante resolveu empacotar todas as suas frutas, de modo que cada pacote contivesse exatamente 5 frutas. Quantos tipos de pacotes poderá o feirante oferecer, no máximo, à sua clientela?

4. (VUNESP) – Dez rapazes, em férias no litoral, estão organizando um torneio de voleibol de praia. Cinco deles são selecionados para escolher os parceiros e capitanear as cinco equipes a serem formadas, cada uma com dois jogadores.

- a) Nessas condições, quantas possibilidades de formação de equipes têm os capitães escolhidos?
- b) Uma vez formadas as cinco equipes, quantas partidas se realizarão, se cada uma das equipes deverá enfrentar todas as outras uma única vez?

5. (MACKENZIE) – O número de comissões diferentes, de 2 pessoas, que podemos formar com os  $n$  diretores de uma firma, é  $k$ . Se, no entanto, ao formar estas comissões, tivermos que indicar uma das pessoas para presidente e a outra para suplente podemos formar  $k + 3$  comissões diferentes. Então,  $n$  vale:

- a) 3      b) 10      c) 13      d) 30      e) 40

6. (MACKENZIE) – O valor de  $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n-1}$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ , é:

- a)  $2^n - 1$       b)  $2^n$       c)  $2^n + n$       d)  $n^2$       e)  $(n + 2) \cdot 2$

7. Existem  $n$  maneiras de distribuir 7 moedas de valores diferentes entre duas pessoas. Excluindo-se a possibilidade de uma só receber todas as moedas, o valor de  $n$  será:

- a) 126      b) 128      c) 49      d) 45      e) 30

8. (UNICAMP) – O símbolo  $C_{n,p}$  é definido por  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$  para  $n \geq 0$  com  $0! = 1$ . Estes números  $C_{n,p}$  são inteiros e aparecem como coeficientes no desenvolvimento de  $(a + b)^n$ .

- a) Mostre que  $C_{n,p-1} + C_{n,p} = C_{n+1,p}$ .
- b) Seja  $S = C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n}$ . Calcule  $\log_2 S$ .



9. (UNICAMP) –

- a) De quantas maneiras é possível distribuir 20 bolas iguais entre 3 crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 5 bolas?  
 b) Escolhendo, aleatoriamente, uma das distribuições do item (a), qual a probabilidade de uma delas receber exatamente 9 bolas?

## Módulo 52 – Probabilidade, Definição e União de Eventos

1. (FATEC) – Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos **4, 5, 6, 7 e 8**. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade de ele ser um número ímpar é:

- a) 1      b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{2}{5}$       d)  $\frac{1}{4}$       e)  $\frac{1}{5}$

2. O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser **zero** é:

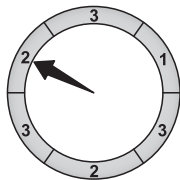
- a) 1/10      b) 1/2      c) 4/9      d) 5/9      e) 1/5

3. Foram preparadas noventa empadinhas de camarão, das quais, a pedido, **sessenta** deveriam ser bem mais apimentadas. Por pressa e confusão de última hora, foram todas colocadas ao acaso, numa mesma travessa para serem servidas. A probabilidade de alguém retirar uma empadinha mais apimentada é:

- a) 1/3      b) 1/2      c) 1/60      d) 2/3      e) 1/90

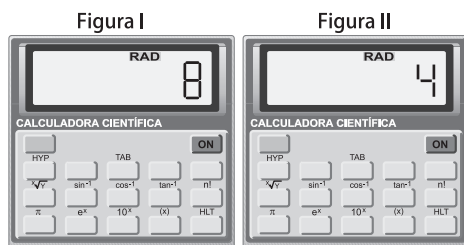
4. Gira-se o ponteiro (veja a figura) e anota-se o número que ele aponta ao parar. Repete-se a operação. Qual a probabilidade de que a soma dos dois números obtidos seja 5?

- a)  $\frac{5}{36}$       b)  $\frac{8}{36}$       c)  $\frac{12}{36}$   
 d)  $\frac{24}{36}$       e)  $\frac{35}{36}$



5. Sete lâmpadas de néon são dispostas formando um “oito”, como no mostrador de uma calculadora (**figura I**), e podem ser acesas independentemente umas das outras. Estando todas as sete apagadas, acendem-se quatro delas ao mesmo tempo, ao acaso. A probabilidade de ser formado o algarismo **4**, como aparece na **figura II**, é:

- a) 1/35  
 b) 1/2  
 c) 1/3  
 d) 1/5  
 e) 1/28



6. (VUNESP) – A final da Olimpíada de Matemática de uma certa escola vai ser disputada por apenas três alunos, **A, B e C**. Admite-se que é duas vezes mais provável que **A** vença do que

**B** e é duas vezes mais provável que **B** vença do que **C**. Nesse caso, a probabilidade de que **A** vença a Olimpíada é:

- a)  $\frac{5}{7}$       b)  $\frac{4}{7}$       c)  $\frac{3}{7}$       d)  $\frac{2}{7}$       e)  $\frac{1}{7}$

7. (FUVEST) – Considerando-se um polígono regular de **n** lados, **n ≥ 4**, e tomando-se ao acaso uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é:

- a) 0 se **n** é par.      b)  $\frac{1}{2}$  se **n** é ímpar.      c) 1 se **n** é par.  
 d)  $\frac{1}{n}$  se **n** é ímpar.      e)  $\frac{1}{n-3}$  se **n** é par.

8. (FUVEST) – Numa urna são depositadas **n** etiquetas numeradas de **1 a n**. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

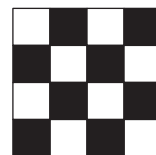
- a)  $\frac{(n-2)!}{n!}$       b)  $\frac{(n-3)!}{n!}$       c)  $\frac{(n-2)!}{3!n!}$   
 d)  $\frac{(n-2)!3!}{n!}$       e)  $6(n-2)(n-1)$

9. (UNICAMP) – Uma urna contém **50** bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

- **X** delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de **1 a X**.
- **X + 1** delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de **1 a X + 1**.
- **X + 2** delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de **1 a X + 2**.
- **X + 3** delas são verdes e numeradas sequencialmente de **1 a X + 3**.

- a) Qual é o valor numérico de **X**?  
 b) Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma **bola azul** ou uma bola com o número **12**?

10. São escolhidas aleatoriamente três das células brancas do tabuleiro representado na figura ao lado. Qual a probabilidade de as três posições escolhidas não estarem alinhadas?



- a)  $\frac{6}{7}$       b)  $\frac{13}{14}$       c)  $\frac{25}{28}$       d)  $\frac{27}{28}$       e)  $\frac{11}{65}$

11. (UNICAMP) – Em uma festa para calouros estão presentes **250** calouros e **350** calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:

- a) Quantos pares podem ser formados?  
 b) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura **não esteja** dançando no momento em que todos os **250** calouros estão dançando?

12. (MACKENZIE) – Uma loja colocou à venda 27 calças jeans, das quais 6 apresentam defeito. Escolhendo-se 3 calças ao acaso, a probabilidade de as 3 estarem com defeito é

- a)  $\frac{15}{351}$    b)  $\frac{2}{9}$    c)  $\frac{6}{117}$    d)  $\frac{4}{585}$    e)  $\frac{24}{65}$

13. (PUC) – Em um ônibus há apenas 4 bancos vazios, cada qual com 2 lugares. Quatro rapazes e quatro moças entram nesse ônibus e devem ocupar os bancos vagos. Se os lugares forem escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de que cada banco seja ocupado por 1 rapaz e 1 moça é

- a)  $\frac{1}{70}$    b)  $\frac{6}{35}$    c)  $\frac{3}{14}$    d)  $\frac{8}{35}$    e)  $\frac{2}{7}$

14. (FGV)

a) Uma urna contém 6 bolas brancas, 8 bolas pretas e 4 bolas verdes, todas iguais e indistinguíveis ao tato. Um jogador tira uma bola ao acaso. Se a bola for branca, ele ganha; se a bola for preta, ele perde. Se a bola for verde, ele retira outra bola ao acaso, sem repor a verde. Ele ganha se a segunda bola for branca; se não, ele perde.

Determine a probabilidade de o jogador ganhar.

b) Sete pessoas, entre elas Bento e Paulo, estão reunidas para escolher, entre si, a Diretoria de um clube formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro.

Determine o número de maneiras de compor a Diretoria, onde Paulo é vice-presidente e Bento não é presidente nem tesoureiro.

15. (FGV) – Dois dados com a forma de tetraedro regular têm as faces numeradas de 1 a 4 e de 7 a 10, respectivamente. Combina-se que ao lançá-los, a face sorteada é a que fica virada para a mesa. Os dois dados são lançados.

- a) Calcule a probabilidade de serem sorteados dois números cujo produto é par.  
 b) Represente, num gráfico de setores, as probabilidades de se obter produto par e de se obter produto ímpar, no lançamento desses dois dados.

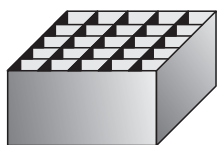
16. (FGV) – Uma urna contém quatro fichas numeradas, sendo:

- A 1ª com o número 5      • A 2ª com o número 10
- A 3ª com o número 15    • A 4ª com o número 20

Uma ficha é sorteada, tem seu número anotado e é recolocada na urna; em seguida outra ficha é sorteada e anotado seu número. A probabilidade de que a média aritmética dos dois números sorteados esteja entre 6 e 14 é:

- a) 5/12   b) 9/16   c) 6/13   d) 7/14   e) 8/15

17. (UNIFESP) – Um engradado, como o da figura, tem capacidade para 25 garrafas.



Se, de forma aleatória, forem colocadas 5 garrafas no engradado, a probabilidade de que quaisquer duas delas não recaiam numa mesma fila horizontal, nem numa mesma fila vertical, é:

- a)  $\frac{5!}{25!}$       b)  $\frac{5!5!}{25!}$       c)  $\frac{5!20!}{25!}$   
 d)  $\frac{5!5!20!}{25!}$       e)  $\frac{5!5!25!}{20!}$

18. (UFSCar) – Juntam-se 27 cubos brancos, cada um com  $1 \text{ cm}^3$  de volume, formando um cubo de  $27 \text{ cm}^3$ . Em seguida, pinta-se de preto cada uma das seis faces do cubo de  $27 \text{ cm}^3$ , como indica a figura 1.

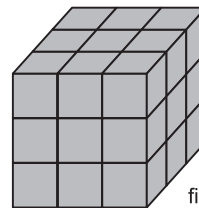
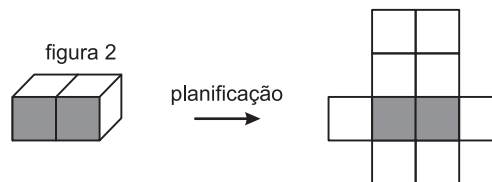


figura 1

Separa-se novamente os 27 cubos. Aleatoriamente e de uma única vez, 2 desses cubos são sorteados. Com os cubos sorteados, deseja-se formar um paralelepípedo de  $2 \text{ cm}^3$  com cinco faces brancas e apenas uma preta, da forma indicada na figura 2.



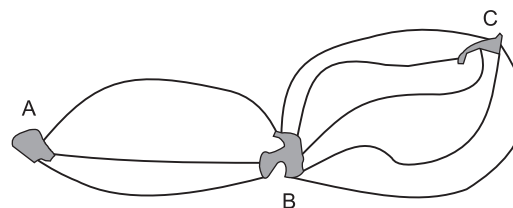
A probabilidade de que esse paralelepípedo possa ser formado com os cubos sorteados é igual a

- a)  $\frac{2}{3}$    b)  $\frac{17}{39}$    c)  $\frac{29}{117}$    d)  $\frac{2}{9}$    e)  $\frac{5}{117}$

19. (UFRN) – Para a correção das provas de um concurso, o coordenador da equipe dispõe de dez pessoas, sendo sete homens e três mulheres, para formar duplas de examinadores. Admitindo-se que a escolha das duplas seja aleatória, a probabilidade de se ter uma dupla feminina é igual a:

- a)  $\frac{1}{5}$    b)  $\frac{1}{30}$    c)  $\frac{1}{15}$    d)  $\frac{3}{10}$

20. (UFPE) – As cidades A e B estão conectadas por três rodovias, e as cidades B e C estão conectadas por cinco rodovias.



Se escolhermos aleatoriamente uma trajetória para ir de A até C e voltar para A, usando as rodovias indicadas, qual a probabilidade de a trajetória não conter rodovias repetidas?

- a) 2/5   b) 7/15   c) 8/15   d) 3/5   e) 2/3

## Módulo 53 – Probabilidade Condicional e Intersecção de Eventos

1. Jogando-se um dado “honesto” de seis faces e sabendo que ocorreu um número **maior do que 2**, qual é a probabilidade de ser um **número ímpar**?

2. (PUCC) – Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma nos dois dados é **8**, então a probabilidade de ocorrer a face **5**, em um deles, é:

- a)  $\frac{1}{2}$     b)  $\frac{2}{5}$     c)  $\frac{4}{5}$     d)  $\frac{1}{5}$     e)  $\frac{1}{4}$

3. Sabendo-se que **6%** de uma população tem estatura superior a **1,80m** e **30%** entre **1,70m** e **1,80m**, qual a probabilidade de uma pessoa com mais de **1,70m** ter mais de **1,80m**?

4. Se dois prêmios iguais forem sorteados entre **5** pessoas, sendo **duas brasileiras** e **três argentinas**, qual será a probabilidade de:

- a) serem premiadas as duas brasileiras?  
b) ser premiada pelo menos uma argentina?  
c) serem premiadas duas argentinas?

5. Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a **30%**, a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença **só no 3º mês** é igual a:

- a) 21%    b) 49%    c) 6,3%    d) 14,7%    e) 26%

6. (UNESP) – Um piloto de Fórmula I estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de **60%** se chover no dia da prova e de **20%** se não chover. O serviço de Meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de **75%**. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio.

7. (UNESP) – A eficácia de um teste de laboratório para checar certa doença nas pessoas que comprovadamente têm essa doença é de **90%**. Esse mesmo teste, porém, produz um falso-positivo (acusa positivo em quem não tem comprovadamente a doença) da ordem de **1%**. Em um grupo populacional em que a incidência dessa doença é de **0,5%**, seleciona-se uma pessoa ao acaso para fazer o teste. Qual a probabilidade de que o resultado desse teste venha a ser positivo?

8. (MACKENZIE) – Numa caixa **A**, temos um dado preto e outro branco e, numa caixa **B**, dois dados brancos e um preto. Escolhida ao acaso uma caixa, se retirarmos dela, também ao acaso, um dado, então a probabilidade de termos um dado **branco** com o número **2** é:

- a)  $\frac{1}{12}$     b)  $\frac{1}{36}$     c)  $\frac{5}{72}$     d)  $\frac{7}{72}$     e)  $\frac{3}{24}$

9. (PUC) – Em uma urna há **10** bolas, numeradas de **1** a **10**. Um amigo propõe-me o seguinte jogo: – “Sorteie **3** bolas. Se a soma dos números nelas marcados for menor do que ou igual a **9**, você ganha. Caso contrário, você perde.” Nesse jogo, a probabilidade de que eu ganhe é:

- a)  $\frac{1}{30}$     b)  $\frac{1}{24}$     c)  $\frac{1}{20}$     d)  $\frac{7}{120}$     e)  $\frac{7}{720}$

10. (MACKENZIE) – Um ultraleve está a **400** metros de altura quando o motor pára de funcionar. Antes de cada tentativa de religar o motor, inclusive a primeira, o piloto deve esperar um intervalo de **10** segundos e, a cada tentativa, cai pela metade a probabilidade de o motor voltar a funcionar. Se o ultraleve está em queda, com velocidade vertical constante de **10m/s**, e a chance de o motor ligar na primeira tentativa é de **40%**, a probabilidade de o motor funcionar antes de o ultraleve tocar o solo é de

- a) 56,8%    b) 43,2%    c) 70%  
d) 62%    e) 65,6%

11. (FATEC) – Suponha que, na região em que ocorreu a passagem do *Furacão Katrina*, somente ocorrem três grandes fenômenos destrutivos da natureza, dois a dois mutuamente exclusivos:

- os hidrometeorológicos (A),
- os geofísicos (B) e
- os biológicos (C).

Se a probabilidade de ocorrer A é cinco vezes a de ocorrer B, e esta corresponde a **50%** da probabilidade de ocorrência de C, então a probabilidade de ocorrer

- a) A é igual a duas vezes a de ocorrer C.  
b) C é igual à metade da de ocorrer B.  
c) B ou C é igual a **42,5%**.  
d) A ou B é igual a **75%**.  
e) A ou C é igual a **92,5%**.

12. (UNESP) – O gerente de uma loja de roupas, antes de fazer nova encomenda de calças jeans femininas, verificou qual a quantidade de calças vendidas no mês anterior, para cada número (tamanho). A distribuição de probabilidades referente aos números vendidos no mês anterior foi a seguinte:

Número (tamanho)	36	38	40	42	44	46
Probabilidade	0,12	0,22	0,30	0,20	0,11	0,05

Se o gerente fizer uma encomenda de **500** calças de acordo com as probabilidades de vendas dadas na tabela, as quantidades de calças encomendadas de número **40** ou menos, e de número superior a **40**, serão, respectivamente:

- a) 320 e 180.    b) 380 e 120.    c) 350 e 150.  
d) 180 e 320.    e) 120 e 380.

13. (UNESP) – Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação  $x^2 + bx + 1 = 0$ . Determine

- a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.  
b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

14. (UNESP) – Uma urna contém as letras: A, C, D, D, E, E, F, I, I e L.

- a) Se todas as letras forem retiradas da urna, uma após a outra, sem reposição, calcule a probabilidade de, na sequência das retiradas, ser formada a palavra FELICIDADE.  
 b) Se somente duas letras forem retiradas da urna, uma após a outra, sem reposição, calcule a probabilidade de serem retiradas duas letras iguais.

15. (UNESP) – Um colégio possui duas salas, A e B, de determinada série. Na sala A, estudam 20 alunos e na B, 30 alunos. Dois amigos, Pedro e João, estudam na sala A. Um aluno é sorteado da sala A e transferido para a B. Posteriormente, um aluno é sorteado e transferido da sala B para a sala A.

- a) No primeiro sorteio, qual a probabilidade de qualquer um dos dois amigos ser transferido da sala A para a B?  
 b) Qual a probabilidade, no final das transferências, de os amigos ficarem na mesma sala?

16. (UNESP) – O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos: A, B, AB e O. Além disso, o sangue de uma pessoa pode possuir, ou não, o fator Rhésus. Se o sangue de uma pessoa possui esse fator, diz-se que a pessoa pertence ao grupo sanguíneo Rhésus positivo ( $Rh^+$ ) e, se não possui esse fator, diz-se Rhésus negativo ( $Rh^-$ ). Numa pesquisa, 1000 pessoas foram classificadas, segundo grupo sanguíneo e respectivo fator Rhésus, de acordo com a tabela

	A	B	AB	O
$Rh^+$	390	60	50	350
$Rh^-$	70	20	10	50

Dentre as 1000 pessoas pesquisadas, escolhida uma ao acaso, determine

- a) a probabilidade de seu grupo sanguíneo não ser A. Determine também a probabilidade de seu grupo sanguíneo ser B ou  $Rh^+$ .  
 b) a probabilidade de seu grupo sanguíneo ser AB e  $Rh^-$ . Determine também a probabilidade condicional de ser AB ou O, sabendo-se que a pessoa escolhida é  $Rh^-$ .

17. (FGV) – Quatro meninas e cinco meninos concorreram ao sorteio de um brinquedo. Foram sorteadas duas dessas crianças ao acaso, em duas etapas, de modo que quem foi sorteado na primeira etapa não concorria ao sorteio na segunda etapa. A probabilidade de ter sido sorteado um par de crianças de sexo diferente é

- a)  $\frac{5}{9}$  .    b)  $\frac{4}{9}$  .    c)  $\frac{5}{8}$  .    d)  $\frac{1}{2}$  .    e)  $\frac{5}{18}$  .

18. (UNIFESP) – Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, sabe-se que a probabilidade de A ocorrer é

$$p(A) = \frac{3}{4}, \text{ e que a probabilidade de B ocorrer é } p(B) = \frac{2}{3}.$$

Seja  $p = p(A \cap B)$  a probabilidade de ocorrerem A e B.

a) Obtenha os valores mínimo e máximo possíveis para p.

b) Se  $p = \frac{7}{12}$ , e dado que A tenha ocorrido, qual é a probabilidade de ter ocorrido B?

## Módulo 54 – Lei Binomial de Probabilidade

1. Jogando-se cinco vezes um dado, qual é a probabilidade de ocorrer **cinco vezes** o resultado **6**?

2. Um jogador A joga um dado perfeito 4 vezes e ganhará caso consiga, pelo menos, **dois resultados iguais a 1**, durante as jogadas. Neste caso a probabilidade de o jogador A ganhar é:

- a)  $\frac{47}{143}$     b)  $\frac{11}{101}$     c)  $\frac{19}{144}$     d)  $\frac{7}{53}$     e)  $\frac{13}{107}$

3. Jogando-se seis vezes um dado, qual é a probabilidade de ocorrer o resultado **3 só duas vezes**?

4. (MACKENZIE) – No lançamento de 4 moedas “honestas”, a probabilidade de ocorrerem duas caras e duas coroas é:

- a)  $\frac{1}{16}$     b)  $\frac{3}{16}$     c)  $\frac{1}{4}$     d)  $\frac{3}{8}$     e)  $\frac{1}{2}$

5. (VUNESP) – Sabe-se que, de cada 5 pessoas de uma determinada comunidade, uma é portadora de um certo tipo de anemia. Se selecionarmos, ao acaso, 3 pessoas dessa comunidade, qual é a probabilidade de que **pelo menos uma** delas seja portadora daquele tipo de anemia?

- a)  $\frac{68}{125}$     b)  $\frac{64}{125}$     c)  $\frac{61}{125}$     d)  $\frac{3}{125}$     e)  $\frac{1}{125}$

6. (UFPE) – As faces de um tetraedro são numeradas de 1 a 4 e as de um cubo de 5 a 10. Lançando-os simultaneamente 100 vezes, qual o número mais provável de vezes em que a soma é menor do que 9? (Contam-se, em cada lançamento, os números da face da base do tetraedro e do cubo.)

7. (GV) – Uma companhia de seguros coletou uma amostra de 2000 motoristas de uma cidade a fim de determinar a relação entre o número de acidentes (y) em um certo período e a idade em anos (x) dos motoristas. Os resultados estão na tabela abaixo:

	y = 0	y = 1	y = 2	y > 2
x < 20	200	50	20	10
20 ≤ x < 30	390	120	50	10
30 ≤ x < 40	385	80	10	5
x ≥ 40	540	105	20	5

Adotando a frequência relativa observada como probabilidade de cada evento, obtenha:

- A probabilidade de um motorista escolhido ao acaso ter exatamente um acidente no período considerado.
- A probabilidade de um motorista ter exatamente 2 acidentes no período considerado, dado que ele tem menos de 20 anos.

## Módulo 55 – Médias

1. (FUVEST) – Ache a média aritmética dos números  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{13}{4}$  e  $\frac{1}{2}$ .

2. Calcular a média geométrica dos números 6, 16 e 18.

3. Seja **A** um conjunto de sete números estritamente positivos. Sabendo-se que a média geométrica dos três primeiros números do conjunto **A** é  $2\sqrt[3]{2}$  e que a média geométrica dos quatro últimos números do conjunto **A** é  $4\sqrt{2}$ , calcular a média geométrica de todos os números do conjunto **A**.

4. Calcular a média harmônica dos números  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{13}{4}$  e  $\frac{1}{2}$ .

5. (ITA) – Sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução vale 4. Quanto valerá a razão entre o volume e a área total deste cilindro?

- a) 1      b) 2      c) 2,5      d) 3      e) 3,5

6. Comprei 5 doces a R\$ 1,80 cada um, 3 doces a R\$ 1,50 cada e 2 doces a R\$ 2,50 cada. O preço médio, por doce, foi de:

- a) R\$ 1,75      b) R\$ 1,85      c) R\$ 1,93  
d) R\$ 2,00      e) R\$ 2,40

7. A média aritmética dos elementos de um conjunto de 28 números é 27. Se retirarmos desse conjunto três números, de valores 25, 28 e 30, a média aritmética dos elementos do novo conjunto será:

- a) 26,92      b) 26,80      c) 26,62      d) 26,38      e) 25,48

8. (FUVEST) – Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:

- a) 16      b) 20      c) 50      d) 70      e) 100

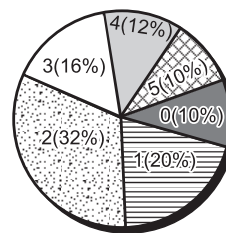
9. (VUNESP) – Suponha que o país **A** receba de volta uma parte de seu território **T**, que por certo tempo esteve sob a administração do país **B**, devido a um tratado entre **A** e **B**. Estimemos a população de **A**, antes de receber **T**, em 1,2 bilhão de habitantes, e a de **T** em 6 milhões de habitantes. Se as médias de idade das populações de **A** e **T**, antes de se reunirem, eram, respectivamente, 30 anos e 25 anos, mostre que a média de idade após a reunião é superior a 29,9 anos.

10. (FUVEST) – Numa classe com vinte alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto que a média dos aprovados foi 77.

Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

- Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras.
- Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação?

11. (UNICAMP) – O gráfico abaixo, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32.000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.



Pergunta-se:

- Quantos candidatos tiveram nota 3?
- É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi  $\leq 2$ ? Justifique sua resposta.

12. (UNESP) – Sejam dois bairros, **A** e **B**, de certa cidade. O bairro **A** possui 1 000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência 250 kWh. Já o bairro **B** possui 1 500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 kWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, **A** e **B**, é

- a) 275 kWh.      b) 280 kWh.      c) 287,5 kWh.  
d) 292,5 kWh.      e) 550 kWh.

13. (FGV) – As tabelas seguintes mostram o tempo de escolaridade de candidatos a uma vaga de vendedor de uma empresa nos anos de 1990 e 2000.

1990		2000	
Número de candidatos	Tempo de escolaridade (anos)	Número de candidatos	Tempo de escolaridade (anos)
8	4	10	4
4	8	5	8
5	11	10	11
3	15	12	15

De 1990 a 2000, o tempo de escolaridade entre os candidatos à vaga de vendedor dessa empresa cresceu, em média,

- a) 7%.      b) 12%.      c) 15%.      d) 18%.      e) 22%.



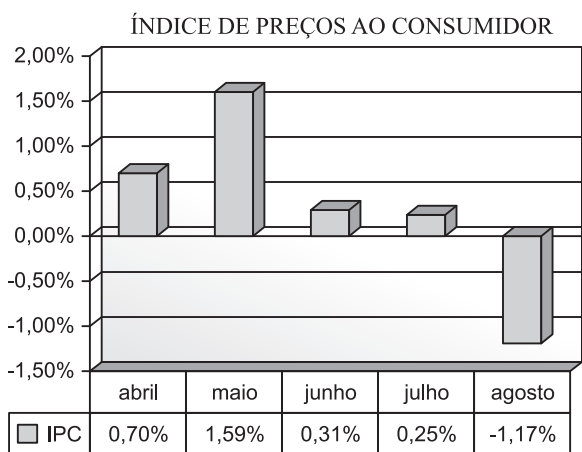
14. (FGV) – Observe as alturas de 10 crianças nascidas num mesmo dia, numa maternidade.

Criança	Altura (cm)
Mariana	52
Jorge	48
Paulo	51
Mário	47
Tarsila	47
Priscila	51
Silvana	53
Alberto	47
Vítor	47
Ricardo	48

- Elabore um gráfico de colunas que descreva a frequência das alturas dos recém-nascidos da tabela.
- Calcule e interprete o percentual que a diferença entre as alturas médias das meninas e dos meninos representa em relação à altura média dos meninos.

15. (FUVEST) – O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

16. (UFPE) – O gráfico a seguir ilustra a variação do IPC, Índice de Preços ao Consumidor, no Recife, de abril a agosto de 2005.



Qual a média do IPC nestes cinco meses? (Aproxime sua resposta até os décimos.)

- 0,1%
- 0,2%
- 0,3%
- 0,4%
- 0,5%

## Módulos 56 e 57 – Noções de Estatística

1. (UFSF) – Um professor de Física aplicou uma prova, valendo 100 pontos, em seus 22 alunos e obteve, como

resultado, distribuição das notas vista no quadro seguinte:

40	20	10	20	70	60
90	80	30	50	50	70
50	20	50	50	10	40
30	20	60	60		

Faça os seguintes tratamentos de dados solicitados:

- Determine a frequência relativa da moda.
- Esboce um gráfico com as frequências absolutas de todas as notas.
- Determine a mediana dos valores da segunda linha do quadro apresentado.

2. (UEMS) – Os salários dos funcionários de uma empresa X estão dispostos na tabela abaixo:

Salário em (R\$)	Número de funcionários da empresa X
300,00	20
500,00	15
700,00	17
1000,00	10
1500,00	8
2000,00	5
2500,00	3
3000,00	2
<b>Total</b>	<b>80</b>

Pode-se afirmar que a média ponderada dos salários da empresa X é de:

- R\$ 1437,50
- R\$ 1200,50
- R\$ 1024,25
- R\$ 925,25
- R\$ 886,25

3. (ESPM) – As notas da prova de Matemática numa classe foram distribuídas da seguinte forma:

Notas	Número de Alunos
De zero até 5	12
Acima de 5, até 7	20
Acima de 7, até 10	08

A média aritmética dessa distribuição é:

- 5,15
- 5,45
- 5,75
- 6,00
- 6,15

4. (UEMT) – João, Marcos, Maria e Juliana realizaram um concurso. A prova abrangia três áreas: Matemática, Língua Portuguesa e História. Cada prova equivalia de 0 (zero) a 10 (dez), sendo que a média final, foi calculada através da média ponderada, que foi dada de acordo com as tabelas abaixo:

Nome/nota	Mat.	Port.	Hist.
João	8,00	6,50	4,00
Marcos	7,00	6,50	8,00
Maria	4,00	7,00	10,00
Juliana	2,00	9,00	9,00

	Peso
Matemática	5
Português	4
História	3

Sendo a média de aprovação igual a sete (7,00) pode-se afirmar que:

- todos foram aprovados no concurso.
- ninguém foi aprovado no concurso.
- somente os homens foram aprovados no concurso.
- somente as mulheres foram aprovadas no concurso.
- João e Maria tiveram a mesma nota final, porém somente Marcos foi aprovado no concurso.

5. (UF-SE) – Para analisar as afirmativas 3 3 e 4 4, considere a tabela abaixo, que mostra a distribuição da arrecadação de certo imposto em um determinado município, em 2001.

Classe	Valor da arrecadação individual, em reais	Número de contribuintes	Valor total arrecadado, em reais
1	0 – 10	600	4 800
2	10 – 20	310	4 500
3	20 – 30	80	2 000
4	30 – 40	10	350

- 3 3 – O valor médio individual arrecadado foi R\$ 11,65,  
 4 4 – O valor médio individual pago pelos contribuintes da classe 1 foi menor do que R\$ 6,00.

6. Dada a distribuição

$x_i$	20	30	40	50	60
$f_i$	2	3	1	3	1

obtenha:

- a média
- o desvio médio
- a variância
- o desvio padrão

## Módulo 58 – Grandezas Proporcionais

1. Dois números estão na razão de 2 para 3. Acrescentando-se 2 a cada um, as somas estão na razão de 3 para 5. Então, o produto dos dois números é:

- 90
- 96
- 180
- 72
- 124

2. (PUC) – Se (2; 3; x; ...) e (8; y; 4; ...) forem duas sucessões de números diretamente proporcionais, então:

- $x = 1$  e  $y = 6$
- $x = 2$  e  $y = 12$
- $x = 1$  e  $y = 12$
- $x = 4$  e  $y = 2$
- $x = 8$  e  $y = 12$

3. As sequências (a; 2; 5; ...) e (3; 6; b; ...) são de números inversamente proporcionais e  $a + mb = 10$ . O valor de m é:

- 0,4
- 1
- 2
- 2,5
- 5

4. Sabe-se que p é inversamente proporcional a q + 2 e que p = 1 quando q = 4. Quando q for igual a 1, teremos p igual a:

- 2
- 0
- $\frac{1}{2}$
- 2
- 3

5. (FUVEST) – São dados três números reais,  $a < b < c$ . Sabe-se que o maior deles é a soma dos outros dois e o menor é um quarto do maior. Então a, b e c são, respectivamente, proporcionais a:

- 1, 2 e 3
- 1, 2 e 5
- 1, 3 e 4
- 1, 3 e 6
- 1, 5 e 12

6. (MACKENZIE) – Dividindo-se 70 em partes proporcionais a 2, 3 e 5, a soma entre a menor e a maior parte é:

- 35
- 49
- 56
- 42
- 28

7. Dividir 64 em duas partes inversamente proporcionais aos

números  $\frac{5}{4}$  e  $\frac{3}{4}$ .

8. A importância de R\$ 780 000,00 deve ser dividida entre os três primeiros colocados de um concurso, em partes diretamente proporcionais aos pontos conseguidos por eles, que são 50, 43 e 37, respectivamente. Determinar a importância que caberá a cada um.

9. (UNICAMP) – A quantia de R\$ 1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

- A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
- A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

## Módulo 59 – Regra de Três

1. (UFRN) – Uma gravura de forma retangular, medindo 20 cm de largura por 35 cm de comprimento, deve ser ampliada para 1,2 m de largura. O comprimento correspondente será:

- 0,685 m
- 1,35 m
- 2,1 m
- 6,85 m
- 18 m

2. Uma máquina varredeira limpa uma área de 5100m<sup>2</sup> em 3 horas de trabalho. Nas mesmas condições, em quanto tempo limpará uma área de 11900m<sup>2</sup>?

- 7 horas
- 5 horas
- 9 horas
- 4 horas

3. Quatorze pedreiros levam 180 dias para construir uma casa. Quanto tempo levarão 10 pedreiros para construir a mesma casa?

4. Um automóvel com a velocidade de 60km/h faz o percurso entre as cidades A e B, em 2 horas. Quanto tempo levará se fizer o mesmo percurso a uma velocidade de 80km/h?

5. O eixo de um motor dá **2376 voltas** em **9 minutos**. Quantas voltas dará em **1h 27min**?

6. Num acampamento avançado, **30** soldados dispõem de víveres para **60** dias. Se mais **90** soldados chegam ao acampamento, então, por quanto tempo o acampamento estará abastecido?

7. (FAAP) – Uma impressora a laser, funcionando **6** horas por dia, durante **30** dias, produz **150 000** impressões. Em quantos dias **3** dessas mesmas impressoras, funcionando **8** horas por dia, produzirão **100 000** impressões?

a) 20      b) 15      c) 12      d) 10      e) 5

8. (PUCAMP) – Sabe-se que **5** máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir **500** peças em **5** dias, se operarem **5** horas por dia. Se **10** máquinas iguais às primeiras operassem **10** horas por dia, durante **10** dias, o número de peças produzidas seria de:

a) 1 000      b) 2 000      c) 4 000      d) 5 000      e) 8 000

9. Uma destilaria abastece **35** bares, dando a cada um deles **12** litros por dia, durante **30** dias. Se os bares fossem **20** e se cada um deles recebesse **15** litros, durante quantos dias a destilaria poderia abastecê-los?

10. (UnB) – Com **16** máquinas de costura aprontaram-se **720** uniformes em **6** dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar **2160** uniformes em **24** dias?

11. Se **54** jardineiros trabalhando **5** horas por dia levaram **45** dias para arborizar um parque de forma retangular de **2,25km** de comprimento por **1,50km** de largura, quantos jardineiros serão necessários para arborizar em **18** dias, trabalhando **12** horas por dia, outro parque retangular de **1,95km** de comprimento por **1,20km** de largura?

12. (MACKENZIE) – A água de um reservatório é drenada por meio de 2 encanamentos, ligados a diferentes bombas. O volume de água drenada pelo primeiro encanamento é de 30 litros por minuto e pelo segundo encanamento é de 70 litros por minuto. A quantidade de água, em litros, drenada do reservatório por um período de 12 horas é

a) 56.600      b) 70.000      c) 42.000  
d) 72.000      e) 82.400

## Módulo 60 – Porcentagem e Juros

1. (UFRN) **25%** da **terça parte** de **1026** é igual a:

a) 7695      b) 855      c) 769,5      d) 94,5      e) 85,5

2. (PUC) – Uma certa mercadoria, que custava **R\$ 12,50**, teve um aumento, passando a custar **R\$ 14,50**. A taxa de reajuste sobre o preço antigo é de:

a) 2,0%      b) 20,0%      c) 12,5%  
d) 11,6%      e) 16,0%

3. Em uma promoção numa revenda de carros, está sendo dado um desconto de **18%** para pagamento à vista. Se um carro é anunciado por **R\$ 16.000,00**, então o preço para pagamento à

vista desse carro será:

a) R\$ 13.120,00      b) R\$ 13.220,00      c) R\$ 13.320,00  
d) R\$ 13.420,00      e) R\$ 13.520,00

4. Durante uma promoção de alimento mais barato, a empresa **Brasilarroz**, que vendia arroz em pacotes, passou a colocar **15%** a mais de arroz em cada pacote, mantendo o mesmo preço cobrado anteriormente. O preço do arroz foi reduzido (em porcentagem), aproximadamente, em:

a) 9%      b) 11%      c) 13%      d) 15%      e) 17%

5. (PUC) – Uma cooperativa compra a produção de pequenos horticultores, revendendo-a para atacadistas com um lucro de **50%** em média. Estes repassam o produto para os feirantes, com um lucro de **50%** em média. Os feirantes vendem o produto para o consumidor e lucram, também, **50%** em média. O preço pago pelo consumidor tem um acréscimo médio, em relação ao preço dos horticultores, de:

a) 150,0%      b) 187,0%      c) 237,5%  
d) 285,5%      e) 350,0%

6. Um vendedor ambulante vende seus produtos com um lucro de **50%** sobre o **preço de venda**. Então, seu lucro sobre o **preço de custo** é de:

a) 10%      b) 25%      c) 33,333...%      d) 100%      e) 120%

7. (FUVEST) – Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo **44%** superior ao preço de custo. Porém ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando **80%** ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?

a) 10%      b) 15%      c) 20%      d) 25%      e) 36%

8. (FUVEST) – Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de **30%**. Em função disso, o seu preço para o importador é de **R\$ 19.500,00**. Supondo que tal imposto passe de **30%** para **60%**, qual será, em reais, o novo preço do carro, para o importador?

a) R\$ 22.500,00      b) R\$ 24.000,00      c) R\$ 25.350,00  
d) R\$ 31.200,00      e) R\$ 39.000,00

9. Certa liga contém **20%** de cobre e **5%** de estanho. Quantos quilos de cobre e quantos quilos de estanho devem ser adicionados a **100** quilos dessa liga para a obtenção de uma outra com **30%** de cobre e **10%** de estanho? (todas as porcentagens são em kg).

a) 18kg de cobre e 6kg de estanho;  
b) 17,50kg de cobre e 7,5kg de estanho;  
c) 18kg de cobre e 7,5kg de estanho;  
d) 17,50kg de cobre e 7,8kg de estanho;  
e) 7,8kg de cobre e 17,50kg de estanho.

10. (FUVEST) – O valor, em reais, de uma pedra semipreciosa é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa, em gramas. Infelizmente uma dessas pedras, de **8** gramas, caiu e se partiu em dois pedaços. O prejuízo foi o maior possível. Em relação ao valor original, o prejuízo foi de

a) 92%      b) 80%      c) 50%      d) 20%      e) 18%

11. (ESAPP) – Um certo capital de R\$ 3.000,00 é aplicado a juros compostos durante 15 meses a uma taxa de 2% ao mês. Após esse período, o montante a ser resgatado será de:

Dados:  $\log 1,02 = 0,0086$

$\log 1,346 = 0,1290$

- a) R\$ 5.000,00      b) R\$ 4.800,00      c) R\$ 4.600,00  
d) R\$ 4.038,00      e) R\$ 5.200,00

12. (MACKENZIE) – Recentemente o governo autorizou um aumento de 10% no preço da gasolina e, logo em seguida, um aumento de 8% no preço do álcool. Como, na composição da gasolina, o álcool contribui com 25%, o preço da gasolina teve, então, um novo reajuste correspondente ao aumento do preço do álcool. O aumento da gasolina, levando em conta os dois reajustes, foi de

- a) 11,3%      b) 10,25%      c) 12,2%  
d) 11,5%      e) 10,08%

13. (MACKENZIE) – Um produto, que foi colocado à venda pelo mesmo preço nas lojas A e B, sofreu, durante três meses, as seguintes variações acumulativas de preço:

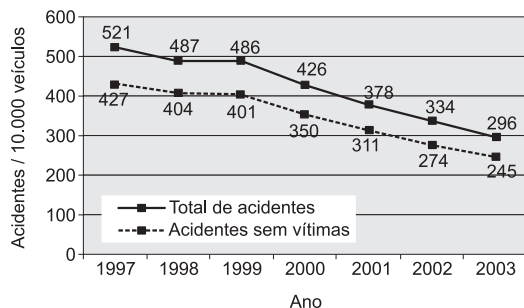
Loja	1º mês	2º Mês	3º mês
A	Aumento de 20%	Aumento de 10%	Desconto de 25%
B	Desconto de 15%	Aumento de 20%	Sem reajuste

Dessa forma, após três meses, o preço do produto

- a) é maior na loja A.  
b) é maior na loja B.  
c) aumentou exatamente 5% nas duas lojas.  
d) aumentou exatamente 2% nas duas lojas.  
e) diminuiu exatamente 1% nas duas lojas.

14. (UNICAMP) – O gráfico abaixo mostra o total de acidentes de trânsito na cidade de Campinas e o total de acidentes sem vítimas, por 10.000 veículos, no período entre 1997 e 2003. Sabe-se que a frota da cidade de Campinas era composta por 500.000 veículos em 2003 e era 4% menor em 2002.

- a) Calcule o número total de acidentes de trânsito ocorridos em Campinas em 2003.  
b) Calcule o número de acidentes **com vítimas** ocorridos em Campinas em 2002.



Adaptado de: Sumário Estatístico da Circulação em Campinas 2002-2003. Campinas, EMDEC, 2004, p.12.

15. (UNICAMP) – A cidade de Campinas tem 1 milhão de habitantes e estima-se que 4% de sua população viva em domicílios inadequados. Supondo-se que, em média, cada domicílio tem 4 moradores, pergunta-se:

- a) Quantos domicílios com condições adequadas tem a cidade de Campinas?  
b) Se a população da cidade crescer 10% nos próximos 10 anos, quantos domicílios deverão ser construídos por ano para que todos os habitantes tenham uma moradia adequada ao final desse período de 10 anos? Suponha ainda 4 moradores por domicílio, em média.

16. (FATEC) – “Numa das áreas residenciais mais ricas do País, o Lago Sul, o consumo diário de água é equivalente a 825 litros por pessoa, e numa área pobre próxima da cidade, o Riacho Fundo, cada habitante consome diariamente 110 litros de água. O consumo no Lago Sul é igual a 5,5 vezes o recomendado por organismos internacionais”.

Adaptado: O Estado de S. Paulo – Cidades/Metrópole – p.C4 – 5.09.2005

Nessas condições, é verdade que o consumo diário por pessoa

- a) no Riacho Fundo é menor do que  $\frac{1}{8}$  do consumo no Lago Sul.  
b) recomendado por organismos internacionais é de 140 litros.  
c) no Lago Sul ultrapassa o recomendado por organismos internacionais em 450%.  
d) no Riacho Fundo é inferior ao recomendado por organismos internacionais em 25%.  
e) no Lago Sul é igual a 650% do consumo no Riacho Fundo.

17. (UNESP) – Mário tomou um empréstimo de R\$ 8.000,00 a juros de 5% ao mês. Dois meses depois, Mário pagou R\$ 5.000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou todo o seu débito. O valor do último pagamento foi de:

- a) R\$ 3.015,00.      b) R\$ 3.820,00.      c) R\$ 4.011,00.  
d) R\$ 5.011,00.      e) R\$ 5.250,00.

18. (UNESP) – Uma loja vende um produto no valor de R\$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em duas prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juros embutida na venda a prazo é de

- a) 5%.      b) 10%.      c) 20%.      d) 25%.      e) 90%.

19. (UNESP) – Seja  $V_0$  o volume inicial de um líquido volátil, o qual diminui à taxa de 20% por hora.

- a) Encontre a equação do volume  $V$  do líquido em função do tempo.  
b) Determine o valor aproximado do tempo em que o volume se reduz à metade (dado:  $\log_{10} 2 = 0,301$ ).

20. (UNESP) – Pela legislação, a porcentagem máxima permitida de álcool na mistura combustível dos carros a gasolina é de 25%. O reservatório de um posto de abastecimento de veículos, examinado pela fiscalização, apresentou 40% de álcool na mistura combustível. Em relação à quantidade de gasolina presente na mistura, a porcentagem que a mesma deve ser aumentada de forma que a porcentagem de álcool presente atinja o limite de 25% é

- a) 15%.      b) 20%.      c) 50%.      d) 75%.      e) 100%.



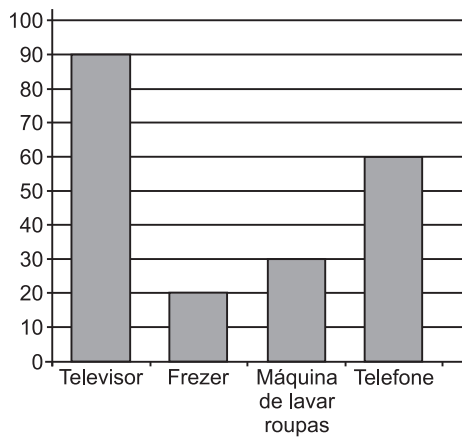
21. (UNESP) – Um industrial produziu 1 000 peças de um produto manufaturado ao custo unitário de 200 reais. Vendeu 200 dessas peças com um lucro de 30%. O industrial deseja obter um lucro de 40% com a venda das 1 000 peças produzidas. Nestas condições,

- determine quanto lucrôu o industrial, em reais, com a venda das 200 peças;
- encontre o preço que deve ser vendida cada uma das 800 peças restantes para que o industrial obtenha o lucro desejado.

22. (UNESP) – Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado durante 4 meses.

- Encontre o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros simples de 10% ao mês.
- Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros compostos de 10% ao mês.

23. (UNESP) – O gráfico mostra, aproximadamente, a porcentagem de domicílios no Brasil que possuem certos bens de consumo. Sabe-se que o Brasil possui aproximadamente 50 milhões de domicílios, sendo 85% na zona urbana e 15% na zona rural.



(IBGE)

Admita que a distribuição percentual dos bens, dada pelo gráfico, mantenha a proporcionalidade nas zonas urbana e rural.

- Escrevendo todos os cálculos efetuados, determine o número de domicílios da zona rural e, dentre esses, quantos têm máquina de lavar roupas e quantos têm televisor, separadamente.
- Considere os eventos T: o domicílio tem telefone e F: o domicílio tem freezer. Supondo independência entre esses dois eventos, calcule a probabilidade de ocorrer T ou F, isto é, calcule  $P(T \cup F)$ . Com base no resultado obtido, calcule quantos domicílios da zona urbana têm telefone ou freezer.

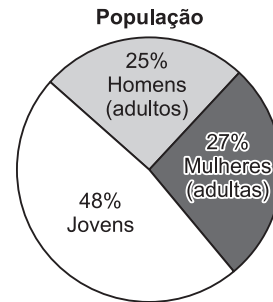
24. (FGV) – O gerente de uma loja aumentou o preço de um artigo em 25%. Decorrido um certo tempo, ele percebeu que não foi vendida 1 unidade sequer desse artigo. Resolveu, então, anunciar um desconto de tal modo que o preço voltasse a ser igual ao anterior. O desconto anunciado foi de

- 20%.    b) 22%.    c) 25%.    d) 28%.    e) 30%.

25. (FUVEST) – Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

- 20%    b) 22%    c) 24%    d) 26%    e) 28%

26. (FUVEST) – Um recenseamento revelou as seguintes características sobre a idade e a escolaridade da população de uma cidade.



Escolaridade	Jovens	Mulheres	Homens
Fundamental incompleto	30%	15%	18%
Fundamental completo	20%	30%	28%
Médio incompleto	26%	20%	16%
Médio completo	18%	28%	28%
Superior incompleto	4%	4%	5%
Superior completo	2%	3%	5%

Se for sorteada, ao acaso, uma pessoa da cidade, a probabilidade de esta pessoa ter curso superior (completo ou incompleto) é

- 6,12%    b) 7,27%    c) 8,45%
- 9,57%    e) 10,23%

27. (FUVEST) – João, Maria e Antônia tinham, juntos, R\$ 100.000,00. Cada um deles investiu sua parte por um ano, com juros de 10% ao ano. Depois de creditados seus juros no final desse ano, Antônia passou a ter R\$ 11.000,00 mais o dobro do novo capital de João. No ano seguinte, os três reinvestiram seus capitais, ainda com juros de 10% ao ano. Depois de creditados os juros de cada um no final desse segundo ano, o novo capital de Antônia era igual à soma dos novos capitais de Maria e João. Qual era o capital inicial de João?

- R\$ 20.000,00    b) R\$ 22.000,00
- R\$ 24.000,00    d) R\$ 26.000,00
- R\$ 28.000,00

28. (UNIFESP) – André aplicou parte de seus R\$ 10.000,00 a 1,6% ao mês, e o restante a 2% ao mês. No final de um mês, recebeu um total de R\$ 194,00 de juros das duas aplicações. O valor absoluto da diferença entre os valores aplicados a 1,6% e a 2% é

- R\$ 4.000,00.    b) R\$ 5.000,00.    c) R\$ 6.000,00.
- R\$ 7.000,00.    e) R\$ 8.000,00.



29. (UFPE) – Se, no primeiro semestre de 2004, com a cobrança de tarifas, os bancos arrecadaram um total de 16 bilhões de reais e, no primeiro semestre de 2005, este valor subiu para 19,6 bilhões de reais, qual o crescimento percentual do valor obtido pelos bancos com a cobrança de tarifas neste período?

- a) 22,5%                      b) 23,4%                      c) 24,3%  
d) 25,2%                      e) 26,1%

30. (UFPE) – Uma fábrica aumentará o preço do quilo de certo produto de 15%, mas diminuirá o peso das embalagens em que o produto é comercializado, de maneira que o preço da nova embalagem permaneça o mesmo da anterior. De qual percentual deve ser diminuído o peso da embalagem? (Indique o inteiro mais próximo do valor obtido.)

- a) 15%    b) 14%    c) 13%    d) 12%    e) 11%

31. (MACKENZIE) – Numa loja, uma caixa com 5 barras de chocolate está à venda com a inscrição “Leve 5, pague 4”. O desconto aplicado ao preço de cada barra corresponde, em porcentagem, a

- a) 8                      b) 10                      c) 12,5                      d) 20                      e) 25

32. (UNICAMP) – São conhecidos os valores calóricos dos seguintes alimentos: uma fatia de pão integral, 55 kcal; um litro de leite, 550 kcal; 200 g de manteiga, 1.400 kcal; 1 kg de queijo, 3.200 kcal; uma banana, 80 kcal.

a) Qual o valor calórico de uma refeição composta por duas fatias de pão integral, um copo de 200 ml de leite, 10 g de manteiga, 4 fatias de queijo, de 10 g cada uma, e duas bananas?

b) Um copo de leite integral contém 248 mg de cálcio, o que representa 31% do valor diário de cálcio recomendado. Qual é esse valor recomendado?

33. (FGV) – Em uma pesquisa de opinião sobre um projeto de lei, uma amostra de adultos de uma cidade revelou que:

- 360 eram a favor da lei.
- 480 eram contra a lei.
- 44% dos entrevistados não tinham opinião formada.

A porcentagem de adultos favoráveis à lei, em relação ao total de entrevistados, foi:

- a) 21%                      b) 22%                      c) 24%  
d) 23%                      e) 25%

34. (FGV) – Um supermercado passou a vender certo produto com 10% de desconto; nessas condições, sua margem de contribuição é igual a 35% do custo. Comumente, chama-se “margem de contribuição” à diferença entre o preço da venda do produto e o valor (custo) pago pelo supermercado pelo produto. Podemos afirmar que a margem de contribuição em relação ao custo antes do desconto era:

- a) 45%                      b) 47,5%                      c) 55%  
d) 50%                      e) 52,5%

35. (UFPE) – Segundo pesquisa recente, 7% da população brasileira é analfabeta, e 64% da população de analfabetos é do sexo masculino. Qual percentual da população brasileira é formada por analfabetos do sexo feminino?

- a) 2,52%                      b) 5,20%                      c) 3,60%  
d) 4,48%                      e) 3,20%

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**Módulo 25 – Propriedades da Matriz Inversa e Equações Matriciais**

1. O determinante da matriz inversa de A é igual a  $\frac{1}{2}$ . Se

$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ , então  $\log_2 x$  é igual a:

- a) 1      b) 3      c) 4      d) 5      e) 6

**Resolução**

$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{5x - 8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x - 8 = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Assim,  $\log_2 x = \log_2 2 = 1$

**Resposta: A**

2. (UNESP) – Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 3.

Se  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  e B é tal que  $B^{-1} = 2A$ , o deter-

minante de B será:

- a) 24      b) 6      c) 3      d) 1/6      e) 1/24

**Resolução**

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$\det B^{-1} = \det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot 3 = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det B = \frac{1}{\det B^{-1}} = \frac{1}{24}$

**Resposta: E**

**Módulo 26 – Sistema Normal, Regra de Cramer e Escalonamento**

3. Resolver o sistema  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$  pela Regra de

Cramer.

**Resolução**

a) O sistema é normal e pode ser resolvido pela Regra de Cramer, pois

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow D \neq 0$

b)  $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$

c)  $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$

d)  $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$

**Resposta: (1; 2; 3)**

4. (U.F.Ouro preto) – Considere o seguinte sistema linear:

$\begin{cases} mx + 3y - z = 2 \\ x + my + 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Os valores de m para os quais a solução seja única são:

- a)  $m = -2$  ou  $m = 5$       b)  $m = 2$  ou  $m = -5$   
c)  $m \neq -2$  e  $m \neq 5$       d)  $m \neq 2$  e  $m \neq -5$

**Resolução**

Para que o sistema tenha solução única (SPD) devemos ter:

$D = \begin{vmatrix} m & 3 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m + 10 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5 \text{ e } m \neq -2$

**Respostas: C**

**Módulo 27 – Escalonamento (Método de Gauss)**

5. (U.F.T.PR) – Uma agência de turismo apresenta as seguintes opções para um pacote turístico:

- I) 5 diárias e 3 passeios por R\$ 480,00.  
II) 5 diárias e 4 almoços por R\$ 435,00.  
III) 4 almoços e 3 passeios por R\$ 165,00.

Considerando que os preços das diárias, passeios e almoços não se alteram, podemos afirmar que:

- a) cada um deles custa menos que R\$ 60,00;  
b) dois deles custam mais que R\$ 45,00.  
c) o passeio é o mais caro de todos.  
d) o preço de cada passeio é o dobro do preço de cada almoço.  
e) o preço de cada diária é mais caro que um passeio e um almoço juntos.

**Resolução**

Sejam d, p e a, respectivamente, os preços de cada diária, de cada passeio e de cada almoço. Temos em reais:

$\begin{cases} 5d + 3p = 480 \\ 5d + 4a = 435 \\ 4a + 3p = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d + 3p = 480 \\ 3p - 4a = 45 \\ 4a + 3p = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d + 3p = 480 \\ 4a + 3p = 165 \\ 6p = 210 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5d + 3p = 480 \\ 4a + 3p = 165 \\ p = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 35 \\ a = 15 \\ d = 75 \end{cases}$$

**Resposta: E**

6. (UNESP) – Uma lapiseira, três cadernos e uma caneta custam, juntos, 33 reais. Duas lapiseiras, sete cadernos e duas canetas custam, juntos, 76 reais. O custo de uma lapiseira, um caderno e uma caneta, juntos, em reais, é:

- a) 11.    b) 12.    c) 13.    d) 17.    e) 38.

**Resolução**

Seja x, y e z, respectivamente, os custos de uma lapiseira, um caderno e uma caneta, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 33 \\ 2x + 7y + 2z = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 15y + 5z = 165 \\ 4x + 14y + 4z = 152 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = 165 - 152 = 13$$

**Resposta: C**

## Módulo 28 – Característica de uma Matriz e Teorema de Rouché-Capelli

7. A característica da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 0 & a+3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  é igual a:

- a) 3, se  $a = 3$                       b) 2, se  $a \Rightarrow 3$   
c) 1, qualquer que seja a      d) 3, se  $a = 5$   
e) 2, se  $a = 4$

**Resolução**

A característica da matriz dada é a mesma da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7a - 21$ , tem-se que:

Se  $a = 3$  a característica é 2, pois  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Se  $a \Rightarrow 3$  a característica é 3.

**Resposta: D**

8. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 22 \end{cases}$$

- a) é impossível.  
b) admite uma única solução.  
c) admite infinitas soluções do tipo  $(-2 + \alpha; 12 - 2\alpha; \alpha)$ .  
d) admite infinitas soluções do tipo  $(3 + \alpha; 5 - 2\alpha; 2 + \alpha)$ .  
e) é tal que x, y e z são números primos.

**Resolução**

$$MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{p=2}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 22 \end{bmatrix}_{q=2}$$

Como  $p = q = 2 < 3$ , o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo  $z = \alpha$  tem-se

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 10 \\ x + 2y + 3\alpha = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 - \alpha \\ x + 2y = 22 - 3\alpha \end{cases} \Rightarrow y = 12 - 2\alpha \text{ e } x = -2 + \alpha.$$

O conjunto-solução é  $V = \{(-2 + \alpha; 12 - 2\alpha; \alpha), \forall \alpha\}$

Observe que  $(3 + \alpha; 5 - 2\alpha; 2 + \alpha)$  não é solução para todo  $\alpha$ , pois  $x + 2y + 3z = (3 + \alpha) + 2 \cdot (5 - 2\alpha) + 3 \cdot (2 + \alpha) = 19 \neq 22$

**Resposta: C**

## Módulo 29 – Discussão de Sistemas Lineares

9. (FGV) – Sendo n um número real, então o sistema de

equações  $\begin{cases} nx + y = 1 \\ ny + z = 1 \\ x + nz = 1 \end{cases}$  **não** possui solução se, e somente se, n

é igual a

- a) -1.    b) 0.    c)  $\frac{1}{4}$ .    d)  $\frac{1}{2}$ .    e) 1.

**Resolução**

I)  $\begin{vmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow n^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow n = -1$

II) Sendo p e q, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa do sistema, temos, para  $n = -1$ ,  $p = 2$  e  $q = 3$  e, portanto, o sistema é impossível.

**Resposta: A**

10. (U.F.Triângulo Mineiro) – Considere o sistema linear, descrito na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ele admitirá mais de uma solução para certos valores de k. O produto desses valores de k é

- a) -49.    b) -36.    c) -25.    d) -16.    e) -9.

**Resolução**

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7x + 11y \\ -3x - 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 11y = kx \\ -3x - 7y = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7 - k)x + 11y = 0 \\ -3x - (7 + k)y = 0 \end{cases}$$

O sistema admite mais do que uma solução se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} (7 - k) & 11 \\ -3 & -(7 + k) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(7 - k)(7 + k) + 33 = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = \pm 4$$

Para  $k = 4$  temos o sistema

$$\begin{cases} 3x + 11y = 0 \\ -3x - 11y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 11y = 0$$

Para  $k = -4$  temos o sistema

$$\begin{cases} 11x + 11y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$

Ambos são possíveis e indeterminados.

O produto dos valores de k é  $(-4) \cdot 4 = -16$

**Resposta: D**

## Módulo 30 – Sistema Linear Homogêneo

11. O sistema  $\begin{cases} mx + 2y = 0 \\ 3mx + my = 0 \end{cases}$

- a) é impossível, qualquer que seja o valor de  $m$ .  
 b) tem solução única, se  $m = 0$ .  
 c) tem infinitas soluções para  $m = 3$ .  
 d) tem solução única para  $m = 4$ .  
 e) é possível e determinado para  $m = 6$ .

### Resolução

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 3m & m \end{vmatrix} = m^2 - 6m = m(m - 6)$$

Para  $m = 0$  ou  $m = 6$ ,  $D = 0$  e o sistema é possível e indeterminado (tem infinitas soluções).

Para  $m \neq 0$  e  $m \neq 6$ ,  $D \neq 0$  e o sistema é possível e determinado (tem solução única).

Como  $m = 4 \neq 0$  e  $m = 4 \neq 6$ , para  $m = 4$  o sistema tem solução única.

**Resposta: D**

12. Considere o sistema

$$\begin{cases} 3c + 2d = v \\ 2c + d = v \\ 5c + 3d = 2v \end{cases} \text{ nas incógnitas } c, d \text{ e } v \text{ e o seguinte problema:}$$

“Antonio tem várias moedas de cinco, dez e vinte e cinco centavos, em quantidades não nulas. O triplo da quantidade de

moedas de cinco acrescido do dobro da quantidade de moedas de dez, resulta na quantidade de moedas de vinte e cinco. O dobro do número de moedas de cinco acrescido do número de moedas de dez resulta na quantidade de moedas de vinte e cinco. O quintuplo da quantidade de moedas de cinco mais o triplo da quantidade de moedas de dez resulta no dobro do número de moedas de vinte e cinco.” Mostre que o sistema tem infinitas soluções, mas o problema não tem solução.

### Resolução

$$\begin{cases} 3c + 2d = v \\ 2c + d = v \\ 5c + 3d = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c + 2d - v = 0 \\ 2c + d - v = 0 \\ 5c + 3d - 2v = 0 \end{cases}$$

O sistema é homogêneo e

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ portanto, é possível e indeterminado.}$$

Têm infinitas soluções.

Observe ainda que

$$\begin{cases} 3c + 2d = v \\ 2c + d = v \\ 5c + 3d = 2v \end{cases} \Rightarrow 3c + 2d = 2c + d \Leftrightarrow c = -d \text{ o que}$$

significa que as quantidades de moedas de cinco e dez centavos têm sinais contrários, impossível em se tratando de quantidades de moedas.

## EXERCÍCIOS-TAREFA

### Módulo 25 – Propriedades da Matriz Inversa e Equações Matriciais

1. (PUCCAMP) – São dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ . Se  $A \cdot B^{-1} = C$ , o determinante de  $A - B + C$  é

igual a:

- a) 24      b) 20      c) 18      d) 15      e) 12

2. (PUC) – Sendo  $A$  e  $B$  matrizes inversíveis de mesma ordem e  $X$  uma matriz tal que  $(X \cdot A)^t = B$ , então:

- a)  $X = A^{-1} \cdot B^t$       b)  $X = B^t \cdot A^{-1}$       c)  $X = (B \cdot A)^t$   
 d)  $X = (AB)^t$       e)  $X = A^t \cdot B^{-1}$

3. (ITA) – Sejam  $A, B, C$  matrizes reais  $3 \times 3$ , satisfazendo às seguintes relações:  $AB = C^{-1}$ ,  $B = 2A$ . Se o determinante de  $C$  é  $32$ , qual o valor do módulo do determinante de  $A$ ?

- a)  $\frac{1}{16}$       b)  $\frac{1}{8}$       c)  $\frac{1}{4}$       d) 8      e) 4

4. (MACKENZIE) – Dados  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{e } B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{pmatrix}.$$

Os valores de  $a$  e  $b$ , tais que  $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ , são respectivamente:

- a) 24 e -11      b) 18 e 53      c) -19 e 17  
 d) 33 e -47      e) 35 e 2

5. (ITA) – Sejam as matrizes reais de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da diagonal principal de  $(AB)^{-1}$  é igual a:

- a)  $a + 1$       b)  $4(a + 1)$   
 c)  $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$       d)  $\frac{1}{4}(1 + 2a + a^2)$   
 e)  $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$

6. (ITA) – Sejam  $A$  e  $B$  matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz  $M$  inversível tal que:  $A = M^{-1}BM$

Então:

- a)  $\det(-A^t) = \det B$       b)  $\det A = -\det B$   
 c)  $\det(2A) = 2 \det B$       d) Se  $\det B \neq 0$  então  $\det(-AB) < 0$   
 e)  $\det(A - I) = -\det(I - B)$

7. (FUVEST) – Se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ são tais que } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \text{ pode-se}$$

afirmar que:

- a) A é inversível      b)  $\det A = 0$       c)  $b = 0$   
 d)  $c = 0$       e)  $a = d = 1$

8. (ITA) – Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se  $x$  e  $y$  são soluções do sistema  $(A A^t - 3I) X = B$ , então  $x + y$  é igual a:

- a) 2      b) 1      c) 0      d) -1      e) -2

9. (UNICAMP) – Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule o determinante de  $M$  e a matriz inversa de  $M$ .  
 b) Resolva o sistema  $MX = Y$ .

## Módulo 26 – Sistema Normal, Regra de Cramer e Escalonamento

1. Resolver, aplicando a Regra de Cramer, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

2. (UESPI) – Se o terno  $(x_0, y_0, z_0)$  é a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2, \text{ então } 3x_0 + 5y_0 + 4z_0 \text{ é igual a:} \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

- a) -8      b) -7      c) -6      d) -5      e) -4

3. (UFG) – Os valores de  $x, y$  e  $z$  nesta ordem, tais que

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}, \text{ são:}$$

- a)  $\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}$  e  $\frac{4}{3}$       b)  $\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}$  e  $\frac{7}{3}$       c)  $\frac{7}{3}; \frac{4}{3}$  e  $-\frac{5}{3}$   
 d)  $\frac{4}{3}; \frac{7}{3}$  e  $-\frac{5}{3}$       e)  $\frac{5}{3}; \frac{4}{3}$  e  $\frac{7}{3}$

4. (FUVEST) – Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = -2m \\ x - y - 2z = 2m \\ 2x + y - 2z = 3m + 5 \end{cases}$$

Para cada valor de  $m$ , determine a solução  $(x_m, y_m, z_m)$  do sistema.

5. O valor de  $z$  no sistema  $\begin{cases} ax + y + a^2z = a^2 \\ bx + y + b^2z = b^2 \\ cx + y + c^2z = c^2 \end{cases}$ , sabendo-se que  $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ , é:

- a)  $abc$       b)  $ab + ac + bc$       c)  $a + b + c$   
 d)  $a^3$       e) 1

6. Se o sistema  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 13 \\ 3x + y + 2z = 13 \\ 4x + 3y + az = 14 \end{cases}$  tem uma única solução,

então:

- a)  $a = 1$       b)  $a \neq 1$       c)  $a = 5$   
 d)  $a \neq 5$       e)  $a \neq 4$

7. Resolver o sistema do exercício anterior para  $a = 1$ .

8. (ITA) – Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  com  $a^2 = b^2 + c^2$ . Se  $x, y$  e  $z$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} c \cos y + b \cos z = a \\ c \cos x + a \cos z = b, \text{ então } \cos x + \cos y + \cos z \text{ é igual a:} \\ b \cos x + a \cos y = c \end{cases}$$

- a)  $(a - b)/c$       b)  $(a + b)/c$       c)  $(b + c)/a$   
 d)  $(c + a)/b$       e)  $(b^2 + c^2)/a$

9. (FUVEST) – No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha **300** melões que ele começou a vender ao preço unitário de **R\$ 2,00**. A partir das dez horas reduziu o preço em **20%** e a partir das onze horas passou a vender cada melão por **R\$ 1,30**. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de **R\$ 461,00**.

- a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?  
 b) Sabendo que  $\frac{5}{6}$  dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

10. (FUVEST) – Determine  $a$  e  $b$  de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

## Módulo 27 – Escalonamento (Método de Gauss)

1. (FUVEST) – Se  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$ , então  $x$  é igual a:

- a) 27      b) 3      c) 0      d) -2      e) 1

2. Resolver o sistema:  $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

3. (UNICAMP) – As pessoas **A, B, C** e **D** possuem juntas **R\$ 2.718,00**. Se **A** tivesse o dobro do que tem, **B** tivesse a metade do que tem, **C** tivesse **R\$ 10,00** a mais do que tem e, finalmente, **D** tivesse **R\$ 10,00** a menos do que tem, então todos teriam a mesma importância. Quanto possui cada uma das quatro pessoas?

4. (UEL) – Numa loja, os artigos **A** e **B**, juntos, custam **R\$ 70,00**; dois artigos **A** mais um **C** custam **R\$ 105,00**, a diferença de preços entre os artigos **B** e **C**, nessa ordem, é **R\$ 5,00**. Qual é o preço do artigo **C**?

- a) R\$ 20,00      b) R\$ 25,00      c) R\$ 30,00  
 d) R\$ 35,00      e) R\$ 40,00



5. (U.F.CEARÁ) – Para uma festinha foram encomendados **90** refrigerantes, **230** salgados e **120** doces. Os convidados foram divididos em **3** faixas: crianças, senhores e senhoras. Cada criança deverá consumir exatamente **2** refrigerantes, **8** salgados e **4** doces; cada senhor deverá consumir exatamente **3** refrigerantes, **5** salgados e **3** doces; cada senhora deverá consumir exatamente **3** refrigerantes, **6** salgados e **3** doces.

Qual deverá ser o total de convidados para que não sobrem e nem falem refrigerantes, salgados e doces?

- a) 25      b) 35      c) 45      d) 55      e) 65

6. (FEI) – Um comerciante adquiriu **80** rolos de arame, alguns com **30 m** e outros com **20 m**, num total de **2080 m** de comprimento. Quantos rolos de **30 m** foram adquiridos?

- a) 40      b) 52      c) 28      d) 32      e) 48

7. Se tivermos  $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + t = 5 \\ y + z + t = 7 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$ , então  $x + y + z + t$

é igual a:

- a) -1      b) 7      c) 5      d) 4      e) 5/9

8. (FUVEST) –  $\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x - 3y = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$ . Então,  $x + y + z$  é igual a:

- a) -2      b) -1      c) 0      d) 1      e) 2

9. (UNIFESP) – Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$$

onde  $c$  é uma constante real. Para que a solução do sistema seja um par ordenado no interior do primeiro quadrante ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ) do sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem em  $(0, 0)$ , é necessário e suficiente que

- a)  $c \neq -1$ .      b)  $c < -1$ .      c)  $c < -1$  ou  $c > 3/2$ .  
d)  $3/2 < c$ .      e)  $-1 < c < 3/2$ .

## Módulo 28 – Característica de uma Matriz e Teorema de Rouché-Capelli

Nas questões de 1 a 3, calcular a característica de cada matriz.

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$       2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. A matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  tem característica:

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 0

5. Qual a característica da matriz abaixo?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. A característica da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ é:}$$

- a) 4      b) 3      c) 2      d) 1      e) 0

7. O sistema  $\begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \\ 9x - 2y - 7z = 25 \end{cases}$

- a) só apresenta a solução trivial.  
b) é possível e determinado não tendo solução trivial.  
c) é possível e indeterminado.  
d) é impossível.  
e) admite a solução  $(1; 2; 1)$ .

8. O sistema  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$

- a) é impossível.  
b) é possível e determinado.  
c) é possível e indeterminado.  
d) admite apenas a solução  $(1; 2; 3)$ .  
e) admite a solução  $(2; 0; 0)$ .

9. (UEL) – O sistema  $\begin{cases} 6x + ky = 9 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$ , de incógnitas  $x$  e  $y$ , é:

- a) impossível, para todo  $k$  real diferente de  $-21$ .  
b) possível e indeterminado, para todo  $k$  real diferente de  $-63$ .  
c) possível e determinado, para todo  $k$  real diferente de  $-21$ .  
d) possível e indeterminado, para todo  $k$  real diferente de  $-3$ .  
e) possível e determinado, para todo  $k$  real diferente de  $-1$  e  $-63$ .

10. (PUC-GO) – Determine  $a$  e  $b$  para que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + by - 6z = 1 \end{cases} \text{ seja indeterminado.}$$

## Módulo 29 – Discussão de Sistemas Lineares

1. Discutir o sistema:  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$

2. (MACKENZIE) – A equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$$

- a) não admite solução qualquer que seja  $k$ .  
b) admite solução qualquer que seja  $k$ .  
c) admite solução se  $k = 4$ .  
d) admite solução somente se  $k = 8$ .  
e) admite solução somente se  $k = 12$ .

3. (MACKENZIE) – Para que o sistema  $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$ , nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , seja impossível ou indeterminado, deveremos ter para o real  $k$ , valores cuja soma é:

- a)  $-1$       b)  $1$       c)  $0$       d)  $-2$       e)  $2$

4. Escolha entre as alternativas abaixo, aquela que representa o valor da constante  $m$ , de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = m \end{cases} \text{ admita solução.}$$

- a)  $m = 3$       b)  $m = 4$       c)  $m = \frac{2}{3}$   
 d)  $m = 5$       e)  $m = 6$

5. (UNIP) – Se  $\begin{cases} x + 3y + \frac{4}{z} = 7 \\ x + 4y + \frac{2}{z} = 8 \\ x + 2y - \frac{2}{z} = 4 \end{cases}$ , então o valor de  $(x + y)^z$  é:

- a)  $\frac{9}{4}$       b)  $\frac{81}{16}$       c)  $16$       d)  $81$       e)  $256$

6. (UEM) – Com três tipos de peças diferentes, montam-se dois brinquedos, conforme a tabela:

	brinquedo 1	brinquedo 2
quantidade de peças A	4	3
quantidade de peças B	2	4
quantidade de peças C	3	2

Sabe-se que:

- a) os preços unitários das peças **A**, **B** e **C** são, respectivamente,  $x$  reais,  $y$  reais e  $z$  reais, onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são inteiros positivos e  $x < z < y$ ;  
 b) os gastos para montarem-se os brinquedos **1** e **2** são, respectivamente, **R\$ 39,00** e **R\$ 43,00**. Assim, o valor de  $x + y + z$  é...

7. (MACKENZIE) – O sistema  $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ (a + 1)x + ay = 4a + 2 \end{cases}$

- a) admite solução única para  $a = -2$ .  
 b) admite infinitas soluções para  $a \neq -2$ .  
 c) não admite solução para  $a = -2$ .  
 d) admite solução única, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ .  
 e) admite solução, qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ .

8. (UNICAMP) – Dado o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} [\cos(\alpha) + \sin(\alpha)]x + [2\sin(\alpha)]y = 0 \\ [\cos(\alpha)]x + [\cos(\alpha) - \sin(\alpha)]y = 0 \end{cases}$$

- a) Encontre os valores de  $a$  para os quais esse sistema admite solução não trivial, isto é, solução diferente da solução  $x = y = 0$ .  
 b) Para o valor de  $a$  encontrado no item (a) que está no intervalo  $[0, \pi/2]$ , encontre uma solução não trivial do sistema.

9. (UNICAMP) – A função  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , é chamada **função quadrática**.

- a) Encontre a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos  $A(0;2)$ ,  $B(-1;1)$  e  $C(1;1)$ .

b) Dados os pontos  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  e  $C(x_2, y_2)$ , mostre que, se  $x_0 < x_1 < x_2$  e se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não pertencem a uma mesma reta, então existe uma única função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

## Módulo 30 – Sistema Linear Homogêneo

1. (MACKENZIE) – A soma dos possíveis valores do real  $k$  para que

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ admita solução } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

- a) zero      b)  $10$       c)  $-10$       d)  $8$       e)  $-8$

2. (CESGRANRIO) – Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os valores distintos de  $\lambda$  para os quais a equação

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ admite solução}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Então } \lambda_1 + \lambda_2 \text{ é:}$$

- a)  $-5$       b)  $4$       c)  $10$       d)  $-6$       e)  $0$

3. (UFSM) – Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - 2z + t = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \\ -x + y + 5z - 4t = 0 \end{cases}$$

Então, pode-se afirmar que o sistema é:

- a) impossível.  
 b) possível e determinado.  
 c) possível e qualquer solução  $(x, y, z, t)$  é tal que os números  $x, y, z, t$  formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.  
 d) possível e qualquer solução  $(x, y, z, t)$  é tal que os números  $x, y, z, t$  formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.  
 e) possível, porém não admite a solução nula.

4. (FUVEST) – O número de raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ é:}$$

- a)  $0$       b)  $1$       c)  $2$       d)  $3$       e)  $4$

5. (IME) – Calcular o valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

6. (ITA) – Sejam  $A, B, C$  matrizes reais  $3 \times 3$ , satisfazendo às seguintes relações:  $A \cdot B = C$  e  $B = 2 \cdot A$ . Se o determinante de  $C$  é  $32$ , o valor do módulo do determinante de  $A$  é:

- a)  $2$       b)  $1/8$       c)  $16$       d)  $8$       e)  $4$

7. Para que valores de  $\lambda$ , o sistema  $x = \lambda(2 - y)$  e  $\lambda(x + y) = 2$  tem

- a) uma única solução?  
 b) mais de uma solução?

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**Módulo 25 – Circunferência: Equações Reduzida e Geral**

1. (UNIMES) – No plano cartesiano, uma circunferência tem centro na origem e passa pelo ponto  $(-4; 0)$ . Se o ponto  $P(m; 2)$  pertence à circunferência, o valor de  $m$  será de:

- a)  $\pm 2\sqrt{3}$       b)  $\pm 3\sqrt{2}$       c)  $\pm 3\sqrt{3}$   
 d)  $\pm 2\sqrt{2}$       e)  $\pm 2\sqrt{6}$

**Resolução**

A circunferência, com centro na origem e passando pelo ponto  $(-4; 0)$  tem raio  $r = 4$ . A equação dessa circunferência é  $x^2 + y^2 = 16$ . Se o ponto  $P(m; 2)$  pertence à circunferência, então  $m^2 + 2^2 = 16 \Leftrightarrow m^2 = 12 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{3}$

**Resposta: A**

2. (FATEC) – A circunferência de centro  $(2,1)$  e raio 3 intercepta o eixo das abscissas nos pontos de abscissas:

- a)  $-2 + 2\sqrt{2}$  e  $-2 - 2\sqrt{2}$       b)  $2 + 2\sqrt{2}$  e  $2 - 2\sqrt{2}$   
 c)  $2 + \sqrt{2}$  e  $2 - \sqrt{2}$       d)  $-1 - \sqrt{5}$  e  $-1 + \sqrt{5}$   
 e)  $1 + \sqrt{5}$  e  $1 - \sqrt{5}$

**Resolução**

A circunferência de centro  $(2;1)$  e raio 3 tem equação  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ , e intercepta o eixo das abscissas nos pontos tais que  $y = 0$ .

Assim:  $(x - 2)^2 + (0 - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x - 2 = \pm \sqrt{8} \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

As abscissas desses pontos são:  $2 + 2\sqrt{2}$  e  $2 - 2\sqrt{2}$ .

**Resposta: B**

3. (UNESP) – A reta  $r$  de equação  $y = \frac{x}{2}$  intercepta a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  em dois pontos  $P$  e  $Q$ , sendo que as coordenadas de  $P$  são ambas positivas. Determine:

- a) a equação da circunferência e os pontos  $P$  e  $Q$ ;  
 b) a equação da reta  $s$ , perpendicular a  $r$ , passando por  $P$ .

**Resolução**

a) A equação da circunferência, com centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  é  $x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$

Os pontos de intersecção da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 5$  e da reta de equação  $y = \frac{x}{2}$  são obtidos a partir do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dessa forma as coordenadas dos pontos  $P$  e  $Q$  são, respectivamente,  $(2; 1)$  e  $(-2; -1)$ , visto que as coordenadas de  $P$  são ambas positivas.

b) A reta  $(r)$  de equação  $y = \frac{x}{2}$  tem coeficiente angular

$m_r = \frac{1}{2}$  e a reta  $(s)$ , perpendicular a  $(r)$ , terá coeficiente

angular  $m_s$ , tal que  $m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{1/2} = -2$ .

Portanto a equação da reta  $(s)$ , que passa pelo ponto  $P(2; 1)$ , com coeficiente angular  $-2$ , é:  $y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

**Respostas: a)  $x^2 + y^2 = 5$ ;  $P(2; 1)$  e  $Q(-2; -1)$**

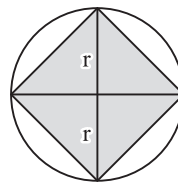
**b)  $2x + y - 5 = 0$**

**Módulo 26 – Determinação do Centro e do Raio**

4. (ULBRA) – A área do quadrado inscrito na circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$  é:

- a)  $\frac{1}{2}$       b) 1      c) 2      d)  $\frac{1}{8}$       e) 4

**Resolução**



centro:

$C\left(\frac{-2}{-2}; \frac{-4}{-2}\right) \Leftrightarrow C(1; 2)$

raio:  $r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 3} = \sqrt{2}$

Então:  $2r = 2\sqrt{2}$  é a diagonal do quadrado e a área do quadrado é:

$A = \frac{d^2}{2} = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$

**Resposta: E**

5. (MACKENZIE) – A curva  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  tem um único ponto comum com a reta  $x + y = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . A soma dos possíveis valores de  $k$  é:

- a) 4      b)  $-2$       c)  $-4$       d) 2      e) 0

**Resolução**

A circunferência tem centro  $C\left(\frac{-2}{-2}; \frac{-2}{-2}\right) \Leftrightarrow C(1;1)$  e raio  $r = \sqrt{1^2 + 1^2 - 1} = 1$

A reta  $x + y - k = 0$  é tangente à circunferência, então:

$$\frac{|1 + 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2 - k| = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - k = \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow k = 2 \pm \sqrt{2}$$

A soma dos possíveis valores de  $k$  é 4.

**Resposta: A**

6. (FGV) – Sabendo-se que a circunferência  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$  possui apenas um ponto em comum com a reta  $y = x - 1$ , conclui-se que  $p$  é igual a  
a) -9.    b) 7.    c) 9.    d) 11.    e) 5.

**Resolução**

A circunferência  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$  possui apenas um ponto em comum com a reta  $y = x - 1$  se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \text{admite solução única.}$$

Desta forma, a equação

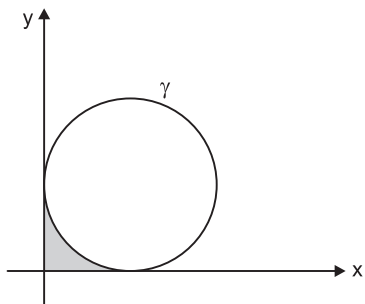
$$x^2 + (x - 1)^2 - 6x + 4 \cdot (x - 1) + p = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + p - 3 = 0$$

deve ter raiz dupla e, portanto,  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p - 3) = 0 \Leftrightarrow p = 5$

**Resposta: E**

## Módulo 27 – Posição dos Pontos do Plano em Relação a uma Circunferência

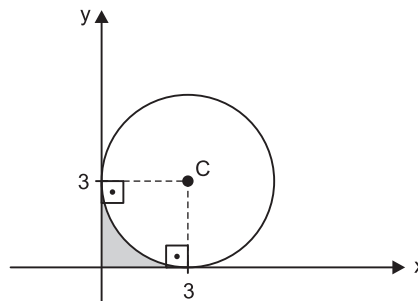
7. (FGV) – A circunferência  $\gamma$  da figura seguinte é tangente aos eixos  $x$  e  $y$  e tem equação  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ . A área da superfície sombreada é:



- a)  $9(\pi - 1)$     b)  $81\pi - 9$     c)  $\frac{9(4 - \pi)}{4}$   
d)  $\frac{9(9\pi - 4)}{4}$     e)  $\frac{6(6 - \pi)}{4}$

**Resolução**

A circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$  tem centro  $C(3;3)$  e raio 3.



A área  $S$  da superfície sombreada é dada por

$$S = 3^2 - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \Leftrightarrow S = \frac{9(4 - \pi)}{4}$$

**Resposta: C**

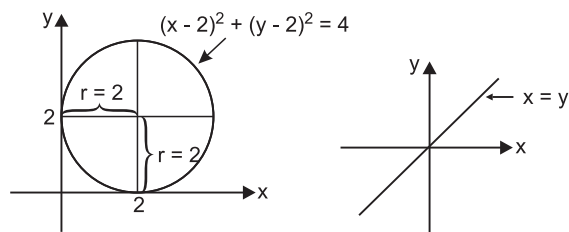
8. (FATEC) – Considere que  $R$  é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$  e  $x - y \leq 0$ . A área de  $R$ , em unidades de superfície, é:

- a)  $\pi$     b)  $2\pi$     c)  $\pi^2$     d)  $4\pi$     e)  $4\pi^2$

**Resolução**

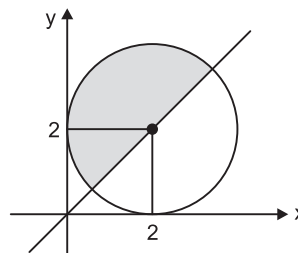
Os pontos do plano que satisfazem as sentenças estão representados nas figuras abaixo.

I)  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$     II)  $x - y \leq 0$



As duas condições simultâneas representam um semicírculo,

cujas área é:  $A = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$



**Resposta: B**

## Módulo 28 – Elipse

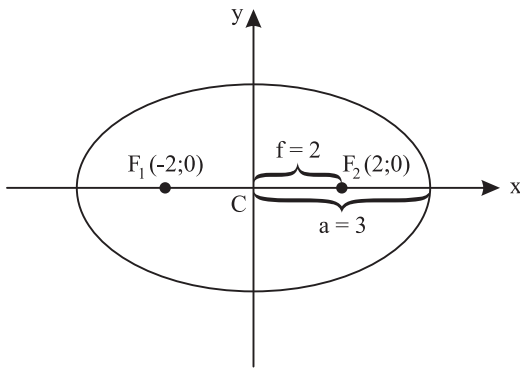
9. (UNESP) – A equação da elipse de focos  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$  e eixo maior igual a 6 é dada por:

a)  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$       b)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

c)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$       d)  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$

e)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

### Resolução



A elipse de focos  $F_1(-2;0)$  e  $F_2(2;0)$  e eixo maior igual a 6 é tal que:

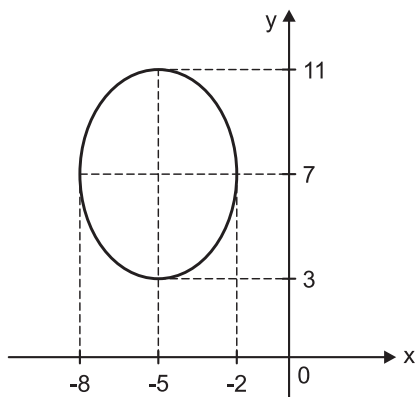
$$\left. \begin{array}{l} f = 2 \\ a = 3 \\ a^2 = b^2 + f^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 5$$

A equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

**Resposta: B**

10. (UNESP) – A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é:

a)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$

b)  $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$

c)  $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 1$

d)  $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{16} = 1$

e)  $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$

### Resolução

A elipse da figura tem centro  $C(-5;7)$  e semieixos  $a = 4$  e  $b = 3$ . A equação reduzida da elipse, representada na figura, com centro  $C(g;h)$  e semieixos  $a$  e  $b$ , é:

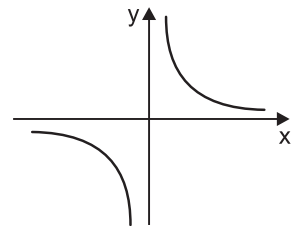
$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

**Resposta: B**

## Módulo 29 – Hipérbole

11. (UFSCar) – A equação que mais aproximadamente é representada pela curva abaixo é:

- a)  $x \cdot y = 1$   
 b)  $x + y - 1 = 0$   
 c)  $x \cdot y = 0$   
 d)  $x^2 - y = 0$   
 e)  $x - y - 1 = 0$



### Resolução

A curva representada é uma hipérbole equilátera, com assíntotas nos eixos cartesianos, portanto, de equação  $x \cdot y = 1$ .

**Resposta: A**

12. (UNESP) – A partir da equação da hipérbole:

$$4(x-3)^2 - \frac{4y^2}{15} = 1, \text{ encontre as coordenadas do centro } O, \text{ dos}$$

vértices  $A_1$  e  $A_2$  dos focos  $F_1$  e  $F_2$  da hipérbole. Esboce o gráfico dessa hipérbole.

### Resolução

I)  $4(x-3)^2 - \frac{4y^2}{15} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{(y-0)^2}{\frac{15}{4}} = 1$ , que é

a equação de uma hipérbole de centro  $O(3,0)$ , eixo transversal  $2a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  e eixo conjugado



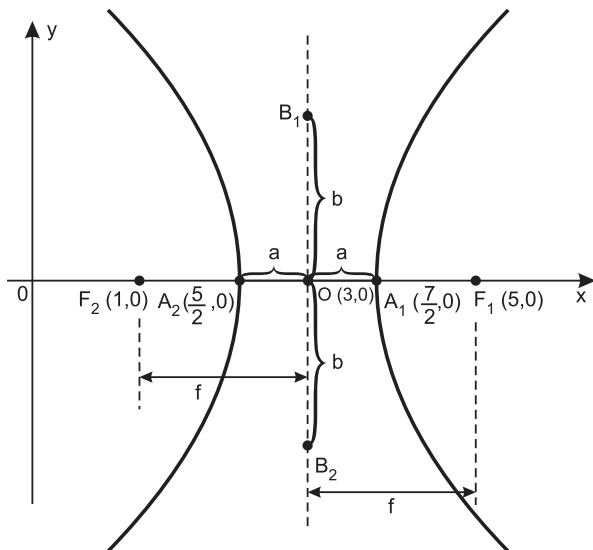
$$2b = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$$

II) Sendo  $2f$  a distância focal, temos:

$$f^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow f^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow f^2 = 4 \Leftrightarrow f = 2,$$

pois  $f > 0$

Assim, os focos serão  $(1; 0)$  e  $(5; 0)$  e o gráfico será:



**Respostas:** centro  $O(3;0)$ ; vértices  $A_1\left(\frac{7}{2}; 0\right)$

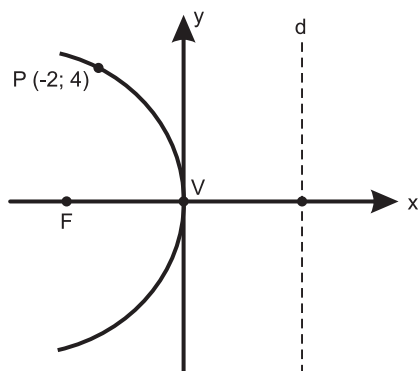
e  $A_2\left(\frac{5}{2}; 0\right)$  e focos  $F_1(5;0)$  e  $F_2(1;0)$

## Módulo 30 – Parábola

13. (MODELO ENEM) – Uma parábola, cujo vértice é a origem e cujo eixo de simetria é coincidente com o eixo “x”, passa pelo ponto  $P(-2; 4)$ . Determinar a equação dessa parábola.

- a)  $y^2 = 8x$                       b)  $y^2 = -8x$                       c)  $x^2 = 8y$   
d)  $x^2 = -8y$                       e)  $y^2 = -4x$

**Resolução**



Pelo enunciado, a parábola tem o aspecto da figura anterior, portanto sua equação é do tipo:  $y^2 = -4 \cdot f \cdot x$ .

$$\text{Então: } P(-2; 4) \in y^2 = -4 \cdot f \cdot x \Leftrightarrow 4^2 = -4f \cdot (-2) \Leftrightarrow f = 2$$

Para  $f = 2$ , nas condições do problema, temos:

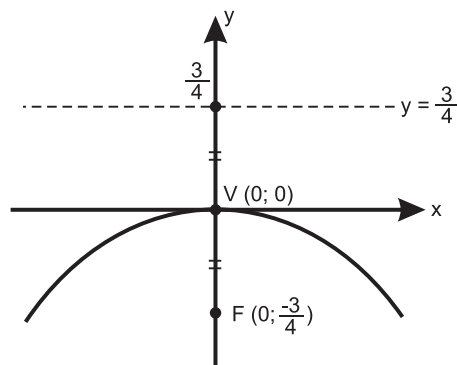
- foco:  $F(-2; 0)$
- diretriz:  $x = 2$
- equação reduzida:  $y^2 = -8 \cdot x$

**Resposta: B**

6. Determinar o vértice, o foco e a diretriz da parábola de equação  $x^2 = -3y$ .

**Resolução**

A equação  $x^2 = -3 \cdot y$  representa uma parábola com diretriz paralela ao eixo das abscissas, com vértice na origem e voltada para baixo.



Comparando a equação  $x^2 = -4 \cdot f \cdot y$  com a equação

$$x^2 = -3 \cdot y, \text{ teremos: } 4 \cdot f = 3 \Leftrightarrow f = \frac{3}{4}.$$

Dessa forma, o foco é  $F\left(0; -\frac{3}{4}\right)$  e a diretriz tem equação

$$y = \frac{3}{4}.$$

**Resposta:  $V(0; 0)$ ..... vértice**

**$F\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ ... foco**

**$y = \frac{3}{4}$  ... diretriz**

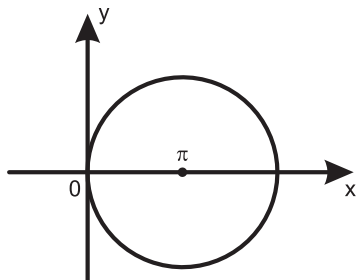
## Módulo 25 – Circunferência: Equações Reduzida e Geral

### Questões de 1 a 7.

Escrever a equação da circunferência:

- de centro  $(3; -1)$  e raio 5.
- de centro  $(-4; 2)$  e diâmetro 8.
- de centro  $(4; -1)$  e que passa pelo ponto  $(-1; 3)$ .
- que tem como diâmetro o segmento que liga os pontos  $(-3; 5)$  e  $(7; -3)$ .
- cujo centro é  $(-4; 3)$  e tangente ao eixo  $y$ .
- cujo centro é a origem e corta o eixo  $x$  na abscissa 6.
- tangente aos eixos, de centro no segundo quadrante e raio igual a 8.

8. (U.C.SANTOS) – Assinale a equação da circunferência da figura abaixo:

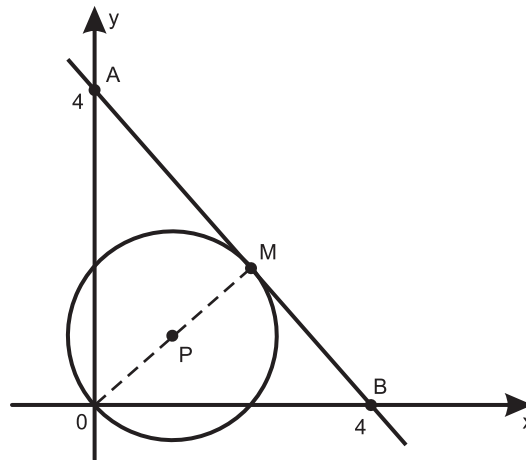


- $x^2 - 2\pi x + y^2 = 0$
- $x^2 - x + 2\pi y^2 = 0$
- $x^2 + y^2 - \pi^2 x = 0$
- $x^2 + y^2 - 2\pi y = 0$
- $x^2 + y^2 = \pi$

9. (USF) – Os pontos  $A(2; 3)$  e  $C(4; 5)$  são as extremidades da diagonal de um quadrado. A circunferência inscrita nesse quadrado tem equação

- $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 12 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$
- $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$

10. (F.CARLOS CHAGAS) – Se  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$  e  $P$  é o ponto médio do segmento  $OM$ , determinar a equação da circunferência de centro  $P$  e raio  $OP$ .



- $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
- $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
- $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
- $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

11. (FATEC) – Considere que  $R$  é a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem as sentenças

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \text{ e } x \leq y.$$

A área de  $R$ , em unidades de superfície, é

- $\pi$
- $2\pi$
- $\pi^2$
- $4\pi$
- $4\pi^2$

12. (UNESP) – A reta  $r$  de equação  $y = \frac{x}{2}$  intercepta a

circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  em dois pontos  $P$  e  $Q$ , sendo que as coordenadas de  $P$  são ambas positivas.

Determine:

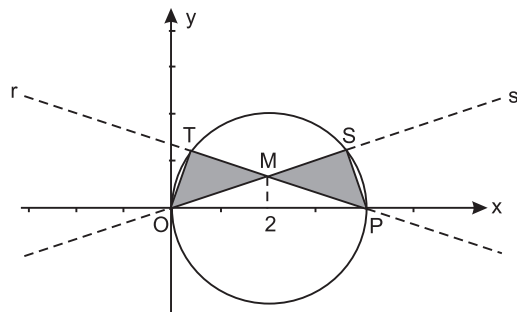
- a equação da circunferência e os pontos  $P$  e  $Q$ ;
- a equação da reta  $s$ , perpendicular a  $r$ , passando por  $P$ .

13. (UNESP) – Considere as circunferências  $z_1$  e  $z_2$  de equações  $z_1: (y - 2)^2 + (x + 1)^2 = 5$  e  $z_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

- Verifique se o ponto  $P = (2, 2)$  pertence ao interior da circunferência  $z_2$ .
- Determine os pontos de interseção das circunferências  $z_1$  e  $z_2$ .

14. (UNESP) – Seja  $C$  a circunferência de centro  $(2,0)$  e raio 2, e considere  $O$  e  $P$  os pontos de interseção de  $C$  com o eixo  $Ox$ . Sejam  $T$  e  $S$  pontos de  $C$  que pertencem, respectivamente, às retas  $r$  e  $s$ , que se interceptam no ponto  $M$ , de forma que os

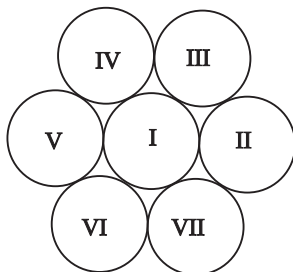
triângulos OMT e PMS sejam congruentes, como mostra a figura.



a) Dê a equação de C e, sabendo que a equação de s é  $y = \frac{x}{3}$ , determine as coordenadas de S.

b) Calcule as áreas do triângulo OMP e da região sombreada formada pela união dos triângulos OMT e PMS.

15. Sete circunferências estão posicionadas conforme a figura abaixo. Se a equação da circunferência I é  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  e a da circunferência II é  $x^2 - 4rx + y^2 + 3r^2 = 0$ , então a equação da circunferência III é:



- a)  $x^2 - 2rx + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$
- b)  $x^2 + 2rx + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$
- c)  $x^2 + 2rx + y^2 + 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$
- d)  $x^2 - 2rx + y^2 + 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$

## Módulo 26 – Determinação do Centro e do Raio

### Questões 1 e 2.

Determinar o centro e o raio da circunferência de equação:

- 1.  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
- 2.  $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 11 = 0$

3. (UBERABA) – A distância da origem ao centro da circunferência  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$  é igual a:

- a)  $\sqrt{2}$
- b) 1
- c)  $\sqrt{3}$
- d) 2
- e)  $\sqrt{5}$

4. (F. CARLOS CHAGAS) – A equação da reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo ponto médio do segmento AB, onde A(2; 3) e B é o centro da circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ , é:

- a)  $y = 3$
- b)  $y = 4$
- c)  $x = 4$
- d)  $x = 3$
- e)  $3x + 4y = 0$

5. (FUVEST) – O raio da circunferência  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$  é igual a:

- a) 2
- b)  $\sqrt{2}$
- c) 3
- d) 4
- e) 16

6. (OSEC) – A distância entre os centros das circunferências  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 375$  e  $x^2 + y^2 - 20x - 2y = -100$  é:

- a)  $4\sqrt{10}$
- b)  $\sqrt{10}$
- c) 10
- d)  $2\sqrt{10}$
- e)  $3\sqrt{10}$

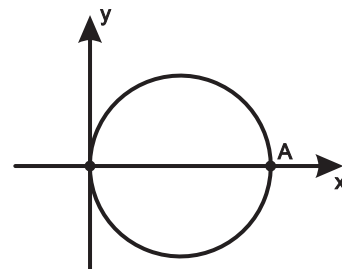
7. Determinar a maior e a menor distância do ponto (10; 7) à circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .

8. Qual das equações abaixo representa a equação de uma circunferência tangente às retas  $x = 0$  e  $y = 0$  nos pontos A(0; p) e B(p; 0)?

- a)  $x^2 + y^2 - 2px + 2py = 0$
- b)  $x^2 + y^2 - 2px - 2py = 0$
- c)  $x^2 + y^2 - 2px + 2py + p^2 = 0$
- d)  $x^2 + y^2 - 2px - 2py + p^2 = 0$
- e)  $x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$

9. (ULBRA) – A equação da circunferência da figura é  $x^2 + y^2 - 6x = 0$ . A abscissa do ponto A é

- a) 7
- b) 6
- c) 5
- d) 4
- e) 3



10. (UN.PELOTAS) – A área do círculo cuja circunferência é dada pela equação  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$  é

- a)  $15\pi$    b)  $20\pi$    c)  $17\pi$    d)  $36\pi$    e)  $25\pi$

## Módulo 27 – Posição dos Pontos do Plano em Relação a uma Circunferência

1. A equação da reta tangente à circunferência  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 20$  e que a tangencia no ponto de abscissa 2 é:

- a)  $x - 2y - 4 = 0$   
 b)  $x + 2y - 4 = 0$  ou  $x - 2y + 16 = 0$   
 c)  $x + y - 2 = 0$  ou  $x - y + 16 = 0$   
 d)  $x + 2y - 4 = 0$  ou  $x - 2y + 4 = 0$   
 e)  $x - y + 4 = 0$  ou  $2x + y - 3 = 0$

2. Determinar as equações das retas (t) tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$  e que passam pelo ponto  $P(5; 2)$ .

3. As circunferências de raio 15 e tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 = 100$  no ponto  $(6; 8)$  têm centros nos pontos:

- a)  $(-3; 4)$  e  $(15; -20)$       b)  $(3; -4)$  e  $(-9; 12)$   
 c)  $(-12; 16)$  e  $(9; -12)$       d)  $(-8; 32)$  e  $(8; -32)$   
 e)  $(15; 20)$  e  $(-3; -4)$

4. Obter as equações das retas tangentes à circunferência  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  e que passam pelo ponto  $P(4; 0)$ .

5. (UnB) – Seja  $C$  uma circunferência de raio positivo, cuja equação é  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ .

Julgue as proposições abaixo:

0) o número  $a$  que aparece na equação pode ser um número real qualquer.

- 1) a distância entre os pontos da reta  $x + y = 2a$  que corta  $C$  vale  $a$ .  
 2) o eixo  $Oy$  secciona a circunferência em 2 pontos.  
 3) o triângulo de vértices  $(0; 0)$ ,  $(a; a)$  e  $(2a; 0)$  é inscrito na circunferência  $C$ .  
 4) o conjunto dos pontos do plano que satisfazem  $y > |a|$  não contém pontos de  $C$ .  
 5) a intersecção dos pontos do plano que satisfazem  $x \geq a$  com

$C$  é uma curva de comprimento  $\frac{\pi \cdot |a|}{2}$ .

6) a reta  $y = x + |a|$  não intercepta  $C$ .

6. (FUVEST) – A equação da circunferência de raio 3 e que corta o eixo dos  $y$  nos pontos  $(0; 1)$  e  $(0; 5)$  é:

- a)  $(x \pm \sqrt{5})^2 + (y - 3)^2 = 9$       b)  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$   
 c)  $(x \pm \sqrt{5})^2 + (y + 3)^2 = 9$       d)  $(x - 3)^2 + (y \pm \sqrt{5})^2 = 9$   
 e)  $(x \pm 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$

7. (FUVEST) – A equação da circunferência de raio 3 que passa pela origem e cujo centro está na reta  $x - y = 0$  é:

a)  $x^2 + y^2 + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$  ou  $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 0$

b)  $x^2 + 2y^2 + 3x - 3y = 0$

c)  $x^2 + y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + 3 = 0$  ou

$x^2 + y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + 3 = 0$

d)  $x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0$  ou

$x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0$

e)  $x^2 + y^2 + 6x + 6y = 0$  ou  $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$

8. (CESGRANRIO) – O círculo  $C$  tem centro na reta  $y = x$  e somente o ponto  $P(0; 2\sqrt{2})$  em comum com a reta  $y = x + 2\sqrt{2}$ . Então, o raio de  $C$  é:

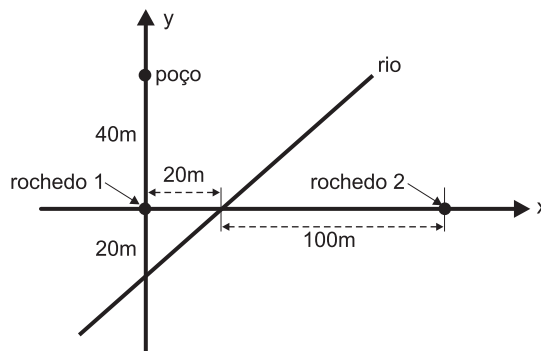
- a)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $2\sqrt{2}$       c)  $\sqrt{2}$   
 d) 1      e) 2

9. (FUVEST) – Por um ponto  $P$  do semieixo positivo dos  $x$ , traçam-se tangentes à circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 3$ . O quadrilátero cujos vértices são  $P$ , o centro da circunferência e os dois pontos de tangência, tem área  $\sqrt{3}$ .

Determine as equações destas tangentes.

10. (FUVEST) – Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações:

- o tesouro está enterrado num ponto em linha reta entre os dois rochedos.
- está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



- a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isto o sistema de coordenadas mostrado na figura.  
 b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada  $x$ , do ponto  $(x; 0)$ , onde o tesouro está enterrado.

## Módulo 28 – Elipse

Questões de 1 a 3.

Para cada uma das elipses dadas, determinar:

- comprimento do semieixo maior
- comprimento do semieixo menor
- coordenadas dos focos
- excentricidade
- coordenadas dos vértices
- coordenadas dos pólos

$$1. \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

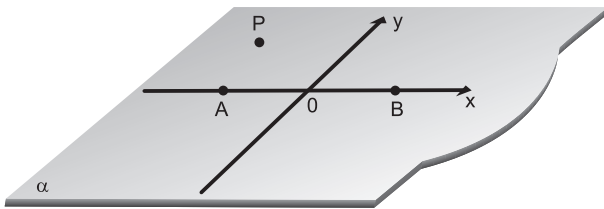
$$2. \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$3. 9x^2 + 16y^2 = 576$$

Questões 4 e 5.

Determinar as equações das elipses, de centro na origem, para as seguintes condições:

- focos  $(\pm 4; 0)$ , vértices  $(\pm 5; 0)$
  - focos  $(0; \pm 8)$ , vértices  $(0; \pm 17)$
- 6.



O plano  $\alpha$ , esquematizado na figura acima, está orientado pelos eixos cartesianos  $\mathbf{OX}$  e  $\mathbf{OY}$ . Nesse plano estão os pontos  $\mathbf{A}(-3; 0)$ ,  $\mathbf{B}(3; 0)$  e  $\mathbf{P}$ , de tal modo que  $\mathbf{PA} + \mathbf{PB}$  é sempre constante e igual a 10. O deslocamento de  $\mathbf{P}$  sobre o plano  $\alpha$  gera uma trajetória cuja equação cartesiana é:

- $x^2 + y^2 = 9$
- $x^2 + y^2 = 100$
- $16x^2 + 25y^2 = 1$
- $16x^2 + 25y^2 = 400$
- $16x^2 - 25y^2 = 1$

7. O eixo maior da elipse  $5x^2 + 2y^2 = 20$  mede:

- 2
- $2\sqrt{10}$
- 4
- 10
- $2\sqrt{5}$

8. (FUVEST) – Determinar as coordenadas dos focos da elipse de equação  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

9. (FGV) – Determinar a elipse que passa pelos pontos  $(2; 0)$ ,  $(-2; 0)$  e  $(0; 1)$  e que tem eixo maior no eixo  $\vec{Ox}$ .

10. (USF) – A elipse com focos nos pontos  $F_1(1; 0)$  e  $F_2(3; 0)$  e de excentricidade igual a  $\frac{1}{2}$  tem equação:

- $(x - 2)^2 + 3y^2 = 3$
- $3(x - 2)^2 + 4y^2 = 12$
- $3(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 3$
- $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
- $3x^2 + 3(y - 2)^2 = 1$

## Módulo 29 – Hipérbole

Questões de 1 a 3.

De cada uma das seguintes hipérbolas, obter:

- os vértices
- os polos
- os focos
- a excentricidade

$$1. 4x^2 - 45y^2 = 180 \quad 2. 49x^2 - 16y^2 = 784$$

$$3. x^2 - y^2 = 25$$

Questões de 4 a 6.

Obter as equações das hipérbolas, dados:

- eixo transversal igual a 8 e focos  $(\pm 5; 0)$
- centro  $(0; 0)$ , um foco  $(8; 0)$  e um vértice  $(6; 0)$
- vértices  $(0; \pm 3)$  e focos  $(0; \pm 5)$

7. (PUC) – A equação de uma das assíntotas da hipérbole  $x^2 - y^2 = 16$  é:

- $y = 2x - 1$
- $y = 4x$
- $y = x$
- $y = 2x + 1$
- $y = 2x$

## Módulo 30 – Parábola

Questões 1 a 3.

Determinar o foco e a equação da diretriz das seguintes parábolas:

- $y^2 = 8x$
- $3y^2 = -4x$
- $x^2 = 8y$

Questões 4 e 5.

Deduzir a equação das parábolas, dados:

- foco  $(3; 0)$  e diretriz  $x + 3 = 0$
- foco  $(0; 6)$  e diretriz  $y = 0$

6. Obter a equação da parábola de vértice  $V(-2; 3)$  e foco  $F(11; 3)$ .

7. (FUVEST) – Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam do eixo  $y$  e do ponto  $(2; 0)$ .

8. (USF) – A distância do ponto  $(1; 1)$  ao foco da parábola  $x^2 = 4y$  é igual a:

- 1
- 2
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$

Questões 9 e 10.

Obter o vértice, o foco e a equação da diretriz das parábolas:

$$9. y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$$

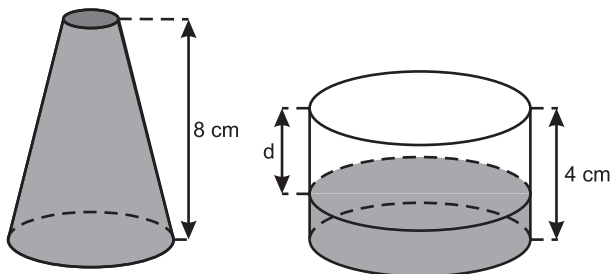
$$10. x^2 - 6x + 4y + 17 = 0$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Módulo 25 – Troncos

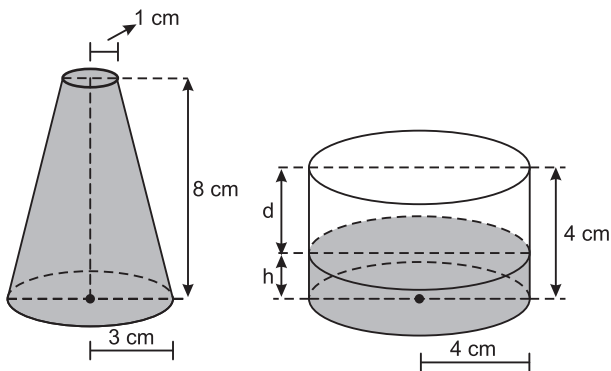
1. (MACKENZIE) – Um frasco de perfume, que tem a forma de um tronco de cone circular reto de raios 1 cm e 3 cm, está totalmente cheio. Seu conteúdo é despejado em um recipiente que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 4 cm, como mostra a figura.



Se  $d$  é a altura da parte não preenchida do recipiente cilíndrico e, adotando-se  $\pi = 3$ , o valor de  $d$  é

- a)  $\frac{10}{6}$    b)  $\frac{11}{6}$    c)  $\frac{12}{6}$    d)  $\frac{13}{6}$    e)  $\frac{14}{6}$

Resolução



Se  $V_L$  o volume do líquido, em centímetros cúbicos, temos:

1) No tronco de cone:

$$V_L = \frac{8}{3} (\pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 1^2 + \sqrt{\pi \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 1^2}) = \frac{104\pi}{3}$$

2) No cilindro  $V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot h = 16\pi h$

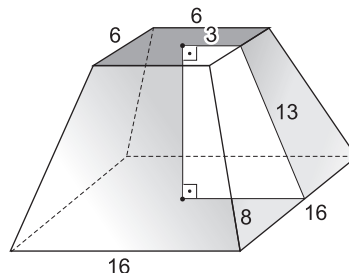
Assim,  $16\pi h = \frac{104\pi}{3} \Rightarrow h = \frac{13}{6}$  e, em centímetros,

$$d = 4 - \frac{13}{6} = \frac{11}{6}$$

Resposta: B

2. Calcular a área lateral e a área total de um tronco de pirâmide quadrangular regular, cujos apótemas das bases medem 3 cm e 8 cm e cujo apótema lateral mede 13 m.

Resolução



I) Cálculo da área lateral  $A_\ell$ , em metros quadrados:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(16 + 6)13}{2} \Leftrightarrow A_\ell = 572$$

II) Cálculo da área total  $A_t$ , em metros quadrados:

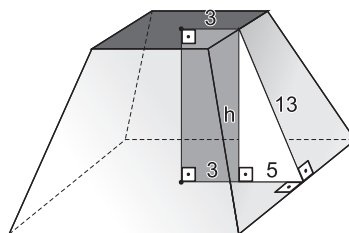
$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

Assim:  $A_t = 572 + 16^2 + 6^2 \Leftrightarrow A_t = 864$

Resposta:  $A_\ell = 572 \text{ m}^2$  e  $A_t = 864 \text{ m}^2$

3. Calcular a altura e o volume do sólido da questão anterior.

Resolução



I) Cálculo da altura  $h$ , em metros:

$$h^2 + (8 - 3)^2 = 13^2 \Leftrightarrow h = 12$$

II) Cálculo do volume  $V$ , em metros cúbicos:

$$V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}) \Leftrightarrow$$

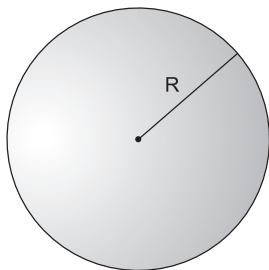
$$\Leftrightarrow V = \frac{12}{3} (16^2 + 6^2 + \sqrt{16^2 \cdot 6^2}) \Leftrightarrow V = 1552$$

Resposta:  $h = 12 \text{ m}$  e  $V = 1552 \text{ m}^3$

## Módulo 26 – A Esfera e suas Partes

4. Qual a área da superfície da esfera, cuja secção meridiana tem  $10 \text{ m}^2$  de área?

**Resolução**



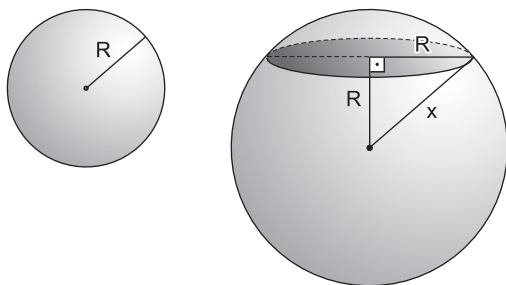
$$\left. \begin{aligned} A_{SM} &= \pi R^2 \\ A_{SE} &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{SE} = 4A_{SM}$$

Assim:  $A_{SE} = 4 \cdot 10 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$

**Resposta:  $40 \text{ m}^2$**

5. A secção meridiana de uma esfera de raio  $R$  é equivalente a uma secção de uma segunda esfera, distante  $R$  do centro. Calcular o raio desta segunda esfera em função de  $R$ .

**Resolução**



Se  $x$  a medida do raio da segunda esfera, tem-se:

$$x^2 = R^2 + R^2 \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}$$

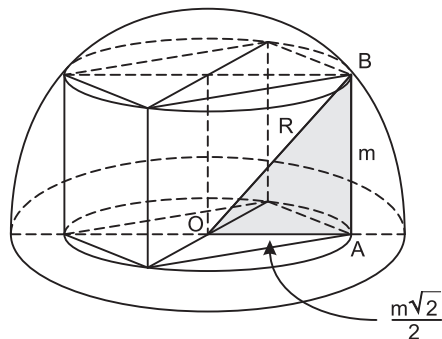
**Resposta:  $R\sqrt{2}$**

## Módulo 27 – Inscrição e Circunscrição de Sólidos

6. (FUVEST) – Um cubo de aresta  $m$  está inscrito em uma semi-esfera de raio  $R$ , de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Então,  $m$  é igual a:

- a)  $R\sqrt{\frac{2}{3}}$       b)  $R\frac{\sqrt{2}}{2}$       c)  $R\frac{\sqrt{2}}{3}$   
 d)  $R$       e)  $R\sqrt{\frac{3}{2}}$

**Resolução**



De acordo com o Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo AOB, tem-se:  $(OA)^2 + (AB)^2 = (OB)^2$ .

Assim:

$$\left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow \frac{3m^2}{2} = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = R^2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow m = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

**Resposta: A**

## Módulos 28 e 29 – Paralelismo, Perpendicularismo no Espaço e Projeções Ortogonais

7. (MACKENZIE) – Sejam as afirmações.

- I. Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
- II. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
- III. Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
- IV. Se duas retas não têm ponto comum, então elas são paralelas.

O número de afirmações verdadeiras é:

- a) 0      b) 1      c) 2      d) 3      e) 4

**Resolução**

**Resposta: B**

8. (PUC) – Qual das afirmações é verdadeira?

- a) Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.
- b) Por uma reta dada, pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.
- c) Por qualquer ponto, é possível conduzir uma reta que se apoia em duas retas reversas dadas.
- d) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
- e) Existem planos reversos.

**Resolução**

**Resposta: A**

9. (FUVEST) – São dados cinco pontos não coplanares **A, B, C, D** e **E**. Sabe-se que ABCD é um retângulo,  $AE \perp AB$  e  $AE \perp AD$ . Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

- a) EA e EB      b) EB e BA      c) EA e AC  
d) EC e CA      e) AC e BE

**Resolução**

**Resposta: C**

10. (FUVEST) – Assinale a correta.

- a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.  
b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.  
c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.  
d) Se duas retas forem ortogonais reversas, toda reta ortogonal a uma delas será paralela à outra.  
e) Se duas retas forem ortogonais, toda reta paralela a uma delas será ortogonal ou perpendicular à outra.

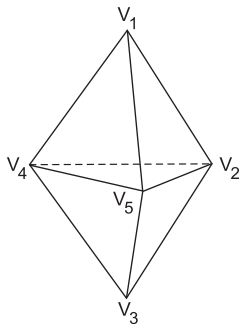
**Resolução**

**Resposta: E**

## Módulo 30 – Poliedros

### Convexos e Regulares

11. (UNESP) – Dado um poliedro com 5 vértices e 6 faces triangulares, escolhem-se ao acaso três de seus vértices.



A probabilidade de que os três vértices escolhidos pertençam à mesma face do poliedro é:

- a)  $\frac{3}{10}$       b)  $\frac{1}{6}$       c)  $\frac{3}{5}$       d)  $\frac{1}{5}$       e)  $\frac{6}{35}$

**Resolução**

O número total de maneiras de escolher 3 vértices é

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

O número de maneiras de se ter 3 vértices na mesma face é igual ao número de faces e, portanto, é 6.

$$\text{A probabilidade é } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

**Resposta: C**

12. (MACKENZIE) – Considere uma pirâmide cuja base é um polígono convexo. Se a soma das medidas dos ângulos internos de todas as suas faces é  $3600^\circ$ , o número de lados da base dessa pirâmide é igual a:

- a) 11      b) 12      c) 9      d) 10      e) 8

**Resolução**

Seja  $n$  o número de lados da base da pirâmide. Como a soma das medidas dos ângulos internos de todas as faces é  $3600^\circ$ , devemos ter:  $n \cdot 180^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ = 3600^\circ \Leftrightarrow n = 11$

Outra resolução:

$$\begin{cases} V = n + 1 \\ (V - 2) \cdot 360^\circ = 3600^\circ \Leftrightarrow V - 2 = 10 \Leftrightarrow V = 12 \end{cases}$$

$$\text{Assim: } 12 = n + 1 \Leftrightarrow n = 11$$

**Resposta: A**

## EXERCÍCIOS-TAREFA

### Módulo 25 – Troncos

1. (PUC) – Corta-se uma pirâmide de 12 cm de altura por um plano paralelo à base distando 4 cm desta. A razão entre a área da base e a área da secção é igual a:

- a)  $\frac{12}{7}$       b)  $\frac{7}{4}$       c)  $\frac{9}{4}$       d)  $\frac{7}{9}$       e)  $\frac{9}{7}$

2. (PUC) – Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem  $21 \text{ dm}^3$  de volume. A altura do tronco mede 30 cm e o lado do quadrado da base maior, 40 cm. Então, o lado do quadrado da base menor mede:

- a) 6 cm      b) 8 cm      c) 10 cm  
d) 12 cm      e) 14 cm

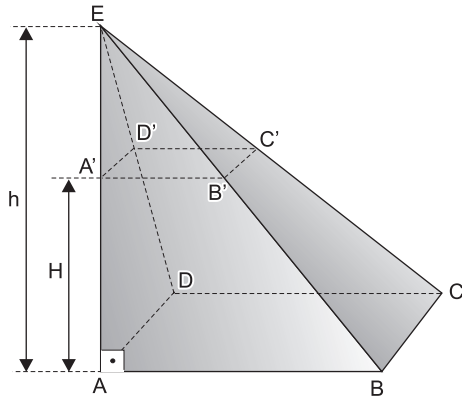
3. (PUC) – O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas e altura  $h$  é dado por  $V = \frac{h}{3} (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$ , em que  $S$  e  $S'$  são as áreas das bases. Se as bases de um tronco de pirâmide são quadrados de lados 3 e 4 e se a altura é 5, então o seu volume é:

- a)  $\frac{175\sqrt{3}}{3}$       b) 73      c)  $\sqrt{12}$   
d)  $25 + \sqrt{3}$       e)  $\frac{185}{3}$

4. (ITA-SP) – A base de uma pirâmide tem área igual a  $225 \text{ cm}^2$ . A  $\frac{2}{3}$  do vértice, corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. A área da secção é igual a:

- a)  $4 \text{ cm}^2$       b)  $9 \text{ cm}^2$       c)  $25 \text{ cm}^2$   
d)  $100 \text{ cm}^2$       e)  $125 \text{ cm}^2$

5. (UNESP-SP) – A figura abaixo representa uma pirâmide com vértice num ponto **E**. A base é um retângulo **ABCD** e a face **EAB** é um triângulo retângulo com o ângulo reto no vértice **A**. A pirâmide apresenta-se cortada por um plano paralelo à base, na altura **H**. Esse plano divide a pirâmide em dois sólidos: uma pirâmide **EA'B'C'D'** e um tronco de pirâmide de altura **H**.



Sabendo-se que  $H = 4$  cm,  $AB = 6$  cm,  $BC = 3$  cm e a altura  $h = AE = 6$  cm, determine:

- a) o volume da pirâmide **EA'B'C'D'**;  
b) o volume do tronco de pirâmide.

6. (FUVEST-SP) – As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raios 6 cm e 3 cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

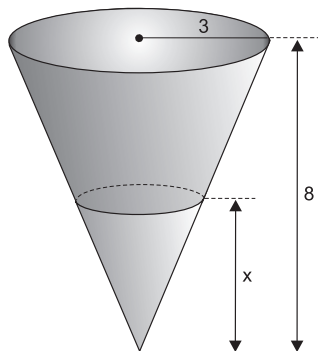
- a) a altura do tronco de cone;  
b) o volume do tronco de cone.

7. (FAAP-SP) – Um copo de chope é um cone (oco), cuja altura é o dobro do diâmetro da base. Se uma pessoa bebe desde que o copo está cheio até o nível da bebida ficar exatamente na metade da altura do copo, a fração do volume total que deixou de ser consumida é:

- a)  $\frac{3}{4}$     b)  $\frac{1}{2}$     c)  $\frac{2}{3}$     d)  $\frac{3}{8}$     e)  $\frac{1}{8}$

8. (FUVEST-SP) – Um copo tem a forma de cone com altura 8 cm e raio de base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura **x** atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:

- a)  $\frac{8}{3}$  cm  
b) 6 cm  
c) 4 cm  
d)  $4\sqrt{3}$  cm  
e)  $4\sqrt[3]{4}$  cm



9. (UFMG) – Uma pirâmide regular tem altura 6 e lado da base quadrada igual a 4. Ela deve ser cortada por um plano paralelo à base, a uma distância **d** dessa base, de forma a determinar dois sólidos de mesmo volume. A distância **d** deve ser:

- a)  $6 - 3\sqrt[3]{2}$     b)  $3 - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$   
c)  $6 - 3\sqrt[3]{4}$     d)  $6 - 2\sqrt[3]{2}$

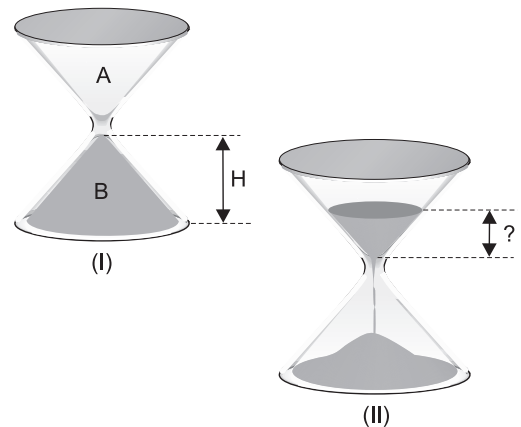
10. (SÃO JUDAS-SP) – Em um tronco de cone, os raios das bases medem 3 cm e 7 cm e a geratriz mede 5 cm. O volume desse tronco, em centímetros cúbicos, é:

- a)  $39\pi$     b)  $49\pi$     c)  $69\pi$     d)  $79\pi$     e)  $58\pi$

11. (MACKENZIE-SP) – Um cone reto é seccionado por um plano paralelo à base, que passa pelo ponto médio da altura. A razão entre os volumes dos sólidos obtidos pode ser:

- a)  $\frac{1}{7}$     b)  $\frac{1}{8}$     c)  $\frac{1}{2}$   
d)  $\frac{1}{4}$     e)  $\frac{1}{3}$

12. (CESGRANRIO) – Uma ampulheta repousa numa mesa como mostra a figura (I) (o cone **B** completamente cheio de areia). A posição da ampulheta é invertida. A figura (II) mostra o instante em que cada cone contém metade da areia. Nesse instante, a areia no cone **B** forma um cone de altura:



- a)  $\frac{H}{\sqrt{3}}$     b)  $\frac{H}{2}$     c)  $\frac{H}{\sqrt[3]{2}}$   
d)  $\frac{H}{\sqrt[3]{3}}$     e)  $\frac{H}{4}$

## Módulo 26 – A Esfera e suas Partes

1. (UNESP-SP) – Seja  $r$  um número real positivo e  $P$  um ponto do espaço. O conjunto formado por todos os pontos do espaço que estão a uma distância de  $P$  menor ou igual a  $r$ , é:

- um segmento de reta medindo  $2r$  e tendo  $P$  como ponto médio.
- um cone cuja base é um círculo de centro  $P$  e raio  $r$ .
- um cilindro cuja base é um círculo de centro  $P$  e raio  $r$ .
- uma esfera de centro  $P$  e raio  $r$ .
- um círculo de centro  $P$  e raio  $r$ .

2. (UNIFENAS-MG) – O volume de uma esfera cresce 72,8% quando o raio dessa esfera aumenta:

- 26%
- 25%
- 24%
- 20%
- 15%

3. (FUVEST-SP) – Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm de centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm, é:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

4. (UFLA-MG) – A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo de  $16\pi \text{ dm}^2$  de área. Sabendo-se que o plano dista 3 dm do centro da esfera, o volume da esfera é:

- $100\pi \text{ dm}^3$
- $\frac{100}{3}\pi \text{ dm}^3$
- $400\pi \text{ dm}^3$
- $500\pi \text{ dm}^3$
- $\frac{500}{3}\pi \text{ dm}^3$

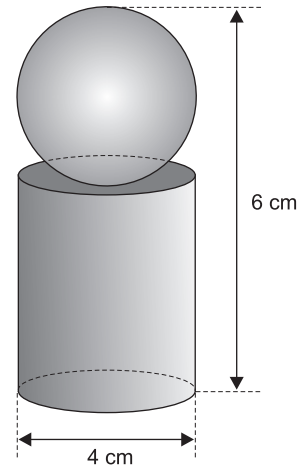
5. (FUVEST-SP) – Um recipiente cilíndrico cujo raio da base é 6 cm contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é:

- 1 cm
- 2 cm
- 3 cm
- 4 cm
- 5 cm

6. (UNESP-SP) – Um copinho de sorvete, em formato de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semi-esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:

- não transbordará.
- transbordará.
- os dados são insuficientes.
- os dados são incompatíveis.
- todas as afirmações anteriores são falsas.

7. (FAAP-SP) – Uma indústria metalúrgica produzirá três mil “pesos de papel”, projetados conforme a figura a seguir. Observe que cada um daqueles pesos é formado por um cilindro reto e uma esfera de mesmo diâmetro. O volume de aço necessário para a produção das três mil peças é:



- $56\pi \text{ m}^3$
- $5,6\pi \text{ m}^3$
- $0,056\pi \text{ m}^3$
- $560\pi \text{ m}^3$
- $0,56\pi \text{ m}^3$

8. (UNICENTRO-PR) – Numa festa de aniversário, o vinho foi servido em taças de cristal de forma cônica, conforme a figura seguinte. A abertura das taças é de 4 cm de raio interno com profundidade de 12 cm. A pérola do colar de uma das convidadas da festa deslocou-se e foi cair dentro de uma taça. Se a pérola tem formato esférico de 1 cm de raio, qual a menor distância, em centímetros, da pérola em relação ao fundo da taça?



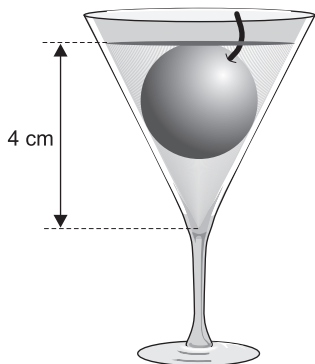
- 4
- $\sqrt{10}$
- $\sqrt{10} - 1$
- 3
- 2

9. (FGV) – Deseja-se construir um galpão em forma de um hemisfério para uma exposição. Se para o revestimento do piso utilizaram-se  $78,5 \text{ m}^2$  de lona, quantos metros quadrados se utilizariam na cobertura do galpão?

- 31,4
- 80
- 157
- 208,2
- 261,66



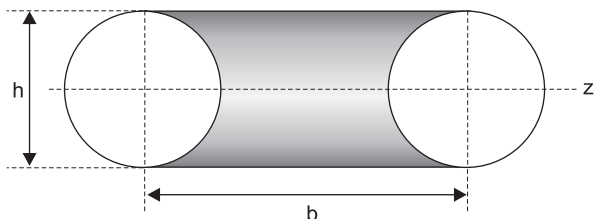
10. (FUVEST-SP) – Um cálice com a forma de cone contém  $V \text{ cm}^3$  de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2 cm, é colocada dentro do cálice. supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir da vértice do cone, determinar o valor de  $V$ .



11. (CESGRANRIO) – Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio  $R$ , composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

- a)  $2\pi R^2$       b)  $\frac{1}{3}\pi R^2$       c)  $\frac{3}{4}\pi R^2$   
 d)  $3\pi R^2$       e)  $\frac{4}{3}\pi R^2$

12. (ITA-SP) – Considere um retângulo de altura  $h$  e base  $b$  e duas circunferências com diâmetro  $h$  e centros nos lados do retângulo, conforme a figura a seguir. Seja  $z$  um eixo que passa pelo centro destas circunferências. Calcule a área da superfície do sólido gerado pela rotação da região hachurada em torno do eixo  $z$ .



- a)  $\pi h(b-h)$       b)  $\pi h(b+h)$       c)  $\pi b(b-h)$   
 d)  $\pi b(b+h)$       e)  $\pi bh$

13. (MACKENZIE) – Um frasco de perfume de forma esférica, com raio de 4 cm, contém perfume em  $\frac{1}{4}$  de seu volume total. Se uma pessoa utilizar, todos os dias, 2 ml do perfume, das alternativas abaixo, a que indica o maior período de tempo de duração do perfume é

- a) 16 dias.      b) 31 dias.      c) 26 dias.  
 d) 54 dias.      e) 43 dias.

14. (MACKENZIE) – Um tanque de gás tem a forma de um cilindro de 4m de comprimento, acrescido de duas semiesferas, de raio 2m, uma em cada extremidade, como mostra a figura.



Adotando  $\pi = 3$ , a capacidade total do tanque, em  $\text{m}^3$ , é  
 a) 80.      b) 70.      c) 60.      d) 55.      e) 50.

15. (MACKENZIE) – Uma esfera de raio  $R$  cortada por dois planos paralelos, um deles passando por seu centro, obtendo-se, assim, dois círculos cujas áreas estão na razão de 1 para 4. A distância  $d$  entre os dois planos, em função de  $R$ , é

- a)  $d = \frac{2R}{\sqrt{3}}$       b)  $d = \frac{R}{2}$       c)  $d = \frac{R\sqrt{3}}{2}$   
 d)  $d = \frac{R\sqrt{3}}{3}$       e)  $d = R\sqrt{2}$

16. (UNESP) – O trato respiratório de uma pessoa é composto de várias partes, dentre elas os alvéolos pulmonares, pequeninos sacos de ar onde ocorre a troca de oxigênio por gás carbônico. Vamos supor que cada alvéolo tem forma esférica e que, num adulto, o diâmetro médio de um alvéolo seja, aproximadamente, 0,02 cm. Se o volume total dos alvéolos de um adulto é igual a  $1\,618 \text{ cm}^3$ , o número aproximado de alvéolos dessa pessoa, considerando  $\pi = 3$ , é:

- a)  $1\,618 \times 10^3$ .      b)  $1\,618 \times 10^4$ .      c)  $5\,393 \times 10^2$ .  
 d)  $4\,045 \times 10^4$ .      e)  $4\,045 \times 10^5$ .

17. (FGV) – Uma pirâmide reta de base quadrada e altura de 4 m está inscrita numa esfera de raio 4 m. Adotando  $\pi = 3$ , pode-se afirmar que

- a)  $V_{\text{esfera}} = 6 \cdot V_{\text{pirâmide}}$       b)  $V_{\text{esfera}} = 5 \cdot V_{\text{pirâmide}}$   
 c)  $V_{\text{esfera}} = 4 \cdot V_{\text{pirâmide}}$       d)  $V_{\text{esfera}} = 3 \cdot V_{\text{pirâmide}}$   
 e)  $V_{\text{esfera}} = 2 \cdot V_{\text{pirâmide}}$

## Módulo 27 – Inscrição e Circunscrição de Sólidos

1. (FEI) – Sendo  $S$  a área de uma superfície esférica e  $P$  a área lateral do cilindro circunscrito, tem-se:

- a)  $S = P$       b)  $S < P$       c)  $S > P$   
 d)  $S = \frac{5\sqrt{3}}{2}$       e)  $P = 2S$

2. (PUC) – O volume de um cone equilátero circunscrito a uma esfera de raio  $R$  é:

- a)  $\pi R^3$       b)  $2\pi R^3$       c)  $3\pi R^3$       d)  $4\pi R^3$       e)  $5\pi R^3$

3. (FEI) – Se um cubo de aresta  $a$  está inscrito numa esfera de raio  $r$ , então vale a relação:

- a)  $a = 2r\sqrt{2}$       b)  $a\sqrt{3} = 2r$       c)  $a = 2r$

- d)  $a = \frac{r\sqrt{3}}{3}$       e)  $2a = r\sqrt{3}$

4. (UFMG) – A razão entre as áreas totais de um cubo e do cilindro reto nele inscrito, nessa ordem, é:

- a)  $\frac{2}{\pi}$       b)  $\frac{3}{\pi}$       c)  $\frac{4}{\pi}$       d)  $\frac{5}{\pi}$       e)  $\frac{6}{\pi}$

5. (MACKENZIE) – A razão entre o volume de uma esfera e o volume de um cilindro circular reto circunscrito a esta esfera é igual a:

- a)  $\frac{4}{3}$       b)  $\frac{2}{3}$       c)  $\sqrt{3}$       d)  $\frac{1}{3}$       e)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. (MACKENZIE) – O volume do cubo circunscrito a uma esfera em função do volume  $V$  da esfera é:

- a)  $\frac{3V}{4\pi}$       b)  $\frac{4V}{3\pi}$       c)  $\frac{6V}{\pi}$       d)  $\frac{\pi}{3V}$       e)  $\pi V$

7. (FUVEST) – Um cilindro de revolução está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo. Se representarmos por  $V_1$  o volume do cilindro e por  $V_2$  o volume do paralelepípedo, podemos escrever que:

- a)  $\pi V_2 = 4V_1$       b)  $4V_2 = \pi V_1$       c)  $\pi V_1 = V_2$

- d)  $V_1 = \pi V_2$       e)  $V_2 = 2\pi V_1$

8. (FUVEST) – A área de uma esfera, a área total do cilindro equilátero circunscrito a ela e a área total do cone equilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:

- a) 1, 2, 3      b)  $0, 1, \frac{1}{2}$       c)  $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$

- d)  $\pi, \pi^2, \pi^3$       e) 4, 6, 9

9. (MACKENZIE) – Um tetraedro regular é inscrito numa superfície esférica de 12 cm de diâmetro. O volume do tetraedro é igual a:

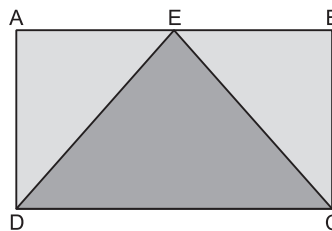
- a)  $24\sqrt{3} \text{ cm}^3$       b)  $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$

- c)  $64\sqrt{3} \text{ cm}^3$       d)  $88\sqrt{3} \text{ cm}^3$

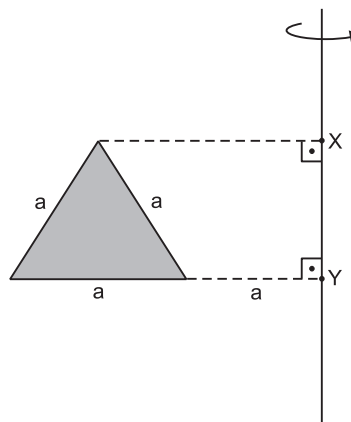
- e)  $128\sqrt{3} \text{ cm}^3$

10. (PUCCAMP) – Num trapézio isósceles, a base maior mede 4 cm, a base menor 2 cm e a altura 1 cm. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução de  $360^\circ$  da superfície do trapézio em torno da base maior.

11. (FUVEST) – Na figura, ABCD é um retângulo, sendo  $BC = BE = EA = r$ . Ache, em função de  $r$ , o volume gerado pelo triângulo EDC, quando o retângulo dá uma volta completa em torno de AB.



12. (MACKENZIE) – Calcule a área e o volume gerados pela rotação da figura dada em torno do eixo XY.



- a)  $9\pi a^2 e \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi a^3$       b)  $6\pi a^2 e \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi a^3$

- c)  $9\pi a^2 e \frac{5\sqrt{5}}{3} \pi a^3$       d)  $6\pi a^2 e \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^3$

- e)  $9\pi a^2 e \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi a^3$

## Módulos 28 e 29 – Paralelismo, Perpendicularismo no Espaço e Projeções Ortogonais

1. (FEI) – Na determinação de um plano são suficientes os seguintes elementos:

- a) duas retas distintas      b) uma reta e um ponto  
c) três pontos distintos      d) duas retas concorrentes  
e) duas retas reversas

2. (FUND. CARLOS CHAGAS-SP) – Quatro pontos distintos e não coplanares determinam exatamente:

- a) 1 plano      b) 2 planos      c) 3 planos  
d) 4 planos      e) 5 planos

3. (PUC-SP) – Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

- Se duas retas distintas não são paralelas elas são concorrentes.
- Duas retas não coplanares são reversas.
- Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas.
- Se três retas são paralelas, existe um plano que as contém.
- Se três retas distintas são duas a duas concorrentes, elas determinam um e um só plano.

4. (ITA) – Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

- Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
- Um ponto e uma reta determinam um plano.
- Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
- Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.
- Se  $\alpha$  é o plano determinado por duas retas concorrentes  $r$  e  $s$ , então toda reta  $m$  desse plano, que é paralela à  $r$ , não será paralela à reta  $s$ .

5. (MACKENZIE-SP) – A reta  $r$  é paralela ao plano  $\alpha$ . Então:

- todas as retas de  $\alpha$  são paralelas a  $r$ .
- a reta  $r$  não pode ser coplanar com nenhuma reta de  $\alpha$ .
- existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e também existem em  $\alpha$  retas reversas com  $r$ .
- existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e também retas perpendiculares a  $r$ .
- todo plano que contém  $r$  é paralelo a  $\alpha$ .

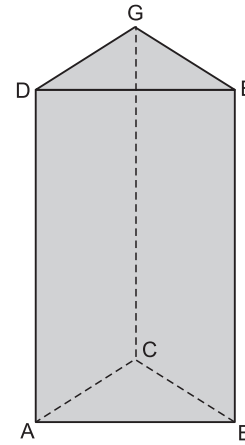
6. (ESPCEX-SP) – Se a reta  $r$  é paralela ao plano  $\alpha$ , então:

- todas as retas de  $\alpha$  são paralelas a  $r$ .
- existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e retas reversas a  $r$ .
- existem em  $\alpha$  retas paralelas a  $r$  e retas perpendiculares a  $r$ .
- todo plano que contém  $r$  intercepta  $\alpha$ , segundo uma reta paralela a  $r$ .

7. (FAAP-SP) – Duas retas são reversas quando:

- não existe plano que contém ambas;
- existe um único plano que as contém;
- não se interceptam;
- não são paralelas;
- são paralelas, mas estão contidas em planos distintos.

8. (FUVEST) – Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa  $\overline{CG}$ . A formiga chegou ao vértice



- a) A      b) B      c) C      d) D      e) E

9. (FEI-SP) – Sejam quatro pontos A, B, C e D não coplanares. O número de planos determinados por dois desses pontos e pelo ponto médio do segmento que liga os outros dois é:

- a) 4      b) 6      c) 8      d) 10      e) infinitos

10. (MACKENZIE) – Assinale a afirmação correta.

- Não existem ângulos de lados paralelos, não congruentes.
- Não existem retas distintas, perpendiculares a uma reta  $r$ , passando por um ponto  $P$  de  $r$ .
- Não existem retas distintas, concorrentes, perpendiculares a um plano  $\alpha$ .
- Não existem retas paralelas e distintas, perpendiculares a um mesmo plano.
- Não existem retas paralelas a dois planos não paralelos.

11. (MACKENZIE-SP) – A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ . Então:

- Todas as retas de  $\alpha$  são paralelas a  $r$ .
- a reta  $r$  não pode ser coplanar com nenhuma reta de  $\alpha$ .
- existem em  $\alpha$  retas perpendiculares a  $r$  e também existem em  $\alpha$  retas reservas em relação a  $r$ .
- existem em  $\alpha$  retas paralelas e retas perpendiculares a  $r$ .
- todo plano que contém  $r$  é paralelo a  $\alpha$ .

12. (MACKENZIE) – Considere as afirmações:

- Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles ou está contida no outro, ou é paralela a esse outro.
- Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas ou coincidentes.
- Um plano perpendicular a uma reta de um outro plano é perpendicular a este último plano.

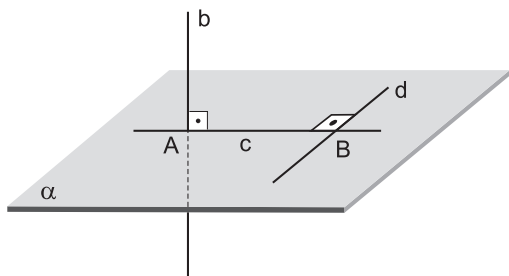
Então:

- todas são verdadeiras.
- somente a afirmação I é verdadeira.
- somente a afirmação II é verdadeira.
- somente as afirmações II e III são verdadeiras.
- nenhuma afirmação é verdadeira.

13. (UELON) – Considere dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ , distintos e paralelos entre si, ambos perpendiculares a um plano  $\lambda$ . Suponha que a reta  $r$  seja a intersecção de  $\alpha$  e  $\lambda$  e que a reta  $s$  esteja contida em  $\beta$ , mas não em  $\lambda$ . Nessa situação, as retas  $r$  e  $s$  são:
- sempre coincidentes.
  - sempre reversas.
  - paralelas entre si ou reversas.
  - sempre paralelas entre si.
  - perpendiculares entre si ou coincidentes.

14. (FATEC) – Seja  $A$  um ponto pertencente à reta  $r$ , contida no plano  $\alpha$ . É verdade que:
- existe uma única reta que é perpendicular à reta  $r$  no ponto  $A$ .
  - existe uma única reta, não contida no plano  $\alpha$ , que é paralela à  $r$ .
  - existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano  $\alpha$ , que contém a reta  $r$ .
  - existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano  $\alpha$  e que contém a reta  $r$ .
  - existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano  $\alpha$  e que são paralelas à reta  $r$ .

15. (FATEC) – Na figura abaixo tem-se: o plano  $\alpha$  definido pelas retas  $c$  e  $d$ , perpendiculares entre si; a reta  $b$ , perpendicular a  $\alpha$  em  $A$ , com  $A \in c$ ; o ponto  $B$ , intersecção de  $c$  e  $d$ . Se  $x$  é um ponto de  $b$ ,  $x \notin \alpha$ , então a reta  $s$ , definida por  $x$  e  $B$ ,



- é paralela à reta  $c$ .
- é paralela à reta  $b$ .
- está contida no plano  $\alpha$ .
- é perpendicular à reta  $d$ .
- é perpendicular à reta  $b$ .

16. (FAAP) – A única proposição falsa é:
- no espaço, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
  - uma reta perpendicular a duas retas de um plano é perpendicular ao plano.
  - dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.
  - um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a este plano.
  - um plano perpendicular a dois planos que se interceptam é perpendicular à reta de intersecção destes.

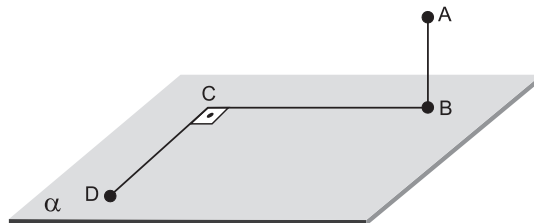
17. (UNAERP) – Consideremos num plano  $\alpha$  uma circunferência de diâmetro  $AB$ . Seja  $P$  um ponto dessa circunferência distinto de  $A$  e  $B$ . Pelo ponto  $P$  tracemos uma reta  $r$  perpendicular a  $\alpha$ . Sendo  $T$  um ponto de  $r$  distinto de  $P$ , então

é correto afirmar que:

- o triângulo  $ABP$  não é retângulo.
- o plano determinado por  $A$ ,  $B$  e  $T$  pode ser perpendicular a  $\alpha$ .
- o triângulo  $ABT$  pode ser retângulo em  $T$ .
- as retas  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{AT}$  são ortogonais.
- a área do triângulo  $ABT$  pode ser igual à área do triângulo  $ABP$ .

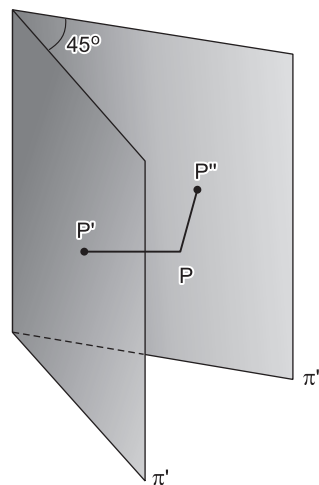
18. (FUVEST) – O segmento  $AB$  é um diâmetro de uma circunferência e  $C$  um ponto dela, distinto de  $A$  e de  $B$ . A reta  $VA$ ,  $V \neq A$ , é perpendicular ao plano da circunferência. O número de faces do tetraedro  $VABC$  que são triângulos retângulos é:
- 0
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4

19. (UNESP) – Na figura abaixo o segmento  $AB$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ ,  $CD$  e  $BC$  estão contidos nesse plano e  $CD$  é perpendicular a  $BC$ . Se  $AB = 2$  cm,  $BC = 4$  cm e  $CD = 3$  cm, ache a distância de  $A$  a  $D$ .



## Módulo 30 – Poliedros Convexos e Regulares

1. (FUVEST) – Sejam  $\pi'$  e  $\pi''$  as faces de um ângulo diedro de  $45^\circ$  e  $P$  um ponto interior a esse diedro. Sejam  $P'$  e  $P''$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $\pi'$  e  $\pi''$  respectivamente. Então a medida, em graus, do ângulo  $P'P''$  é:



- 30
- 45
- 60
- 90
- 135

2. (FEI-SP) – Num triedro  $V(abc)$  as faces **ac** e **bc** medem  $45^\circ$  cada uma e formam um diedro reto. A face **ab** mede:

- a)  $30^\circ$    b)  $45^\circ$    c)  $60^\circ$    d)  $90^\circ$    e)  $120^\circ$

3. (ITA) – Numa superfície poliédrica convexa aberta, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então o número de arestas é:

- a) 8   b) 11   c) 12   d) 13   e) 14

4. (ITA) – Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas desse poliedro é:

- a) 12   b) 18   c) 28   d) 30   e) 32

5. (PUC-SP) – O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces, todas triangulares é:

- a) 4   b) 12   c) 10   d) 6   e) 8

6. (PUC-SP) – Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas pentagonais. Então o número de face  $F$ , o número de arestas  $A$  e o número de vértices  $V$  do poliedro são:

- a)  $F = 7, A = 10$  e  $V = 12$    b)  $F = 5, A = 9$  e  $V = 12$   
c)  $F = 7, A = 6$  e  $V = 10$    d)  $F = 5, A = 12$  e  $V = 9$   
e)  $F = 7, A = 15$  e  $V = 10$

7. (MACKENZIE-SP) – Sabe-se que um poliedro convexo tem 8 faces e que o número de vértices é maior que 6 e menor que 14. Então o número  $A$  de arestas é tal que:

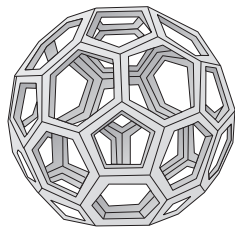
- a)  $14 \leq A \leq 20$    b)  $14 < A < 20$   
c)  $13 < A < 19$    d)  $13 \leq A \leq 19$   
e)  $17 \leq A \leq 20$

8. (UNIRIO) – Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

- a) 16   b) 18   c) 24   d) 30   e) 44

9. (CESGRANRIO) – O poliedro da figura (uma invenção de Leonardo da Vinci utilizada modernamente na fabricação de bolas de futebol) tem como faces 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. O número de vértices do poliedro é:

- a) 64  
b) 90  
c) 60  
d) 72  
e) 56



10. (CESGRANRIO) – Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedro é:

- a) 80   b) 60   c) 50   d) 48   e) 36

11. (MACKENZIE-SP) – Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 4 quadrangulares e 5 pentagonais. O número de vértices desse poliedro é:

- a) 13   b) 25   c) 9   d) 12   e) 15

12. (PUCCAMP) – Se um poliedro convexo possui 16 faces triangulares, então o seu número de vértices é igual a:

- a) 24   b) 20   c) 16   d) 12   e) 10

13. (UNIFENAS) – O número de faces de um poliedro convexo que possui oito ângulos poliédricos, todos triédricos, é:

- a) 8   b) 6   c) 10   d) 12   e) 14

14. (UNIRIO) – Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

- a) 35   b) 34   c) 33   d) 32   e) 31

15. (UNICENTRO) – Segundo o matemático suíço Leonhard Euler, em todo poliedro convexo de  $V$  vértices,  $A$  arestas, e  $F$  faces, vale a relação:

- a)  $V + F + A = 2$    b)  $V + 2 = A + F$    c)  $V - F + A = 2$   
d)  $V = F + A + 2$    e)  $V - A + F = 2$

16. (FUVEST) – O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui

- a) 33 vértices e 22 arestas.   b) 12 vértices e 11 arestas.  
c) 22 vértices e 11 arestas.   d) 11 vértices e 22 arestas.  
e) 12 vértices e 22 arestas.

17. (MACKENZIE) – A soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide é  $18\pi$  radianos. Então o número de lados do polígono da base da pirâmide é:

- a) 8   b) 9   c) 10   d) 11   e) 12

18. (MACKENZIE) – Veja  $V$  o vértice de uma pirâmide. Cada uma de suas faces laterais tem no vértice  $V$  um ângulo de  $50^\circ$ . O número máximo de faces laterais dessa pirâmide é:

- a) 5   b) 6   c) 7   d) 8   e) 9

19. (FAAP) – Considere um tetraedro regular e um plano que o intercepta. A única alternativa correta é:

- a) a intersecção pode ser um quadrilátero.  
b) a intersecção é sempre um triângulo.  
c) a intersecção é sempre um triângulo equilátero.  
d) a intersecção nunca é um triângulo equilátero.  
e) a intersecção nunca é um quadrilátero.



20. Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de um:

- a) tetraedro      b) hexaedro      c) octaedro  
d) dodecaedro      e) icosaedro

21. (FUND.CARLOS CHAGAS-SP) – O tetraedro regular ABCD tem centro O. O ângulo diedro de faces OAB e OAC mede:

- a)  $30^\circ$     b)  $60^\circ$     c)  $120^\circ$     d)  $135^\circ$     e)  $150^\circ$

22. (FUND.CARLOS CHAGAS-SP) – Qual é o ângulo diédrico formado por duas faces de um mesmo tetraedro regular?

- a)  $\text{arc sen } \frac{1}{3}$       b)  $\text{arc sen } \frac{2}{3}$       c)  $\text{arc cos } \frac{1}{3}$

- d)  $\text{arc cos } \frac{1}{2}$       e)  $\text{arc cos } \frac{2}{3}$

23. (PUC-SP) – O poliedro regular que possui 20 vértices, 30 arestas e 12 faces, denomina-se:

- a) tetraedro      b) icosaedro      c) hexaedro  
d) dodecaedro      e) octaedro

24. (UNIMEP) – O hexaedro regular é um poliedro com:

- a) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices;  
b) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices;  
c) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices;  
d) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices;  
e) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices.