Aula 7

Somando "de cabeça"

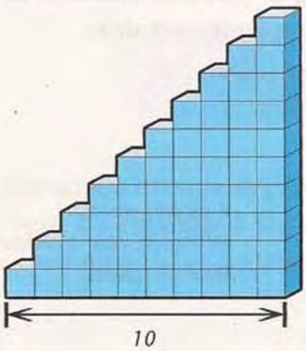
Observando a forma como cresce esta seqüência de números, você consegue descobrir quais são os números que vêm depois?

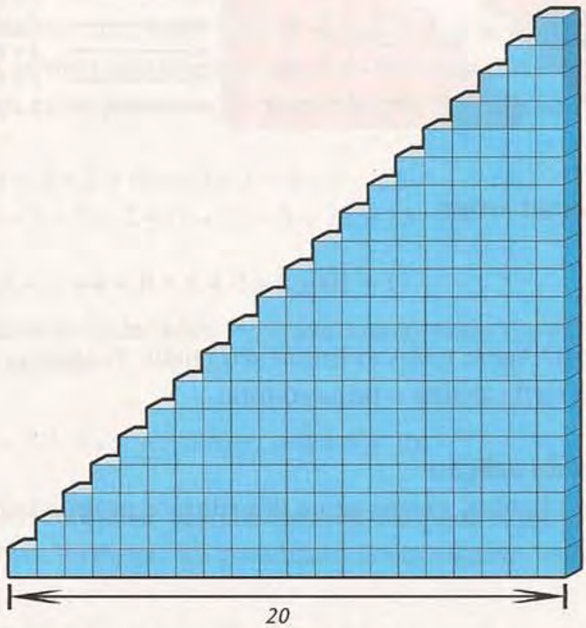
1, 3, 6, 10, 15, ..., ..., ..., ...

Nesta aula, vamos conhecer as propriedades da adição. Com elas, você simplifica muitos cálculos. Mas antes veja o Exemplo 1, no qual uma boa idéia também tornou o trabalho mais simples.

Exemplo 1

Alguém resolveu empilhar tijolões em forma de escada, como mostram as figuras:





a) Quantos tijolões são necessários para, empilhando-os todos, obter uma escada de 10 degraus, como na figura da esquerda?

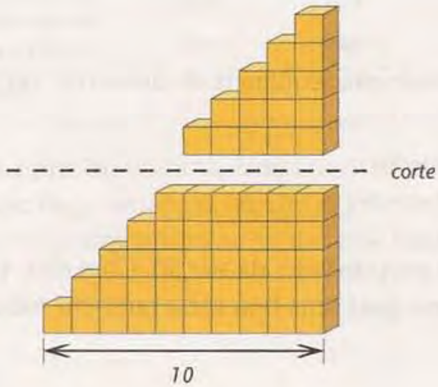
b) E de 20 degraus, como na figura da direita?

Talvez você resolva a questão da escada de 10 degraus (item "a") só contando os tijolões. É um método lento, mas neste caso funciona.

Já para a escada de 20 degraus (item "b"), essa contagem direta nos deixa um pouco impacientes. O método não é só lento, é pouco prático também.

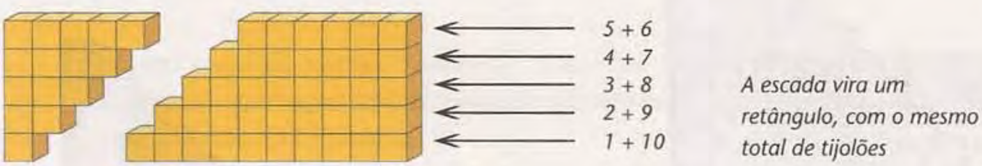
De fato, se sairmos contando os tijolões um por um, não estaremos levando em conta que eles não estão jogados ao acaso, e sim organizados em forma de escada. Vamos ver, então, uma idéia que permite saber quantos tijolões existem em cada escada sem contá-los de um em um.

Considere a escada menor. Ela tem 10 degraus. Vamos então cortá-la, como mostra a figura abaixo.



Acima da linha do corte, formamos uma pequena escada de 5 degraus. Vamos colocá-la de cabeça para baixo, ao lado da parte que sobrou da escada, como mostra a figura seguinte.

Veja: as duas partes podem se encaixar e formar um retângulo.



Vamos então somar assim:

$$1 + 10 + 2 + 9 + 3 + 8 + 4 + 7 + 5 + 6$$

O que aconteceu? Agora todas as linhas são iguais. Possuem o mesmo número de tijolões. Fica realmente mais fácil calcular o número total.

Propriedades da adição

Para simplificar cálculos, vamos agora descobrir as propriedades da adição.

Propriedade comutativa

Esses métodos alternativos, que nos permitem realizar cálculos longos em pouco tempo, baseiam-se numas poucas propriedades dos números.

A propriedade que permite trocar (ou comutar) a posição de quaisquer dois números de uma soma é chamada propriedade comutativa da adição de números. Ela afirma que:

A ordem das parcelas não altera a soma.

Por exemplo: $9 + 10 = 19$
$10 + 9 = 19$

Portanto: $9 + 10 = 10 + 9$

Assim, se temos vários números para somar, podemos escrevê-los em qualquer ordem.

Propriedade associativa

A outra propriedade da adição que usamos muito é a que nos permite escrever uma soma como $3 + 5 + 7$ sem precisar indicar com parênteses que somas devemos calcular primeiro.

Pois, segundo a propriedade associativa:

A ordem em que se juntam as parcelas não altera a soma.

Esta propriedade diz que as parcelas de uma soma podem se juntar (ou se associar) de qualquer modo. Veja, no exemplo a seguir, como calculamos a soma $3 + 5 + 7$ de duas maneiras diferentes. Em cada uma delas, indicamos entre parênteses a operação que faremos primeiro.

$$3 + 5 + 7 = (3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15$$
$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15$$

Os resultados foram, é claro, iguais.

Com o conhecimento dessas duas propriedades, veja como resolvemos o problema da escada de 10 degraus de forma simples e rápida.

Devemos calcular a soma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Pela propriedade comutativa, sabemos que as parcelas dessa soma podem ser escritas em qualquer ordem. Como o desenho da escada de cabeça para baixo já nos sugeriu, escrevemos as parcelas na seguinte ordem:

$$1 + 10 + 2 + 9 + 3 + 8 + 4 + 7 + 5 + 6$$

Pela propriedade associativa, vemos que é conveniente juntar as parcelas de duas em duas. Assim:

$$(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6)$$

Dessa forma, a nossa soma será:

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

e o resultado será 55. Temos então 55 tijolões na escada de 10 degraus.

Essas duas propriedades da adição são, portanto, muito úteis. Como também é o caso da próxima propriedade, relativa à subtração de números.

Propriedade da subtração

Como você calcularia o resultado, entre ganhos e perdas, de um problema com os seguintes números?

GANHOS	PERDAS
190	101
80	99

O total de ganhos é $190 + 80 = 270$.
O total de perdas é $101 + 99 = 200$.

Logo, o resultado do problema é o total de ganhos (270) menos o total de perdas (200), ou seja:

$$270 - 200 = 70$$

Você poderia ter chegado ao mesmo resultado raciocinando da seguinte forma:

1º ganho	190
subtraindo a 1ª perda	– 101
	89
acrescentando o 2º ganho	+ 80
	169
subtraindo a 2ª perda	– 99
saldo	70

O resultado foi o mesmo, e não por acaso. Podemos dizer que:

> Assim como se somam os ganhos, também se somam as perdas para formar o total de perdas.

Compreendemos então que, para fazer uma conta do tipo: $190 - 101 + 80 - 99$, podemos somar os ganhos, somar as perdas e depois subtrair os totais. Assim, é mais prático fazer a operação acima da seguinte forma:

$$\underbrace{(190 + 80)}_{\text{total de ganhos}} - \underbrace{(101 + 99)}_{\text{total de perdas}}$$

Um pouco de história

O problema do pequeno Gauss

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado por alguns o "Príncipe da Matemática". Conta-se que, quando Gauss era ainda um garoto de escola, em certo dia em que a turma estava especialmente agitada, o professor teve a idéia de ocupar os alunos por um tempo. E deu-lhes um problema: que todos calculassem a soma dos números 1, 2, 3, etc., até 100, isto é:


Carl Friedrich Gauss

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$$

Para surpresa e desolação do professor, pouco tempo depois o pequeno Carl Gauss rompia o silêncio: "Dá 5 050", acertando a resposta... e levando a turma à algazarra usual!

Você pode imaginar como o "Príncipe da Matemática" fez rapidamente essa conta? Pense. O raciocínio é semelhante ao que usamos no problema da escada.

Atividades

Faça no seu caderno.

1. Calcule, efetuando primeiro o que está dentro dos parênteses (...) e depois o que está nos colchetes [...]:
   a) $7 + (93 + 48) =$
   b) $(7 + 93) + 48 =$
   c) $[(11 + 141) + (70 + 23)] + 4 =$
   d) $11 + [(141 + 70) + (23 + 4)] =$
   e) $(72 - 7) + (151 - 98) =$
   f) $(72 + 151) - (7 + 98) =$
   g) $[(72 + 151) - 7] - 98 =$

2. Para cada uma das propriedades abaixo:
   a) Dê um exemplo de seu uso.
   b) Escreva o que ela diz.

   Propriedades:
   I. comutativa da adição
   II. associativa da adição

3. Pegue a sua última conta de supermercado, ou outra conta recente, marque o valor total e use-a para resolver esta atividade.

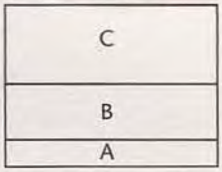
   I. Verifique se o total está correto, fazendo isso de pelo menos dois modos diferentes. Por exemplo:
   a) Efetuando as somas na ordem em que as parcelas aparecem.
   b) Procurando somas que dêem 10.

   II. Compare os resultados.

4. Calcule o saldo da movimentação de uma conta bancária, baseando-se no extrato bancário abaixo.

Saldo anterior	23
Retirada	7 –
Depósito	18
Depósito	43
Retirada	12 –
Retirada	10 –
Retirada	15 –
Retirada	24 –
Depósito	32
Saldo =	....

5. Você tem 3 pacotes: A, B e C, de alturas diferentes, e colocou um em cima do outro.



   Se mudar a ordem dos pacotes na pilha, a altura total vai mudar? Por quê?

6. Calcule o número de tijolões necessários para fazer uma escada de 20 degraus.

7. Curiosidade numérica
   Calcule de "cabeça":
   a) $1 + 2 =$
   b) $1 + 2 + 4 =$
   c) $1 + 2 + 4 + 8 =$
   d) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 =$
   e) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =$
   f) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 =$