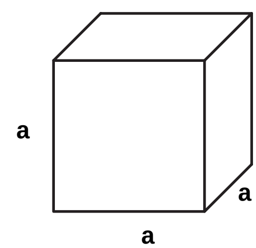
AULA

58

Calculando volumes

Para pensar

- Considere um cubo de aresta **a**:

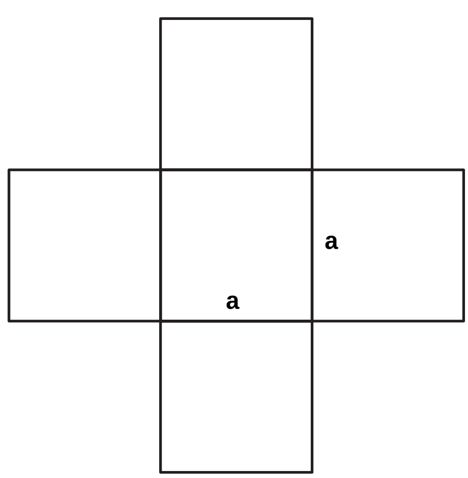


Para construir um cubo cuja aresta seja o dobro de **a**, de quantos cubos de aresta **a** precisaremos?

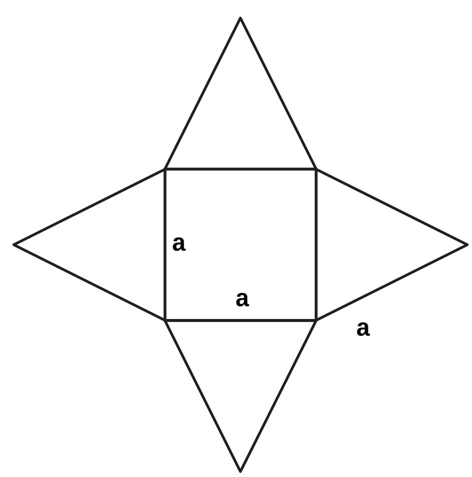
- Pegue uma caixa de fósforos e uma caixa de sapatos. Considerando a caixa de fósforos como unidade de medida, qual o volume da caixa de sapatos?

- Com cartolina, ou algum outro papel encorpado, construa um cubo e uma pirâmide de base quadrada de tal forma que:
  - a base da pirâmide seja um quadrado igual à face do cubo;
  - a altura da pirâmide seja igual à medida da aresta do cubo.

  Nessas condições, qual a relação entre os volumes da pirâmide e do cubo?



Esquema do cubo (sem tampa)



Esquema da pirâmide de base quadrada

Nossa aula

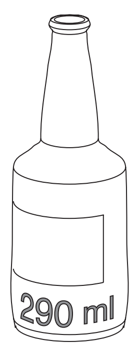
Na Aula 15, estudamos que os objetos têm área, volume e forma. Vimos também que existem objetos com mesmo volume e formas diferentes.

Nesta aula, estudaremos um pouco mais esse assunto, aprendendo a calcular o volume de alguns sólidos. Mas, antes, veremos algumas situações que envolvem a idéia de volume e capacidade:

VOLUME DE	CAPACIDADE DE
• areia retirada de um rio • entulho retirado de uma obra • dejetos poluentes despejados nos rios, lagos ou mares	• uma garrafa • uma seringa • uma caixa d'água • ar dos nossos pulmões

Medir o volume ou a capacidade de um objeto é saber a quantidade de espaço que ele ocupa ou de que dispõe para armazenar.

EXEMPLO 1



Esta garrafa está cheia. Ela contém 290 mililitros (290 mℓ) de refrigerante:

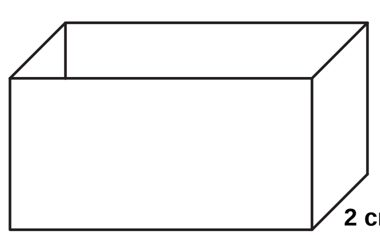
Volume = 290 mℓ

Isso significa que 290 mℓ é a quantidade de líquido que a garrafa pode armazenar:

Capacidade = 290 mℓ

EXEMPLO 2

Para encher uma caixa d'água de 2 metros de comprimento por 2 metros de largura e 1 metro de profundidade, foram necessários 4.000 litros de água.

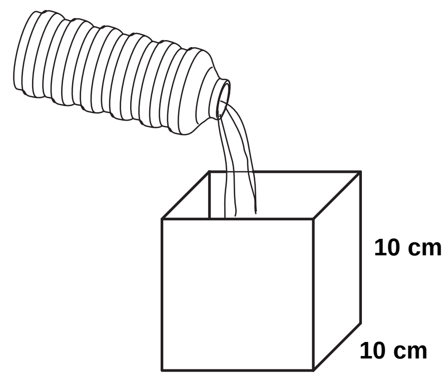


Volume da caixa d'água = 2 m x 2 m x 1 m = 4 m^3
Capacidade da caixa d'água = 4.000 litros

As unidades de volume e de capacidade são estabelecidas pela seguinte relação:

$$\boxed{1\ell = 1.000\ \text{cm}^3}$$

Isto é, se tivermos um cubo oco com 10 cm de aresta, podemos colocar nesse cubo, exatamente, 1 litro de líquido (água, suco, leite, óleo etc.).



Outras relações, decorrentes dessa, também são bastante utilizadas:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 1\ \text{m}^3 & = & 1.000\ \ell \\ 1\ \text{cm}^3 & = & 1\ \text{m}\ell \end{array}}$$

As unidades de medida de volume fazem parte do Sistema Decimal de Medidas. As mais usadas são:

metro cúbico (m^3)
decímetro cúbico (dm^3)
centímetro cúbico (cm^3)
milímetro cúbico (mm^3)

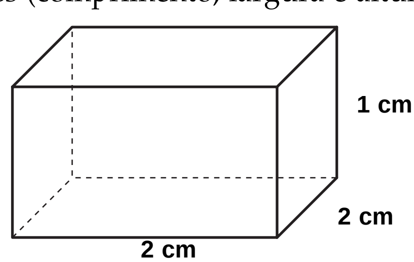
$$\boxed{1\ \text{m}^3 = 1.000\ \text{dm}^3 = 1.000.000\ \text{cm}^3 = \ldots}$$

Desse modo são necessários 1.000.000 de cubinhos de 1 cm de aresta para formar um cubo de 1 m de aresta.

Volume do paralelepípedo

Paralelepípedo é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de uma caixa de sapato, de um tijolo etc. Na verdade, a definição de paralelepípedo é mais geral. Se quisermos ser mais precisos, uma caixa de sapato é um paralelepípedo reto de base retangular.

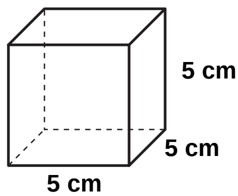
Na Aula 15, calculamos o volume do paralelepípedo, multiplicando suas dimensões (comprimento, largura e altura):



$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

EXEMPLO 3

Qual o volume do cubo cuja aresta mede 5 cm? (Lembre-se de que o cubo é um paralelepípedo cujas dimensões têm a mesma medida).



$$V = 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 125\ \text{cm}^3$$

Imagine que esse cubo seja oco. Quantos litros de água seriam necessários para enchê-lo até a boca?

Como: $1\ \ell = 1.000\ \text{cm}^3$
Então, fazendo uma regra de três, temos:

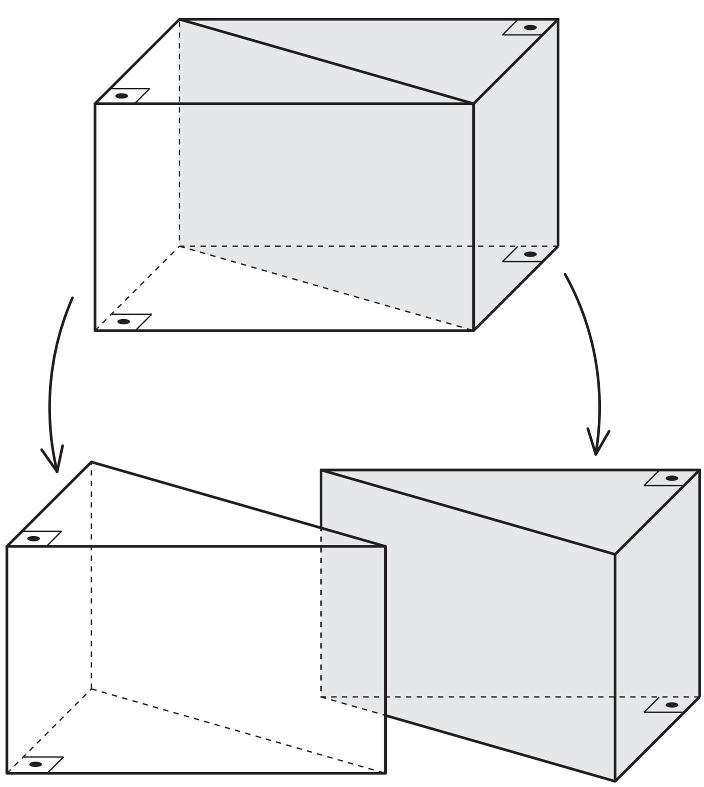
1 litro = $1.000\ \text{cm}^3$
x litros = $125\ \text{cm}^3$

$x = \frac{1\ 125}{1.000}$ = 0,125 litros = 125 mililitros

Podemos colocar **125 ℓ** de água num cubo cujo volume é de $125\ \text{cm}^3$.

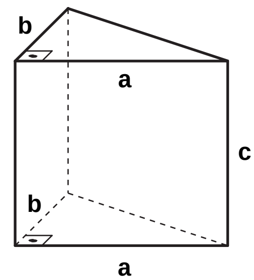
Decompondo figuras sólidas

O paralelepípedo pode ser decomposto em duas outras figuras sólidas. Veja:



Cada um dos sólidos que surge pela decomposição deste paralelepípedo retângulo é um exemplo de prisma. Temos, em nosso caso, dois **prismas retos de base triangular**. Observe que, neste exemplo, a base de cada prisma é um **triângulo retângulo**.

O volume do prisma reto de base triangular é metade do volume do paralelepípedo. Portanto, o volume do prisma reto de base triangular é:

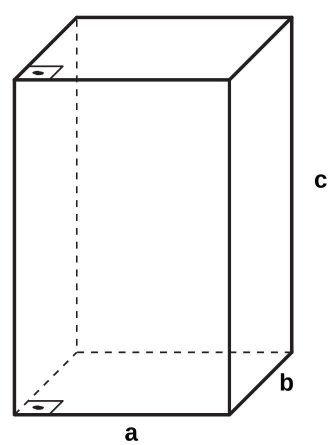


$$\boxed{V = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}}$$

Note que o paralelepípedo também é um prisma reto, porém de base retangular.

Para obter o volume de um prisma com uma base qualquer multiplicamos a **área da base** pela **altura**. Por exemplo:

Prisma reto de base quadrangular(ou paralelepípedo):



Volume = área da base x altura

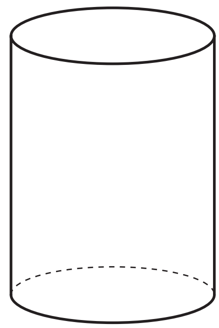
$$V = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

que é o resultado já conhecido para o volume do paralelepípedo.

Volume do cilindro

Cilindro é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de um latão de querosene ou de um cigarro. O cilindro é um sólido geométrico cujas bases são dois círculos iguais, como na figura:



O volume do cilindro pode ser determinado do mesmo modo que o volume do prisma reto:

$$\boxed{\textbf{Volume do cilindro} = \textbf{área da base} \; . \; \textbf{altura}}$$

Como a base do cilindro é um círculo, temos:

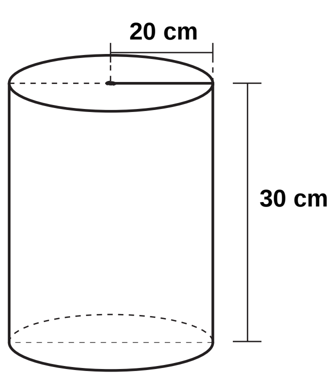
Área da base = área do círculo = πr^2 , onde r é o raio do círculo

Então, a área do cilindro pode ser expressa por:

$$A = \underbrace{\Pi r^2}_{\substack{\text{área do} \\ \text{círculo} \\ \text{da base}}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\text{altura do} \\ \text{cilindro}}}$$

EXEMPLO 4

Determine o volume de um cilindro de 30 centímetros de altura e cuja base tem 20 centímetros de raio.



$$\textbf{V} = \textbf{área da base} \cdot \textbf{altura}$$

Área da base = $\pi \mathbf{r^2}$
$A = \pi \cdot 20^2 = 3{,}14 \cdot 400$
$A = 1.256 \text{ cm}^2$

Volume = $1.256 \cdot 30 = \mathbf{37.680 \text{ cm}^3}$

Densidade de um corpo

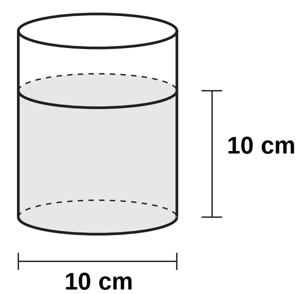
Na Aula 14, aprendemos que a **massa** de um objeto pode ser dada pelo seu peso. As unidades de medida de massa são o quilograma (**kg**) e o grama (**g**).

Podemos definir a densidade de um objeto (ou corpo) como o quociente entre sua massa e seu volume:

$$\boxed{\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}}$$

Um método prático para determinar o volume de objetos, por exemplo o de uma pedra, é o seguinte:

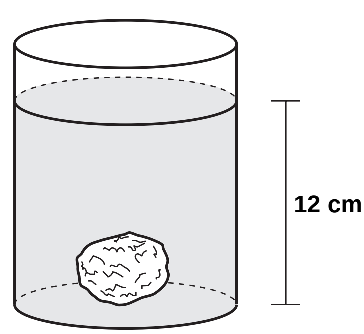
- Pegue um recipiente transparente, cujas medidas sejam fáceis de calcular. Por exemplo, um copo na forma de um cilindro.



- Encha-o com água e meça a altura que a água atingiu.
  No nosso exemplo, o volume de água é:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10 = 785 \text{ cm}^3$$

- Em seguida, mergulhe a pedra na água e meça novamente a altura atingida.

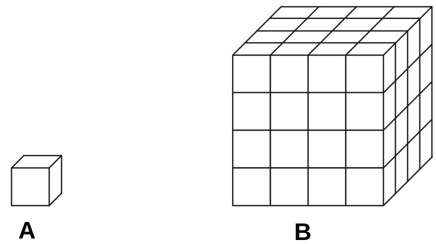


$$\text{Volume} = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 12 = 942 \text{ cm}^2$$

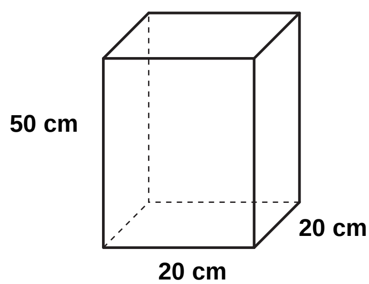
A diferença entre os dois resultados é o volume da pedra:

Volume da pedra $= 942 - 785 =$ **157 cm³**.

Exercício 1
De quantos cubinhos iguais a A precisamos para montar um cubo igual a B?



Exercício 2
Quantos litros de óleo cabem no galão abaixo?



Exercício 3
O que significa m^3?

Exercício 4
Qual o volume de um bolo cuja altura é 5 cm e cujo diâmetro é 60 cm?

Exercício 5
Quantos litros de leite cabem em um galão cilíndrico de 20 cm de diâmetro e 60 cm de altura?

Exercício 6
Meça as arestas e calcule o volume de uma caixa de pasta de dentes.

Exercício 7
Calcule a capacidade, em metros cúbicos, de uma caixa que possa conter o fogão de sua casa.

Exercício 8
Calcule o volume de duas latas de óleo com formatos diferentes.