AULA
70

Equacionando problemas - I

Introdução

Você já percebeu que a Matemática é um excelente recurso para resolver muitos dos problemas do nosso dia-a-dia. Mas a Matemática também pode ser vista sob um outro aspecto: o da brincadeira.

Problemas que envolvem jogos e desafios lógicos têm contribuído para estimular a inteligência do ser humano ao longo de toda a história. Há registro desse tipo de brincadeiras desde a Antigüidade.

Nesta aula, nós vamos apresentar alguns desses desafios. Certamente, você também se sentirá estimulado a resolvê-los. Afinal, quem nunca brincou de adivinhar?

Nossa aula

Como descobrir o número pensado por outra pessoa?

Essa é uma brincadeira bastante antiga (livros do século XII já faziam referência a esse tipo de jogo como uma atividade comum entre pessoas). Consiste no seguinte: uma pessoa propõe a outra que pense em um número qualquer. Após alguns comandos, a pessoa que propôs o jogo adivinha o número pensado pela outra. Vamos ver um exemplo.

EXEMPLO 1

Duas pessoas, A e B, estão jogando. A dá alguns comandos para B.

COMANDOS	OPERAÇÕES MATEMÁTICAS
• Pense num número qualquer.	• B pensou no número 5.
• Encontre o seu dobro.	• 5 x 2 = 10
• Some 3 ao resultado.	• 10 + 3 = 13
• Triplique o valor encontrado.	• 13 x 3 = 39
• Subtraia 9 do resultado.	• 39 - 9 = 30
• Divida tudo por 6.	• 30 ÷ 6 = 5
• Quanto deu?	• **5**
• Este é o número no qual você pensou!	

Vamos escrever em linguagem matemática o que ocorreu:

- Pense um número qualquer: x
- Encontre o seu dobro: $2 \, . \, x = 2x$
- Some 3 ao resultado: $2x + 3$
- Triplique o que você achou: $3 \, . \, (2x + 3) = 6x + 9$
- Subtraia 9 ao resultado: $6x + 9 - 9 = 6x$
- Divida tudo por 6: $6x \div 6 = x$

Porque esse jogo dá certo?

Observe que há comandos que anulam os anteriores, como por exemplo: "achar o dobro" e "triplicar" são anulados pelo comando "divida tudo por 6".

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left] & 2x \arrow[r, bend left] & 6x \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Os comandos que se anulam são determinados pelas **operações inversas**.

Recordando operações inversas

Uma operação é inversa de outra quando **desfaz** o que a outra **faz**.

- A adição e a subtração são operações inversas:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "+ 5"] & & a + 5 \arrow[ll, bend left, "- 5"] \end{tikzcd}$$

- A multiplicação e a divisão são operações inversas:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "x\ 4"] & & 4x \arrow[ll, bend left, "\div 4"] \end{tikzcd}$$

- A potenciação e a radiciação são operações inversas:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr, bend left, "(\ )^2"] & & y^2 \arrow[ll, bend left, "\sqrt{\ }"] \end{tikzcd}$$

Adivinhando um número novamente

Vamos ver mais um exemplo desse jogo de "adivinha":

EXEMPLO 2

A pessoa A diz os seguintes comandos para a pessoa B:

- Pense em um número par.
- Triplique o número escolhido.
- Divida o resultado por 2.
- Triplique o resultado.
- Divida o que foi encontrado por 9.
- Multiplique por 2.
- A: O resultado final é o número que você pensou.

Vamos ver em linguagem matemática o que ocorreu:

COMANDOS	LINGUAGEM MATEMÁTICA
• pense um número par	• $2x$ (*)
• triplique o número pensado	• $2x . 3 = 6x$
• divida o resultado por 2	• $6x \div 2 = 3x$
• triplique o resultado	• $3x . 3 = 9x$
• divida o que deu por 9	• $9x \div 9 = x$
• multiplique por 2	• $x . 2 = 2x$
(*) A expressão geral para indicar um número par é **2x**. Veja que, para qualquer valor atribuído a **x**, o número **2x** é par.	

Observe que, novamente, foram feitas operações inversas, permitindo que se retornasse ao número pensado inicialmente.

Jogando com a calculadora

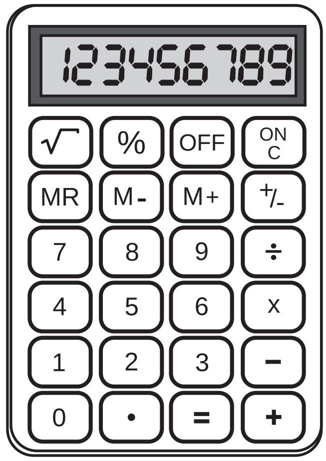
Há pessoas que dizem que os números se relacionam com a sorte. Outras, simplesmente, simpatizam mais com este ou aquele número. E você, também tem um número de sua preferência?

Nesse jogo você poderá escolher um número de 1 a 9 e fazer com que somente ele apareça no visor de uma calculadora, por meio de algumas operações bem simples. Vamos ver um exemplo.

EXEMPLO 3

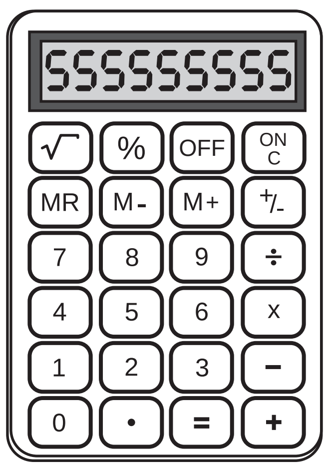
Imagine que você tenha escolhido o número 5.

Digite na calculadora o número 1 2.3 4 5.6 7 9.



Agora, multiplique esse número por 45.

Veja que, no visor, aparece somente o número 5.



Desvendando o mistério!

Muita gente acha que 1 2.3 4 5.6 7 9 é um número misterioso. A matemática vai mostrar que não há nenhum mistério. Veja a aplicação:

O número 1 1 1.1 1 1.1 1 1 é divisível por 9 e o quociente dessa divisão é 12.3456.79. Experimente fazer a conta na calculadora:

1 1 1 1 1 1 1 1 1	9
...	12345679
0	

Portanto: 1 2.3 4 5.6 7 9 x 9 = 111.111.111.

Quando multiplicamos 1 2.3 4 5.6 7 9 por 45, estamos, na verdade, multiplicando-o por 9 x 5.

Logo: 1 2.3 4 5.6 7 9 x 45 =
= 1 2.3 4 5.6 7 9 x 9 x 5 =
= 1 1 1.1 1 1.1 1 1 x 5 = 5 5 5.5 5 5.5 5 5

Veja que curioso:

1 2.3 4 5.6 7 9 x 9 (9 x 1) = 111.111.111
1 2.3 4 5.6 7 9 x 18 (9 x 2) = 222.222.222
1 2.3 4 5.6 7 9 x 27 (9 x 3) = 333.333.333
1 2.3 4 5.6 7 9 x 36 (9 x 4) = 444.444.444
... ...

A álgebra desvendando mistérios

Você já sabe que a álgebra é uma linguagem matemática que auxilia a resolver problemas, isto é, pela álgebra podemos equacionar problemas.

PROBLEMA 1

Vamos resolver um "mistério" sobre a vida de Diofanto, um notável matemático da Antigüidade. Tudo o que se conhece a seu respeito encontra-se na dedicatória escrita em seu túmulo sob a forma de um problema matemático.

Veja o que ela diz:

LINGUAGEM CORRENTE	LINGUAGEM MATEMÁTICA
CAMINHANTE! AQUI FORAM SEPULTADOS OS RESTOS DE DIOFANTE. E OS NÚMEROS PODEM MOSTRAR - OH, MILAGRE - QUÃO LONGA FOI SUA VIDA,	x
CUJA SEXTA PARTE CONSTITUIU SUA FORMOSA INFÂNCIA	$\frac{x}{6}$
E MAIS UM DUODÉCIMO PEDAÇO DE SUA VIDA HAVIA TRANSCORRIDO QUANDO DE PÊLOS SE COBRIU O SEU ROSTO.	$\frac{x}{12}$
E A SÉTIMA PARTE DE SUA EXISTÊNCIA TRANSCORREU EM UM MATRIMÔNIO SEM FILHOS.	$\frac{x}{7}$
PASSOU-SE UM QÜINQÜÊNIO MAIS E DEIXOU-O MUITO FELIZ O NASCIMENTO DE SEU PRIMEIRO FILHO,	5
CUJO CORPO ENTREGOU À TERRA, SUA FORMOSA VIDA, QUE DUROU SOMENTE A METADE DA DE SEU PAI.	$\frac{x}{2}$
E COM PROFUNDO PESAR DESCEU À SEPULTURA, TENDO SOBREVIVIDO APENAS QUATRO ANOS AO DESCANSO DE SEU FILHO.	4
DIGA-ME: QUANTOS ANOS TINHA DIOFANTO QUANDO LHE CHEGOU A MORTE?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Solução

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

igualando os denominadores
e simplificando

$$\frac{84x}{84} = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84}$$

$$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336$$
$$9x = 756$$
$$x = 84$$

Desse modo, ficamos conhecendo alguns dados biográficos sobre Diofanto: casou-se aos 21 anos, foi pai aos 38, perdeu o filho aos 80 e morreu aos 84.

PROBLEMA 2

Vamos ver mais um problema bastante antigo que pode ser traduzido para a linguagem da álgebra.

Um cavalo e um burro caminharam juntos levando no lombo pesados sacos. Lamentava-se o cavalo de sua pesada carga, quando o burro lhe disse: “De que te queixas? Se eu levasse um dos teus sacos, a minha carga seria o dobro. Pelo contrário, se te desse um saco, a tua carga seria igual à minha”. Qual a carga de cada um dos animais?

Vamos equacionar o problema, isto é, escrevê-lo na linguagem da álgebra:

Sejam **x** = a carga do cavalo e **y** a carga do burro.

LINGUAGEM CORRENTE	LINGUAGEM DA ÁLGEBRA
Se eu levasse um de teus sacos,	$x - 1$
a minha carga	$y + 1$
seria o dobro da tua.	$y + 1 = 2(x - 1)$
Se eu te desse um saco,	$y - 1$
a tua carga	$x + 1$
seria igual à minha,	$y - 1 = x + 1$

Temos, então, um sistema com duas equações do 1º grau:

$$\begin{cases} y + 1 = 2(x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 2x = -3 \\ y - x = 2 \end{cases}$$

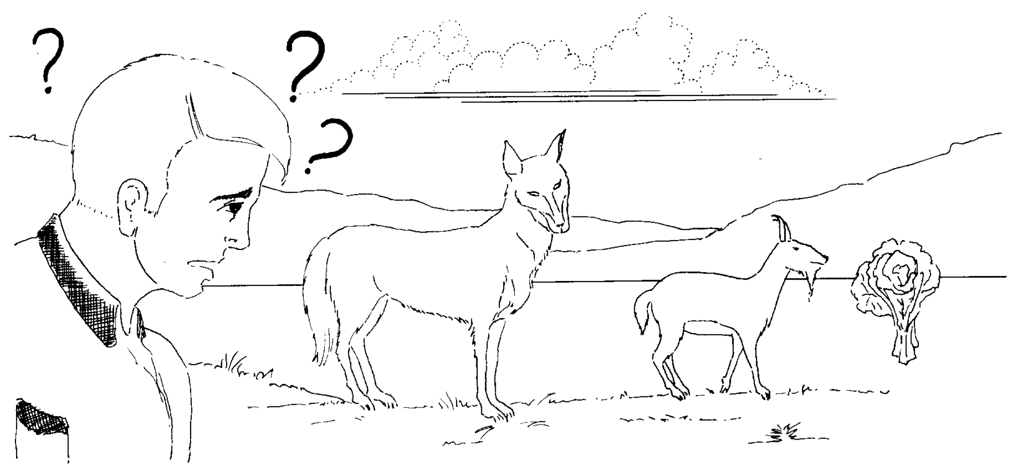
resolvendo o sistema, temos x = 5 e y = 7.

Logo, a carga do burro era de **7 sacos** e a do cavalo, de **5 sacos**.

Este é um dos mais curiosos problemas que se conhece. E também um dos mais antigos: tem mais de 2000 anos!

Um viajante chega à margem de um rio levando uma raposa, uma cabra e um pé de couve. Ele deseja atravessar o rio, mas o único barco que se encontra lá é pequeno e só pode transportar dois elementos de cada vez: ele e um de seus pertences. O viajante deseja levar todos os seus pertences para a outra margem, sem perder nenhum deles. Ele sabe que:

— se deixar a cabra com a couve, a cabra come a couve;
— e se deixar a raposa com a cabra, a raposa come a cabra.



O que ele deve fazer?

Tente resolver esse problema antes de ler a solução! Ele não precisa de equação para ser resolvido; precisa, sim, de muito raciocínio!

Solução

Como nada foi dito sobre a raposa e a couve, podemos concluir que podem ficar juntos sem prejuízo para o viajante. Sendo assim, veja o que o viajante faz para resolver seu problema:

— levou a cabra, voltou e pegou a raposa;
— deixou a raposa e trouxe a cabra de volta;
— levou a couve e voltou para pegar a cabra.

Seguiu seu caminho feliz por não ter perdido nenhum de seus pertences.

Agora que você conhece esse aspecto divertido da Matemática, que tal pesquisar ou inventar outros problemas?

Por enquanto, aqui vão algumas sugestões que, certamente, irão "aguçar" seu raciocínio.

Exercícios

Exercício 1

Um número, sua metade e sua terça parte somam 77. Qual é o número?

Exercício 2

Pensei num número, multipliquei-o por 2 e ao resultado somei 8, obtendo 20. Em que número pensei?

Exercício 3

Descubra o valor das letras, na conta abaixo, considerando que letras iguais representam o mesmo número:

$$\begin{array}{r} AB \\ BA + \\ \hline CAC \end{array}$$

Exercício 4

Que comandos anulam os seguintes comandos?

a) Somar 8 e multiplicar por 2.

b) Triplicar e multiplicar por 5.

Exercício 5

Invente uma série de comandos que levem você a adivinhar o número pensado por um amigo.