AULA

73

Fatoração

Introdução

A palavra **fatoração** nos leva a pensar em **fatores**, e, como já sabemos, fatores são os elementos de uma multiplicação. Fatorar um número, portanto, é escrevê-lo na forma de uma multiplicação de fatores. Por exemplo, o número 16 pode ser escrito como uma multiplicação de fatores, de várias maneiras:

$16 = 2 \times 8$
$16 = 4 \times 4$
$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ou ainda $16 = 2^4$

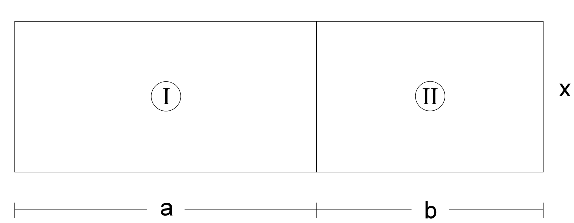
No caso de uma expressão numérica, cujas parcelas têm um fator comum, podemos fatorá-la, assim:

$$\underbrace{7 \times 2 + 5 \times 2}_{\textbf{soma de 2 parcelas}} = \underbrace{(7 + 5) \times 2}_{\textbf{produto de dois fatores}} \rightarrow \textbf{forma fatorada da expressão numérica}$$

Vamos aprender, nesta aula, a fatoração de expressões algébricas, que é muito utilizada para a simplificação dos cálculos algébricos.

Nossa aula

Vamos considerar um terreno formado por dois lotes de comprimentos diferentes e de mesma largura:



Podemos calcular a área total do terreno de duas maneiras diferentes:

- Calculando a área de cada lote e depois somando-as.
- Somando os comprimentos dos dois lotes e calculando diretamente a área total do terreno.

As duas maneiras dão o mesmo resultado; portanto, podemos escrever:

Área do lote I: ax
Área do lote II: bx

Somando as duas áreas: ax + bx

Comprimento total do terreno: (a + b)

Área do terreno: (a + b) x

Logo: $\underbrace{ax + bx}_{\textbf{soma de duas parcelas}} = \underbrace{(a + b)\ x}_{\textbf{produto de dois fatores}}$

Portanto, sempre que numa soma de duas ou mais parcelas houver um fator comum a todas as parcelas (como o **x** em ax + bx), podemos fatorar essa expressão, e esse fator comum será um dos fatores da expressão após ser fatorada.

Como fazer para descobrir o outro fator da expressão fatorada?

Basta dividir a expressão que vai ser fatorada pelo fator comum.

EXEMPLO 1

Fatore a expressão: 3xy + 6x. Temos que 3 e x são fatores comuns às duas parcelas. Podemos, então, escrever a expressão assim:

$$3xy + 6x = 3x \cdot \left(\frac{3xy}{3x} + \frac{6x}{3x}\right)$$

$$= 3x \cdot \left(\frac{\cancel{3}\cancel{x}y}{\cancel{3}\cancel{x}} + \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cancel{x}}{\cancel{3}\cancel{x}}\right)$$

simplificando as frações

$3xy + 6x = 3x\ (y + 2)$

Dizemos que o fator **3x** foi colocado "em evidência", isto é, "em destaque". Na prática, as divisões feitas dentro dos parênteses são feitas "de cabeça".

EXEMPLO 2

Fatore $2a^2b - 4ab2$.
Os fatores comuns são 2, a e b.
Colocando **2.a.b** "em evidência", temos:

$2a^2b - 4ab^2 = 2ab\ .\ (a - 2b)$ *divisão feita "de cabeça"*

Para ter certeza de que a divisão foi feita corretamente, você pode fazer a verificação assim:

$$2ab\ (a - 2b) = 2a^2b - 4ab^2$$

Ou seja, foi usada a propriedade distributiva da multiplicação para verificar se a fatoração está correta.

Podemos também fatorar as expressões algébricas que são resultados de produtos conhecidos, como os produtos notáveis estudados na aula anterior.

A expressão $a^2 - b^2$ é resultado do produto $(a + b) \cdot (a - b)$; então podemos fatorar toda expressão da seguinte maneira:

- $\underbrace{4x^2}_{(2x)^2} - \underbrace{9}_{3^2} = (2x + 3)\ (2x + 3)$ → forma fatorada

- $\underbrace{36a^2}_{(6a)^2} - \underbrace{1}_{1^2} = (6a + 1)\ (6a - 1)$

- $\underbrace{16}_{4^2} - \underbrace{\dfrac{x^2}{25}}_{\left(\frac{x}{5}\right)^2} = \left(4 + \dfrac{x}{5}\right) \cdot \left(4 - \dfrac{x}{5}\right)$

Os outros dois produtos notáveis resultam em trinômios quadrados perfeitos. Como os dois casos diferem apenas num sinal, podemos escrever os dois juntos usando os dois sinais ao mesmo tempo, assim:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Que se lê:

"O quadrado da soma ou da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais ou menos duas vezes o 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do 2º termo."

Então, sempre que tivermos um trinômio quadrado perfeito podemos fatorá-lo escrevendo-o na forma de um quadrado da soma ou da diferença de dois termos. Por exemplo:

- $x^2 + 8x + 16$

  ß ß

  quadrado de x **quadrado de 4**

  $2 \cdot x \cdot 4$

Então, podemos escrever:

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ → forma fatorada

- $a^2 \quad + \quad 8a \quad + \quad 9$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

quadrado de a $\qquad$ **quadrado de 3**

$2 \,.\, a \,.\, 3$

$6a \neq 8a$

Nesse caso, o trinômio não é quadrado perfeito e, portanto, não pode ser fatorado.

- $x^4 \; - \; 2x^2 \; + \; 1$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$(x^2)^2$ $\qquad\qquad$ 1^2

$$\underbrace{2 \,.\, x^2 \,.1}_{2x^2}$$

O trinômio é quadrado perfeito e vamos escrevê-lo na forma fatorada:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

Exercícios

Exercício 1

Calcule o valor de $5 \cdot 36 + 5 \,.\, 24 + 5 \,.\, 15$, fatorando antes a expressão.

Exercício 2

Fatore as expressões algébricas, colocando o fator comum em evidência:

a) $x^2 + 11x$

b) $a^2b + 4ab + ab^2$

Exercício 3

Verifique se o trinômio $x^2 - 12x + 64$ é um trinômio quadrado perfeito, justificando a resposta.

Exercício 4

Fatore o trinômio $a^2x^2 + 2ax + 1$.

Exercício 5

Fatore a expressão $x^4 - 16$ e, se ainda for possível, fatore o resultado obtido. Isso quer dizer fatorar completamente a expressão.

Exercício 6

Simplifique a fração $\dfrac{a^2 - 10a + 25}{a - 5}$, fatorando antes o numerador da fração.

Exercício 7

Complete o trinômio quadrado perfeito com o termo que está faltando:

x^2 - ..... + $9y^2$