

Equação do 2º grau

Introdução

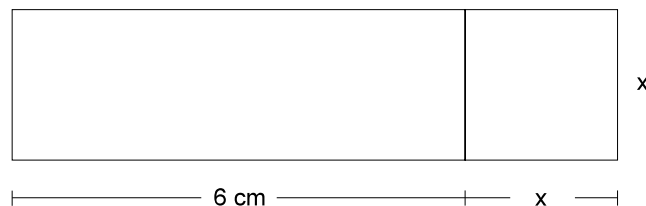
Sabemos, de aulas anteriores, que podemos resolver problemas usando equações. A resolução de problemas pelo método algébrico consiste em algumas etapas que vamos recordar:

- Representar o valor desconhecido do problema, a **incógnita**, por uma letra que, em geral, é a letra x .
- Escrever a sentença matemática que “traduz” o problema. É o que chamamos de **equacionar** o problema.
- Resolver a equação do problema.
- Verificar a solução encontrada escolhendo a solução correta, de acordo com o que foi solicitado no problema.

Nas aulas em que já foram estudados problemas e sua resolução gráfica, as equações encontradas eram do 1º grau.

Vamos estudar agora as equações do 2º grau, usadas na resolução de problemas de diferentes assuntos que apresentam necessidade desse tipo de equação.

Vejam o seguinte problema: na figura a seguir, temos um retângulo de comprimento 6 cm e cuja largura é desconhecida, ou seja, não sabemos sua medida. Ao lado desse retângulo temos um quadrado cujo lado é igual à largura do retângulo. Vamos determinar o lado do quadrado, sabendo que a área total da figura é de 16 cm^2 .



Nossa aula

Chamamos o lado do quadrado, que é a incógnita do problema, de x .

Calculando as áreas do retângulo e do quadrado, temos:

$$\text{Área do retângulo: } 6 \cdot x = 6x$$

$$\text{Área do quadrado: } x \cdot x = x^2$$

A área total da figura é:

$$6x + x^2 = 16 \rightarrow \text{equação do problema}$$

Vamos, agora, “arrumar” a equação do problema, colocando todos os termos no primeiro membro e ordenando-os de acordo com as potências de x , da maior para a menor, ou seja, de modo decrescente.

$$\begin{array}{ccccccc}
 x^2 & + & 6x & - & 16 & = & 0 \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
 \text{termo} & & \text{termo} & & \text{termo} & & \\
 \text{em } x^2 & & \text{em } x & & \text{sem } x & &
 \end{array}$$

Essa equação é da forma $ax^2 + bx + c = 0$ e é chamada de **equação do 2º grau**.

Os coeficientes a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Veja os exemplos:

- Na equação $2x^2 - 4x + 5 = 0$, os coeficientes são:

$$a = 2, \quad b = -4 \quad \text{e} \quad c = 5$$

- Na equação $x^2 + 5x = 0$, os coeficientes são:

$$a = 1, \quad b = 5 \quad \text{e} \quad c = 0 \text{ (não existe o termo independente de } x)$$

- Na equação $2x^2 - 9 = 0$, os coeficientes são:

$$a = 2, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = -9 \text{ (não existe o termo do 1º grau em } x)$$

- Na equação $4x^2 = 0$, os coeficientes são:

$$a = 4, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 0 \text{ (faltam dois termos)}$$

A equação que encontramos no problema inicial é uma **equação completa**, pois não tem coeficientes nulos. Quando uma equação do 2º grau possui um ou dois coeficientes nulos ela é chamada de **incompleta**. Aprenderemos como resolver os diferentes tipos de equação incompletas ainda nesta aula. As equações completas serão estudadas na próxima aula.

Você se lembra de que, quando definimos equação do 2º grau, escrevemos que a é diferente de zero. O que aconteceria se a fosse igual a zero?

Vamos substituir a por zero na equação $ax^2 + bx + c = 0$.

A equação ficará assim:

$$0 \cdot x + bx + c = 0$$

$$bx + c = 0 \rightarrow \text{equação do 1º grau.}$$

Portanto, o coeficiente do termo de 2º grau não pode ser zero pois, anulando esse termo, a equação deixa de ser do 2º grau.

Resolução de uma equação

Já vimos, quando estudamos equações do 1º grau, que resolver uma equação é encontrar um valor da variável x que torna a equação verdadeira quando substituirmos x por esse valor.

No caso da equação do 2º grau, podemos encontrar até duas soluções diferentes para uma equação.

EXEMPLO 1

a) Verifique, na equação do problema inicial, se o número 2 é solução da equação.

A equação é: $x^2 + 6x - 16 = 0$

Substituindo x por 2, temos:

$$\begin{array}{rcl} 2^2 + 6 \cdot 2 - 16 & = & 0 \\ 4 + 12 - 16 & = & 0 \\ 16 - 16 & = & 0 \rightarrow \text{sentença verdadeira} \end{array}$$

Logo, $x = 2$ é uma solução da equação $x^2 + 6x - 16 = 0$.

b) Verifique, na mesma equação, se 1 é solução.

Substituindo x por 1, temos:

$$\begin{array}{rcl} 1^2 + 6 \cdot 1 - 16 & = & 0 \\ 1 + 6 - 16 & = & 0 \\ 7 - 16 & = & 0 \rightarrow \text{sentença falsa} \end{array}$$

Logo, $x = 1$ não é solução da equação $x^2 + 6x - 16 = 0$.

Resolução das equações incompletas

Equações do 2º grau em que $b = 0$ (equações do tipo $ax^2 + c = 0$)

Nesse caso, a equação só tem um termo em x , então a resolvemos como se ela fosse uma equação do 1º grau.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c \quad \rightarrow \quad \text{isolando o termo em } x \text{ no } 1^\circ \text{ membro}$$

$$x^2 = \frac{-c}{a} \quad \rightarrow \quad \text{calculando o termo em } x$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \rightarrow \quad \text{extraíndo a raiz quadrada}$$

As soluções da equação são $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Esse tipo de equação pode ter duas soluções reais, caso o radicando $\frac{-c}{a}$ seja um número **positivo**.

Se o radicando for **negativo** $\left(\frac{-c < 0}{a}\right)$ a equação não terá solução, pois a raiz de índice par de um número negativo não é um número real.

No caso do radicando ser **nulo**, a equação terá uma única solução, também nula.

EXEMPLO 2

Resolver a equação $3x^2 - 27 = 0$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

As soluções da equação são **+3** e **-3**.

Equações do 2º grau em que $c = 0$ (equações do tipo $ax^2 + bx = 0$)

Observe que essa equação possui dois termos em x . Nesse caso, podemos fatorar $ax^2 + bx$, colocando x em evidência:

$$x(ax + b) = 0$$

Obtivemos um produto de dois fatores que deve ser igual a zero. Logo um dos fatores deve ser nulo:

$$x = 0$$



Se $x(ax + b) = 0$, então $x = 0$ ou



$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

As soluções da equação são $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{-b}{a}$

Nesse tipo de equação, encontraremos sempre duas soluções diferentes, sendo uma delas igual a zero.

EXEMPLO 3

Resolver a equação $3x^2 - 15x = 0$.

$$x(3x - 15) = 0$$

$$x = 0$$

ou

$$3x - 15 = 0$$

$$3x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$$

As soluções são $x_1 = 0$ e $x_2 = 5$.

Exercício 1

Na equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, verifique se o número 5 é solução.

Exercício 2

Qual é o número que elevado ao quadrado é igual ao seu dobro?

Exercício 3

Quais são os coeficientes da equação $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 5 = 0$?

Exercício 4

Resolva as equações incompletas:

a) $6x^2 + 6x = 0$

b) $25x^2 = 0$

c) $2x^2 = -8$

d) $2x^2 - 72 = 0$

Exercício 5

Dados os números 0, -1, 1, indique quais são soluções da equação:
 $x^2 + 3x - 4 = 0$.