Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

AULA

75

Deduzindo uma fórmula

Introdução

Na aula anterior, vimos que uma equação do 2º grau é toda equação de forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são números reais sendo **a ¹ 0**.

Algumas equações foram resolvidas sem a necessidade de métodos próprios: são as **equações incompletas**.

Para resolver uma **equação completa** do 2º grau, é necessário conhecer a fórmula desenvolvida pelo matemático hindu Bhaskhara, que viveu em torno de 1115 a.C., e que até hoje leva seu nome: **fórmula de Bhaskhara**. Ela foi desenvolvida e generalizada com base no método de completar o quadrado, que mostraremos nesta aula, e que foi muito usado pelo matemático árabe Al-Khowarizmi, em fins do século VIII e início do século IX.

Nossa aula

Vamos resolver equações do tipo $(ax + b)^2 = c$, onde o 1º membro é o quadrado de uma expressão e o 2º membro é um número.

EXEMPLO 1

Resolva a equação $(x + 2)^2 = 25$.

$\sqrt{(x+2^2)} = \pm\sqrt{25}$ extraindo a raiz quadrada dos dois membros da equação

$x + 2 = 5$

$x + 2 = + 5$	ou	$x + 2 = - 5$
$x = 5 - 2$		$x = - 5 - 2$
$x = 3$		$x = -7$

A equação tem duas soluções: **3** e **-7**.

Esse exemplo nos leva a pensar que, se todas as equações do 2º grau pudessem ser escritas nessa forma, então sua resolução seria muito simples.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-fundamental/matematica/

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Para isso, precisaríamos ter sempre no 1º membro da equação um trinômio quadrado perfeito e escrevê-lo na forma fatorada, como queremos.

Vejamos, agora, como transformar um trinômio qualquer num trinômio quadrado perfeito, usando o método de completar o quadrado.

EXEMPLO 2

Resolva a equação $x^2 + 8x - 9 = 0$.

A equação também pode ser escrita assim: $x^2 + 8x = 9$

Qual o termo que devemos somar ao 1º membro, $(x^2 + 8x)$ para obter um quadrado perfeito?

Como $8x = 2 \cdot 4 \cdot x$, devemos acrescentar 4^2, ou seja, 16 ao 1º membro. Mas, como a equação é uma igualdade devemos somar 16 também ao 2º membro:

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16$$

Fatorando o 1º membro:

$$(x + 4)^2 = 25$$

$$x + 4 = \pm\sqrt{25}$$

$$x + 4 = \pm 5$$

$$x + 4 = +5 \rightarrow x = 5 - 4 \rightarrow x = 1$$

$$x + 4 = -5 \rightarrow x = -5 - 4 \rightarrow x = -9$$

A fórmula obtida por Bhaskhara, que resolve qualquer equação do 2º grau, é baseada no método de completar o quadrado. Aqui não faremos esse cálculo e usaremos a fórmula diretamente.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fórmula de Bhaskhara

A expressão $\mathbf{b^2 - 4ac}$ é muito importante na resolução da equação do 2º grau. Por ser ela que "discrimina" o número de soluções da equação, é chamada **discriminante** da equação. Podemos representar o discriminante pela letra grega Δ (delta).

O discriminante indica o número de soluções da equação do seguinte modo:

- Se $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, a equação **não** tem soluções reais.
- Se $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$, a equação tem **uma** solução real.
- Se $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$, a equação tem **duas** soluções reais.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-fundamental/matematica/

Vamos, então, aplicar a fórmula de Bhaskhara na resolução de uma equação do 2º grau.

EXEMPLO 3

Resolva a equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Em primeiro lugar identificaremos os coeficientes da equação:

$a = 2$ $\qquad$ $b= 5$ $\qquad$ e $\qquad$ $c = -3$

Em seguida, vamos calcular o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = 5^2 - 4 . 2 . (-3)$$
$$\Delta = 25 + 24 \rightarrow \Delta = 49$$

Como Δ **> 0**, sabemos que a equação tem **duas** soluções reais.

Vamos aplicar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} \rightarrow x_1 = -3$$

$$x_2 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

As soluções da equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$ são **-3** e $\frac{1}{2}$.

EXEMPLO 4

Resolva a equação $2x^2 + 5x + 4 = 0$.

$a = 2$ $\qquad$ $b = 5$ $\qquad$ e $\qquad$ $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 5^2 - 4 . 2 . 4 = 25 - 32 \rightarrow \Delta = -7$$

Como Δ **< 0**, a equação **não** tem solução real.

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

EXEMPLO 5

Resolva a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

$a = 1 \qquad b = -6 \qquad e \qquad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$
$\Delta - 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$

Como Δ **= 0**, a equação tem uma solução real. Vamos calculá-la:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

A solução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ é **3**.

Exercícios

Exercício 1
Resolva a equação $(3x - 2)^2 = 4$.

Exercício 2
Resolva as equações usando a fórmula de Bhaskhara:
a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$
b) $3x^2 - 8x + 10 = 0$
c) $-x^2 - 2x + 3 = 0$

*** Exercício 3**
Considere as expressões $x^2 - 5x - 6$ e $2x - 16$. Encontre os valores reais de **x** para os quais:
a) a primeira expressão dá 0;
b) a segunda expressão dá 0;
c) a primeira expressão dá 8;
d) a segunda expressão dá 8;
e) as duas expressões têm valores iguais.

* *O Exercício 3 foi extraído do livro* Matemática na medida certa *(8ª série), de Jakubo e Lellis, Editora Scipione.*

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-fundamental/matematica/