

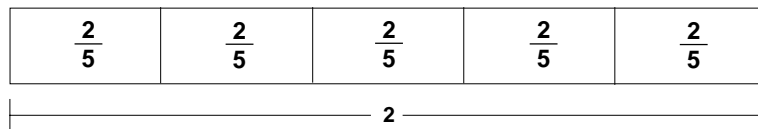
Frações e números decimais

Introdução

Inicialmente, as frações são apresentadas como partes de um todo. Por exemplo, teremos $\frac{2}{5}$ de um bolo se dividirmos esse bolo em cinco partes iguais e tomarmos duas dessas partes. Entretanto, se substituirmos o “bolo” por uma unidade qualquer, a fração $\frac{2}{5}$ é um número e, como tal, possui seu lugar na reta numérica. Para fazer a marcação na reta numérica, dividimos a unidade em 5 partes e tomamos duas



Por outro lado, a fração é também o resultado da divisão de dois números; por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$, que é o resultado da divisão de 2 por 5. Observe o desenho a seguir:



Dois unidades foram divididas em 5 partes iguais.

Nossa aula

Nesta aula vamos estudar as frações, suas propriedades e a forma de representá-las por números decimais.

A divisão prolongada

Imagine que R\$25,00 devam ser divididos igualmente entre 4 pessoas. Quanto cada uma deverá receber?

Sabemos que 25 não é múltiplo de 4, e portanto, a quantia que cada um deve receber não será um número inteiro. Para isso existem os centavos. Vamos então lembrar como fazemos a divisão de 25 por 4.

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 4} \\ - 24 \quad 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

Até agora, nossa conta indica que cada pessoa receberá **6** reais; mas existe ainda um resto de 1 real. Para continuar, acrescente um zero ao resto e uma vírgula ao quociente.

$$\begin{array}{r} 25 \quad | \quad 4 \\ - 24 \quad | \quad 6,25 \\ \hline 10 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

O resultado da divisão de 25 por 4 é **6,25** ou seja, cada pessoa receberá **6** reais e **25** centavos.

Utilizando uma fração para indicar a divisão, podemos representar a operação que fizemos da seguinte forma:

$$\frac{25}{4} = 6,25$$

Todas as frações podem ser representadas por números decimais. Basta dividir o numerador pelo denominador prolongando a operação.

A máquina de calcular faz muito bem esse trabalho. Observe os exemplos.

$\frac{25}{4}$	(2) (5) (÷) (4) (=)	6.25
$\frac{126}{15}$	(1) (2) (6) (÷) (1) (5) (=)	8.4
$\frac{2}{3}$	(2) (÷) (3) (=)	0.66666666

O que aconteceu no último exemplo?

A representação decimal da fração $\frac{2}{3}$ tem infinitas casas decimais, ou seja, a quantidade de algarismos não acaba nunca. Esses números decimais que possuem algarismos (ou grupos de algarismos) que se repetem eternamente são as **dízimas periódicas**.

As dízimas periódicas são incômodas. Com elas, em geral não conseguimos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Por isso, preferimos representar esses números na forma de frações.

Vamos então recordar as operações com frações.

Frações iguais:

Sabemos que a fração $\frac{1}{2}$ é igual ao número decimal 0,5. Entretanto, as frações $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$ são também iguais a 0,5. Temos aqui um primeiro exemplo de frações iguais:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Como fazemos para obter frações iguais?

A propriedade que enunciamos a seguir responde a essa pergunta.

Uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerado e o denominador pelo mesmo número.

Observe os exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{12}{32} = \frac{12 \cdot 4}{32 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{50}{60} = \frac{50 \cdot 10}{60 \cdot 10} = \frac{5}{6}$$

Os dois últimos exemplos são importantes porque mostram como simplificar frações. Se em algum problema aparece a fração $\frac{12}{32}$, podemos, em seu lugar, usar a fração $\frac{3}{8}$, que representa o mesmo número e é mais simples.

A propriedade que vimos é fundamental para as operações de adição e subtração de frações.

Operações com frações

Sabemos que é muito fácil somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador. Neste caso, basta somar ou subtrair os numeradores. Assim:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}$$

Observe outro exemplo e a simplificação do resultado.

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Como faremos, então, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes? Não é difícil.

Vamos tentar representar as frações dadas por outras, iguais às que temos, mas com denominadores iguais. É o que veremos a seguir.

Adição e subtração de frações

Tomemos como exemplo, a soma $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

Os denominadores são diferentes. Então, buscamos um número que seja múltiplo de ambos. Encontramos 12, que é múltiplo de 4 e também de 6.

Vamos então representar as duas frações dadas com esse mesmo denominador. Observe:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

Então,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Acabamos de somar duas frações com denominadores diferentes. A subtração é feita da mesma forma. Devemos também igualar os denominadores.

Consideremos então a diferença $\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$.

Qual será o novo denominador que devemos escolher? Pense um pouco e observe a solução.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

Então,

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{8} = \frac{32}{40} - \frac{15}{40} = \frac{17}{40}$$

Multiplicação de frações

Se na solução de algum problema devemos calcular, por exemplo **a terça parte de dois quintos**, estamos frente a uma situação em que devemos multiplicar duas frações. A regra é a seguinte:

**Para multiplicar duas frações,
multiplique os numeradores e os denominadores**

Assim:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

AULA

2

O inverso de um número

O inverso de um número é um outro que, multiplicado pelo primeiro, dá 1. Por exemplo:

$$\text{o inverso de } 2 \text{ é } \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{o inverso de } \frac{3}{5} \text{ é } \frac{5}{3} \quad \text{porque} \quad \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

O **zero** é o único número que **não possui inverso**. Observe agora a igualdade abaixo:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Ela está correta, é claro. Mas, o que está mostrando? Que, do lado esquerdo, estamos dividindo 2 por 3 e, do lado direito, estamos multiplicando 2 pelo inverso de 3. Isso vale para qualquer número. A regra é a seguinte.

Dividir um número por outro é o mesmo que multiplicar esse número pelo inverso do outro.

Por exemplo, quanto dá $\frac{4}{5}$ divididos por $\frac{2}{3}$? Pense um pouco e acompanhe a solução.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

As porcentagens

Uma porcentagem é uma fração de denominador 100. Por exemplo, **32%** é igual à fração $\frac{32}{100}$ que também é igual ao número decimal **0,32**. Quando queremos calcular uma porcentagem de algum valor, multiplicamos a fração por esse valor. Veja:

$$\begin{aligned} 32\% \text{ de } 650 \text{ laranjas} &= 0,32 \times 650 = \mathbf{208 \text{ laranjas}} \\ 8\% \text{ de R\$140,00} &= 0,08 \times 140 = \mathbf{R\$11,20} \end{aligned}$$

O que fazer para transformar uma fração qualquer em uma porcentagem?

Se o denominador só possui múltiplos de 2 e de 5, é fácil encontrar uma fração equivalente com denominador 100. Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100} = \mathbf{40\%}$$

Mas como faríamos com a fração $\frac{4}{7}$?

O mais prático, em qualquer caso, é usar a máquina para dividir o numerador pelo denominador e depois deslocar a vírgula duas casas para a direita. Observe os exemplos:

$$\frac{8}{25} = 8 \div 25 = 0,32 = 32\%$$

$$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0,625 = 62,5\%$$

$$\frac{4}{7} = 4 \div 7 \cong 0,5714 = 57,14\%$$

Repare que nesse último exemplo fizemos uma aproximação.

Na prática, usamos duas ou, no máximo, três casas decimais em nossas aproximações.

Exercício 1

Simplifique as frações abaixo. Exemplo:

$$\frac{18}{42} = \frac{18 \div 2}{42 \div 2} = \frac{9}{21} = \frac{9 \div 3}{21 \div 3} = \frac{3}{7}$$

a) $\frac{20}{32}$

c) $\frac{320}{400}$

b) $\frac{24}{36}$

d) $\frac{10}{100}$

Exercício 2

Complete os espaços abaixo com os sinais de < (menor), > (maior) ou = (igual). Exemplo:

$$\frac{2}{3} \dots \frac{5}{8}$$

Solução:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24} \end{array} \right\} \frac{16}{24} > \frac{15}{24} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$$

a) $\frac{5}{8} \dots \frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{6} \dots \frac{23}{24}$

b) $\frac{2}{3} \dots \frac{5}{9}$

d) $\frac{8}{10} \dots \frac{20}{25}$

Exercício 3

Efetue:

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

Exercícios

AULA
2

Exercício 4

Efetue:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}$

d) $\frac{\Phi}{H^+} \cdot \frac{2I}{4K} \cdot \frac{7}{2}$

Exercício 5

Calcule as porcentagens:

a) 10% de 120

b) 24% de 500

c) 5% de 60

d) 12,5% de 72

Exercício 6

Transforme as frações em números decimais aproximados. Dê as respostas com duas decimais. Entretanto, observe a terceira casa decimal. Se ela for menor que 5, mantenha o valor da segunda casa. Se ela for maior ou igual a 5, aumente de uma unidade a segunda casa.

Exemplo:

$$\frac{1}{7} = 0,142... \cong 0,14$$

$$\frac{26}{19} = 1,368... \cong 1,36$$

a) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{11}$

b) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{29}{13}$

Exercício 7

Escreva as frações abaixo como porcentagens. Não dê respostas com mais de duas decimais. Aproxime se necessário:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{40}$