AULA

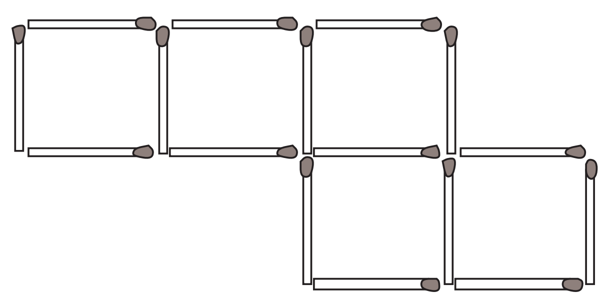
5

# Equacionando os problemas

## Introdução

Nossa aula começará com um quebra-cabeça de mesa de bar - para você tentar resolver agora.

Observe esta figura feita com palitos de fósforo. Mova de lugar exatamente 2 palitos, de modo a transformá-la em 4 quadrados iguais, sem sobrar nenhum palito. Você pode fazer isso com palitos ou no desenho.



## Nossa Aula

Conseguiu resolver o quebra-cabeças? Não? Então, vamos resolvê-lo juntos, pelo caminho da matemática. Certos problemas não nos parecem, de início, "problemas de matemática" - mas, de repente, vemos que existe uma solução para eles que pode ser chamada de ***solução matemática***. (Na realidade, o que existe na vida prática não são problemas de matemática - mas soluções matemáticas, criadas pelas pessoas para resolver problemas práticos).

O quebra-cabeça é um exemplo. A princípio, pode não estar bem claro qual matemática usar. Geometria? Aritmética? De fato, o quebra-cabeça envolve tanto figuras geométricas quanto números.

Se você ainda não conseguir resolvê-lo, talvez seja porque não tenha percebido que o quebra-cabeça tem dois aspectos: o ***geométrico*** e o ***numérico***. Talvez também tenha lhe faltado equacionar o problema. Isto é: escolher quem será a incógnita - geralmente chamada de **x** - e escrever a equação satisfeita por essa incógnita. A partir daí - sempre deixando claro qual é a pergunta do problema -, basta resolver a equação: quer dizer, "encontrar o **x** do problema", como se costuma dizer.

Quando conseguimos equacionar um problema, vemos claramente o que é conhecido (pela equação) e o que se procura (a incógnita). Assim, o caminho da solução, que leva de uma coisa à outra, muitas vezes salta aos olhos nesse equacionamento. Vejamos no quebra-cabeça.

## Equacionando o quebra-cabeça

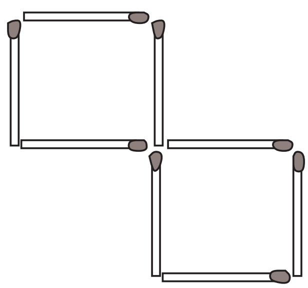
O que vemos na figura dada? Vemos 5 quadrados iguais. Eles estão unidos e são feitos com palitos de fósforo. O problema pede que os 5 quadrados se transformem em 4 quadrados iguais, só com o movimento de 2 palitos.

Que figura formarão, então, os 4 quadrados? Se soubermos isso, será bem mais fácil formar a tal figura... e o problema estará resolvido.

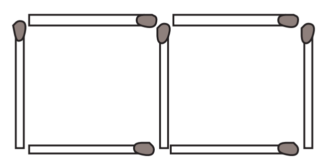
***Dois*** quadrados juntos podem ser formados de um dos seguintes modos:

**a)** os quadrados ***não têm*** lado (palito) comum; ou
**b)** os quadrados ***têm*** um lado comum.

Qual a diferença importante no caso de querermos formar uma ou outra destas figuras? Pense.



**2 quadrados *com* lado comum**



**2 quadrados *sem* lado comum**

A diferença é numérica: em **a)**, precisamos de 8 palitos; já em **b)**, precisamos de apenas 7 - pois "economizamos" um palito quando os quadrados são vizinhos, tendo um lado comum.

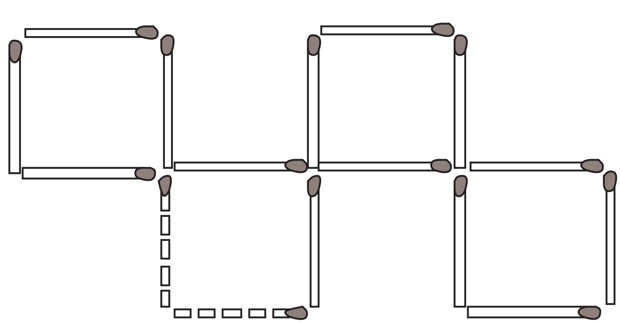
E no nosso caso? Queremos formar 4 quadrados, sem que sobrem palitos. Qual é a pergunta crucial aqui? Pense.

Isso mesmo! A pergunta é: "Quantos palitos temos?"

É só contar: temos 16 palitos. Se cada quadrado possui 4 palitos e queremos formar uma figura com 4 quadrados - desde que não permitamos que dois quadrados sejam vizinhos ("de parede", isto é, de lado comum) - usaremos:

**$4 \times 4 = 16$ palitos. Exatamente o que temos!**

Algumas tentativas irão lhe mostrar que, desenhando ou fazendo 4 quadrados com 16 palitos, o desenho que devemos procurar formar é este:



Está resolvido. Não lhe parece mais fácil, agora?

Pois então. Tudo teve uma seqüência muito natural, desde o momento em que equacionamos o problema, contando o número de palitos e tentando visualizar claramente o que havia sido pedido - neste caso, a forma da figura dos 4 quadrados.

## Equacionando um problema algébrico

Rigorosamente falando, equacionar um problema envolve escrever a equação (ou as equações) de modo que ela expresse em linguagem matemática o que foi dado no problema em linguagem comum.

Vejamos, então, como fazer isso com problemas algébricos, ou melhor, com ***problemas que admitem solução algébrica***.

**EXEMPLO 1**

Qual é o número cujo dobro, mais 5, é igual a 17?

Equacione o problema, chamando o número desconhecido de **x**. Vimos que não importa a letra que usamos para designar a incógnita, isto é, o número procurado - mas é universal o uso do **x**. O fato importante é que:

$$2x + 5 = 17$$

A partir daí, acharíamos **x**. (Você pode tentar, se quiser). Só que nesta aula estamos mais interessados no ***equacionamento*** dos problemas - que é a primeira etapa. Geralmente, essa é a etapa mais importante na resolução desses problemas.

Vamos relembrar os momentos fundamentais desse equacionamento.

- Quando encaramos o tal número procurado como a incógnita do problema, e o chamamos de **x**;

- Quando traduzimos em "matematiquês" o que está dado em português, ou seja, quando escrevemos a equação matemática que é satisfeita por essa incógnita. Neste exemplo, faríamos assim:

**x = número**
**O que sabemos: 2x + 5 = 17**

Para reconhecer **x**, é só resolver a equação. Encontra-se **x = 6**. Verifique.

Vamos ver outros exemplos de equacionamento de problemas. É interessante que você, em cada caso, experimente responder a estas duas perguntas do equacionamento, antes de continuar a leitura:

**a)** O que é **x**, neste caso? (Qual é a incógnita?)
**b)** O que sabemos sobre **x**? (Qual é a equação?)

**EXEMPLO 2**

Quanto deve medir de lado (em km) um terreno quadrado, para que o número que vai expressar seu perímetro (em km) seja o mesmo que o número que expressa sua área (em km )? Procure a solução!

Em primeiro lugar, vamos responder às duas perguntas principais do equacionamento:

**a)** **x** = lado

**b)** O que sabemos: $\underbrace{\mathbf{4x}}_{\text{perímetro}} \ = \ \underbrace{\mathbf{x}}_{\text{área}}$

Aqui, vamos lembrar que um número (ou incógnita) ao quadrado é esse número (ou incógnita) multiplicado por ele mesmo. Então:

$$\mathbf{4\,x = x \cdot x}$$

E, logo, adivinhamos um número **x** que satisfaz esta equação. Qual é?

Ora até visualmente fica claro que a expressão 4x = x , acima, é verdadeira quando substituímos **x** por 4, pois temos:

$$\mathbf{4 \cdot 4 = 4 \cdot 4}$$

Portanto, se o lado do terreno quadrado for 4 quilômetros, satisfará o que é pedido.

Uma observação importante: a equação 4 x = x    é uma equação de 2º grau. Por isso, (como recordaremos) deve ter outra raiz, ou seja, outro número para substituir o **x**. A outra raiz é zero, pois zero vezes qualquer número é zero. Mas, neste caso, o terreno teria lado nulo, quer dizer, não existiria. (Dizemos que, neste caso, x = 0 é uma ***solução degenerada***).

**EXEMPLO 3**

- Qual o número cuja metade é a sexta parte de 42? E de 21?
- E qual o número cuja metade é a sexta parte de seu triplo?

A primeira pergunta é equacionada assim:

**x = número**

**O que sabemos:** $\mathbf{\dfrac{x}{2} = \dfrac{\overset{7}{\cancel{42}}}{\underset{1}{\cancel{6}}}}$

A partir daí fica fácil: multiplicando os dois lados por 2, teremos **x** = 14.

A segunda pergunta é equacionada assim:

**x = número**

**O que sabemos:** $\frac{x}{2} = \frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{6}_{\,2}}$

Logo, multiplicando os dois lados por 2, temos **x** = 7.

Já a terceira pergunta é bem diferente:

**x = número**

**O que sabemos:** $\frac{x}{2} = \frac{3x}{6}$ **isto é, x = x**

Você pode dar exemplo de um número que pode substituir **x** e fazer a sentença ser verdadeira? Pense.

Claro: qualquer número serve! Pois **x = x** é verdadeiro para todo **x**, já que todo número é igual a si mesmo.

Assim, **x = x** não é propriamente uma equação. Dizemos que é uma ***identidade***, pois é verdadeira para todo **x**.

**EXEMPLO 4**

O marcador de gasolina do meu automóvel apresenta um erro e desejo conhecê-lo. Assim, poderei compensá-lo nas próximas leituras do marcador. Há pouco ele marcava 3/4 do tanque, e precisei de 10 litros para enchê-lo completamente. A capacidade do tanque é de 50 litros. Qual o erro percentual que o marcador apresenta? Para mais ou para menos?

Qual deve ser a incógnita nesse problema: você diria que é o erro percentual procurado (quer dizer, quantos por cento do tanque)?

O primeiro cuidado do equacionamento é a escolha da incógnita, do **x**. Só é preciso bom-senso para se fazer essa escolha: por exemplo, **x** deve ser tal que saibamos **logo** usá-lo para escrever a equação do problema.

Assim, é mais razoável fazer da seguinte maneira:

**x = Volume que havia no tanque (litros)**

**O que sabemos: x + 10 = 50**

**Logo, x = 40.**

**O que queremos saber:**

- **erro = ?**
- **erro percentual = ?%**

Mas o volume que o tanque marcava era:

$$\frac{3}{4} \times 50 = 37{,}5$$

Assim:

$$\text{erro} = 40 - 37{,}5 = 2{,}5 \text{ (em 40 litros)}$$

Finalmente, em termos de erro percentual, precisamos fazer uma ***regra de três***, procurando o erro não em 40, mas em 100 litros.

$$2{,}5 \text{ — } 40$$

$$y \text{ — } 100$$

Daí,

$$\frac{2{,}5}{y} = \frac{40}{100}$$

Então, multiplicando os dois lados por 100 y, temos:

$$(2{,}5) \cdot (100) = 40\,y$$

Logo, dividindo por 40 e trocando os lados, temos que

$$y = \frac{250}{40} = 6{,}25 \text{ (em 100 litros)}$$

Concluímos que o erro percentual apresentado pelo marcador é de 6,25 litros em 100 litros, ou seja, **6, 25%** para menos, pois ele marca menos do que devia.

Nesta página e nas seguintes estão alguns problemas para você equacionar, sem necessariamente resolvê-los.

Lembre-se dos dois pontos importantes do equacionamento! "Quais"?! É hora de revisão da aula...

## Exercícios

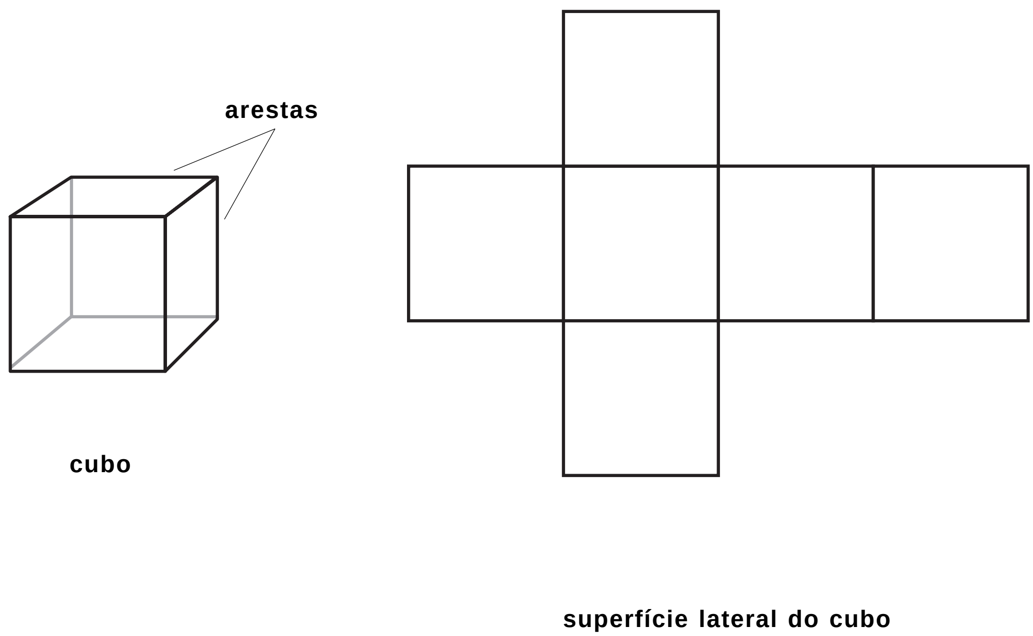
**Exercício 1**

Considere o seguinte problema: Subtraindo-se 4 de certo número e dividindo-se esse resultado por 2 e, depois, somando-se este novo resultado ao triplo daquele número, sabemos que o resultado é igual a $\frac{4}{5}$ do número mais 7. Qual é o número?

**a)** Qual é a incógnita?
**b)** Que equação ela satisfaz?
**c)** O que o problema pede?
(Atenção: O exercício não pede para resolver o problema. Faça-o se quiser.)

**Exercício 2**

**a)** Faça o mesmo com este problema, parecido com o **Exemplo 2**, visto na aula. Quanto deve medir a aresta (em m) de um cubo, para que o número que expressa a área (em m ) da superfície lateral total do cubo (formada pelos 6 quadrados que o limitam) seja um número igual ao de seu volume (em m )?




**b)** Olhando para sua equação, que palpite você arriscaria para o tamanho da aresta procurada?

**Exercício 3**

**a)** Equacione o seguinte problema. A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho e, ao mesmo tempo, o filho é 22 anos mais jovem que o pai. Quais as idades deles?
Cuidado: há duas incógnitas! (Chame-as de **x** e **y**). E há também duas equações.

**b)** Observando atentamente as suas duas equações, você consegue descobrir **x** e **y**? (Pense na diferença entre as idades, vendo-a de dois modos.)

**Exercício 4**

**a)** Resolva o item **a)** do exercício anterior chamando as incógnitas de **p** e **f**. Compare as equações com aquelas equações anteriores: o que poderíamos dizer dos valores dessas incógnitas?

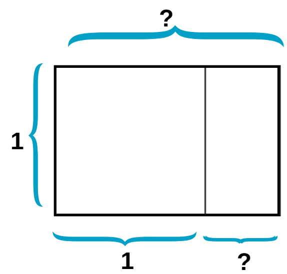
**b)** Que letras você prefere para as incógnitas, neste problema? Por quê?

**Exercício 5**

Equacione este problema, que trata do famoso ***retângulo áureo***.

O lado menor de um retângulo mede 1 m, e o lado maior é desconhecido. Queremos que esse lado maior seja tal que, quando retirarmos um quadrado de lado 1 m do retângulo, sobre uma retângulo semelhante ao retângulo grande - isto é, do mesmo formato que o retângulo grande, com os lados respectivamente proporcionais aos dele.

O retângulo áureo é igual a um quadrado unido a outro retângulo áureo menor (é importante na natureza, nas artes e na matemática).




**Sugestão:** Chame de **x** a maior - ou a menor - das duas medidas desconhecidas, na figura. Agora interprete a proporcionalidade entre os lados do retângulo grande e do pequeno em termos de uma equação em **x**.

**Atenção**: A equação é de 2º grau. Deixe a resolução para o momento em que estiver relembrado esse assunto, em aulas futuras.