

O gráfico que é uma reta

Agora que já conhecemos melhor o plano cartesiano e o gráfico de algumas relações entre x e y , voltemos ao exemplo da aula 8, onde $y = 2x + 1$ e cujo gráfico é uma reta.

Queremos saber mais sobre como é essa ligação que existe entre a fórmula $y = 2x + 1$ e a figura geométrica da reta. Queremos saber, por exemplo, se outras fórmulas também têm como gráfico uma reta. Caso haja, o que essas fórmulas de retas têm em comum; de que modo se parecem?

É isso que estudaremos hoje. Como você verá, são muitas as situações na vida cotidiana – especialmente nas nossas diversas profissões – em que a relação entre duas grandezas é expressa graficamente por um reta. Veremos isso num exemplo com um automóvel em movimento, na relação entre a distância percorrida e o tempo de percurso. E deixaremos para você aplicar as mesmas idéias na sua própria área de trabalho: na construção civil, na indústria, no comércio, no trabalho em casa etc.

A conclusão da aula é que a Matemática tem uma maneira de visualizar toda uma série de problemas, facilitando imensamente sua resolução.

Um exemplo tirado do futebol

Talvez você já tenha visto um comentarista de futebol dizer o seguinte, analisando um determinado chute a gol: “A velocidade da bola era de aproximadamente 90 km/h, quando foi espalmada pelo goleiro.” O que significa isso? Como se faz essa estimativa de velocidade?

Se um automóvel estivesse a 90 km/h, isso quer dizer que ele percorreria 90 quilômetros de distância no tempo de 1 hora. Possivelmente, a estimativa do comentarista deve ter sido calculada por computador da seguinte maneira: pelo vídeo do chute, é anotado o instante em que o pé do jogador toca a bola e a posição em que ele está no campo; é anotado também o instante em que o goleiro espalma a bola e a posição do goleiro. Assim, obtém-se a **distância** que a bola percorreu e o **tempo** que levou para isso. O que é a velocidade da bola, então?

Se, para simplificar, considerarmos que a velocidade da bola **é constante ao longo de toda sua trajetória**, então, por definição:

Velocidade é a distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

Introdução

Nossa aula

AULA
9

Rigorosamente falando, isso não é verdade, pois o atrito do ar diminui a velocidade da bola o tempo todo. Estamos simplificando as coisas.) Em linguagem matemática:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}} \text{ ou } v = \frac{e}{t}$$

No caso desse chute, a velocidade equivale a 90 km/h. Em metros por segundo (pois as medidas do campo de futebol são em metros e cada chute se dá em frações de segundo), ela é de:

$$v = 90 \text{ km/h} = \frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

40

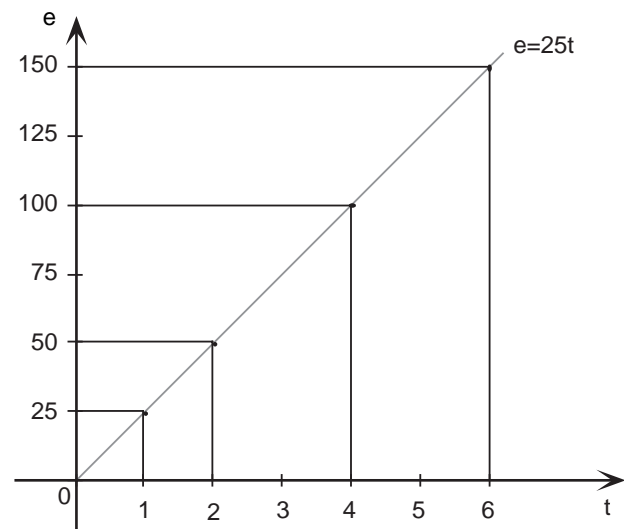
Ou seja, a bola percorre um espaço de **25 metros a cada segundo**. Ou 50 metros a cada 2 segundos, ou 100 metros a cada 4 segundos, ou 150 metros a cada 6 segundos, e assim por diante.

É fácil visualizar de uma só vez a relação do espaço (**e**) percorrido com o tempo (**t**) de percurso - que neste exemplo é:

$$\frac{e}{t} = 25, \text{ ou } e = 25 t$$

Para isso, basta construir uma tabela e um gráfico que mostre a maneira como o espaço se relaciona com o tempo:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150



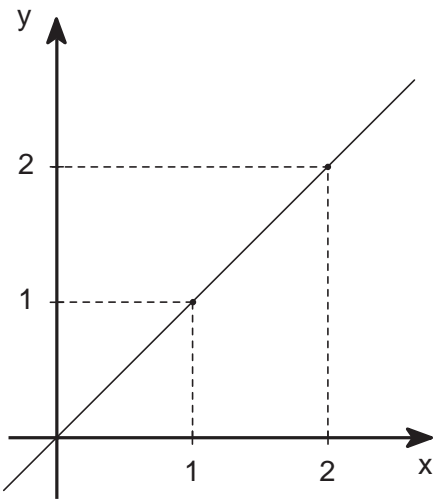
Como vemos, neste caso, temos uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Observe que, nesse exemplo, os eixos do plano cartesiano representam **e** (espaço) e **t** (tempo), que são grandezas diferentes: uma é medida em metros e outra, em segundos, respectivamente. Dessa forma, a marcação dos pontos sobre os eixos pode ser feita também com unidades diferentes. No eixo vertical, cada unidade equivale a 25 metros; enquanto no eixo horizontal cada unidade corresponde a 1 segundo.

O gráfico de $y = ax$: retas pela origem

Observe os exemplos a seguir:

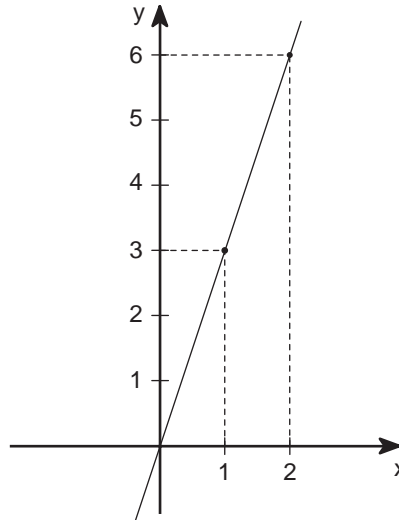
a) $y = x$

x	y
0	0
1	1
2	2



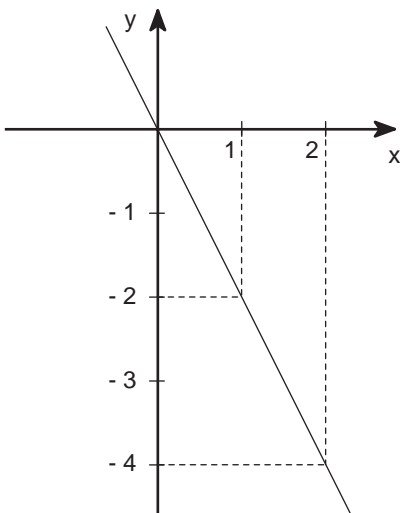
b) $y = 3x$

x	y
0	0
1	3
2	6



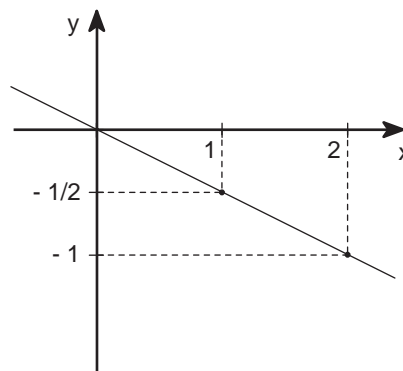
c) $y = -2x$

x	y
0	-0
1	-2
2	-4

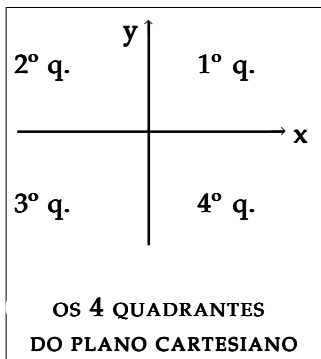


d) $y = -\frac{1}{2}x$

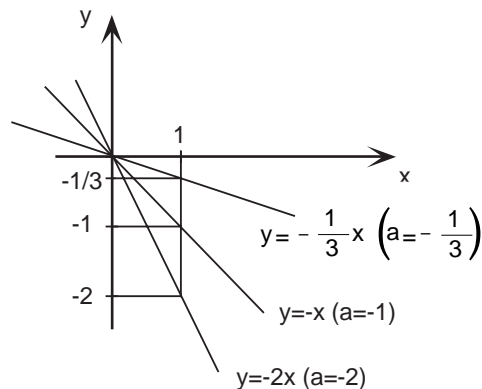
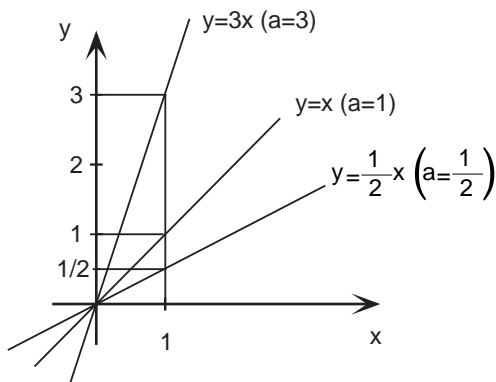
x	y
0	0
1	$-\frac{1}{2}$
2	-1



AULA
9



Como você mesmo deve ter notado, o gráfico de $y = ax$ (no qual a é uma constante) é sempre uma reta. Quando a é positivo, a reta está no 1º e no 3º quadrantes do plano cartesiano; quando a é negativo, a reta está no 2º e no 4º quadrantes. Veja nos exemplos abaixo:



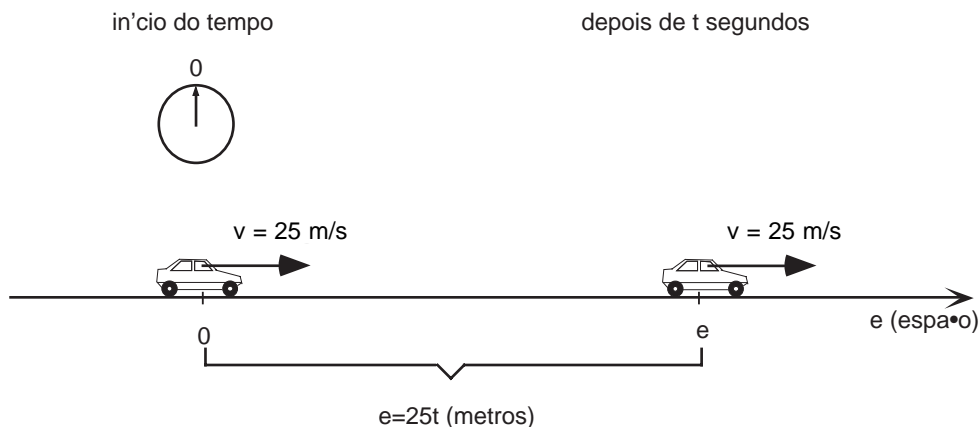
Voltando ao exemplo da velocidade

O gráfico da relação $e = 25t$, que vimos no início da aula, mostra, para cada instante de tempo t , o espaço e percorrido pela bola de futebol, desde o início do movimento até o instante t .

Você se lembra de que verificamos que:

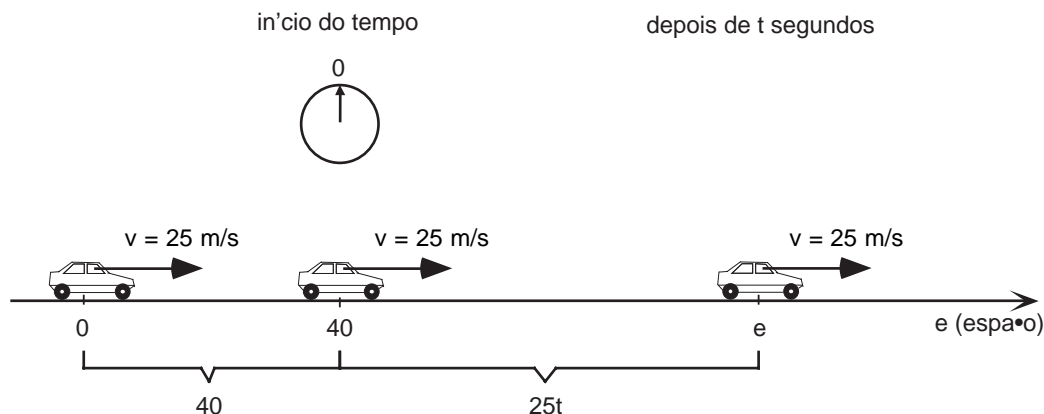
$$v = 25 \text{ m/s} \text{ é equivalente a } v = 90 \text{ km/h}$$

Imagine agora um carro que se desloca a uma velocidade de 90 km/h , ou seja, sua velocidade é de 25 m/s . Na figura abaixo, ilustramos isso, imaginando o eixo e como o próprio caminho do carro para ajudar na visualização. Desenhamos no carro uma seta v , sempre do mesmo tamanho, para representar sua velocidade constante:



O gráfico da página 64 já falou tudo sobre este exemplo, não é mesmo? Vê-se logo que o carro tinha percorrido 25 metros após 1 segundo do início da contagem do tempo; 50 metros após 2 segundos, 75 metros após 3 segundos etc.

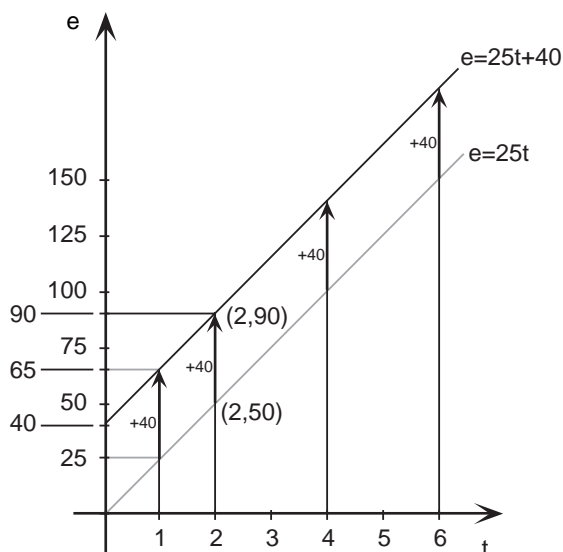
Agora vamos mexer um pouco no exemplo. No total, quantos metros teria percorrido o carro se o cronômetro só tivesse sido disparado para começar a contagem do tempo depois de o carro já haver percorrido 40 metros?



No total, o carro teria percorrido **25t** (como antes) mais **40 metros**. É fácil obter o novo gráfico do espaço percorrido em relação ao tempo, para **$e = 25t + 40$** . Acompanhe como o espaço inicial, que aqui é de **40 metros**, aparece nas linhas da nova tabela e no gráfico, deslocando a reta anterior para cima em **40 unidades** (40 metros).

TABELA ANTERIOR: TABELA NOVA:

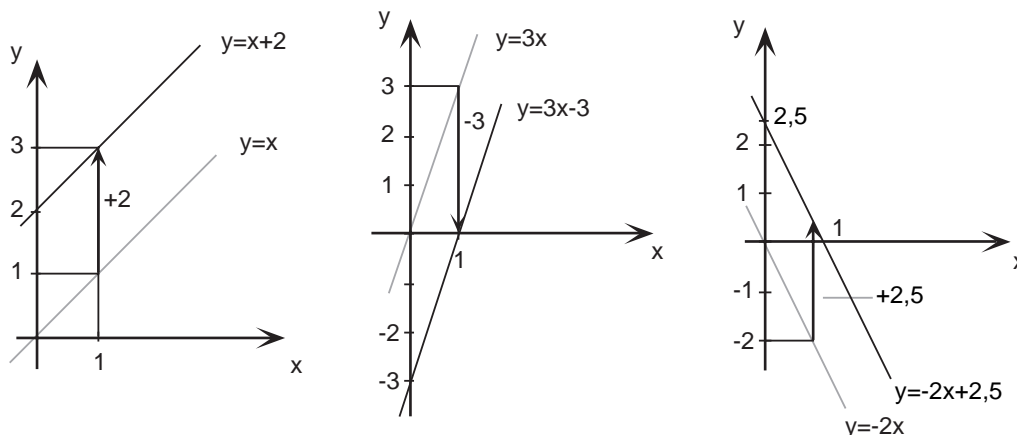
t	$e = 25t$	t	$e = 25t + 40$
0	0	0	$0 + 40 = 40$
1	25	1	$25 + 40 = 65$
2	50	2	$50 + 40 = 90$
4	100	4	$100 + 40 = 140$
6	150	6	$150 + 40 = 190$



AULA
9

O gráfico de $y = ax + c$: retas quaisquer

Nos exemplos abaixo, construímos gráficos de equações do tipo $y = ax + c$. Esses gráficos foram obtidos somando-se c unidades aos gráficos dos exemplos anteriores, cujas equações eram do tipo $y = ax$.



Observe que, quando c é positivo, a reta de $y = ax + c$ corta o eixo y acima da origem; e quando c é negativo, corta o eixo y abaixo da origem.

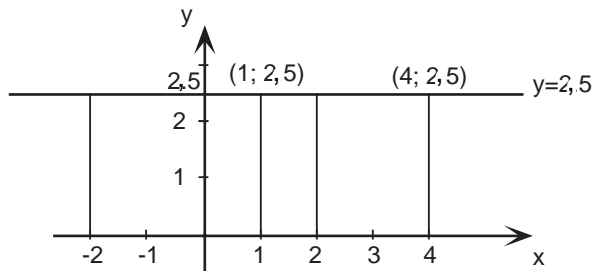
Um caso particular: retas horizontais

Os diversos gráficos de $y = ax$ já nos mostraram que a constante a está relacionada com a inclinação da reta. Quando a é positivo (reta no 1º e 3º quadrantes), dizemos que a reta tem **inclinação positiva**; quando a é negativo (reta no 2º e 4º quadrantes), dizemos que a reta tem **inclinação negativa**.

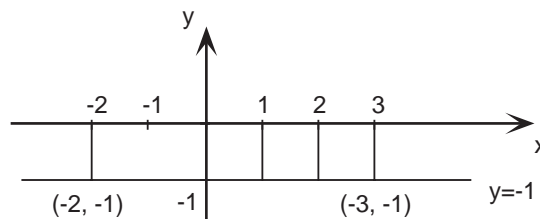
Como a reta de $y = ax + c$ é a reta de $y = ax$ deslocada de c para cima (se $c > 0$) ou para baixo (se $c < 0$), a inclinação permanece igual. Confira nas figuras: as retas são paralelas, tendo a mesma inclinação.

Para quem está atento, uma pergunta logo surge: que dizemos da inclinação, quando a não é positivo nem negativo, mas nulo ($a = 0$)? Dizemos que a inclinação é **nula**. E como será uma reta $y = ax + c$ com $a = 0$, ou seja, tal que $y = c$ (para todo x)? Aqui estão duas delas, com tabela e gráfico:

x	y = 2,5
0	2,5
1	2,5
2	2,5
4	2,5
-2	2,5



x	y = -1
0	-1
1	-1
2	-1
4	-1
-2	-1



Veja que efeito teve anular **a** na relação **y = ax + c**: ficamos com **y = c**, cujo gráfico é uma **reta horizontal**.

Já conhecemos retas inclinadas de vários modos e, agora, retas horizontais. Que tipo de reta nos falta encontrar? Pense.

Outro caso particular: retas verticais

Relembre que obtivemos retas horizontais anulando o coeficiente **a** de **x** na relação **y = ax + c**. Poderíamos encontrar as retas que nos faltam, as verticais, fazendo a mesma coisa com **y** – ou seja, anulando o seu coeficiente? Do jeito que está não – porque o coeficiente de **y** é 1. Mas se incluirmos também um coeficiente (b) para **y**, então, quando ele for nulo, teremos as retas verticais: é o caso dos dois últimos dos próximos exemplos.

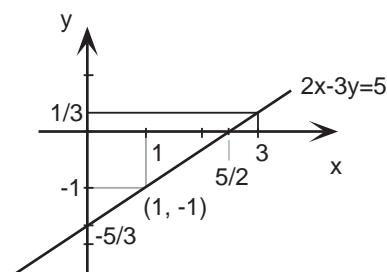
O gráfico de $ax + by = c$: exemplos

Vamos desenhar estes gráficos de retas, usando uma tabela auxiliar:

a)

$$2x - 3y = 5$$

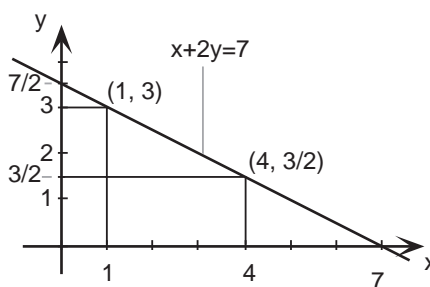
x	$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
0	$-5/3 = -1,6$
$5/2$	0
1	-1
3	$1/3$



b)

$$x + 2y = 7$$

x	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
0	$7/2 = 3,5$
7	0
1	3
4	$3/2$



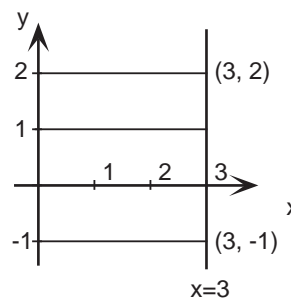
c)

$$x + 0y = 3$$

$$x = 3$$

(para todo y)

x	y
3	0
3	1
3	2
3	-1



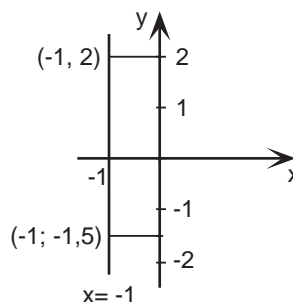
d)

$$x + 0y = -1$$

$$x = -1$$

(para todo y)

x	y
-1	0
-1	2
-1	-1,5



AULA
9

Conclusão: a relação $x = c$ (onde c é uma constante) é representada no plano cartesiano por uma reta vertical: à direita da origem se $c > 0$, e à esquerda se $c < 0$.

“E se $c = 0$?” A reta de $x = 0$ é o próprio eixo y .

Além desta conclusão, os dois primeiros exemplos nos mostram claramente como é o gráfico da relação geral $ax + by = c$, quando a e b não são nulos: é uma reta inclinada que corta o eixo x no ponto $(\frac{c}{a}, 0)$ e o eixo y em $(0, \frac{c}{b})$. Confirme isso nos exemplos.

Sendo assim, já sabemos traçar o gráfico de qualquer reta, isto é, de qualquer relação entre x e y do tipo $ax + by = c$. Vamos praticar?

Exercícios

Atenção: Para os exercícios desta aula, é interessante você trabalhar com papel quadriculado, pois ele ajuda no traçado de gráficos.

Exercício 1

a) Para cada reta abaixo, faça uma tabela auxiliar e use-a para traçar o gráfico da reta. (Desenhe todas as retas num mesmo plano cartesiano).

a1) $y = \frac{12}{5}x$

a2) $y = \frac{12}{5}x + 2$

a3) $y = \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$

a4) $12x - 5y = 7$

b) Qual destas retas tem maior inclinação?

c) Em termos geométricos, o que podemos dizer destas quatro retas?

Exercício 2

a) Observando o gráfico de $e = 25t + 40$, do espaço total (em metros) percorrido pelo automóvel até o instante t , responda: qual o espaço total percorrido até:

a1) 2 segundos?

a2) 4 segundos?

a3) 3 segundos?

a4) 1,5 segundo?

b) Confirme suas respostas pela tabela.

Exercício 3

- a) Com base no gráfico de $e = 25t + 40$, trace no mesmo plano cartesiano o gráfico de $e = 25t + 75$.
- b) O que significa esse 75 no lugar de 40, no exemplo do automóvel?

Exercício 4

- a) Observe, a seguir, cada uma das relações que envolvem x e y , e faça o que se pede. Escreva ao lado de cada uma: (H) se o gráfico da relação for uma reta horizontal; (V) se for uma reta vertical; (I +) se for uma reta de inclinação positiva; e (I -) se for de inclinação negativa.

a1) $y = 2x - 1$

a2) $x = 5$

a3) $y = -3x$

a4) $x = \pi$

a5) $x = 5 - y$

a6) $y = -2$

a7) $3y - 4x = 12$

- b) Usando uma tabela auxiliar, trace o gráfico de cada reta, e confirme sua resposta anterior.

Exercício 5

Aqui estão algumas retas na forma $ax + by = c$. Use o último comentário da aula para responder o que se pede em seguida (ou use as sugestões).

:

reta 1: $\rightarrow 7x + 2y = -14$

reta 2: $\rightarrow x - 3y = 0$

reta 3: $\rightarrow -12x - 31y = 1$

reta 4: $\rightarrow -7x - 2y = 14$

reta 5: $\rightarrow 3x + 5y = 8$

- a) Em que ponto a reta corta o eixo x ? (Sugestão: Faça $y = 0$ e calcule x)
- b) E o eixo y ? (Sugestão: Faça $x = 0$ e calcule y).
- c) Em que casos esses dois pontos bastam para traçar a reta?