

A interseção de retas e a solução de sistemas

Introdução

Aqui está um problema que serve de exemplo para as questões que serão tratadas nesta aula. Pense, e veja se consegue resolvê-lo com as próximas sugestões.

A Mercadoria A, uma concorrente da Mercadoria B, estava cobrando por certa mercadoria o dobro do preço que a outra pedia. Percebendo que isso impressionava mal a clientela, o dono da Mercadoria A decidiu dar um desconto de R\$ 10,00 no seu preço. Seu concorrente rebateu, então, dando o mesmo desconto na mercadoria. Desse modo, o preço na Mercadoria A ficou agora o triplo do preço na Mercadoria B! Quanto cada Mercadoria estava pedindo pela mercadoria?

As sugestões que damos são as seguintes:

1. Experimente resolver o problema pelo método algébrico. (É um problema de procura do valor de incógnitas, daquele tipo que já aprendemos).
2. Primeiro, organize suas idéias: pense se vale a pena fazer uma tabela com as informações dadas.
3. Siga aqueles passos conhecidos, vistos nas aulas anteriores. Comece por equacionar o problema, escrevendo-o em linguagem matemática.
4. Depois, resolva as equações e responda o que se pede.

Vamos, então, resolver o problema acima.

Nossa aula

Resolvendo o problema pelo método algébrico

Vamos fazer uma tabela, ou um quadro, para organizar o raciocínio:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM		
PREÇO HOJE		

Aí colocaremos os dados do problema. Quais são eles ?

É simples. Queremos saber quanto cada mercearia estava cobrando (“ontem”) pela mercadoria. Logo, vamos chamar assim:

$$\begin{aligned} \text{preço de ontem na Mercearia B} &= x \text{ (reais)} \\ \text{preço de ontem na Mercearia A} &= y \text{ (reais)} \end{aligned}$$

Com isso, a tabela fica deste jeito:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM	x	y
PREÇO HOJE	$x - 10$	$y - 10$

pois cada mercearia passou a dar um desconto de 10 reais no preço que cobrava.

Agora, vamos escrever as equações que relacionam esses dados. Temos um sistema de duas equações a duas incógnitas, x e y , já que, relendo o enunciado do problema, concluímos que:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

Para resolver o sistema, observamos que a incógnita y está isolada na primeira equação. Isso nos sugere fazer a substituição de y por $2x$ na segunda equação. Daí, temos:

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 3x - 30 \\ 2x - 3x &= -30 + 10 \\ -x &= -20 \\ x &= 20; \text{ logo, } y = 2 \cdot (20) = 40 \end{aligned}$$

Então, a Mercearia B estava cobrando R\$ 20,00 pela mercadoria, enquanto a Mercearia A cobrava R\$ 40,00 (o dobro). Os preços caíram, hoje, para R\$ 10,00 e R\$ 30,00 (o triplo).

Um fato curioso é que, a primeira vista, a diferença entre os preços parece agora maior. Mas não é. É a mesma de antes, pois as duas baixaram do preço o mesmo valor (R\$ 10,00). O que muda de fato para os dois concorrentes é que, agora, os preços estão mais atrativos, e as vendas devem aumentar.

E quanto ao que deve a Mercearia A fazer para conquistar uma fatia maior de consumidores? Fica para você refletir, se quiser aprofundar na questão.

Uma das conclusões que podem ser tiradas da resolução do problema é que, para evitar que a concorrente continue anulando sempre seu desconto, a Mercearia A pode, por exemplo, aproximar seu preço do de seu concorrente. Isso evita que seu preço seja um múltiplo – como o dobro ou o triplo – do preço da concorrente.

Será possível visualizarmos todas essas informações e confirmarmos nossas respostas? Claro que sim. As aulas anteriores mostraram como obter isso no plano cartesiano, quando se tratava de problemas de uma só incógnita. Como será isso com duas incógnitas ?

Visualizando o problema

O plano cartesiano é usado em problemas que envolvem no máximo duas grandezas. Por exemplo: tempo e espaço, no caso do automóvel; ou aqui, reais e reais.

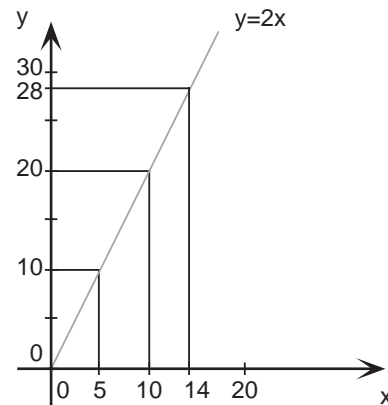
Nele, essas grandezas podem ser interpretadas como duas **variáveis**, x e y , cada qual sendo representada em um dos eixos. O que fazemos, em cada problema, então, é representar graficamente as relações existentes entre x e y , para daí procurar no gráfico a solução que o problema pede.

Vamos lá. No nosso problema, encontramos essas relações entre x e y , expressas num sistema de duas equações.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

O gráfico de $y = 2x$ é uma reta. Nela estão contidos pontos (x, y) como os encontrados por esta tabela, e que estão assinalados no gráfico:

x	$y = 2x$
0	0
5	10
10	20
14	28



O gráfico, no nosso caso, é uma **semi-reta**, já que x e y representam preços de mercadoria e não podem ser negativos.

Nessa semi-reta estão contidos não apenas os pontos encontrados pela tabela, mas **todos** os infinitos pontos (x, y) tais que a relação $y = 2x$ é verdadeira. Assim, por exemplo: $(14, 28)$ está na reta, pois $28 = 2 \cdot (14)$; já $(14, 25)$ não está, pois $25 \neq 2 \cdot (14)$. Confirme no gráfico.

Portanto, se o valor de x e o valor de y que procuramos devem satisfazer primeiramente a $y = 2x$, então o ponto (x, y) que os representa no plano cartesiano é algum ponto dessa reta, com certeza.

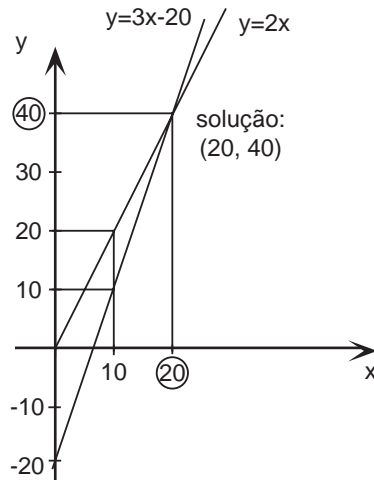
Mas esse mesmo x e esse mesmo y devem também satisfazer a outra condição do problema: $y - 10 = 3(x - 10)$. Simplificando, temos:

$$\begin{aligned} y - 10 &= 3(x - 10) \\ y - 10 &= 3x - 30 \\ y &= 3x - 30 + 10 \\ y &= 3x - 20 \rightarrow \text{que também representa uma reta} \end{aligned}$$

Retomando nosso raciocínio para visualizar o problema, concluímos que o ponto (x, y) , que representa o valor de nossas incógnitas x e y , deve também estar

sobre a reta $y = 3x - 20$. Conclusão: o ponto (x, y) procurado deve estar sobre as **duas** retas. Logo, deve ser o ponto de interseção das retas!

Veja no gráfico:



O gráfico nos mostra claramente que só quando o valor de x é 20 o valor de y (40) satisfará tanto a $y = 2x$ quanto a $y = 3x - 20$. Pois $40 = 2 \cdot (20)$ e $40 = 3 \cdot (20) - 20$. Confira as contas.

Qualquer outro valor de x produz resultado diferente em $y = 2x$ e em $y = 3x - 20$.

Por exemplo: $x = 10$ nos dá $y = 2 \cdot (10) = 20$ e $y = 3 \cdot (10) - 20 = 10 \neq 20$. Confirme no gráfico. Tudo fica bem claro no gráfico, concorda?

Visualizando o Exemplo 1 da aula 11

Agora, vamos voltar ao Exemplo 1 da aula 11.

Numa festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Na aula passada, o problema foi equacionado e resolvido. Vamos tentar confirmar graficamente o que foi encontrado. Chegou-se a um sistema de duas equações em duas incógnitas, x (o número de homens) e y (o número de mulheres)

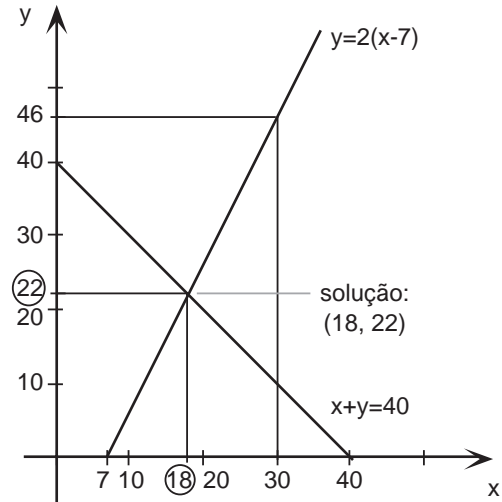
$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y = 40 - x \\ y = 2x - 14 \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta e nesta reta estão contidos todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação. O único ponto que satisfaz as duas equações é, deste modo, o ponto procurado. Esse ponto é o ponto comum às duas retas, o seu ponto de interseção.

AULA
12

Vejam no gráfico:

x	$y = 40 - x$	x	$y = 2(x - 7)$
0	40	7	0
40	0	30	46



Um gráfico cuidadoso nos mostra que, de fato, os únicos valores de x e y que satisfazem as duas equações são $x = 18$ e $y = 22$.

Ou seja, a solução é esta: $x = 18$ homens e $y = 22$ mulheres estavam na festa, como se encontrou resolvendo-se as equações.

Visualizando o Exemplo 2 da aula 11

Vamos fazer a mesma coisa com o Exemplo 2 da aula 11.

*Um omelete feito com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias.
Um omelete feito com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?*

O problema já foi equacionado naquela aula. Chamando de x o número de calorias em um ovo e de y o número de calorias em um grama de queijo, chegou-se a este sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x + 15y = 140 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} y = \frac{140-x}{15} \\ y = \frac{280-3x}{10} \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta no plano cartesiano.

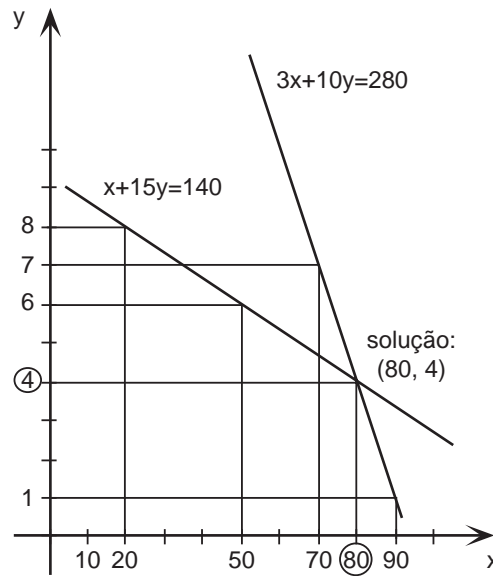
De novo, o ponto (x, y) procurado deve ser a interseção das retas, pois esse é o ponto tal que x e y satisfazem as duas equações. Que ponto é esse?

Na aula passada, encontramos $x = 80$ e $y = 4$ para o número de calorias em um ovo e em um grama de queijo, respectivamente.

Como esses números são muito distantes entre si, vamos usar o recurso de trabalhar com unidades de medida diferentes nos dois eixos.

Outra vez, um gráfico cuidadoso nos revela que, realmente, a interseção das retas que representam as equações do problema é o ponto (80, 4). Veja:

x	$y = \frac{140-x}{15}$	x	$y = \frac{280-3x}{10}$
20	8	70	7
50	6	90	1



Como você pode ver, o plano cartesiano nos ajuda muito a visualizar a solução do problema, quando ele recai num sistema de duas equações em x e y .

Aqui estão alguns exercícios para você praticar essa visualização. Nesta lista de exercícios, vamos visualizar as soluções que encontramos para alguns dos problemas passados na aula anterior.

Exercícios

Sendo assim, para cada um dos problemas abaixo, já apresentamos o seu sistema de duas equações em x e y . Cada equação representa uma reta no plano cartesiano. Proceda assim:

- Faça uma tabela para cada equação, com alguns valores de x e de y que a satisfazem.
- Com essa tabela, desenhe o gráfico de cada reta, como fizemos há pouco.
- Assinale o ponto que corresponde à solução do problema.

Exercício 1

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa ao sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra ?

Incógnitas: número de quilômetros no asfalto = x
número de quilômetros em terra = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

AULA
12

Exercício 2

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Incógnitas: um número = x
outro número = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 43 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Incógnitas: número de carros = x
número de motocicletas = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 43 \\ 4x + 2y = 150 \end{cases}$$

Exercício 4

Uma empresa deseja contratar técnicos e para isso aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu 1 ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Incógnitas: número de respostas certas = x
número de respostas erradas = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 50 \\ 4x - y = 130 \end{cases}$$

Exercício 5

Pedro e Paulo têm juntos R\$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Incógnitas: quantia de Pedro = x
quantia de Paulo = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 81 \\ 0,9x = y + 0,1x \end{cases}$$