AULA
14

Operações com potências

Introdução

Quando um número é multiplicado por ele mesmo, dizemos que ele está **elevado ao quadrado**, e escrevemos assim:

$$\mathbf{a \cdot a = a}$$

Se um número é multiplicado por ele mesmo várias vezes, temos uma **potência**.

$$\underbrace{\mathbf{a \cdot a \cdot a}}_{\text{3 fatores}} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(a elevado a 3 ou a ao cubo)}$$

$$\underbrace{\mathbf{a \cdot a \cdot a \cdot a}}_{\text{4 fatores}} = \mathbf{a^4} \qquad \textbf{(a elevado a 4)}$$

De uma forma geral, se o fator **a** aparece **n** vezes escrevemos $\mathbf{a^n}$ (a elevado a n). O número a é a **base** da potência e **n** é o **expoente**.

Nas ciências, para escrever números muitos grandes ou muito pequenos usamos potências. Por exemplo, um bilhão é o número 1.000.000.000, que é igual a:

$$\mathbf{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9}$$

Os astrônomos medem as distâncias entre as estrelas em uma unidade chamada **ano-luz,** que é a distância percorrida pela luz durante um ano. Essa imensa distância vale, aproximadamente, 9.500.000.000.000 km, ou seja, nove trilhões e quinhentos bilhões de quilômetros. Para facilitar, escrevemos esse número assim:

$$\textbf{1 ano-luz} = \mathbf{9{,}5 \cdot 10^{12}}\ \textbf{km}$$

Acontece que essa distância é ainda pequena se olharmos para o universo conhecido. A estrela mais próxima de nós (que está na constelação do Centauro) fica a 4 anos-luz de distância. Mas, existem estrelas que estão a bilhões de anos-luz de distância de nós. Imagine que número gigantesco deve representar essa distância em quilômetros. Podemos então perceber que só é prático representar números desse tamanho usando potências e, além disso, é preciso saber fazer cálculos com elas.

Nossa aula

O produto de potências de mesma base

Começamos com um exemplo. Vamos multiplicar $\mathbf{a^4}$ por $\mathbf{a^3}$

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{3 fatores}}}_{\text{7 fatores}} = a^{4+3} = a^7$$

Como cada expoente representa o número de fatores então o número total de fatores é a soma dos expoentes. Concluímos então que para **multiplicar** potências de mesma base devemos **conservar a base e somar os expoentes**. Esse resultado, escrito de forma geral, fica assim:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EXEMPLO 1

Certa estrela está a 1,2 milhões de anos-luz do sol. Sabendo que 1 ano-luz é igual a 9,5 trilhões de quilômetros, determine, em quilômetros, a distância entre essa estrela e o sol. Pense um pouco antes de ver a solução. Procure exprimir os números dados usando potências de 10.

Vamos exprimir os números dados usando números decimais e potências de 10. Observe que:

$$\begin{aligned} \textbf{mil} &= 1.000 = 10^3 \\ \textbf{milhão} &= 1.000.000 = 10^6 \\ \textbf{bilhão} &= 1.000.000.000 = 10^9 \\ \textbf{trilhão} &= 1.000.000.000.000 = 10^{12} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 1{,}2 \ \text{milhões} &= 1{,}2 \cdot 10^6 \\ 9{,}5 \ \text{trilhões} &= 9{,}5 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Para calcular a distância entre o sol e a outra estrela, devemos multiplicar esses dois números. Observe que vamos multiplicar os números decimais e as potências de 10. Veja:

$$\begin{aligned} 1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{12} = 1{,}2 \cdot 9{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} &= 11{,}4 \cdot 10^{6+12} = \\ &= 11{,}4 \cdot 10^{18} \ \text{km} \end{aligned}$$

Quando representamos um número por um decimal seguido de uma potência de 10, estamos usando o que se chama de **notação científica**. É assim que os cientistas representam números muito grandes. Entretanto, eles também combinaram o seguinte: para que todos escrevam da mesma forma nunca escreverão mais de um dígito na parte inteira do número decimal. Assim, um verdadeiro cientista não escreveria a distância $\mathbf{11{,}4 \cdot 10^{18}}$ **km**. Ele faria assim:

$$11{,}4 \, . \, 10^{18} = \frac{11{,}4}{10} \times 10 \times 10^{18} = 1{,}14 \times 10^{19} \ \text{km}$$

Observe que $10 = 10^1$. Por isso, $\mathbf{10 \cdot 10^{18}}$ é igual a $\mathbf{10^{1+18}}$, ou seja, $\mathbf{10^{19}}$.

Vamos então recordar as outras operações.

A divisão de potências de mesma base

Começamos também com um exemplo para descobrir o caso geral. Vamos dividir $\mathbf{a^6}$ por $\mathbf{a^2}$.

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{\overbrace{a.a.a.a.a.a}^{\text{6 fatores}}}{\underbrace{a.a}_{\text{2 fatores}}} = a^{6-2} = a^4$$

Cada fator do denominador é cancelado com um fator do numerador. Então o número de fatores do resultado é a diferença entre o número de fatores do numerador e o número de fatores do denominador. Concluímos então que, para dividir potências de mesma base, devemos conservar a base e subtrair os expoentes. Esse resultado, escrito de forma geral fica assim:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Observação: Nesta identidade existe uma restrição para a letra **a**: ela pode representar qualquer número, **exceto** o **zero**. Isso acontece porque é impossível a divisão por zero.

A potência do produto e do quociente

Observe as seguintes sequências de cálculos:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Estes resultados podem ser generalizados para um expoente qualquer

$$\boxed{(ab)^n = a^n . b^n} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

$$b \neq 0$$

A potência de uma potência

Vamos, mais uma vez, descobrir o caso geral a partir do raciocínio usado em um exemplo. Calculemos então $\mathbf{(a^3)^4}$.

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$$

É claro que a letra **a** apareceu como fator 12 vezes, que é o produto dos expoentes. Concluimos então que quando uma potência está elevada a algum expoente, devemos manter a base e multiplicar os expoentes.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Observação: O que acontece se o expoente for zero? Essa é uma pergunta freqüente, e a resposta é a seguinte. Quando definimos a^n, o expoente n é o número de vezes que a letra **a** aparece como fator. Então, **n** pode ser 1, 2, 3, 4 etc, e o caso $n = 0$ não está incluído na nossa definição. Portanto, a expressão a^0 precisa ser definida, ou seja, precisamos dar um significado para ela.

Definimos, então:

$$\boxed{a^0 = 1} \quad \text{para todo } a \neq 0$$

Por que isso? Porque, com essa definição, as propriedades anteriores continuam válidas. Observe.

$$1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$$

Inicialmente os nossos expoentes eram inteiros positivos, e agora o zero foi incluído. O leitor curioso poderá então perguntar o que acontece se o expoente for negativo. Realmente, expoentes negativos existem; mas, como eles não estão incluídos na definição original de potência, precisamos criar um significado para eles. Isso é o que veremos a seguir.

O expoente negativo

Devemos definir potências de expoentes negativos, de forma que as propriedades anteriores permaneçam válidas. A definição conveniente é a seguinte:

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$$

Observe que, com essa definição, as propriedades que vimos continuam a ser usadas. Veja:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \\[2em] \dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a^2} \end{array} \right.$$

Nas ciências, potências de base 10 com expoente negativo são usadas para representar números muito pequenos.

Observe:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

Então, para representar, por exemplo, o número **0,0003** na nossa já conhecida notação científica, fazemos assim:

$$0,0003 = \frac{0,0003 \times 10^4}{10^4} = \frac{3}{10^4} = 3 \times 10^{-4}$$

EXEMPLO 2

Para tratar a água consumida pela população e diminuir a incidência de cáries dentárias, muitos países acrescentam flúor à água que será distribuida. A proporção recomendada é de 700g de flúor para 1 milhão de litros de àgua. Calcular:

a) a quantidade de flúor em cada litro de água;
b) se você tem uma cisterna com 12.000 litros de água não tratada, que quantidade de flúor você deve acrescentar?
Pense um pouco antes de ver a solução.

Este problema se resolve com regra de três mas, é conveniente escrever os números usando potências de 10. Isso vai facilitar os cálculos.

Solução:
a) Sabemos que 1 milhão é igual a 10^6. Se **x** é a quantidade de flúor contida em um litro de água, temos a regra de três abaixo:

$$\begin{array}{lcl} 700\text{g} & \text{———} & 10^6 \text{ litros} \\ x \text{ g} & \text{———} & 1 \text{ litro} \end{array}$$

Portanto, $\mathbf{x} = \frac{1.700}{10^6} = \frac{7.10^2}{10^6} = 7.10^{2-6} = 7.10^{-4}$

Temos, então, em cada litro de água tratada, $7 \cdot 10^{-4}$ gramas de flúor.

b) Para saber a quantidade de flúor que deve ser colocada na cisterna devemos multiplicar $7 \cdot 10^{-4}$ por 12.000 litros.
Observe o cálculo:

$$7 \cdot 10^{-4} \cdot 12.000 = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^4 = 7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4+4} = 7 \cdot 1,2 = 8,4$$

Então, devemos acrescentar 8,4 gramas de flúor para tratar a água dessa cisterna.

Exercícios

Exercício 1

Escreva cada uma das expressões a seguir na forma de uma única potência de base 2.

a) $2^5 \cdot 2^3$ **b)** $\frac{2^9}{2^3}$ **c)** $(2^3)^5$ **d)** $\frac{2 \times 2^5}{2^9}$

Exercício 2

Escreva os números a seguir utilizando um número decimal (ou inteiro) multiplicado por uma potência de 10.

a) 23.000 **b)**2.000.000 **c)**0,04 **d)**0,000.015

Exercício 3

Simplifique $\frac{2^3 \times 4^5}{8^6}$

Atenção: observe que $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$

Exercício 4

Simplifique $100^5 \cdot 1000^7 \cdot (100^2)^{-4} \cdot 10000^{-3}$

Exercício 5

Escreva cada uma das expressões a seguir usando uma única potência de base 3.

a)$3^{-2} \cdot 3^{-5}$ **b)** $\frac{3^6}{3^{-4}}$ **c)** $\frac{1}{(3^{-2})^5}$ **d)** $\frac{3 \times 9^5}{27^6}$

Exercício 6

Calcule $2{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$

Exercício 7

O planeta Plutão, o mais afastado do sistema solar, está a 5900 milhões de quilômetros de distância do Sol. Escreva essa distância:

a) em quilômetros usando um número decimal com 1 dígito na parte inteira e uma potência de 10;

b) em anos-luz.

Exercício 8

Muitas fábricas lançam na atmosfera uma substância chamada dióxido de enxofre. A Organização Mundial de Saúde estabeleceu que a quantidade máxima dessa substância no ar que respiramos deve ser de $4 \cdot 10^{-5}$ gramas em cada metro cúbico de ar. Acima desse valor o ar é considerado poluído. Certo dia, em uma amostra de $2{,}5 m^3$ de ar de Sorocaba (SP) havia $0{,}135 \cdot 10^{-3}$ gramas de dióxido de enxofre. O ar de Sorocaba estava poluído ou não?