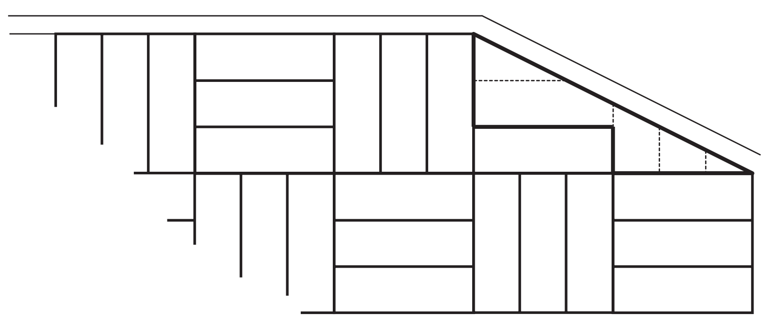
AULA

15

Áreas de polígonos

Introdução

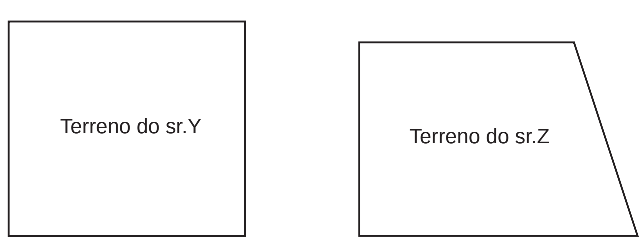
Seu Raimundo é pedreiro. Assim, freqüentemente ele se vê tendo que resolver verdadeiros quebra-cabeças na hora de encaixar os últimos pedaços de lajota no piso de uma sala torta. Também podem ser tacos ou azulejos. Agora mesmo ele está se perguntando: "De quantos tacos preciso para completar a parte que está faltando?" Como você poderia ajudá-lo?



Está vendo por que dissemos que seu Raimundo enfrenta verdadeiros quebra-cabeças no seu ofício de pedreiro? Problemas desse tipo são comuns também em outras áreas profissionais, como na carpintaria, na costura, na agronomia e em muitas outras áreas.

Se você cursou o ***Telecurso 2000 - 1º grau*** talvez ainda se lembre daquele problema de comparação dos terrenos do sr. Y e do sr. Z (aula 15).

Lá, a resposta à pergunta sobre qual dos terrenos é maior também veio quando encaramos o problema como um quebra-cabeças: exatamente como o do seu Raimundo. Os terrenos têm esta forma:



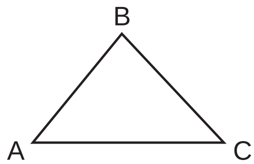
Você sabe avaliar qual das áreas é a maior? A sugestão é esta: Pense no terreno do Sr. Z como um quebra-cabeça de papel. Onde devemos cortar para que as peças se reagrupem formando um outro retângulo? (A área do retângulo é mais fácil de ser calculada!)

Nossa aula

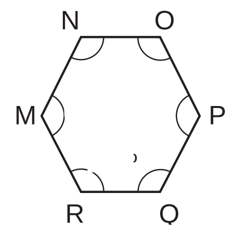
Área de polígonos

A grande maioria dos problemas práticos em que podemos aplicar nossos conhecimentos geométricos fala de figuras tais como retângulos, quadrados, triângulos, hexágonos e outros polígonos.

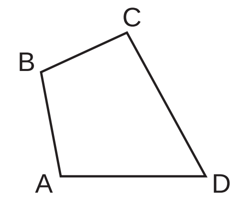
Polígonos são figuras formadas por segmentos de reta (seus ***lados***) dispostos numa linha poligonal fechada. Aqui estão alguns exemplos de polígonos:



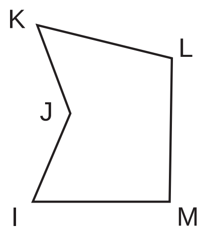
Triângulo ABC
(tri=3; 3 lados)
lados: AB,BC, AC



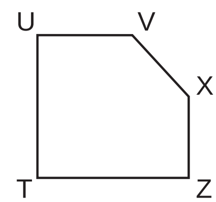
Hexágono de lados iguais
(hexa = 6; 6 lados)
lados: MN,NO, OP, PQ, QR, RM



Quadrilátero ABCD
(quadri=4; 4 lados)
lados: AB,BC, AC, AD



Pentágono IJKLM
lados: IJ, JK, KL, LM, MN



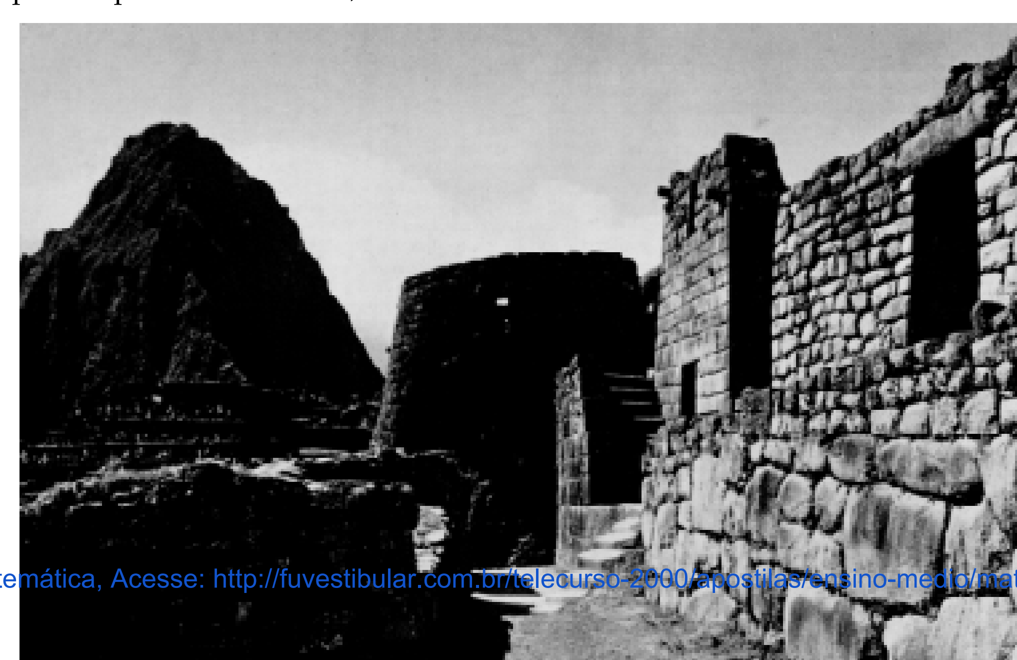
Pentágono TUVXZ
(penta=5; 5 lados)
lados:TU, UV, VX, XZ, ZT

Há também octógonos (8 lados), decágonos (10 lados), dodecágonos (12 lados) etc. Você não precisa decorar estes nomes agora. A prática talvez o conduza a usá-los, talvez não. Os nomes não são tão importantes quanto os fatos geométricos que estão por trás de nossas situações cotidianas. Nesta aula, o que estamos fazendo é resolver quebra-cabeças: há muito o que aprender com eles, além de ser divertido estudar este assunto desta maneira!

É claro que os polígonos acima são apenas cinco exemplos de polígonos entre a infinidade de formas de triângulos, quadriláteros etc, que existem. Mas já podemos perceber que todo polígono ocupa uma certa quantidade de superfície, uma certa ***área***.

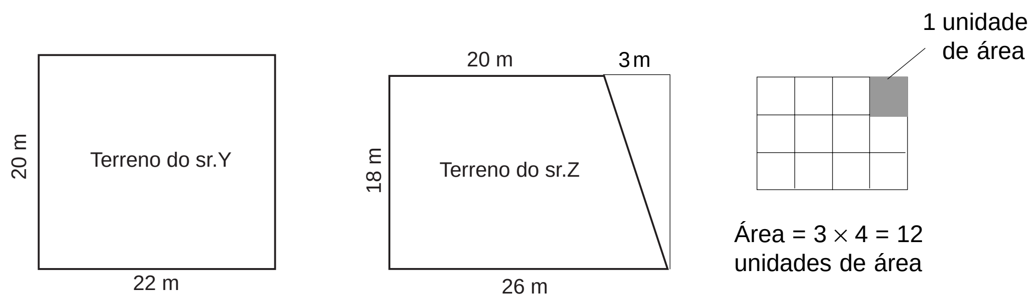
Na vida prática, conhecer essa área pode me ajudar a calcular o que preciso - seja o tamanho do meu terreno, ou a quantidade de tacos para ocupar um espaço de piso, seja a quantidade de tecido para um vestido, seja o gasto de papel para imprimir um folheto, ou muitas outras coisas.

Os incas da América do Sul foram habilidosos construtores em pedra.Observe como são variados os polígonos empregados em suas construções.



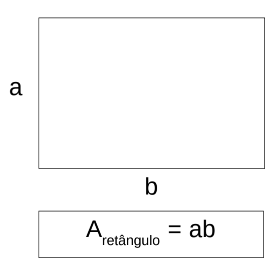
Área de retângulos e quadrados

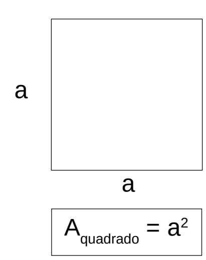
O retângulo é uma das figuras geométricas mais comuns que encontramos na vida diária, como podemos constatar em nossas casas, móveis e utensílios. Sua área é muito fácil de ser calculada, como vimos ao calcularmos a área dos terrenos do srs. Y e Z.

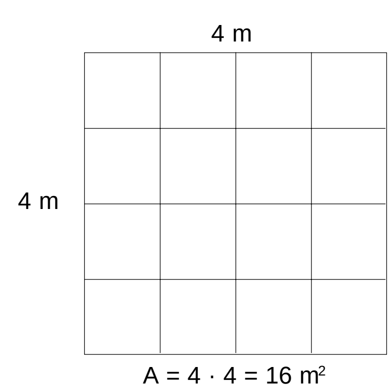


O terreno do sr. Y mede $20 \times 22 = 440$ m , e o do sr. Z mede $18 \times 23 = 414$ m , sendo maior, portanto, o terreno do sr. Y. Isso porque, como a figura da direita mostra, um retângulo de 3 por 4 (unidades de comprimento) tem $3 \times 4 = 12$ unidades de área. Assim, do mesmo modo, um retângulo de altura **a** e largura **b** tem área **A = ab**. Se **a** e **b** forem expressos em centímetros, então **A** será dada em **cm** . Se estiverem em metros, **A** será dada em **m** , e assim por diante.

Quanto ao quadrado, que é um retângulo especial, onde **a = b**, sua área é igualmente simples de ser calculada. Chamando de **a** o lado do quadrado, temos: **A = a · a = a** .







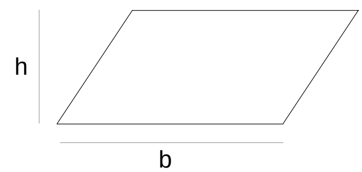
Continuaremos agora estudando outro quadrilátero muito comum: o paralelogramo. Para calcular a área de um paralelogramo vamos aplicar novamente um raciocínio do tipo quebra-cabeça.

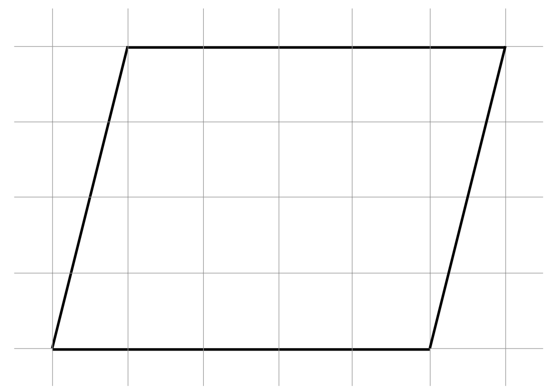
EXEMPLO 1

As questões que você verá neste exemplo serão solucionadas no decorrer da aula. Preste atenção!

a) Como devemos cortar o quadrilátero da esquerda, abaixo, (um paralelogramo,como veremos) em duas partes, de modo a reagrupá-las depois formando um retângulo?
Sugestão: papel e tesoura!

b) Se dissermos que esse retângulo tem largura **b** e altura **h**, quanto medirá a área do paralelogramo?

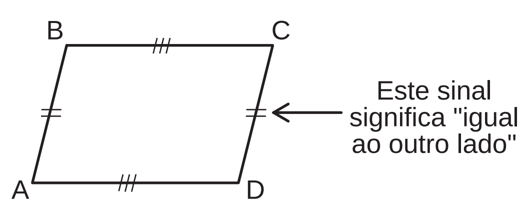




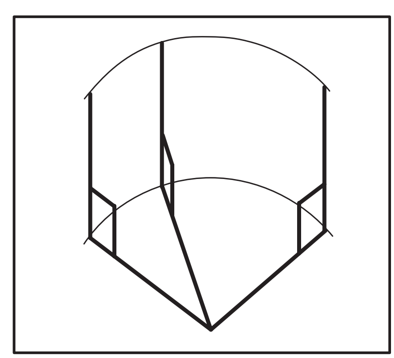
c) O paralelogramo à direita foi desenhado sobre papel quadriculado. Quantos quadradinhos unitários o formam, isto é, qual é sua área?

Área de paralelogramos e losangos

Retângulos são um caso particular de um tipo de quadrilátero que talvez você já conheça: o paralelogramo. O ***paralelogramo*** é um quadrilátero de lados opostos paralelos dois a dois. Ocorre, então, que esses lados opostos são também iguais dois a dois, como mostra o desenho abaixo:



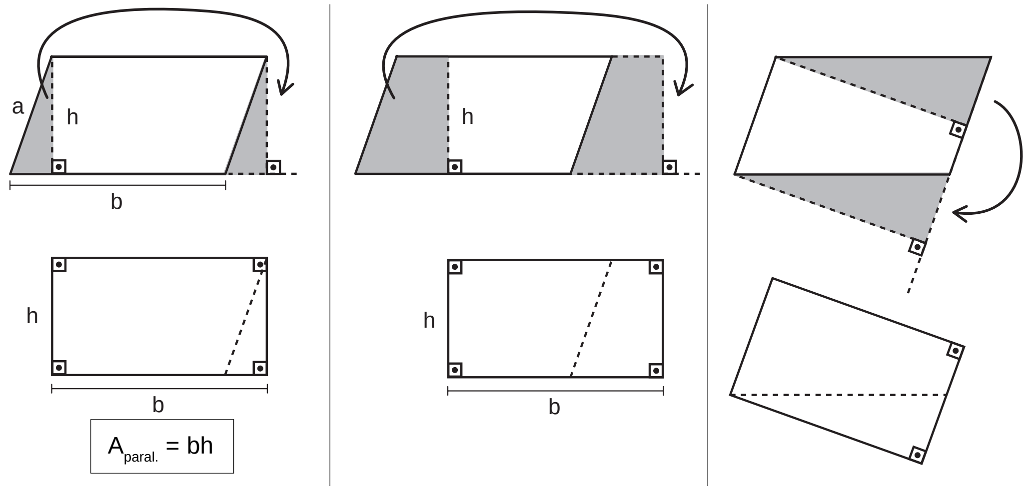
Paralelogramo ABCD
onde AB = CD
e AD = BC



Limpador de p‡ra-brisa

Uma aplicação interessante do paralelogramo é o limpador de pára-brisa, que se mantém sempre na vertical. Quando encontrá-lo, nos ônibus e automóveis, procure observar as hastes: elas formam um paralelogramo. Outras aplicações do paralelogramo pordem ser, por exemplo, o mecanismo que liga a roda da frente à de trás, na locomotiva do trem e o mecanismo que abre janelas basculantes.

Paralelogramos também são conhecidos como ***retângulos tombados***, sendo o retângulo, então, um paralelogramo cujos ângulos são todos retos. No **Exemplo 1** foi pedido que você, cortando adequadamente o paralelogramo, o transformasse depois num retângulo. Isso pode ser feito de muitas maneiras:

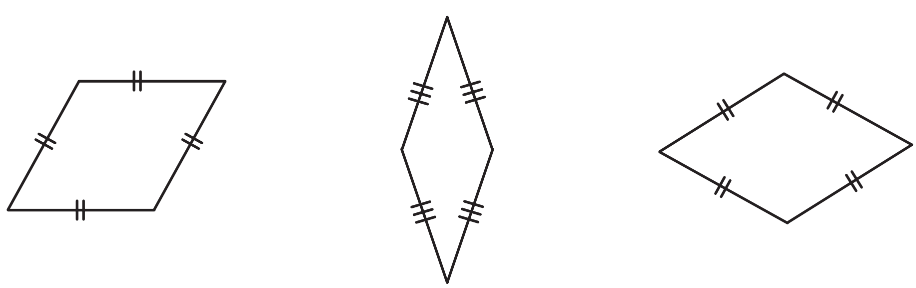


Observamos em todos os exemplos que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo em que foi transformado.

Na figura, tal área é dada por **A = bh**, onde **b** é um dos lados do paralelogramo e **h** é sua altura perpendicular a esse lado. Assim temos: **b = 2,5** e **h = 1,2** (cm); logo, a área desse paralelogramo é 3,0 cm .

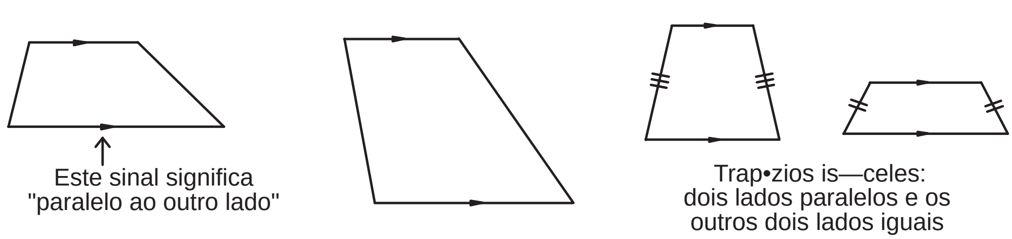
Quanto aos ***losangos*** (ou "balões"), são uma classe especial de paralelogramo Sua área é calculada do mesmo jeito: multiplica-se um dos lados pela altura. ***Losangos*** são paralelogramos de quatro lados iguais e paralelos dois a dois.

Aqui estão alguns exemplos de losangos:



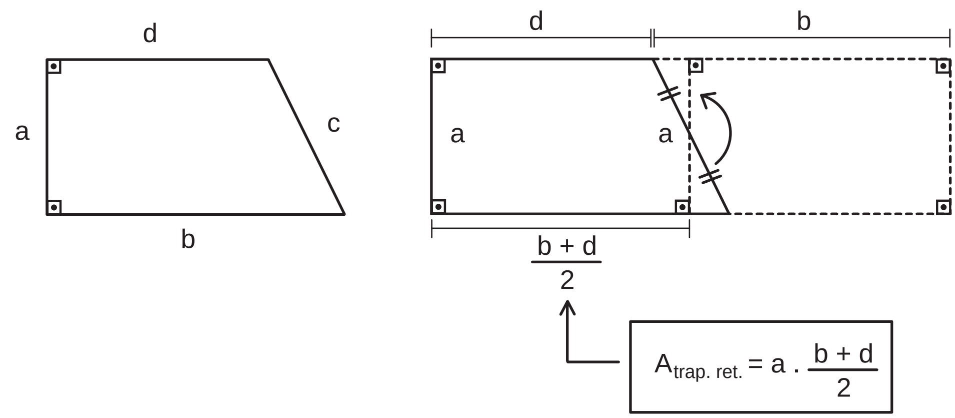
Área de trapézios

Os quadriláteros que têm apenas dois lados opostos paralelos são chamados de ***trapézios***. Os mais comuns no nosso cotidiano são os ***trapézios isósceles,*** que têm os dois lados não-paralelos com a mesma medida.



E, como veremos depois, os ***trapézios retângulos***, que têm dois ângulos retos vizinhos. Aqui mesmo nesta aula já encontramos alguns trapézios retângulos: tanto o terreno do sr. Z quanto algumas das peças que seu Raimundo tem que preencher com os pedaços de tacos são trapézios retângulos. (Identifique-os na figura da introdução da aula.) Você se lembra de já ter encontrado alguma situação prática envolvendo um trapézio?

Já vimos aqui, inclusive, como um trapézio retângulo se transforma num retângulo. Qual é, então, a área de um trapézio retângulo cujos lados paralelos (suas ***bases***) medem **b** e **d**, e cuja altura (medida sobre o lado perpendicular a estes) é **a**? A figura mostra que:

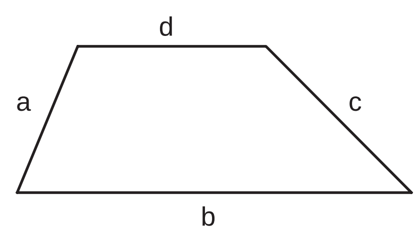


E quanto aos trapézios que não são retângulos: como calcular suas áreas? Como transformá-los em retângulos?

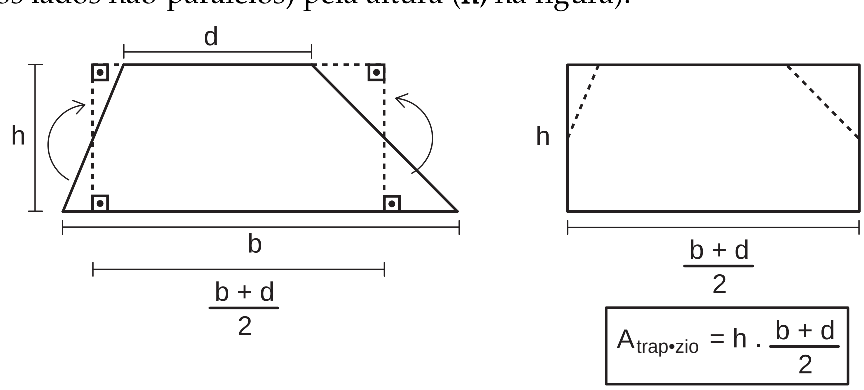
EXEMPLO 2

Faça cortes precisos neste trapézio, de modo que possamos reagrupar suas peças num retângulo.

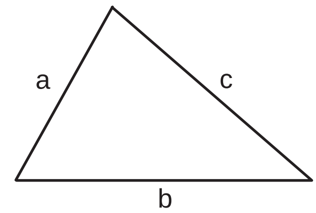
Sugestão: Que tal transformar o trapézio em dois trapézios retângulos? Deste ponto você já sabe como continuar sozinho.



Você constatará que a mesma fórmula vale também aqui: a área do trapézio é o produto de sua ***base média*** (isto é, o segmento que liga os pontos médios dos lados não-paralelos) pela altura (**h**, na figura):



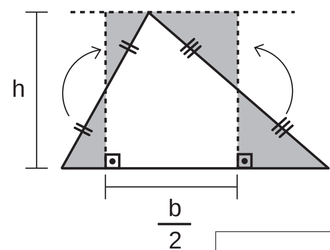
Área de triângulos



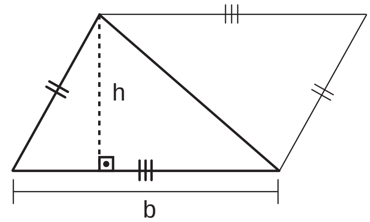
Como fazer para transformar um triângulo qualquer num retângulo, de forma que aprendamos a calcular sua área? Experimente com este triângulo: transforme-o em retângulo.

A solução pode ser inspirada na resposta que demos para o trapézio: basta anularmos o lado **d** que teremos um triângulo; assim, fazemos **d = 0**. Portanto, a área de um triângulo de base **b** e altura (relativa a essa base) **h** é $A = h \cdot \frac{b}{2} = \frac{b\ h}{2}$

De fato, ela é a metade da área do paralelogramo de onde tiramos dois triângulos desses.



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{bh}{2}$$

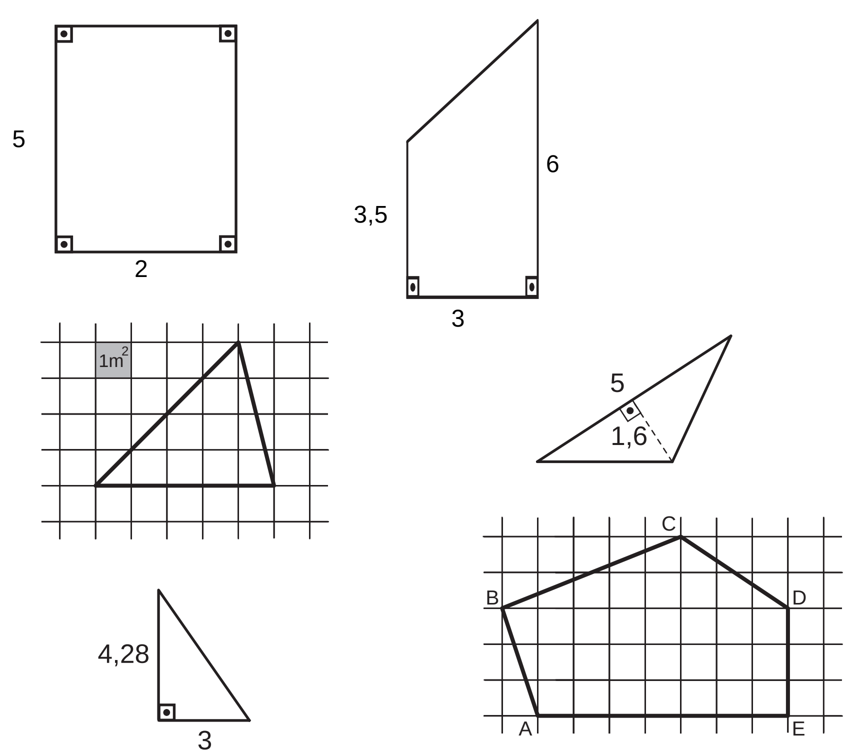


Lembre: $A_{\text{paral.}} = bh$

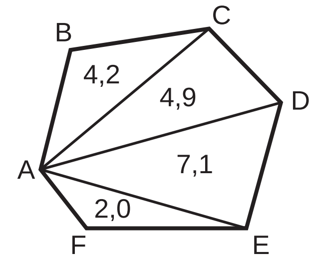
EXEMPLO 3

As questões que você verá neste exemplo também serão solucionadas no decorrer da aula. Atenção!

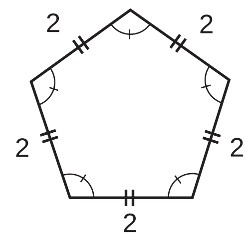
a) Calcule a área dos terrenos abaixo, considerando a medida de seus lados em metros (m).
Sugestão: Quanto ao pentágono ABCDE: que tal dividi-lo em triângulos?



b) Dentro deste hexágono ABCDEF foram desenhados os triângulos ABC, ACD, ADE e AEF.
A área de cada triângulo (em cm) foi calculada pela fórmula dada anteriormente e está escrita no desenho. É apenas o rascunho da situação, sem as medidas reais. Qual é a área do hexágono ABCDEF?



c) Calcule a área deste pentágono regular (5 lados iguais e 5 ângulos iguais) cujo lado mede 2 cm. (Meça o que for preciso.)



Pent‡gono regular

EXEMPLO 4

Atenção: para a solução deste problema, acompanhe o desenrolar da aula. Seu Raimundo recebeu uma importante encomenda de trabalho: cobrir de mármore o piso de um salão. Acontece que o piso não tem a forma retangular; ele é um pentágono regular ("igual em todo canto", como diz seu Raimundo), onde cada lado mede 4 m. Como resolver este problema?

Área de outros polígonos

Dado um polígono de vértices ABCDE, representamos sua área por $\mathbf{A_{AB...E}}$. Usando essa notação, vamos à solução para o último terreno do **Exemplo 3a**. A área do pentágono ABCDE mede:

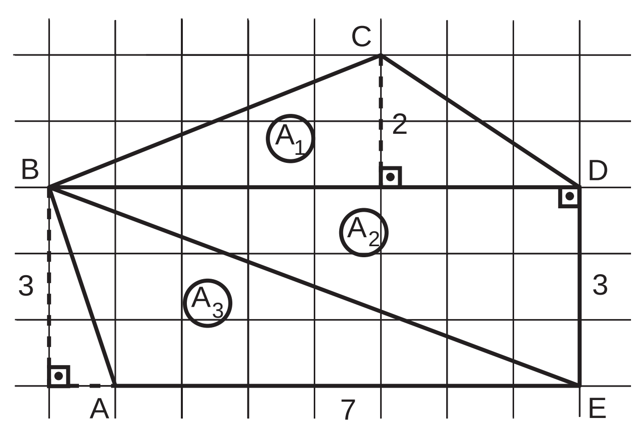
$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDE} + A_{ABE}$; ou

$= A_1 + A_2 + A_3$

$= \frac{8 \times 2}{2} + \frac{8 \times 3}{2} + \frac{7 \times 3}{2}$

$= 8 + 12 + 10{,}5$

$= 30{,}5\ (m^2)$



Da mesma forma, a área do hexágono do **Exemplo 3b** é facilmente calculada, pois:

$A_{ABCDEF} = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{ADE} + A_{AEF}$

$= 4{,}2 + 4{,}9 + 7{,}1 + 2{,}0 = 18{,}2$ (cm)

Repare que, com esses dois exemplos, estamos constatando dois fatos muito importantes no cálculo de áreas de polígonos. O primeiro é:

Qualquer polígono pode ser dividido num certo número de triângulos, número esse que depende do número de lados do polígono.

O segundo fato nós temos usado desde o começo da aula assumindo sua validade, mas sem comentá-lo. Trata-se do que veremos a seguir.

Soma e diferença de áreas

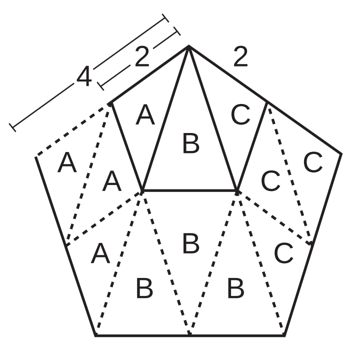
Quando reunimos duas figuras (sem superpô-las), a área da figura total é a soma das áreas de cada figura que a forma.

Por exemplo, trabalhando ainda com o **Exemplo 3**, a área do pentágono ABCDE (30,5 m) é a soma das áreas dos três triângulos (8 + 12 + 10,5).

"*E quanto ao problema do seu Raimundo?*", você poderia perguntar. Bem, veja que fica fácil resolvê-lo comparando a sala de 4 m de lado com o pentágono do **Exemplo 3c**).

Exercícios

Dividindo este último em três triângulos de áreas A, B e C e continuando esta divisão no pentágono do seu Raimundo (não importa que, aqui, **A = C**), vemos



uma coisa curiosa: existem exatamente quatro triângulos do tipo A, quatro do tipo B e quatro do tipo C. (Confira com papel e tesoura!). Logo, a área daquele salão é:

$$A_{\text{pentágono sr. Raimundo}} = 4\,A + 4\,B + 4\,C = 4\,(A + B + C)$$

$$= 4\,A_{\text{pentágono Exemplo 3c}}$$

$$= 4\,(6{,}8) = 27{,}2\ (\text{m}\ )$$

Quando multiplicamos por 2 cada lado do pentágono, sua área também fica multiplicada por 2? Não: a área fica multiplicada por 4! (E se cada lado é multiplicado por 3?) Isso diz respeito à soma de áreas: nós somamos as áreas quando reunimos figuras numa figura maior. Da mesma forma, quando retiramos uma figura de outra as áreas se subtraem.

Bem, isso encerra nossa aula de hoje. Talvez você devesse revê-la com cuidado emuma outra hora. É uma aula com muitos resultados importantes e úteis em nossa vida prática, no trato com tecidos, papel, madeira, terra etc.

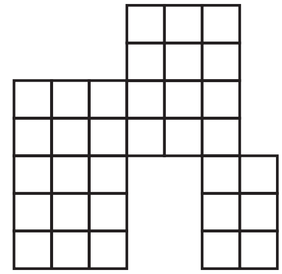
Exercícios

Exercício 1

Calcule a área deste terreno desenhado em papel quadriculado:

a) Contando os quadradinhos de área unitária.

b) Separando-o em retângulos e calculando as respectivas áreas.

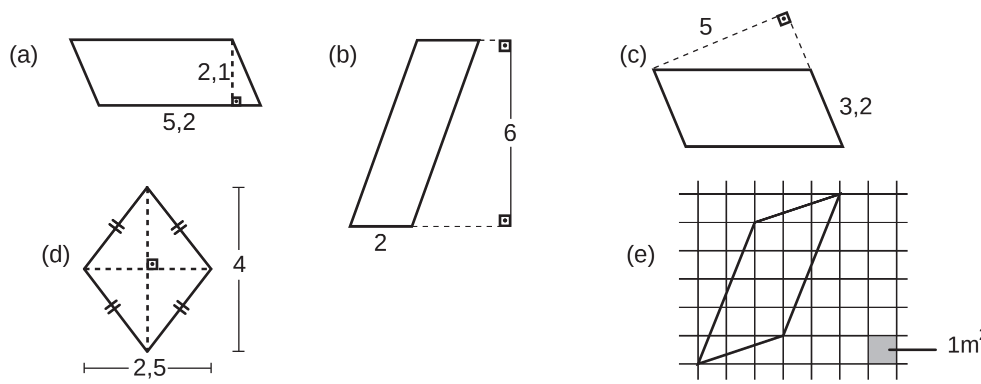


Exercício 2

Tome 36 quadrados iguais, de papel, e forme retângulos usando, para cada retângulo, todos os quadrados. Se cada retângulo tem, portanto, 36 unidades de área, responda: Caso se tratasse de terrenos retangulares, qual deles gastaria menos cerca para cercá-lo completamente? (Qual deles tem menor perímetro?)

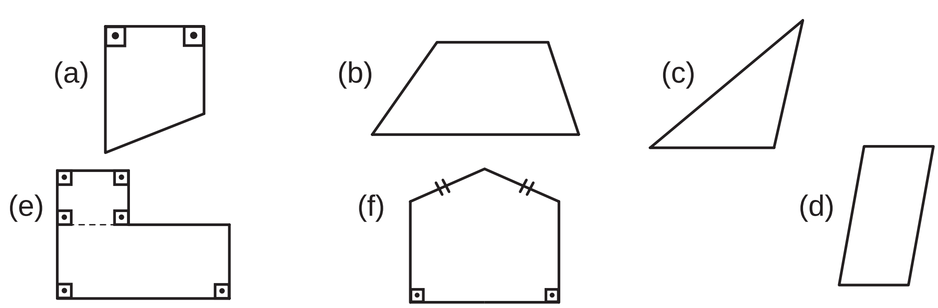
Exercício 3

Calcule a área destes paralelogramos:



Exercício 4

Transforme cada polígono abaixo num retângulo, recortando-o em pedaços e reagrupando-os:
(Sugestão: Use tesoura e papel. No item (e), transforme primeiro os dois retângulos empilhados em um trapézio retângulo).

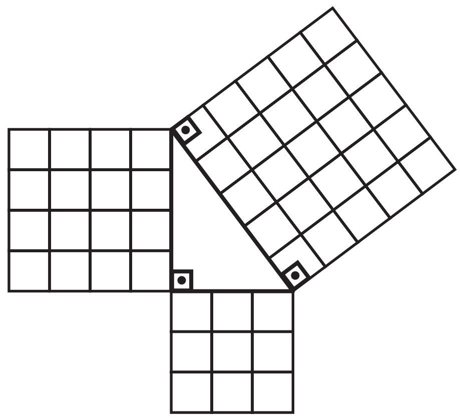


Exercício 5

É um fato da geometria que o triângulo construído com lados iguais a 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo. Com cada um dos lados, construímos um quadrado, como mostra a figura.

a) O que podemos afirmar sobre as áreas dos três quadrados?

b) Para comprovar que essa afirmação é válida para qualquer triângulo retângulo, faça a mesma construção com qualquer outro triângulo retângulo, chamando os lados de **a**, **b** e **c**.



Exercício 6

a) Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um pentágono? E um hexágono? (Antes de responder desenhe vários pentágonos, e para cada um deles, dê várias soluções. Faça o mesmo com hexágonos).

b) Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um polígono de n lados? Reflita baseado no item a).

Exercício 7

Baseado em sua resposta para o Exercício 7d), "invente" uma fórmula que calcule a área de um losango cujas diagonais (que são perpendiculares) medem **d** e **d'** (lê-se: "**d** linha").