AULA

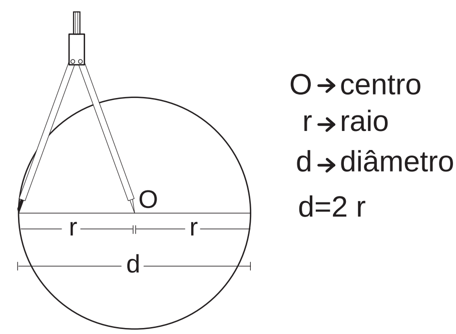
16

Comprimento e área do círculo

Introdução

Nesta aula vamos aprender um pouco mais sobre o círculo, que começou a ser estudado há aproximadamente 4000 anos. Os círculos fazem parte do seu dia-a-dia. A superfície de uma moeda e de um disco são exemplos de círculos.

Para desenhar um círculo utilizamos o ***compasso*** como você pode observar na ilustração ao lado.



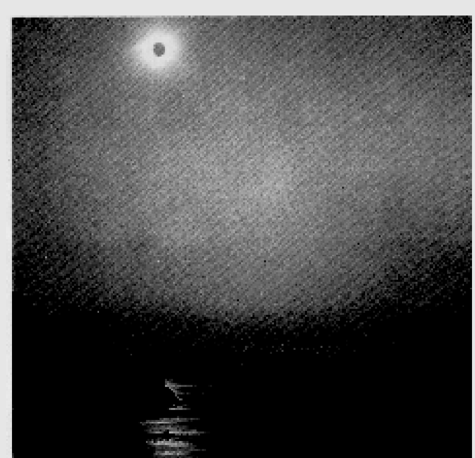
A linha desenhada pelo compasso é conhecida como ***circunferência***. Ela é o contorno do círculo.

A medida da abertura do compasso é o ***raio*** do círculo ou da circunferência. A distância entre os dois pontos diametralmente opostos da circunferência é o ***diâmetro***, que vale o dobro do raio. Ainda hoje os astrônomos têm grande interesse em estudar os fenômenos da natureza que envolvem o círculo e suas partes. Observe esta matéria publicada no jornal *O Globo* em novembro de 1994.

Brasil terá no dia 3 imagem espetacular do eclipse solar

Astrônomos de todo o mundo têm encontro marcado na próxima quinta-feira, dia 3 de novembro, em Santa Catarina, quando estará ocorrendo um eclipse total do Sol.

A Lua se alinhará entre o Sol e a Terra e o disco solar ficará completamente encoberto pela Lua. A importância do fenômeno estará na possibilidade de estudar a física da coroa solar, a física da atmosfera e a calibração das órbitas (detalhes sobre a posição da Lua e da Terra).



Fenômeno será visto por poucos

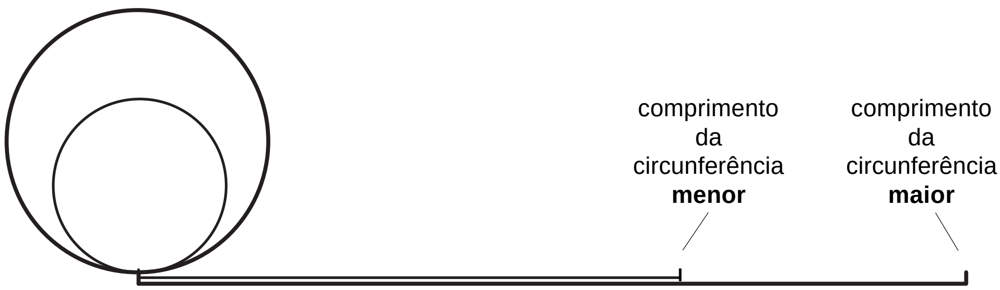
Eclipses ocorrem quando, do ponto de vista do observador, um astro se interpõe na frente de outro. Quando a Lua se alinha entre o Sol e a Terra, ocorre um eclipse do Sol. O eclipse só é total se o disco solar ficar completamente encoberto pela Lua. Esse fenômeno ocorre numa região relativamente pequena, de poucas centenas de quilômetros, se comparada aos 12.742 km de diâmetro médio da Terra.

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Comprimento da circunferência

Medir o comprimento desta curva chamada circunferência é o nosso problema. Uma das maneiras de resolver um problema matemático é tentar compreendê-lo, observando suas propriedades e fazendo experiências. É desta forma que vamos encontrar uma expressão matemática para o cálculo do comprimento de qualquer circunferência.

Uma primeira olhada em várias circunferências nos leva a concluir que seu comprimento depende da medida do raio. É fácil notar que quanto maior o raio maior é o comprimento da circunferência.



Podemos partir desta observação para descobrir qual a relação matemática existente entre estas duas medidas.

No quadro abaixo foram anotadas algumas medidas dos comprimentos e diâmetros de várias circunferências. Na última coluna dividimos cada medida obtida do comprimento (**C**) pela medida do diâmetro correspondente (**d**).

OBJETO MEDIDO	C	d	$\frac{C}{d}$
FICHA TELEFÔNICA	6,9cm	2,2cm	3,13
FUNDO DE UM COPO	15,5cm	4,9cm	3,16
MESA DE JANTAR	4,40m	1,40m	3,14

Faça você mesmo mais algumas medidas e verifique se o resultado da divisão $\frac{C}{d}$ é sempre um número um pouco maior do que 3. Quanto mais precisas forem nossas medidas, mais próximo estaremos de um número constante conhecido como ***número pi***, cujo símbolo é π.

O número π é um número irracional cujo valor aproximado é 3,14. Na verdade este número possui infinitas casas decimais, mas na prática utilizamos apenas uma aproximação de seu valor.

π = 3,14159265358979323846264...
π @3,14

A partir deste resultado obtemos uma expressão geral:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$C = \pi\, d$$
$$C = \pi\, 2\, r$$
$$\boxed{C = 2\, \pi\, r}$$

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

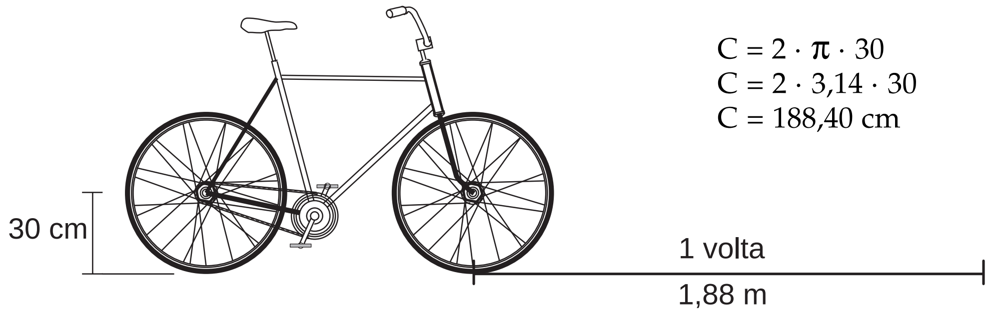
Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

EXEMPLO 1

Qual o comprimento da roda de uma bicicleta de aro 26?

Uma bicicleta aro 26 tem o raio de sua roda medindo 30 cm. Substituindo r = 30 cm na fórmula **C = 2 π r** temos:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 30$$
$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30$$
$$C = 188{,}40 \text{ cm}$$

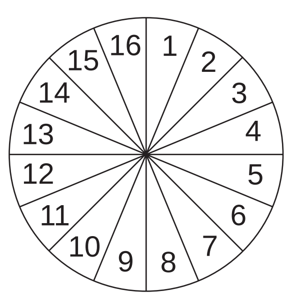


Observe este resultado: 188,40 cm = 1,884 m. Isso significa que uma volta completa da roda desta bicicleta equivale a uma distância de aproximadamente 1 metro e 88 centímetros.

Área do círculo

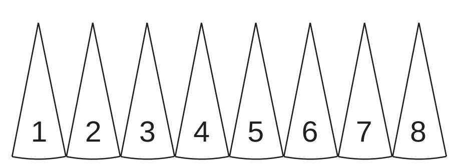
Da mesma forma que o comprimento da circunferência, a área do círculo depende da medida de seu raio.

Na aula 15 você aprendeu a fazer o cálculo da área de várias figuras planas. Para obter aquelas expressões, muitas vezes nós recortamos figuras e movemos suas partes para transformá-la em outra figura mais simples. Nós sempre podemos proceder desta maneira para encontrarmos a área de qualquer figura. É o que faremos também com o círculo.

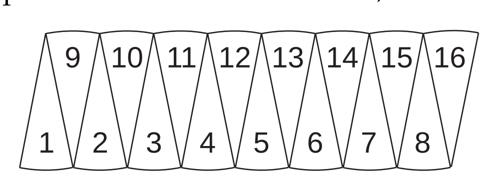


Dividimos o círculo ao lado em 16 partes iguais. Cada uma destas partes é denominada ***setor circular***.

Podemos pegar a metade destes setores e rearrumá-los como na figura abaixo.



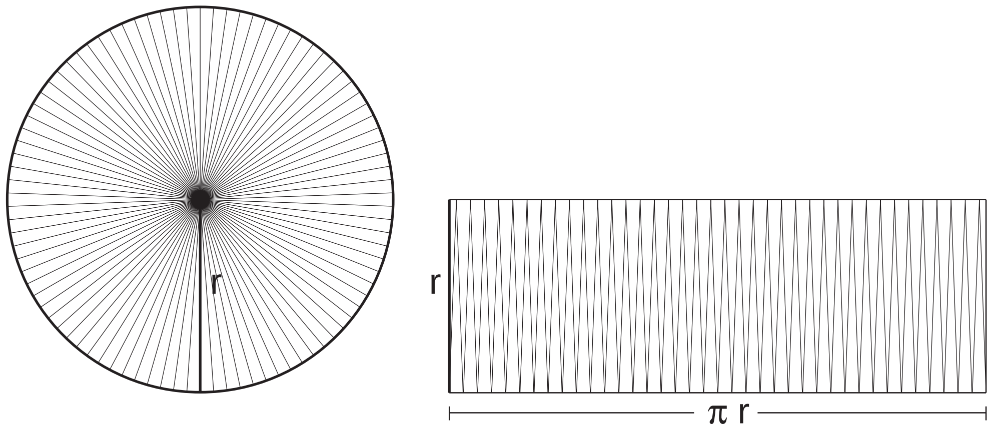
A outra metade pode ser encaixada sobre esta, de forma a não deixar espaços vazios.



P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Essa figura ainda não é um quadrilátero, pois dois de seus lados são formados por arcos sucessivos e não por segmentos de reta. No entanto, usando um pouco a imaginação, podemos dividir nosso círculo em setores circulares cada vez menores:



çrea do c’rculo =~ çrea do ret‰ngulo

Repetindo o que fizemos com as 16 partes vamos pegar a metade dos setores em uma certa posição e encaixarmos sobre estes a outra metade. Note que nos aproximamos muito mais de um retângulo de altura igual ao raio e comprimento igual a metade do comprimento da circunferência deste círculo.

$$A = \pi r \cdot r$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

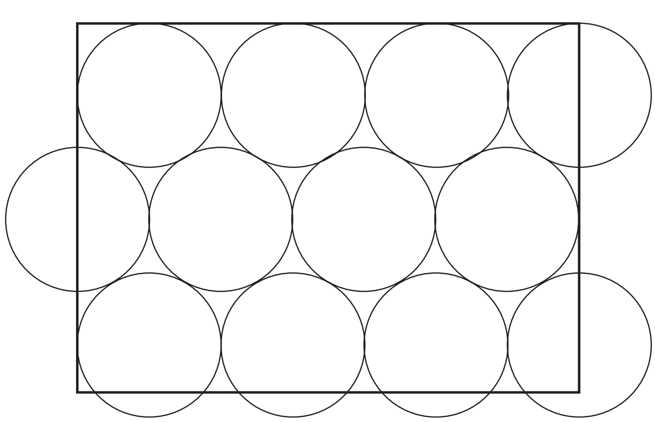
EXEMPLO 2

Quantos círculos de raio igual a 10 cm poderão ser cortados em uma cartolina de 70 cm por 50 cm?

- Área da cartolina = 70 × 50 = 3500 cm
- Área do círculo = 3,14 × 10 = 3,14 × 100 = 314 cm

Para calcular quantos círculos de 314 cm de área cabem num retângulo de 3500 cm de área dividimos 3500 por 314, o que equivale a aproximadamente 11,15. Isto significa que cabem 11 círculos e, como era de esperar, sobra cartolina.

No entanto, este problema nos faz relacioná-lo com um outro. Como devo desenhar estes círculos para aproveitar a cartolina ao máximo?



Para você pensar:

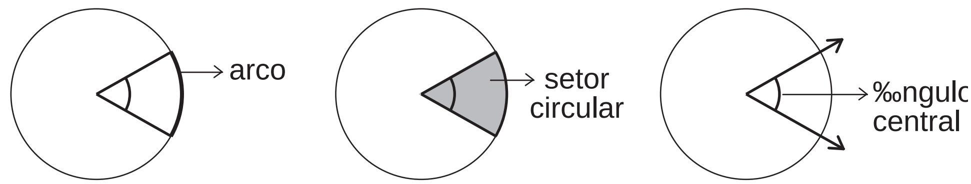
O que se pode concluir desmembrando a figura ao lado? É realmente possível desenhar 11 círculos de 10 cm de raio nesta cartolina? Por quê?

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Comprimento do arco e área do setor circular

Muitas vezes estamos interessados em calcular apenas o comprimento de uma parte da circunferência (arco) ou a área de uma "fatia" do círculo (setor circular).



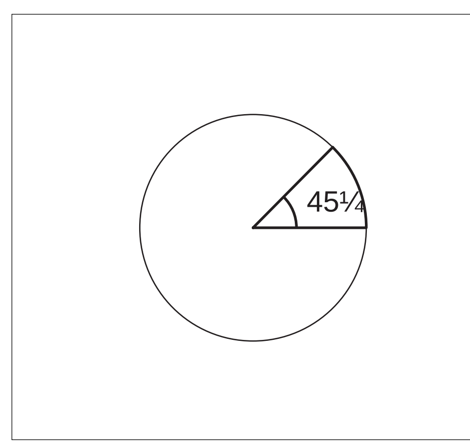
A todo arco está associado um ângulo central e a todo setor também corresponde um ângulo central. O ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.

O ângulo central máximo, que corresponde a uma volta completa e está associado à circunferência toda, mede 360º.

Sabendo disto, utilizamos o método de cálculo conhecido por ***regra de três*** para calcular o comprimento de um arco ou a área de um setor. Para tanto basta conhecer a medida do ângulo central correspondente.

EXEMPLO 3

O círculo ao lado tem raio medindo 2 cm. Vamos calcular a área de um setor circular de 45º.



Área do círculo = π (1,5) $\cong$ 7,065 cm

Área do setor = S = ?

7,065cm ——— 360º
S ——— 45º

$$S = \frac{7,065 \text{ x } 45°}{360°} @ 0,883\text{cm}^2$$

Usando novamente a regra de três podemos calcular o comprimento do arco, que corresponde ao ângulo de 45º nesta circunferência.

Comprimento da circunferência = $2 \cdot \pi \cdot 1,5 \cong 9,42$ cm
Comprimento do arco = c

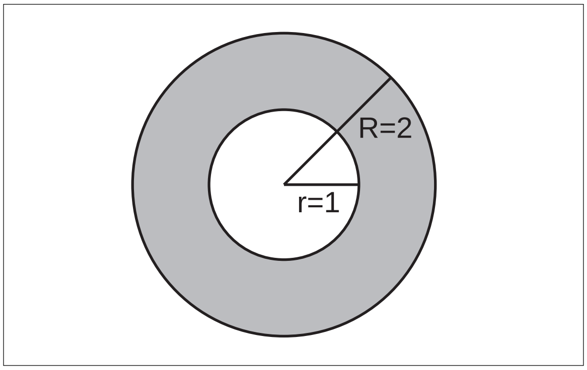
9,42 ——— 360º
c ——— 45º

$$c = \frac{9,42 \text{ x } 45°}{360°} @ 1,1775\text{cm}^2$$

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

Área da coroa circular

Como você leu na reportagem do início desta aula, coroa circular é a parte compreendida entre as circunferências de dois círculos de mesmo centro.



Na figura ao lado, a parte pintada é uma coroa circular. A área da coroa circular é calculada subtraindo-se as áreas dos dois círculos que a formam.

Nesta figura temos :
Área do círculo maior = $\pi \cdot 2$ ≅ 12,56 cm
Área do círculo menor = $\pi \cdot 1$ ≅ 3,14 cm
Área da coroa circular = 12,56 - 3,14 = 9,42 cm

Podemos escrever, de uma forma geral, que a área A de uma coroa circular é $\mathbf{A = \pi R - \pi r}$ ou $\mathbf{A = \pi (R - r)}$, onde **R** é o raio do círculo maior e **r** é o raio do círculo menor.

Razão entre áreas

Uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 4,80. Quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30 cm de diâmetro ?

Observe que o diâmetro da pizza maior é igual a 3/2 do diâmetro da menor:

$$\frac{3}{2} \text{ de } 20 = (20 : 2) \times 3 = 30$$

No entanto, se você respondeu R$ 7,20 = (3/2) · 4,80 sua resposta está errada, pois, para o cálculo do preço, o que interessa é a razão entre as áreas das pizzas:

Área da pizza menor = 3,14 · (20) = 1256 cm
Área da pizza maior = 3,14 · (30) = 2826 cm

$$\text{Razão entre as áreas} = \frac{2826}{1256} = \frac{9}{4}$$

Vemos então que a área da pizza maior é 9/4 da área da menor. Portanto, o preço da maior deve ser 9/4 do preço da pizza menor.

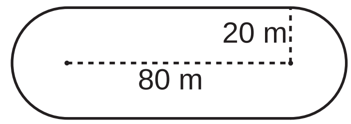
$$\frac{9}{4} \cdot \text{R\$ } 4{,}80 = \text{R\$ } 10{,}80$$

Conclusão: a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os comprimentos (diâmetro ou raio). Neste exemplo, $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Exercícios

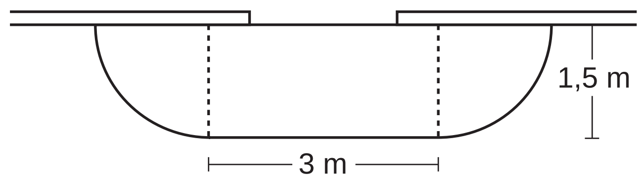
Exercício 1

Calcule o comprimento da pista de atletismo representada na figura abaixo.



Exercício 2

Calcule a área da varanda representada na figura abaixo



Exercício 3

O comprimento da linha do equador da Terra tem aproximadamente 40.000 km. Qual é o raio da Terra?

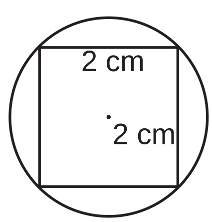
Exercício 4

Se o raio de um círculo é o triplo do outro, quantas vezes a área do primeiro é maior que a do segundo?

Exercício 5

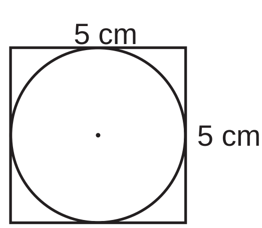
Calcule a área do círculo nas figuras abaixo.

a)



circunferência circunscrita

b)

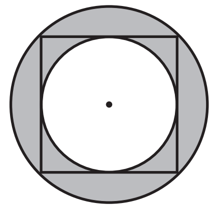


circunferência inscrita

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Exercício 6

Determine a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita num mesmo quadrado de lado $\ell = 4$ cm



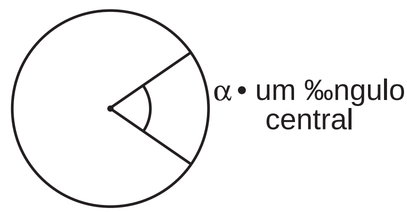
Exercício 7

Num círculo de raio r = 10 cm, calcule :

a) o comprimento de um arco com $\alpha = 45^o$

b) a área de um setor circular com $\alpha = 60^o$

c) a área de um setor circular com $\alpha = 120^o$



Exercício 8

Uma pizza tem raio igual a 15 cm e está dividida em 6 fatias. Calcule a área de cada fatia.

Exercício 9

Uma praça circular tem 200 m de raio. Quantos metros de grade serão necessários para cerca-lá?

Exercício 10

Numa bicicleta de aro 26 (como no exemplo desta aula), quantas voltas completas as rodas precisam dar para um percurso de 3,76 km?

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/