

O Telecurso 2000

O Telecurso 2000 é uma proposta de educação a distância para dar atendimento, **prioritariamente**, a **jovens e adultos** que desejam fazer o curso ou complementar sua escolaridade até o nível de 2º Grau, bem como adquirir competências básicas para o exercício de uma profissão.

No Telecurso 2000, o participante tem a oportunidade de adquirir conhecimentos gerais correspondentes ao ensino de 3ª à 8ª séries do 1º Grau, às três séries do 2º Grau e, ainda, conhecimentos específicos relativos aos Cursos Profissionalizantes.

Constitui-se, também, numa possibilidade de reciclagem para os professores e num reforço à aprendizagem dos participantes de modo geral, dentro da perspectiva de um processo permanente de educação.

Quais são as disciplinas

No Telecurso 2000, as disciplinas curriculares apresentam esta estrutura:

1º GRAU		
1ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA E HISTÓRIA
2ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA E CIÊNCIAS
3ª FASE	-	INGLÊS, MATEMÁTICA, CIÊNCIAS E GEOGRAFIA
2º GRAU		
1ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA, FÍSICA E BIOLOGIA
2ª FASE	-	LÍNGUA PORTUGUESA, MATEMÁTICA, FÍSICA E QUÍMICA
3ª FASE	-	QUÍMICA, HISTÓRIA, INGLÊS E GEOGRAFIA
CURSOS PROFISSIONALIZANTES		
1ª FASE	-	UNIVERSO MECÂNICO, ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO, NORMALIZAÇÃO, MATERIAIS, LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE DESENHO MECÂNICO, ELEMENTOS DE MÁQUINAS, CÁLCULO TÉCNICO
2ª FASE	-	LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE DESENHO MECÂNICO, METROLOGIA, HIGIENE E SEGURANÇA DO TRABALHO, QUALIDADE, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, ENSAIOS DE MATERIAIS
3ª FASE	-	QUALIDADE AMBIENTAL, TRATAMENTO TÉRMICO, MANUTENÇÃO, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, TRATAMENTO DE SUPERFÍCIES, AUTOMATIZAÇÃO/AUTOMAÇÃO

Cada fase tem a duração média de seis meses. O participante pode iniciar seus estudos na fase que for melhor para sua realidade, para seus interesses e para suas necessidades.

Recursos de aprendizagem

O Telecurso 2000 combina o uso de programas de TV (teleaulas) com materiais impressos próprios, referentes a cada disciplina, permitindo - além da aprendizagem dos conteúdos - a construção de novos conhecimentos e sua aplicação.

- Cada aula na TV tem duração de 15 minutos.
- Nos livros do Telecurso, o participante estuda, pesquisa e realiza exercícios.
- É importante o uso de dicionários e de diferentes materiais de leitura: jornais, revistas, livros, entre outros, que enriqueçam a aprendizagem.

Como participar

O Telecurso 2000 é aberto a todos os interessados, e o participante pode trabalhar de várias formas, escolhendo a alternativa que lhe seja mais adequada e que se ajuste à sua possibilidade de participação.

Alternativa 1

Freqüentando a telessala instalada numa instituição privada ou pública.

Neste caso, o participante:

- faz sua inscrição;
- freqüenta o curso no local e nos horários estipulados pela instituição.

Trata-se da **recepção organizada**, na qual os alunos se reúnem com a presença do Orientador de Aprendizagem e realizam atividades individuais ou em grupo.

Alternativa 2

Assistindo às teleaulas, sozinho ou em pequenos grupos, em qualquer lugar em que haja um aparelho de TV disponível: em casa, na casa de um amigo, no sindicato, na igreja, no clube e até no trabalho, sem necessitar da presença do Orientador de Aprendizagem durante a veiculação dos programas.

Essa alternativa atende aos que têm dificuldade de freqüentar diariamente uma sala de aula.

Neste caso, o participante:

- faz sua inscrição num centro controlador;
- freqüenta o curso pelo menos uma vez por semana.

Trata-se da **recepção controlada**, com a presença do Orientador de Aprendizagem para tirar dúvidas, orientar, analisar exercícios, trocar idéias, fornecer leituras suplementares e avaliar o desempenho do aluno.

Alternativa 3

Assistindo às teleaulas em qualquer lugar, sem nenhuma orientação anterior ou posterior e, portanto, sem freqüentar a telessala ou o centro controlador.

Trata-se da **recepção livre ou isolada**, destinada aos participantes que tenham total impossibilidade de freqüentar uma telessala ou centro controlador.

Como obter certificado de conclusão

O participante poderá prestar os exames supletivos oficiais, oferecidos pelas **Secretarias de Educação de cada Estado**.

Os procedimentos são os seguintes:

- informar-se sobre datas de inscrição, local e documentos necessários;
- inscrever-se;
- prestar os exames das matérias que desejar, não necessitando aguardar a conclusão de todo o telecurso;
- pedir, no local em que realizou as provas, o **atestado da matéria** em que foi aprovado - quem é aprovado em determinada matéria não precisa mais prestar exame dessa disciplina;
- solicitar à Secretaria de Educação o **certificado de conclusão**, quando tiver sido aprovado em todas as matérias do currículo do Telecurso 2000.



Recordando operações

Introdução

Vamos iniciar nosso curso de matemática do 2º grau recordando as quatro operações:

- adição
- subtração
- multiplicação
- divisão

Vamos lembrar como essas operações são feitas e, principalmente, quando devemos utilizá-las na solução de um problema.

Muita gente pensa que quem faz contas com rapidez é bom em matemática. É engano! Fazer contas rapidamente é uma habilidade que se adquire com a prática. Muito mais importante que fazer contas com rapidez é descobrir quais são as operações que devemos usar para resolver um problema. Portanto, em matemática, ***o mais importante é o raciocínio.***

Para começar, leia os quatro problemas abaixo e tente descobrir quais são as contas que devem ser feitas.

- Um motorista de táxi andou 180 km em certo dia e 162 km no dia seguinte. No total, quanto ele andou nesses dois dias?
- Uma mercadoria que custa R\$37,00 foi paga com uma nota de R\$50,00. De quanto foi o troco?
- Uma caixa de leite tipo “longa vida” possui 16 litros de leite. Quantos litros existem em 12 caixas?
- Devo repartir 24 balas igualmente entre meus três filhos. Quantas balas deve receber cada um?

Em todos os exemplos desta aula, usaremos apenas números inteiros. Eles são os nossos conhecidos 0, 1, 2, 3, ... e também os negativos - 1, - 2, - 3,

A adição

Podemos pensar na operação de adição quando queremos **juntar** as coisas que estão separadas.

EXEMPLO 1

Em uma pequena escola, existem 3 turmas: uma com 27 alunos, outra com 31 alunos e outra com 18 alunos. Quantos alunos existem ao todo nessa escola?

Para reunir os alunos das 3 turmas, devemos somar a quantidade de alunos de cada turma. A operação que devemos fazer é:

$$27 + 31 + 18 = 76$$

Existem, portanto, **76 alunos** nessa escola.

Cada um dos números de uma soma chama-se **parcela**. Na operação de adição, podemos somar as parcelas em qualquer ordem. Por isso, temos certeza de que $18 + 27 + 31$ também dá **76**.

Devemos ainda lembrar que números negativos também podem ser somados. Por exemplo, a soma de - 12 com - 5 dá - **17**. Para escrever essa operação fazemos assim:

$$- 12 + (- 5) = - 17$$

Observe que colocamos - 5 entre parênteses para evitar que os sinais de + e de - fiquem juntos. Mas existe outra maneira, mais simples, de escrever a mesma operação. Veja:

$$- 12 - 5 = - 17$$

A subtração

Podemos pensar na operação de subtração quando queremos tirar uma quantidade de uma outra para ver quanto sobra. Veja o exemplo.

EXEMPLO 2

Uma secretária recebeu a tarefa de preparar 90 envelopes de correspondência. Até a hora do almoço, ela já tinha feito 52. Quantos ela ainda tem de fazer?

Temos aqui um exemplo claro de operação de subtração. A operação que devemos fazer é:

$$90 - 52 = 38$$

Assim, depois do almoço, a secretária deverá preparar ainda **38 envelopes**.

AULA
1

Observe agora que, em uma subtração, quando o segundo número é maior que o primeiro, o resultado é negativo. Veja:

$$\begin{aligned} 9 - 5 &= 4 \\ 5 - 9 &= -4 \end{aligned}$$

Para visualizar as operações de adição e subtração, representamos os números inteiros como pontos de uma reta.



Na operação $9 + 5 = 14$, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a **direita** e chegamos ao número 14.

Na operação $9 - 5 = 4$, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a **esquerda** e chegamos ao número 4.



Na operação $5 + 9 = 14$, partimos do número 5, andamos 9 unidades para a **direita** e chegamos ao número 14.

Na operação $5 - 9 = -4$, partimos do número 5, andamos 9 unidades para a **esquerda** e chegamos ao número -4.

Para resumir, as regras são as seguintes:

- Escrever **5** ou **+ 5** é a mesma coisa.
- Quando sinais de números e sinais de operações aparecerem juntos, então:

$$\begin{aligned} (+) (+) &= (+) \\ (+) (-) &= (-) \\ (-) (+) &= (-) \\ (-) (-) &= (+) \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} 5 + (+ 3) &= 5 + 3 = 8 \\ 5 + (- 3) &= 5 - 3 = 2 \\ 5 - (+ 3) &= 5 - 3 = 2 \\ 5 - (- 3) &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

Veja, a seguir, como devemos proceder numa situação em que há soma e subtração de diversos números.

EXEMPLO 3

João abriu uma conta bancária. Depois de algum tempo, essa conta apresentou o seguinte movimento:

DIA	SALDO INICIAL	DEPÓSITO	RETIRADA
10	00,00		
10		53,00	
12			25,00
15		65,00	
18			30,00
21			18,00

Qual será o saldo de João após essas operações?

Vamos representar os depósitos por números positivos e as retiradas por números negativos. Devemos então fazer a seguinte conta:

$$53 - 25 + 65 - 30 - 18$$

O resultado dessa operação será a quantia que João ainda tem no banco. A melhor forma de fazer esse cálculo é **somar** os números positivos (os depósitos), **somar** os números negativos (as retiradas) e depois **subtrair** o segundo resultado do primeiro. Assim:

$$\begin{aligned} & 53 - 25 + 65 - 30 - 18 = \\ & = (53 + 65) - (25 + 30 + 18) = \\ & = 118 - 73 = \\ & = 45 \end{aligned}$$

Portanto, João ainda tem **R\$ 45,00** em sua conta bancária.

A multiplicação

A multiplicação nada mais é que uma soma com parcelas iguais. Por exemplo:

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$$

O número 7 apareceu 5 vezes. Então, 7 vezes 5 dá 35. Da mesma forma:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5 = 35$$

Agora, o número 5 apareceu 7 vezes. Então 5 vezes 7 dá 35.

Você já sabe que, em uma multiplicação cada número chama-se **fator**. Vamos, agora, recordar algumas propriedades da multiplicação.

AULA

1

1. Na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o resultado. Por isso:

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

2. Quando temos várias multiplicações seguidas, qualquer uma delas pode ser feita primeiro. Por exemplo:

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$2 \times 3 \times 5 = 2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$$

$$2 \times 3 \times 5 = (2 \times 5) \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

3. Quando um número multiplica uma soma, ele multiplica cada parcela dessa soma. Por exemplo:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 12 = 24$$

Ou, ainda:

$$2 \times (3 + 4 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5 = 6 + 8 + 10 = 24$$

Falta apenas recordar o que ocorre quando temos multiplicações com números negativos. As regras são as seguintes:

$$(+) \times (-) = (-)$$

$$(-) \times (+) = (-)$$

$$(-) \times (-) = (+)$$

Vamos ver alguns exemplos para entender bem essas regras.

- Para calcular $4 \times (-3)$ podemos fazer uma soma com 4 parcelas iguais a -3 . Daí:

$$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$$

$$4 \times (-3) = -3 - 3 - 3 - 3$$

$$4 \times (-3) = -12$$

- Para entender que o produto de dois números negativos é positivo vamos lembrar que o produto de qualquer número por zero dá zero. Portanto:

$$(-3) \times 0 = 0$$

Vamos então escrever essa igualdade assim:

$$(-3) \times (-2 + 2) = 0$$

É a mesma coisa. A igualdade continua certa. Mas, utilizando uma das propriedades da multiplicação, podemos escrever a mesma coisa de forma ainda diferente. Veja:

$$\underbrace{(-3) \times (-2)}_{?} + \underbrace{(-3) \times 2}_{-6} = 0$$

Ora, sabemos que $(-3) \times 2$ dá -6 . Logo, devemos ter $(-3) \times (-2) = 6$ para que a soma seja zero.

A divisão

AULA

1

Podemos pensar na divisão quando queremos dividir um total de partes iguais ou quando queremos saber quantas vezes um número cabe no outro.

EXEMPLO 4

Desejamos colocar 80 lápis em 5 caixas, de maneira que todas as caixas tenham o mesmo número de lápis. Quantos lápis devemos pôr em cada caixa?

A resposta é fácil. Basta **dividir** 80 por 5.

$$80 \div 5 = 16$$

Logo, cada caixa deve conter 16 lápis.

No exemplo que acabamos de ver, a divisão foi **exata** ou seja, conseguimos colocar a mesma quantidade de lápis em cada caixa sem que sobrasse nenhum. O que aconteceria, entretanto, se tivéssemos 82 lápis para pôr nas 5 caixas? A resposta é fácil. Cada caixa continuaria com 16 lápis, mas sobrariam 2.

Veja a operação:

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \\
 82 \overline{) 5} \quad \text{divisor} \\
 \underline{-5} \quad 16 \quad \text{quociente} \\
 32 \\
 \underline{-30} \\
 2 \quad \text{resto}
 \end{array}$$

Na operação acima, 82 é o **dividendo**, 5 é o **divisor**, 16 é o **quociente** e 2 é o **resto**. Esses quatro números se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 82 & = & 5 & \times & 16 & + & 2 \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 (\text{dividendo}) & = & (\text{divisor}) \times (\text{quociente}) + (\text{resto})
 \end{array}$$

Atenção!

O resto é sempre **positivo** e **menor** que o divisor.

Ao fazer uma divisão, estaremos sempre encontrando dois novos números: o quociente e o resto. Vamos ver mais um exemplo do uso dessa operação em um problema.

AULA
1

EXEMPLO 5

Certo elevador pode transportar no máximo 6 pessoas. Se existem 46 pessoas na fila, quantas viagens o elevador deverá fazer para transportar todas essas pessoas?

Devemos dividir 46 por 6. Observe a operação:

$$\begin{array}{r} 46 \overline{) 6} \\ - 42 \\ \hline 4 \end{array}$$

O quociente igual a 7 indica que o elevador fará 7 viagens com lotação completa. Mas o resto igual a 4 indica que sobrarão ainda 4 pessoas para serem transportadas. Logo, o elevador deverá fazer uma viagem a mais para transportar as 4 pessoas restantes. Portanto, o elevador fará 8 viagens para transportar todas as pessoas.

Exercícios

Exercício 1

Efetue as operações indicadas:

- a) $37 + 43 =$
- b) $55 - 18 =$
- c) $18 - 55 =$
- d) $12 + (-7) =$
- e) $12 - (-7) =$
- f) $-9 - 6 =$
- g) $-9 + (-6) =$
- h) $-9 - (-6) =$
- i) $13 \times 7 =$
- j) $(-8) \times 9 =$
- l) $(7 - 3) \times 4 =$
- m) $(3 - 8) \times (-4) =$

Exercício 2

Efetue as operações indicadas. Lembre que, se várias operações aparecem em uma mesma expressão, as multiplicações e divisões são feitas primeiro e depois as somas e subtrações.

- a) $4 + 2 \times 3 =$
- b) $20 - 3 + 12 - 30 \div 6 =$
- c) $13 \times 112 - 11 \times 10 =$

Exercício 3

Um revendedor entrou numa confecção e fez a seguinte compra.

MERCADORIA	QUANTIDADE	PREÇO UNITÁRIO (R\$)
camisetas	30	6
camisas	15	12
bermudas	25	9
calças	20	18

Quanto ele pagou por essa compra?

Exercício 4

Um trabalhador recebe R\$12 por dia de trabalho, mais uma gratificação de R\$8 por semana. Sabendo que cada semana tem 6 dias de trabalho, quanto esse trabalhador deverá ter recebido após 4 semanas?

Exercício 5

Descubra que números estão faltando nas operações abaixo:

a) $12 \times \dots = 180$

b) $\begin{array}{r} \dots \quad | \quad 8 \\ 5 \quad 26 \end{array}$

c) $148 = 6 \times \dots + 4$

Exercício 6

Certo automóvel faz, na estrada, 12 km por litro de gasolina. Para fazer uma viagem de 340 km, o proprietário colocou no tanque 30 litros de gasolina. Esse combustível será suficiente?

Exercício 7

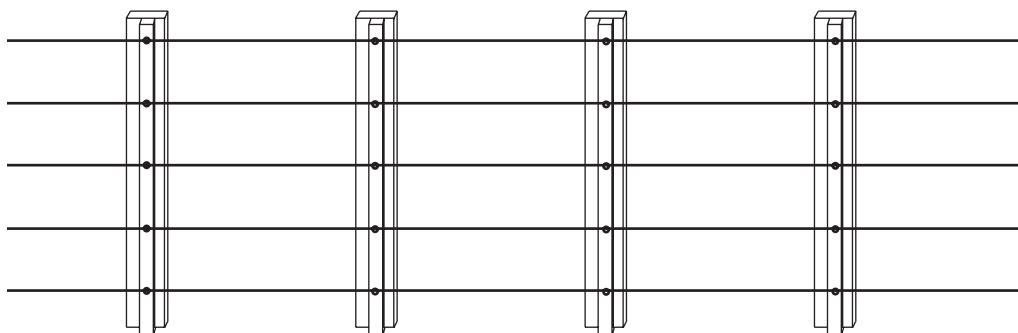
Em uma festa, as mesas do salão são quadradas e acomodam, no máximo, 4 pessoas. Para que 150 pessoas possam se sentar, quantas mesas serão necessárias?

Exercício 8

Uma escola tem 4 salas e cada sala tem 30 carteiras. Na primeira sala existem 26 alunos, na segunda 24, na terceira, 23 e na quarta, 19. Quantos alunos ainda podem ser matriculados?

Exercício 9

João tem um terreno retangular de 20m de frente por 30m de fundo, e deseja cercá-lo com uma cerca de arame com 5 fios.

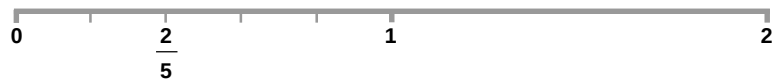


Quantos metros de arame ele deverá comprar?

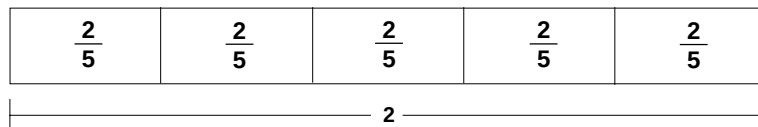
Frações e números decimais

Introdução

Inicialmente, as frações são apresentadas como partes de um todo. Por exemplo, teremos $\frac{2}{5}$ de um bolo se dividirmos esse bolo em cinco partes iguais e tomarmos duas dessas partes. Entretanto, se substituírmos o “bolo” por uma unidade qualquer, a fração $\frac{2}{5}$ é um número e, como tal, possui seu lugar na reta numérica. Para fazer a marcação na reta numérica, dividimos a unidade em 5 partes e tomamos duas



Por outro lado, a fração é também o resultado da divisão de dois números; por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$, que é o resultado da divisão de 2 por 5. Observe o desenho a seguir:



Duas unidades foram divididas em 5 partes iguais.

Nossa aula

Nesta aula vamos estudar as frações, suas propriedades e a forma de representá-las por números decimais.

A divisão prolongada

Imagine que R\$25,00 devam ser divididos igualmente entre 4 pessoas. Quanto cada uma deverá receber?

Sabemos que 25 não é múltiplo de 4, e portanto, a quantia que cada um deve receber não será um número inteiro. Para isso existem os centavos. Vamos então lembrar como fazemos a divisão de 25 por 4.

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 4} \\ - 24 \\ \hline 1 \end{array}$$

Até agora, nossa conta indica que cada pessoa receberá **6** reais; mas existe ainda um resto de 1 real. Para continuar, acrescente um zero ao resto e uma vírgula ao quociente.

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 4} \\ - 24 \quad 6,25 \\ \hline 10 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

O resultado da divisão de 25 por 4 é **6,25** ou seja, cada pessoa receberá **6** reais e **25** centavos.

Utilizando uma fração para indicar a divisão, podemos representar a operação que fizemos da seguinte forma:

$$\frac{25}{4} = 6,25$$

Todas as frações podem ser representadas por números decimais. Basta dividir o numerador pelo denominador prolongando a operação.

A máquina de calcular faz muito bem esse trabalho. Observe os exemplos.

$\frac{25}{4}$	(2) (5) (÷) (4) (=)	6.25
$\frac{126}{15}$	(1) (2) (6) (÷) (1) (5) (=)	8.4
$\frac{2}{3}$	(2) (÷) (3) (=)	0.66666666

O que aconteceu no último exemplo?

A representação decimal da fração $\frac{2}{3}$ tem infinitas casas decimais, ou seja, a quantidade de algarismos não acaba nunca. Esses números decimais que possuem algarismos (ou grupos de algarismos) que se repetem eternamente são as **dízimas periódicas**.

As dízimas periódicas são incômodas. Com elas, em geral não conseguimos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Por isso, preferimos representar esses números na forma de frações.

Vamos então recordar as operações com frações.

AULA

2

Frações iguais:

Sabemos que a fração $\frac{1}{2}$ é igual ao número decimal 0,5. Entretanto, as frações $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$ são também iguais a 0,5. Temos aqui um primeiro exemplo de frações iguais:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Como fazemos para obter frações iguais?

A propriedade que enunciamos a seguir responde a essa pergunta.

Uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerado e o denominador pelo mesmo número.

Observe os exemplos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{12}{32} = \frac{12 \cdot 4}{32 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{50}{60} = \frac{50 \cdot 10}{60 \cdot 10} = \frac{5}{6}$$

Os dois últimos exemplos são importantes porque mostram como simplificar frações. Se em algum problema aparece a fração $\frac{12}{32}$, podemos, em seu lugar, usar a fração $\frac{3}{8}$, que representa o mesmo número e é mais simples.

A propriedade que vimos é fundamental para as operações de adição e subtração de frações.

Operações com frações

Sabemos que é muito fácil somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador. Neste caso, basta somar ou subtrair os numeradores. Assim:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10}$$

Observe outro exemplo e a simplificação do resultado.

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{3+7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Como faremos, então, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes? Não é difícil.

Vamos tentar representar as frações dadas por outras, iguais às que temos, mas com denominadores iguais. É o que veremos a seguir.

Adição e subtração de frações

Tomemos como exemplo, a soma $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

Os denominadores são diferentes. Então, buscamos um número que seja múltiplo de ambos. Encontramos 12, que é múltiplo de 4 e também de 6.

Vamos então representar as duas frações dadas com esse mesmo denominador. Observe:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$$

Então,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Acabamos de somar duas frações com denominadores diferentes. A subtração é feita da mesma forma. Devemos também igualar os denominadores.

Consideremos então a diferença $\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$.

Qual será o novo denominador que devemos escolher? Pense um pouco e observe a solução.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$

Então,

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{8} = \frac{32}{40} - \frac{15}{40} = \frac{17}{40}$$

Multiplicação de frações

Se na solução de algum problema devemos calcular, por exemplo **a terça parte de dois quintos**, estamos frente a uma situação em que devemos multiplicar duas frações. A regra é a seguinte:

**Para multiplicar duas frações,
multiplique os numeradores e os denominadores**

Assim:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

AULA

2

O inverso de um número

O inverso de um número é um outro que, multiplicado pelo primeiro, dá 1. Por exemplo:

$$\text{o inverso de } 2 \text{ é } \frac{1}{2} \quad \text{porque} \quad 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{o inverso de } \frac{3}{5} \text{ é } \frac{5}{3} \quad \text{porque} \quad \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

O **zero** é o único número que **não possui inverso**. Observe agora a igualdade abaixo:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Ela está correta, é claro. Mas, o que está mostrando? Que, do lado esquerdo, estamos dividindo 2 por 3 e, do lado direito, estamos multiplicando 2 pelo inverso de 3. Isso vale para qualquer número. A regra é a seguinte.

Dividir um número por outro é o mesmo que multiplicar esse número pelo inverso do outro.

Por exemplo, quanto dá $\frac{4}{5}$ divididos por $\frac{2}{3}$? Pense um pouco e acompanhe a solução.

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

As porcentagens

Uma porcentagem é uma fração de denominador 100. Por exemplo, **32%** é igual à fração $\frac{32}{100}$ que também é igual ao número decimal **0,32**. Quando queremos calcular uma porcentagem de algum valor, multiplicamos a fração por esse valor. Veja:

$$\begin{array}{lcl} 32\% \text{ de } 650 \text{ laranjas} & = & 0,32 \times 650 = \mathbf{208 \text{ laranjas}} \\ 8\% \text{ de R\$140,00} & = & 0,08 \times 140 = \mathbf{R\$11,20} \end{array}$$

O que fazer para transformar uma fração qualquer em uma porcentagem?

Se o denominador só possui múltiplos de 2 e de 5, é fácil encontrar uma fração equivalente com denominador 100. Por exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100} = \mathbf{40\%}$$

Mas como faríamos com a fração $\frac{4}{7}$?

O mais prático, em qualquer caso, é usar a máquina para dividir o numerador pelo denominador e depois deslocar a vírgula duas casas para a direita. Observe os exemplos:

$$\frac{8}{25} = 8 \div 25 = 0,32 = 32\%$$

$$\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0,625 = 62,5\%$$

$$\frac{4}{7} = 4 \div 7 \approx 0,5714 = 57,14\%$$

Repare que nesse último exemplo fizemos uma aproximação.

Na prática, usamos duas ou, no máximo, três casas decimais em nossas aproximações.

Exercício 1

Simplifique as frações abaixo. Exemplo:

$$\frac{18}{42} = \frac{18 \div 2}{42 \div 2} = \frac{9}{21} = \frac{9 \div 3}{21 \div 3} = \frac{3}{7}$$

a) $\frac{20}{32}$

c) $\frac{320}{400}$

b) $\frac{24}{36}$

d) $\frac{10}{100}$

Exercício 2

Complete os espaços abaixo com os sinais de < (menor), > (maior) ou = (igual). Exemplo:

$$\frac{2}{3} \dots \frac{5}{8}$$

Solução:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24} \end{array} \right\} \quad \frac{16}{24} > \frac{15}{24} \rightarrow \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$$

a) $\frac{5}{8} \dots \frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{6} \dots \frac{23}{24}$

b) $\frac{2}{3} \dots \frac{5}{9}$

d) $\frac{8}{10} \dots \frac{20}{25}$

Exercício 3

Efetue:

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{3}{10} - \frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

Exercícios

AULA
2

Exercício 4

Efetue:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}$

d) $\frac{\Phi}{H^+} \frac{2I}{4K} \frac{7}{2}$

Exercício 5

Calcule as porcentagens:

a) 10% de 120

b) 24% de 500

c) 5% de 60

d) 12,5% de 72

Exercício 6

Transforme as frações em números decimais aproximados. Dê as respostas com duas decimais. Entretanto, observe a terceira casa decimal. Se ela for menor que 5, mantenha o valor da segunda casa. Se ela for maior ou igual a 5, aumente de uma unidade a segunda casa.

Exemplo:

$$\frac{1}{7} = 0,142... \cong 0,14$$

$$\frac{26}{19} = 1,368... \cong 1,36$$

a) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{11}$

b) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{29}{13}$

Exercício 7

Escreva as frações abaixo como porcentagens. Não dê respostas com mais de duas decimais. Aproxime se necessário:

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{7}{40}$

Introdução

Vamos falar um pouco sobre a **aritmética**, a **geometria**... e a **álgebra**. Elas são áreas importantes da matemática. Cada uma delas inventa seus objetos de estudo e métodos de resolver problemas, e todas têm aplicações significativas em nosso cotidiano.

Como você deve se lembrar, de seus estudos no curso do 1º grau, a aritmética estuda os números - especialmente os números inteiros e os fracionários. Quanto à geometria, seus objetos de estudo são as figuras geométricas - como o triângulo, o quadrado, o círculo, a esfera etc.

Os conhecimentos de aritmética e de geometria surgiram possivelmente há mais de quatro milênios. Pelo que está registrado nos achados da arqueologia - a ciência que estuda o nosso passado - devemos muito aos babilônios e aos egípcios e, finalmente, aos gregos. Estes últimos foram os responsáveis pelo surgimento do pensamento científico e nos deixaram os trabalhos de Tales, de Pitágoras e, mais tarde, de Euclides. (Euclides, por volta de 300 a.C., formalizou praticamente todo o conhecimento matemático de seu tempo em sua obra *Os Elementos*.)

E a álgebra?

A álgebra já é bem mais recente. Considera-se que tenha surgido na Índia, nos primeiros séculos deste milênio. De lá passou aos árabes. Nosso Sistema de numeração é chamado **indo-arábico** devido a esses povos. E com os árabes, que lhe deram o nome, a álgebra penetrou na Europa, onde desenvolveu-se extraordinariamente a partir do século XVI. Da Europa, esta área da matemática que continua crescendo, chegou às Américas e até nós, neste Brasil do limiar do terceiro milênio.

A matemática deve o que é não apenas à genialidade de homens e mulheres como Tales, Pitágoras, Hipátia (uma matemática grega), Newton, Gauss etc., mas também aos talentos “incógnitos” que em instantes magníficos criaram e continuarão criando a matemática.

Quem teria inventado o zero? E as noções de ponto e de reta? E os nossos algarismos? Jamais saberemos responder. Só sabemos que o conhecimento se espalha, como é comum na natureza: cada nova planta que brota traz esperança de muitas outras plantas que brotarão. Sendo assim, aqui vão nossas sementes algébricas! E que você as multiplique - é o nosso desejo.

Nossa aula

Para começar esta aula, pense no seguinte problema: uma mulher de 25 anos é casada com um homem 7 anos mais velho que ela.

Qual é a soma das idades desse casal? Pense e responda. Não é difícil responder. O marido tem:

$$25 + 7 = \mathbf{32} \text{ anos}$$

Portanto, a soma das idades do casal é:

$$25 + 32 = \mathbf{57} \text{ anos}$$

Agora vamos ver outro problema semelhante: o marido de certa mulher é 7 anos mais velho que ela. Quando nasce a primeira criança do casal, as idades dos dois somam 70 anos.

Qual a idade da mulher?

Podemos perceber que essa resposta não virá tão facilmente quanto a do problema anterior. É interessante, por isso, que você pegue papel e lápis, e tente responder à pergunta.

Será isso o que também faremos na próxima aula, quando mostraremos que alguns problemas tanto podem ser resolvidos pelo raciocínio aritmético quanto pelo algébrico.

Agora, queremos mostrar-lhe como resolver este problema pela álgebra, pois cremos que você saberá reconhecer o valor dessa nova forma de raciocínio.

O nascimento do “x”

Para resolver esse problema, poderíamos pensar assim: já que não sabemos a idade da mulher, nós escrevemos ? em seu lugar.

Com isso, podemos escrever o que sabemos do problema: que a soma das idades da mulher e de seu marido é 79. Assim:

$$\begin{array}{ccc} ? & + & (? + 7) = 79 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ \text{idade da} & & \text{idade do} \\ \text{mulher} & & \text{marido} \end{array}$$

Continuando, encontraremos:

$$\begin{array}{rcl} ? + ? + 7 & = & 79 \\ 2? & = & 72 \\ ? & = & 72 : 2 \\ ? & = & 36 \end{array}$$

Portanto, a idade da mulher é 36 anos. Para conferir, basta ver qual é a idade do marido e qual é a soma das idades.

Não é fácil? Pois esta é a essência do chamado raciocínio algébrico - e daqui a pouco nós o recordaremos para você. Por enquanto, repare que o raciocínio é exatamente igual ao de uma outra pessoa que, no lugar de ?, usasse um outro símbolo qualquer para representar um número.

Por exemplo, alguém poderia pensar assim: “Como não sei a idade procurada, deixo um espaço para ela dentro deste quadradinho, e então escrevo o que sei.” Ficaria assim:

$$\square + (\square + 7) = 79$$

Resolvendo esta equação (que é como chamamos em álgebra o procedimento de encontrar o número procurado), chegamos a:

$$\square = 36, \text{ como antes.}$$

Ou seja, o símbolo que cada pessoa escolhe para ajudá-la a resolver o problema não é importante. Observe que o raciocínio é o mesmo.

Sendo assim, podemos usar **qualquer símbolo** (lembre-se disso, pois às vezes os símbolos escolhidos podem ajudar bastante na resolução de problemas que encontramos na vida - e até nos motivar mais a enfrentar esses problemas).

É comum, em Matemática, usarmos a letra “**x**” para designar o número que estamos procurando - a **incógnita**, como se diz. Também em outras ciências e na literatura em geral a letra “**x**” tem sido usada para designar algo desconhecido ou misterioso.

Como exemplos, temos: o “**raio x**”, que assim foi chamado porque desconhecia-se o que ele era; uma certa “**faculdade x**”, relacionada com o desenvolvimento da consciência do homem (segundo o escritor britânico Colin Wilson); o “**cavaleiro x**”, personagem misterioso de algum romance ou novela etc.

No caso do problema anterior, então, sua equação fica assim, usando **x**:

$$x + (x + 7) = 79$$

Compare com as outras duas formas de escrevê-la. Não é a mesma coisa? E resolvendo a equação, obtemos **x = 36** para a idade da mulher, como antes.

Seguindo a tradição matemática, também adotaremos o **x** quando o símbolo for indiferente.

Resumindo o raciocínio algébrico: outro problema

João avalia que, de sua caixa d’água de 1000 litros, restavam apenas uns 100 litros. Para enchê-la de novo precisou fazer 45 viagens carregando uma lata cheia d’água. Qual a capacidade aproximada da lata? E quanto pesava a água na lata?

As etapas importante do nosso raciocínio acima são as seguintes.

Procure compreender a idéia geral do raciocínio: como vimos, ele é fruto do bom senso.

ETAPA 1 - Dando nome aos “bois”

O que precisamos saber para resolver o problema: isto será **x**.

Neste exemplo, **x** = capacidade da lata. Em seguida, usamos **x** para escrever o que sabemos; quer dizer, montamos a equação do problema.

AULA
3

ETAPA 2 - Montando a equação

Basta interpretar o que está escrito na nossa linguagem comum em termos matemáticos. Ou seja, escrever a equação. Reveja como fazemos:

$$\text{Capacidade da lata} = x$$

$$\text{Capacidade de 45 latas} = 45x$$

$$\text{O que sabemos: } 45x + 100 = 1000 \text{ (litros)}$$

ETAPA 3 - Resolvendo a equação

Esta etapa é mais automática: são as regras do cálculo. Aqui:

$$45x + 100 = 1000$$

$$45x = 900$$

$$x = 900 \div 45$$

$$x = 20 \text{ (litros)}$$

E a lata pesa 20 kg, pois 1 litro de água pesa 1 kg. Não estamos considerando o peso da lata vazia, neste problema.

ETAPA 4 - Conferindo o resultado

“Tudo isso?”, alguém poderia perguntar, espantado com o peso carregado por João em tantas viagens. Para não termos dúvida de que chegamos ao resultado certo, “checamos” se o número encontrado satisfaz de fato o que sabemos dos dados do problema. Quer dizer, se **x** for mesmo igual a 20, então deveremos ter $45x + 100 = 1000$. Vejamos:

$$45 \times (20) + 100 = 900 + 100 = 1000 \text{ (Confere !)}$$

↓
x

São só estas etapas? Não. É preciso ter o cuidado final de verificar se já respondemos à pergunta do problema.

ETAPA 5 - Respondendo o que foi perguntado

Por exemplo, poderia ter sido perguntado não quanto era a **capacidade** da lata, mas sim qual o seu **peso** em água. (A resposta não seria, é claro, 20 litros!)

Ou seja: para completar a solução, você tem de responder exatamente o que o problema pede.

Foi uma boa aula. Concorde? O raciocínio algébrico é mesmo muito útil, poderoso e até mesmo muito atual em termos de pensamento matemático. Use-o nos próximos exercícios, não esquecendo de que o importante é a compreensão do que estamos estudando.

Exercício 1

Para cercar todo o perímetro de seu terreno quadrado e ainda gastar 26 m no caminho que leva à estrada, Procópio precisou comprar 94 m de cerca. Qual a área de seu terreno?

Exercício 2

Quando seu primogênito nasceu, Gustavo tinha 24 anos. Depois de quantos anos ele terá exatamente o dobro da idade de seu filho? E o triplo?

Exercício 3

- Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de seu triplo?
- Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 21?
- Qual o número cuja metade é igual à sexta parte de 42?

Exercício 4

Quinze anos depois do nascimento das trigêmeas Lia, Lina e Liana, quantos anos tem cada uma delas?

Exercício 5

Quanto devo pedir por determinada mercadoria que pretendo vender para que, descontados 10%, eu fique ainda com R\$100,00? (Verifique!)

Exercício 6

Relacione cada número à esquerda com aquela expressão à direita que se torna verdadeira quando x é substituído pelo número:

VALORES DE x	EXPRESSÕES
2	a) $5x = 6 - x^2$
0	b) $\frac{18}{x} + 5 = 2 + x$
- 3	c) $\sqrt{x} + x = 0$
3	d) $x^3 + 2x = 12$
1	e) $x + 2x - 9 = 0$

A U L A

4

O método aritmético e o método algébrico

Introdução

Se você esteve bem atento na aula passada, na qual conhecemos os “problemas com x ”, deve ter percebido que aquele problema das idades do casal poderia ter sido resolvido sem que fosse preciso usar x . Vejamos como. O problema dizia:

Certa mulher é casada com um homem 7 anos mais velho que ela. Quando a primeira criança do casal nasceu, a soma das duas idades era 79. Qual era a idade da mulher?

Podemos raciocinar da seguinte maneira. Se o homem e a mulher tivessem a mesma idade, a idade dela (ou dele) seria, é claro, metade da soma; e a soma seria o dobro da idade da mulher. Como o marido é 7 anos mais velho, o dobro da idade da mulher foi aumentado de 7 anos, somando 79 anos.

Logo, o dobro da idade da mulher é:

$$79 - 7 = 72$$

E a idade da mulher é:

$$72 : 2 = 36$$

C.Q.D.! Isto é, **Como queríamos demonstrar**, pois foi este o resultado que encontramos na outra aula.

A aula de hoje traz outros problemas, que podem ser resolvidos tanto pelo método aritmético (como fizemos agora), como pelo método algébrico, “ou método do x ”.

Qual é o melhor para cada problema? A matemática não decide isso por nós: ela apenas enriquece nosso conhecimento com vários métodos para resolver problemas, e deixa a escolha para nós. Pois cabe a cada pessoa escolher por si mesma, já que a Matemática também é parte da vida.

Sendo assim, papel e lápis! Porque também não existe “matemática de cabeça”, e vamos à aula de hoje!

Vamos ver como resolver um mesmo problema por métodos diferentes.

No exemplo seguinte, temos mais uma questão sobre idades. Compare a solução pelo método aritmético e a solução pelo método algébrico. Você verá que chegaremos ao mesmo resultado.

“Sou cinqüentão”, afirmou Paulo (querendo dizer que tinha cinqüenta e poucos anos). “E hoje é um dia cabalístico” (isto é, mágico). “Pois não apenas a idade da minha mulher, Jurema, mais jovem do que eu, se escreve ao contrário da minha, como a diferença entre as nossas idades é igual à idade que nossa filha comemora hoje: 9 anos!”

Quantos anos tem Paulo? Uma tal data “cabalística” como essa se repetirá algum dia?

Tente descobrir a idade de Paulo, raciocinando apenas com números, sem utilizar x , ou seja, raciocinando aritmeticamente.

Resolvendo pelo método aritmético

O caminho mais simples para resolver o problema pelo método aritmético, neste caso, parece ser pelo raciocínio das tentativas. Assim, vamos fazer diretamente as contas em cada uma das possibilidades para a idade de Paulo - cinqüenta e poucos anos:

IDADE DE PAULO	IDADE DE JUREMA	DIFERENÇA (= 9?)
51	15	36 (não)
52	25	27 (não)
53	35	18 (não)
54	45	9 (sim)
55	55	0 (já não serve: Jurema é mais jovem)

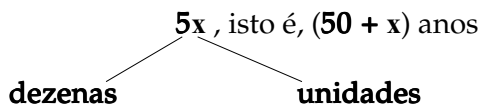
Portanto, Paulo tem 54 anos, e sua mulher, 45.

Quanto à segunda pergunta, fica para você responder. Continue usando o método das tentativas. No próximo ano, Paulo terá 55 anos, e Jurema, 46 (cujo contrário é 64, e não 55 - o que Paulo não consideraria “cabalístico”), e assim por diante. Procure!

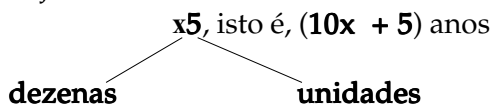
Resolvendo pelo método algébrico

A pergunta é: qual a idade de Paulo “cinqüentão”?

Vamo chamar a idade de Paulo de:



E a idade de Jurema de:



AULA
4

Sabemos que a diferença entre as idades é de 9 anos. Logo,

$$\begin{aligned}(50 + x) - (10x + 5) &= 9 \\ 50 + x - 10x - 5 &= 9 \\ - 9x + 45 &= 9 \\ - 9x &= 9 - 45 \\ x &= \frac{-36}{-9} = 4\end{aligned}$$

A idade de Paulo, então, é 54 anos (como encontramos antes).

Que método é mais fácil? E mais rápido?

No exemplo relativo à idade de Paulo, talvez você ache mais fácil aplicar o método aritmético. Basta organizar um pouco o raciocínio, fazendo uma tabela, e procurar o par de números “contrários” que satisfaça o que se pede.

Já o método algébrico é mais rápido, e também mais geral: adapta-se imediatamente a vários problemas. (Veja os exercícios, depois.)

Mas isso foi nesse exemplo. Em outros problemas, pode ser diferente. É isso que é bom, pois a própria escolha inicial do método a ser empregado já desenvolve nosso raciocínio e nossa criatividade.

Veremos agora um problema que pode ser resolvido por, pelo menos, três métodos: um aritmético, um algébrico e um gráfico. Deixamos para você opinar, neste caso, sobre qual deles é o mais fácil, ou o mais rápido, ou o mais geral etc.

Outro problema... e três métodos de resolução

Estou com uns amigos numa mesa de bar. Tenho na carteira R\$15,70. Quanto posso deixar minha despesa alcançar, se também pretendo deixar como gorjeta para o garçom 10% sobre essa despesa?

Resolvendo pelo método aritmético

Fazendo algumas tentativas com o valor da despesa, observo que, para cada 10 reais de despesa, deixarei mais 1 real para o garçom, totalizando esse gasto 11 reais, ou R\$11,00. Para cada 1 real de despesa, deixarei 10 centavos, gastando assim R\$1,10. Vamos, então, acrescentando novos gastos como esses, até a soma se aproximar do que tenho (R\$15,70). Veja a tabela, com valores em R\$:

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA
10	1	11	11
1	0,10	1,10	12,10
1	0,10	1,10	13,20
1	0,10	1,10	14,30
1	0,10	1,10	15,40
0,10	0,01	0,11	15,51
0,10	0,01	0,11	15,62
0,10	0,01	0,11	15,73 — (mais do que tenho)

Observe que, após a quinta linha de despesa, não valeria a pena continuar somando 1 real, pois isso levaria o total do gasto a mais de 16 reais - quantia de que não disponho. Por isso, continuamos com valores simples menores, de R\$0,10 de despesa. Sendo assim, a tabela mostra que, nesse caso, posso deixar minha despesa alcançar apenas o que consta da última linha. Ou seja:

$$10 + 4 + 0,20 = \mathbf{14,20 \text{ reais}}$$

Resolvendo pelo método algébrico

Vamos dar nomes (ou símbolos) aos componentes do problema:

- x - para o valor que a despesa pode alcançar
- $0,1x$ - para a gorjeta = 10% de $x = (10/100) \cdot x$
- $1,1x$ - para o gasto = $x + 0,1x$

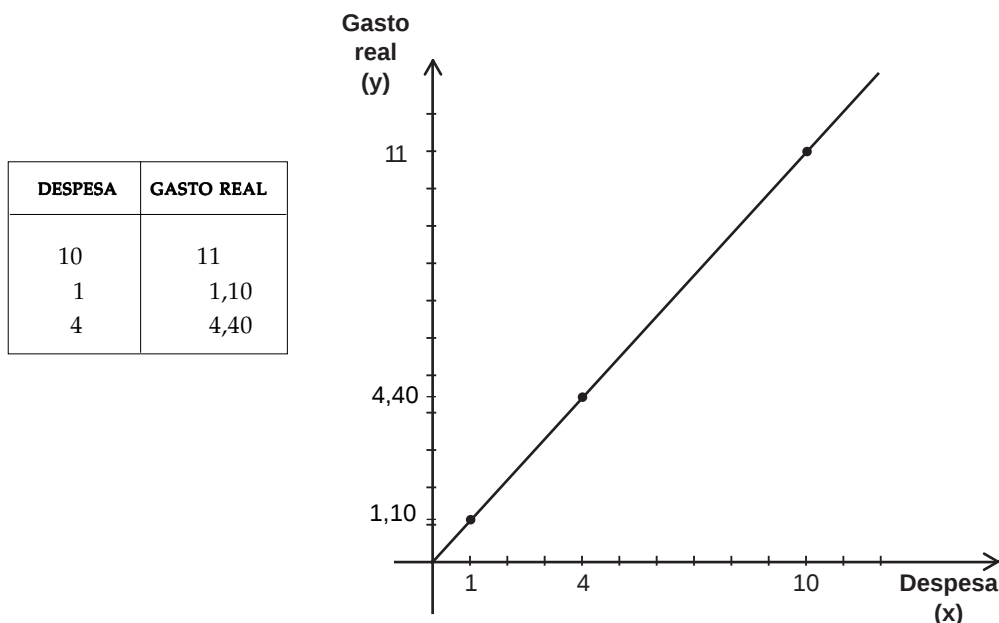
Então, eu quero saber qual o valor de x para que o meu gasto no bar não ultrapasse R\$15,70.

$$\begin{aligned} 1,1x &= 15,70 \text{ (ou menor que isso)} \\ x &= 14,27 - \text{um pouco mais que } 14,20. \text{ Como antes.} \end{aligned}$$

De fato, se a minha despesa for R\$14,20, a gorjeta será de R\$1,42 ao todo, e terei gasto R\$14,20 + R\$1,42 = **R\$15,62**, como encontramos na solução aritmética.

Resolvendo pelo método gráfico

Podemos também nos assegurar dessa resposta visualizando o problema num gráfico. Por exemplo, marca-se no eixo horizontal a despesa e, no vertical, a despesa aumentada de 10%, quer dizer, o gasto real. E marcando neste gráfico alguns valores conhecidos, como aqueles da tabela do item **Resolvendo pelo método aritmético**.



AULA
4

É fácil notar que esses três pontos do tipo $(x,y) = (\text{despesa}, \text{gasto})$ que encontramos na tabela, bem como quaisquer outros que calculemos, formam uma reta que passa pela origem dos eixos. De fato, isso acontece porque o gasto é proporcional à despesa: ou seja, se a despesa for, por exemplo, 10 vezes maior, o gasto também será 10 vezes maior. Realmente, vimos que, de fato, um deles é múltiplo do outro: $\text{gasto} = (1,1) \times \text{despesa}$.

Aqui é bom fazer uma pequena pausa para tratarmos de sinais matemáticos. É que, em álgebra, convém trocar o sinal de vezes ($\times$) pelo ponto ($\cdot$), para não confundir com a letra x .

Tradicionalmente, a matemática utiliza os seguintes sinais:

$\times$ e $\cdot$ para a multiplicação
e

$\#$ e $:$ para a divisão.

Por isso, se você encontrar:

$$\text{gasto} = (1,1) \cdot \text{despesa}$$

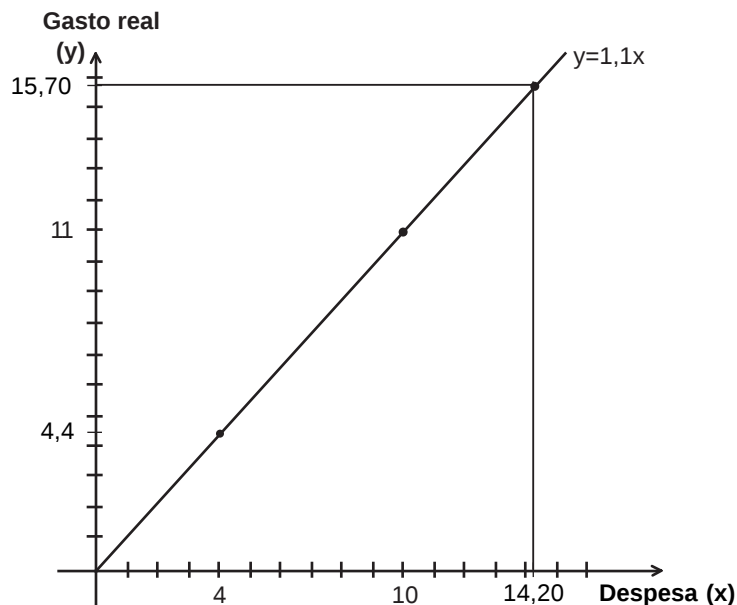
é a mesma coisa que

$$\text{gasto} = (1,1) \times \text{despesa}$$

Algumas vezes, você também vê uma multiplicação na qual o sinal não aparece. Podemos escrever, por exemplo, o produto de a por b de três formas:

$$a \times b, a \cdot b \text{ ou simplesmente } ab$$

Assim, para sabermos que a despesa corresponde ao gasto de, no máximo, R\$15,70, marcamos este número no eixo vertical e procuramos pela despesa no eixo horizontal:



Fazendo isto com cuidado, vimos que a despesa pode ser de até R\$14,20, ou um pouco mais alta - como concluímos pelos outros dois métodos. Aqui estão alguns exercícios para você praticar. A lição mais importante desta aula, entretanto, não foi dita até aqui. É esta:

Resolver um mesmo problema por dois métodos diferentes pode lhe dar uma grande segurança quanto às respostas. Se elas forem iguais, é bem possível que suas respostas estejam certas. “E se forem diferentes?”, você perguntaria. Neste caso, é claro que uma das respostas está errada!

Saber que estamos errados também é uma forma de acertar. Concorde? O grande cientista Einstein teria dito, certa vez, que não se importava quando alguém apontava um erro em suas teorias; na verdade, até gostava. Por quê? Ele dizia que, tendo sido encontrado esse equívoco, isso o colocava mais perto da verdade, pois já não estava se enganando.

Grande Einstein! São palavras que nos fazem pensar, não é mesmo?

Exercício 1

Use o gráfico do último problema desta aula para encontrar que despesa posso fazer para não ultrapassar os gastos abaixo, deixando ainda 10% para o garçom:

- a) R\$ 8,80
- b) R\$ 9,02
- c) R\$ 19,80

Exercícios

Exercício 2

Resolva o Exercício 1 aritmeticamente, completando a tabela dada na aula. Compare com as respostas encontradas naquele exercício.

Exercício 3

Resolva o exercício 1 algebricamente, usando a equação que relaciona despesa e gasto no problema de gorjeta de 10%. Compare com as respostas dos exercícios anteriores.

Exercício 4

Se eu decidisse deixar 20% de gorjeta para o garçom, em vez de 10%, quanto poderia ter de despesa?

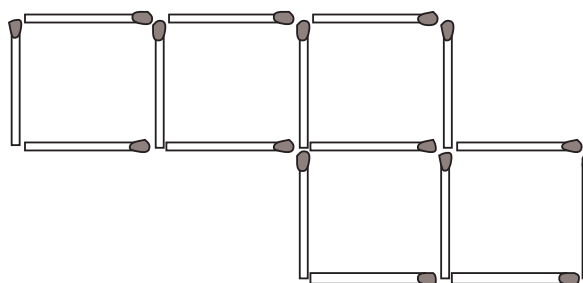
- a) Solução aritmética:
- b) Solução algébrica:
- c) Solução gráfica:

Equacionando os problemas

Introdução

Nossa aula começará com um quebra-cabeça de mesa de bar - para você tentar resolver agora.

Observe esta figura feita com palitos de fósforo. Mova de lugar exatamente 2 palitos, de modo a transformá-la em 4 quadrados iguais, sem sobrar nenhum palito. Você pode fazer isso com palitos ou no desenho.



Nossa Aula

Conseguiu resolver o quebra-cabeças? Não? Então, vamos resolvê-lo juntos, pelo caminho da matemática. Certos problemas não nos parecem, de início, “problemas de matemática” - mas, de repente, vemos que existe uma solução para eles que pode ser chamada de **solução matemática**. (Na realidade, o que existe na vida prática não são problemas de matemática - mas soluções matemáticas, criadas pelas pessoas para resolver problemas práticos).

O quebra-cabeça é um exemplo. A princípio, pode não estar bem claro qual matemática usar. Geometria? Aritmética? De fato, o quebra-cabeça envolve tanto figuras geométricas quanto números.

Se você ainda não conseguir resolvê-lo, talvez seja porque não tenha percebido que o quebra-cabeça tem dois aspectos: o **geométrico** e o **numérico**. Talvez também tenha lhe faltado equacionar o problema. Isto é: escolher quem será a incógnita - geralmente chamada de **x** - e escrever a equação satisfeita por essa incógnita. A partir daí - sempre deixando claro qual é a pergunta do problema -, basta resolver a equação: quer dizer, “encontrar o **x** do problema”, como se costuma dizer.

Quando conseguimos equacionar um problema, vemos claramente o que é conhecido (pela equação) e o que se procura (a incógnita). Assim, o caminho da solução, que leva de uma coisa à outra, muitas vezes salta aos olhos nesse equacionamento. Vejamos no quebra-cabeça.

Equacionando o quebra-cabeça

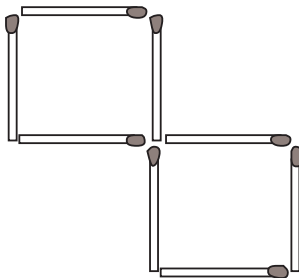
O que vemos na figura dada? Vemos 5 quadrados iguais. Eles estão unidos e são feitos com palitos de fósforo. O problema pede que os 5 quadrados se transformem em 4 quadrados iguais, só com o movimento de 2 palitos.

Que figura formarão, então, os 4 quadrados? Se soubermos isso, será bem mais fácil formar a tal figura... e o problema estará resolvido.

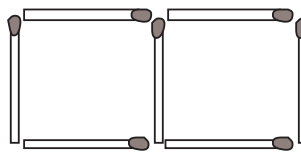
Dois quadrados juntos podem ser formados de um dos seguintes modos:

- a) os quadrados **não têm** lado (palito) comum; ou
- b) os quadrados **têm** um lado comum.

Qual a diferença importante no caso de querermos formar uma ou outra destas figuras? Pense.



2 quadrados **com** lado comum



2 quadrados **sem** lado comum

A diferença é numérica: em **a)**, precisamos de 8 palitos; já em **b)**, precisamos de apenas 7 - pois “economizamos” um palito quando os quadrados são vizinhos, tendo um lado comum.

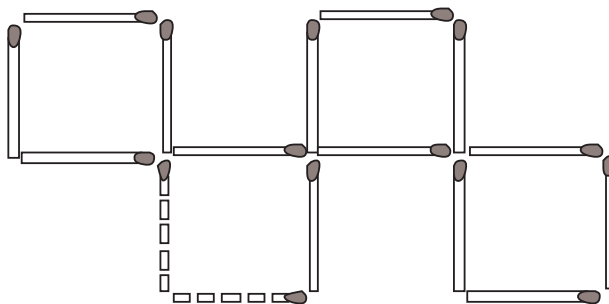
E no nosso caso? Queremos formar 4 quadrados, sem que sobrem palitos. Qual é a pergunta crucial aqui? Pense.

Isso mesmo! A pergunta é: “Quantos palitos temos?”

É só contar: temos 16 palitos. Se cada quadrado possui 4 palitos e queremos formar uma figura com 4 quadrados - desde que não permitamos que dois quadrados sejam vizinhos (“de parede”, isto é, de lado comum) - usaremos:

$$4 \times 4 = 16 \text{ palitos. Exatamente o que temos!}$$

Algumas tentativas irão lhe mostrar que, desenhando ou fazendo 4 quadrados com 16 palitos, o desenho que devemos procurar formar é este:



AULA
5

Está resolvido. Não lhe parece mais fácil, agora?
Pois então. Tudo teve uma sequência muito natural, desde o momento em que equacionamos o problema, contando o número de palitos e tentando visualizar claramente o que havia sido pedido - neste caso, a forma da figura dos 4 quadrados.

Equacionando um problema algébrico

Rigorosamente falando, equacionar um problema envolve escrever a equação (ou as equações) de modo que ela expresse em linguagem matemática o que foi dado no problema em linguagem comum.

Vejamos, então, como fazer isso com problemas algébricos, ou melhor, com **problemas que admitem solução algébrica**.

EXEMPLO 1

Qual é o número cujo dobro, mais 5, é igual a 17?

Equacione o problema, chamando o número desconhecido de **x**. Vimos que não importa a letra que usamos para designar a incógnita, isto é, o número procurado - mas é universal o uso do **x**. O fato importante é que:

$$2x + 5 = 17$$

A partir daí, acharíamos **x**. (Você pode tentar, se quiser). Só que nesta aula estamos mais interessados no **equacionamento** dos problemas - que é a primeira etapa. Geralmente, essa é a etapa mais importante na resolução desses problemas.

Vamos relembrar os momentos fundamentais desse equacionamento.

- Quando encaramos o tal número procurado como a incógnita do problema, e o chamamos de **x**;
- Quando traduzimos em “matematuquês” o que está dado em português, ou seja, quando escrevemos a equação matemática que é satisfeita por essa incógnita. Neste exemplo, faríamos assim:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x = \text{número}} \\ &\mathbf{O \text{ que sabemos: } 2x + 5 = 17} \end{aligned}$$

Para reconhecer **x**, é só resolver a equação. Encontra-se **x = 6**. Verifique.

Vamos ver outros exemplos de equacionamento de problemas. É interessante que você, em cada caso, experimente responder a estas duas perguntas do equacionamento, antes de continuar a leitura:

- O que é **x**, neste caso? (Qual é a incógnita?)
- O que sabemos sobre **x**? (Qual é a equação?)

EXEMPLO 2

Quanto deve medir de lado (em km) um terreno quadrado, para que o número que vai expressar seu perímetro (em km) seja o mesmo que o número que expressa sua área (em km²)? Procure a solução!

Em primeiro lugar, vamos responder às duas perguntas principais do equacionamento:

a) x = lado

b) O que sabemos: $4x = x$

perímetro área

Aqui, vamos lembrar que um número (ou incógnita) ao quadrado é esse número (ou incógnita) multiplicado por ele mesmo. Então:

$$4x = x \cdot x$$

E, logo, adivinhamos um número x que satisfaz esta equação. Qual é?

Ora até visualmente fica claro que a expressão $4x = x$, acima, é verdadeira quando substituímos x por 4, pois temos:

$$4 \cdot 4 = 4 \cdot 4$$

Portanto, se o lado do terreno quadrado for 4 quilômetros, satisfará o que é pedido.

Uma observação importante: a equação $4x = x$ é uma equação de 2º grau. Por isso, (como recordaremos) deve ter outra raiz, ou seja, outro número para substituir o x . A outra raiz é zero, pois zero vezes qualquer número é zero. Mas, neste caso, o terreno teria lado nulo, quer dizer, não existiria. (Dizemos que, neste caso, $x = 0$ é uma **solução degenerada**).

EXEMPLO 3

- Qual o número cuja metade é a sexta parte de 42? E de 21?
- E qual o número cuja metade é a sexta parte de seu triplo?

A primeira pergunta é equacionada assim:

x = número

O que sabemos: $\frac{x}{2} = \frac{42}{6}$

7
1

A partir daí fica fácil: multiplicando os dois lados por 2, teremos $x = 14$.

AULA
5

A segunda pergunta é equacionada assim:

$$x = \text{número} \quad 7$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{21}{6} \quad 2$$

Logo, multiplicando os dois lados por 2, temos $x = 7$.

Já a terceira pergunta é bem diferente:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{3x}{6} \quad \text{isto é, } x = x$$

Você pode dar exemplo de um número que pode substituir x e fazer a sentença ser verdadeira? Pense.

Claro: qualquer número serve! Pois $x = x$ é verdadeiro para todo x , já que todo número é igual a si mesmo.

Assim, $x = x$ não é propriamente uma equação. Dizemos que é uma **identidade**, pois é verdadeira para todo x .

EXEMPLO 4

O marcador de gasolina do meu automóvel apresenta um erro e desejo conhecê-lo. Assim, poderei compensá-lo nas próximas leituras do marcador. Há pouco ele marcava $3/4$ do tanque, e precisei de 10 litros para enchê-lo completamente. A capacidade do tanque é de 50 litros. Qual o erro percentual que o marcador apresenta? Para mais ou para menos?

Qual deve ser a incógnita nesse problema: você diria que é o erro percentual procurado (quer dizer, quantos por cento do tanque)?

O primeiro cuidado do equacionamento é a escolha da incógnita, do x . Só é preciso bom-senso para se fazer essa escolha: por exemplo, x deve ser tal que saibamos **logo** usá-lo para escrever a equação do problema.

Assim, é mais razoável fazer da seguinte maneira:

$$x = \text{Volume que havia no tanque (litros)}$$

$$\text{O que sabemos: } x + 10 = 50$$

$$\text{Logo, } x = 40.$$

O que queremos saber:

- erro = ?
- erro percentual = ?%

Mas o volume que o tanque marcava era:

$$\frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5$$

Assim:

$$\text{erro} = 40 - 37,5 = 2,5 \text{ (em 40 litros)}$$

Finalmente, em termos de erro percentual, precisamos fazer uma **regra de três**, procurando o erro não em 40, mas em 100 litros.

$$2,5 \text{ — } 40$$

$$y \text{ — } 100$$

Daí,

$$\frac{2,5}{y} = \frac{40}{100}$$

Então, multiplicando os dois lados por 100 y, temos:

$$(2,5) \cdot (100) = 40 y$$

Logo, dividindo por 40 e trocando os lados, temos que

$$y = \frac{250}{40} = 6,25 \text{ (em 100 litros)}$$

Concluimos que o erro percentual apresentado pelo marcador é de 6,25 litros em 100 litros, ou seja, **6, 25%** para menos, pois ele marca menos do que devia.

Nesta página e nas seguintes estão alguns problemas para você equacionar, sem necessariamente resolvê-los.

Lembre-se dos dois pontos importantes do equacionamento! “Quais”?! É hora de revisão da aula...

Exercício 1

Considere o seguinte problema: Subtraindo-se 4 de certo número e dividindo-se esse resultado por 2 e, depois, somando-se este novo resultado ao triplo daquele número, sabemos que o resultado é igual a $\frac{4}{5}$ do número mais 7. Qual é o número?

a) Qual é a incógnita?

b) Que equação ela satisfaz?

c) O que o problema pede?

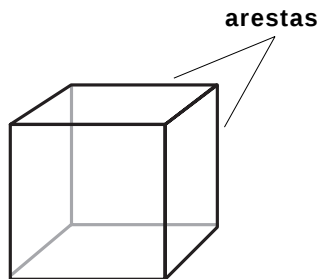
(Atenção: O exercício não pede para resolver o problema. Faça-o se quiser.)

Exercícios

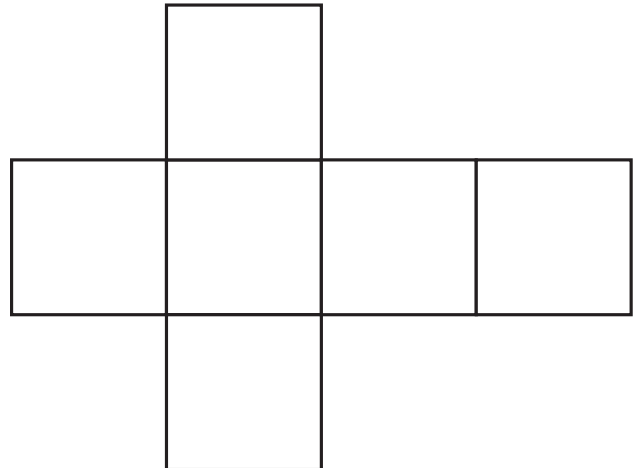
AULA
5

Exercício 2

- a) Faça o mesmo com este problema, parecido com o **Exemplo 2**, visto na aula. Quanto deve medir a aresta (em m) de um cubo, para que o número que expressa a área (em m²) da superfície lateral total do cubo (formada pelos 6 quadrados que o limitam) seja um número igual ao de seu volume (em m³)?



cubo



superfície lateral do cubo

- b) Olhando para sua equação, que palpite você arriscaria para o tamanho da aresta procurada?

Exercício 3

- a) Equacione o seguinte problema. A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho e, ao mesmo tempo, o filho é 22 anos mais jovem que o pai. Quais as idades deles?
Cuidado: há duas incógnitas! (Chame-as de **x** e **y**). E há também duas equações.
- b) Observando atentamente as suas duas equações, você consegue descobrir **x** e **y**? (Pense na diferença entre as idades, vendo-a de dois modos.)

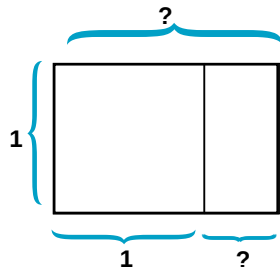
Exercício 4

- a) Resolva o item a) do exercício anterior chamando as incógnitas de **p** e **f**. Compare as equações com aquelas equações anteriores: o que poderíamos dizer dos valores dessas incógnitas?
- b) Que letras você prefere para as incógnitas, neste problema? Por quê?

Exercício 5

Equacione este problema, que trata do famoso **retângulo áureo**.

O lado menor de um retângulo mede 1 m, e o lado maior é desconhecido. Queremos que esse lado maior seja tal que, quando retirarmos um quadrado de lado 1 m do retângulo, sobre um retângulo semelhante ao retângulo grande - isto é, do mesmo formato que o retângulo grande, com os lados respectivamente proporcionais aos dele.



Sugestão: Chame de x a maior - ou a menor - das duas medidas desconhecidas, na figura. Agora interprete a proporcionalidade entre os lados do retângulo grande e do pequeno em termos de uma equação em x .

Atenção: A equação é de 2º grau. Deixe a resolução para o momento em que estiver lembrado esse assunto, em aulas futuras.

O retângulo áureo é igual a um quadrado unido a outro retângulo áureo menor (é importante na natureza, nas artes e na matemática).

A U L A
6

Resolvendo equações

Introdução

À medida que os problemas se tornam mais complicados, o método algébrico vai se impondo naturalmente ao método aritmético. Resolver equações fará parte das nossas atividades diárias. Mas, o que significa resolver uma equação? Tomemos como exemplo esta equação:

$$\frac{x+4}{2} = 2x - 3 \quad | \quad 1$$

Não importa de que problema ela tenha vindo. Desejamos, antes de mais nada, responder à pergunta que fizemos.

Resolver uma equação significa encontrar um número tal que, se for colocado no lugar da letra x , torna a igualdade correta. Veja o que acontece se substituirmos x por 2.

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{2} &= 2x - 3 \quad | \quad 1 \\ 3 &= -3 \rightarrow \text{errado!} \end{aligned}$$

Logo, $x = 2$ não é solução da nossa equação. Veja agora o que acontece se substituirmos x por 6.

$$\begin{aligned} \frac{6+4}{2} &= 2x - 3 \quad | \quad 1 \\ 5 &= 5 \rightarrow \text{certo!} \end{aligned}$$

Portanto, $x = 6$ é **solução** da nossa equação. Dizemos também que $x = 6$ é **raiz** da equação dada.

É importante saber que $x = 6$ é a **única** solução da equação do nosso exemplo. Você pode tentar substituir x por outros números; mas fique certo de que jamais encontrará outras igualdades corretas.

As equações que aprenderemos a resolver nesta aula são chamadas de **equações do primeiro grau**, ou seja, são equações em que a letra **x** não aparece elevada a nenhum expoente. Um fato importante relativo às equações de 1º grau é que:

Toda equação de 1º grau possui uma solução.

Inicialmente, vamos aprender a resolver equações do 1º grau. Não nos importará, portanto, de quais problemas elas vieram.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Resolva a equação $2x + 3(x - 2) = 7x - 34$.

Neste primeiro exemplo, não há denominadores. Então, a primeira coisa a fazer é eliminar os parênteses. Observe que na multiplicação $3(x - 2)$, o número 3 multiplica todos os termos que estão dentro do parênteses, ou seja:

$$3(x - 2) = 3x - 3 \cdot 2$$

Voltemos, então, à equação dada.

$$2x + 3(x - 2) = 7x - 34$$

$$2x + 3x - 3 \cdot 2 = 7x - 34$$

$$2x + 3x - 6 = 7x - 34$$

Agora, todos os termos que contêm a letra **x** devem ser transportados para o lado esquerdo. Observe, então, a mudança do sinal dos termos que trocaram de lado.

$$2x + 3x - 7x = 6 - 34$$

Continuamos fazendo as contas:

$$\begin{array}{ll} 2 + 3 - 7 & = -2 \text{ do lado esquerdo e} \\ 6 - 34 & = -28 \text{ do lado direito.} \end{array}$$

Temos então:

$$-2x = -28$$

É conveniente trocar os sinais dos dois lados:

$$2x = 28$$

e dividir os dois membros por 2 para obter o valor de **x**.

$$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$$

$$x = 14$$

Está resolvida, assim, a nossa equação. Se quisermos conferir se a solução é realmente a que encontramos, devemos substituir **x** por **14** na equação dada.

AULA
6

$$\begin{aligned} 2 \cdot 14 + 3(14 - 2) &= 7 \cdot 14 - 34 \\ 28 + 36 &= 98 - 34 \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

Está certo. A raiz da equação dada é realmente $x = 14$.

EXEMPLO 2

Como resolver a equação abaixo?

$$\frac{x-4}{2} + 3x = \frac{4x}{5} + 7$$

Neste exemplo, a equação possui **denominadores**.

Portanto, a primeira coisa a fazer, neste caso, é eliminar esses denominadores. Para isso, buscamos um número que seja múltiplo de todos os denominadores e multiplicamos **todos** os termos da equação por esse número.

No nosso caso, os denominadores são **2** e **5**. Como 10 é múltiplo de 2 e de 5, vamos multiplicar por 10 todos os termos dessa equação.

$$10 \cdot \frac{(x-4)}{2} + 10 \cdot 3x = 10 \cdot \frac{4x}{5} + 10 \cdot 7$$

Fazemos agora as simplificações:

$$\cancel{10} \cdot \frac{(x-4)}{\cancel{2}_1} + 10 \cdot 3x = \cancel{10} \cdot \frac{4x}{\cancel{5}_1} + 10 \cdot 7$$

$$5(x-4) + 30x = 8x + 70$$

Agora não há mais denominadores. Logo, podemos resolver essa equação do mesmo modo que fizemos no primeiro exemplo.

$$\begin{aligned} 5x - 20 + 30x &= 8x + 70 \\ 5x + 30x - 8x &= 70 + 20 \\ 27x &= 90 \end{aligned}$$

$$\frac{27x}{27} = \frac{90}{27}$$

$$x = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 9}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Portanto, a solução da equação dada é $x = \frac{10}{3}$

Vamos agora resolver alguns problemas com o auxílio da álgebra.

Em cada um deles vamos tentar, a partir do enunciado, obter uma equação e, em seguida, resolvê-la.

EXEMPLO 3

Um feirante levou 60 mamões para vender na feira. Começou vendendo cada um por 50 centavos. Depois, como a venda estava fraca, baixou o preço para 30 centavos e vendeu todos os outros. Sabendo que ele arrecadou R\$ 22,80, quantos mamões ele vendeu pelo preço mais caro?

Digamos que seja x o número de mamões que ele vendeu pelo preço mais caro. Como cada uma dessas frutas foi vendida por R\$ 0,50 então, na primeira parte da venda ele arrecadou $0,50 \cdot x$.

Quantos mamões sobraram?

Se ele tinha inicialmente 60 mamões e vendeu x mamões, então sobraram **60 – x mamões**. Como cada um deles foi vendido por R\$ 0,30, então, na segunda parte da venda o feirante arrecadou **0,30 (60 – x)**.

Se ele arrecadou no total R\$ 22,80, nossa equação é:

$$0,50 \cdot x + 0,30 (60 - x) = 22,80$$

Vamos agora resolver essa equação. Observe inicialmente que, na parte decimal de um número, o zero colocado à direita pode ser dispensado. Ficamos então com:

$$0,5 \cdot x + 0,3 (60 - x) = 22,8$$

Para evitar trabalhar com decimais, multiplicamos todos os termos da equação por 10.

$$5x + 3 (60 - x) = 228$$

Agora fica fácil:

$$5x + 3 \cdot 60 - 3x = 228$$

$$5x + 180 - 3x = 228$$

$$5x - 3x = 228 - 180$$

$$2x = 48$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{48}{2}$$

$$x = 24$$

Portanto, o feirante vendeu 24 mamões pelo preço mais caro.

EXEMPLO 4

Uma caixa com 30 lápis custa R\$ 4,80. Quanto deverá custar uma outra com 40 lápis?

Este é um problema de regra de três. Problemas como esse são muito frequentes em nossa vida. Observe como organizamos os dados no quadro montado abaixo.

preço	—>	4,80	x
quantidade	—>	30	40

AULA

6

Para resolver o problema, montamos a equação

$$\frac{4,80}{30} = \frac{x}{40}$$

Por que fazemos isso? É simples. Vamos pensar no significado de cada fração. Repare que, dividindo o preço da caixa pela quantidade de lápis, estamos calculando **quanto custa cada lápis**. Se o preço de um lápis é o mesmo nas duas caixas, as duas frações devem ser **iguais**. Resolver essa equação é fácil. Basta multiplicar por 40 os dois lados.

$$40 \cdot \frac{4,80}{30} = 40 \cdot \frac{x}{40}$$

Daí,

$$x = \frac{40 \cdot 4,80}{30} = 6,4$$

Logo, a caixa maior **deverá** custar **R\$ 6,40**.

Comentário: freqüentemente, encontramos no mercado um mesmo produto em embalagens diferentes e com preços diferentes. Nesse caso, é preciso saber qual das embalagens é mais econômica.

Por exemplo, se uma caixa com 30 lápis custa R\$ 4,80 e outra com 40 lápis custa R\$ 6,10, o problema que acabamos de resolver nos mostra que devemos preferir a segunda. Na caixa maior, o preço de cada lápis é certamente menor.

EXEMPLO 5

João recebeu seu salário e verificou que:

- a quarta parte do dinheiro ele gastou com aluguel e pagamento das contas;
- a terça parte gastou no supermercado;
- restaram-lhe R\$ 100,00 para todas as outras despesas.

Qual é o salário de João?

Vamos chamar de **x** o salário de João. Agora, vamos somar o que ele pode gastar com outras despesas. Essa soma é o salário de João. Então:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 100 = x$$

Para resolver essa equação, vamos eliminar os denominadores, multiplicando todos os termos por 12.

$$12 \cdot \frac{x}{4} + 12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot 100 = 12 \cdot x$$

Simplificando, temos:

$$3x + 4x + 1200 = 12x$$

Passando todos os termos que contêm x para um mesmo lado, ficamos com:

$$1200 = 12x - 3x - 4x$$

$$1200 = 12x - 7x$$

$$1200 = 5x$$

$$5x = 1200$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{1200}{5}$$

$$x = 240$$

Concluimos que o salário de João é de **R\$ 240,00**.

Observe agora o próximo exemplo para aprender algo diferente sobre as equações.

EXEMPLO 6

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é dois anos mais velho que Antonio e que Carlos é três anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades de Antonio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, calcule as idades dos 3 irmãos.

Vamos chamar de x a idade de Antônio. Como Bruno é 2 anos mais velho, a sua idade será $x + 2$. E já que Carlos é três anos mais velho que Bruno, a idade de Carlos será $x + 2 + 3 = x + 5$. Resumindo:

Antônio

|
 x

Bruno

|
 $x + 2$

Carlos

|
 $x + 5$

Como a soma das idades de Antônio e Carlos é o dobro da idade de Bruno, temos a seguinte equação:

$$x + x + 5 = 2(x + 2)$$

Vamos resolver como já aprendemos

$$x + x + 5 = 2x + 4$$

$$5 - 4 = 2x - x - x$$

$$1 = 0$$

Mas isto é um absurdo! Certamente que 1 não é igual a zero. Qual é o significado do que aconteceu?

Vamos explicar. Chegamos à equação:

$$5 - 4 = 2x - x - x$$

que é equivalente a

$$1 = (2 - 1 - 1)x$$

ou, ainda,

$$1 = 0 \cdot x$$

AULA

6

Essa é uma equação **impossível**, uma vez que não existe nenhum valor para x que torne a igualdade verdadeira. Isso quer dizer que o problema proposto é impossível, ou seja, **nunca** a soma das idades de Antônio e Carlos será o dobro da idade de Bruno.

É importante saber que muitos problemas não possuem solução. Dizemos então que são problemas impossíveis, isto é, que a situação apresentada por eles nunca ocorrerá.

Exercícios

Exercício 1

Resolva as equações abaixo:

a) $3x + 4 = 25$

b) $5(x - 1) - 19 = 3(x - 2)$

c) $\frac{2x}{3} + \frac{x-2}{6} = 8$

d) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 1$

Exercício 2

A soma de um número com o dobro do consecutivo dele dá 74. Qual é esse número?

Exercício 3

Antônio, Bruno e Carlos são irmãos. Sabe-se que Bruno é 2 anos mais velho que Antônio e que Carlos é 3 anos mais velho que Bruno. Se a soma das idades dos três irmãos é 55, calcule as idades de cada um deles.

Exercício 4

Em certo mercado, uma caixa com uma dúzia de ovos custa R\$ 2,80 e uma outra com 18 ovos custa R\$ 4,00. Qual das duas embalagens é mais econômica?

Exercício 5

Cada banco de um ônibus possui dois lugares. Entraram 50 passageiros nesse ônibus, mas 14 tiveram de viajar em pé. Quantos bancos tem o ônibus?

Exercício 6

Pai e filho têm 31 e 8 anos. Daqui a quantos anos o pai terá o dobro da idade do filho?

Exercício 7

Uma escola tem apenas turmas de 5ª, 6ª e 7ª séries. A metade dos alunos está na 5ª série. A terça parte dos alunos está na 6ª série e 32 alunos estão na 7ª série. Quantos alunos tem a escola?

Exercício 8

Maria saiu de casa com algum dinheiro. Comprou uma camiseta por R\$ 6,00 e gastou a quarta parte do restante num lanche. Se Maria voltou para casa com metade do dinheiro que tinha, calcule que quantia ela levava quando saiu de casa.

A álgebra nas profissões

Nesta aula, você vai perceber que, em diversas profissões e atividades, surgem problemas que podem ser resolvidos com o auxílio da álgebra. Alguns problemas são tão freqüentes que existem fórmulas prontas para sua rápida resolução. Outros, por não serem tão freqüentes, vão necessitar de maior raciocínio e criatividade. Mas, em todos eles, você poderá perceber a força dessa nova ferramenta que é a **álgebra**.

Introdução

A álgebra na medicina

Nossa aula

Na medicina, os médicos utilizam muitas fórmulas matemáticas. Principalmente para calcular as quantidades certas de remédios que devem ser dados aos doentes e para outros cálculos. São fórmulas que não podemos entender porque não somos médicos. Mas existem algumas que são simples e úteis para todos, como esta que vamos mostrar agora.

EXEMPLO 1

Como calcular a altura de uma criança?

A altura de uma criança depende de sua idade e de muitos outros fatores. Entretanto, os médicos examinaram uma quantidade muito grande de crianças brasileiras e tiraram uma média (no exercício 1 vamos lembrar o que é isso). Essa pesquisa deu origem a uma fórmula que você mesmo pode usar para verificar o desenvolvimento dos seus filhos. A fórmula - que vale para crianças de 4 a 13 anos - é a seguinte:

$$y = 5,7 \cdot x + 81,5$$

Nessa fórmula:

- x é a idade da criança (em anos)
- y é a altura da criança (em centímetros)

AULA

7

Por exemplo, se uma criança tem 5 anos podemos calcular sua altura, substituindo o x da fórmula por 5.

Veja:

$$y = 5,7 \cdot 5 + 81,5$$

$$y = 28,5 + 81,5$$

$$y = 110 \text{ cm}$$

O resultado indica que, em geral, as crianças de 5 anos devem estar medindo por volta de 110 cm de altura. Em geral, como o desenvolvimento da criança depende de outros fatores, como a altura dos pais, a alimentação etc., são consideradas crianças normais as que tiverem altura até 10 cm a mais ou a menos que o valor dado pela fórmula.

Para você saber mais

Cada criança tem seu jeito de crescer. Em geral, as meninas crescem de forma muito próxima aos valores dados pela fórmula. Já os meninos crescem um pouco menos dos 10 aos 12 anos e passam a crescer mais depois dos 12 anos.

Com a fórmula que apresentamos, você pode fazer previsões. Suponha que uma menina tenha 115 cm de altura aos 5 anos. Essa criança tem, portanto, 5 cm a mais que o valor dado pela fórmula. Se tudo correr normalmente, essa diferença deve se manter (ou até aumentar um pouco) ao longo dos anos. Assim, se você quiser saber que altura ela terá aos 10 anos, aplique a fórmula e acrescente esses 5 centímetros.

A álgebra em uma pequena empresa

Mesmo em pequenas empresas surgem frequentemente problemas relacionados com a produção, com os custos, com os investimentos, com a divisão dos lucros etc. Vamos mostrar um deles e sua solução, com o auxílio da álgebra.

EXEMPLO 2

Como fazer uma divisão proporcional?

Em uma confecção trabalham 16 costureiras, 2 supervisoras e 1 diretora. Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira, e a diretora ganha 50% a mais que uma costureira. Todos os meses, uma pequena parte do faturamento é colocada numa poupança para ser distribuída no fim do ano. É a “caixinha do Natal”. Pois bem, no fim do ano, essa poupança tinha R\$ 1.440,00. Como deveremos fazer a distribuição dessa caixinha mantendo-se a mesma proporção dos salários?

Temos aqui uma excelente oportunidade para usarmos a álgebra. Como já vimos nas aulas anteriores, é preciso escolher o significado da nossa **incógnita**.

Vamos então representar com a letra x a quantia que cada costureira deverá receber.

Cada supervisora ganha 25% a mais que uma costureira. Portanto, cada uma receberá:

$$\begin{aligned}x + 25\% \text{ de } x &= x + \frac{25}{100} \cdot x \\&= x + 0,25 \cdot x \\&= (1 + 0,25) x \\&= 1,25x\end{aligned}$$

A diretora ganha 50 % a mais que uma costureira. Portanto, ela receberá:

$$\begin{aligned}x + 50\% \text{ de } x &= x + \frac{50}{100} \cdot x \\&= x + 0,5 \cdot x \\&= (1 + 0,5) x \\&= 1,5x\end{aligned}$$

Veja, então, o resumo no quadro abaixo.

16 costureiras	→	16 · x
2 supervisoras	→	2 · 1,25 · x
1 diretora	→	1,5 · x

Vamos somar tudo e igualar o resultado ao total da poupança:

$$16 \cdot x + 2 \cdot 1,25 \cdot x + 1,5x = 1440$$

Para encontrar o valor de x basta, então, resolver essa equação. Observe:

$$\begin{aligned}16x + 2,5x + 1,5x &= 1440 \\(16 + 2,5 + 1,5)x &= 1440 \quad (\text{x em evidência}) \\20x &= 1440 \\\frac{20x}{20} &= \frac{1440}{20} \quad (\text{dividindo por 20}) \\x &= 72\end{aligned}$$

Portanto, cada costureira deverá receber R\$ 72,00. O resto é fácil.

$$\begin{aligned}1,25 \cdot x &= 1,25 \cdot 72 = 90 \\1,5 \cdot x &= 1,5 \cdot 72 = 108\end{aligned}$$

Assim, cada supervisora deverá receber R\$ 90,00 e a diretora, R\$ 108,00. Foi feita então a **divisão proporcional** da caixinha do Natal.

A álgebra na carpintaria

Será que a álgebra tem vez em uma simples carpintaria?

Tem sim. Existem problemas que o marceneiro pode resolver de forma muito eficiente com auxílio da álgebra. Vamos ver um deles.

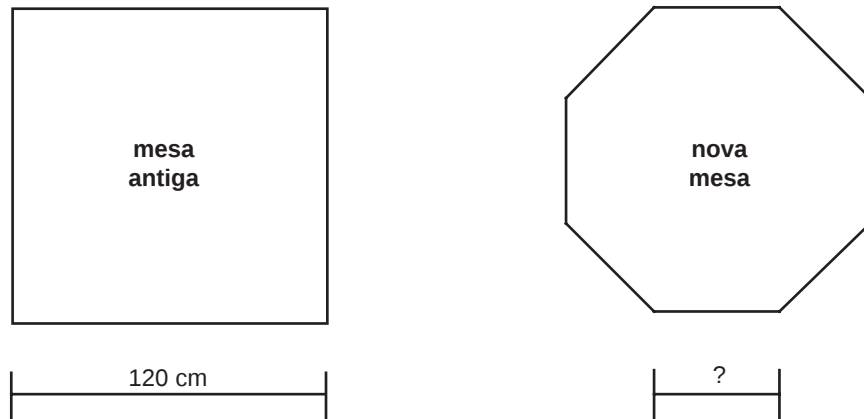
AULA
7

EXEMPLO 3

O corte está no lugar certo?

Certo dia, um marceneiro recebeu a seguinte tarefa: cortar os cantos de uma mesa quadrada, que tinha 120 cm de lado, para transformá-la em uma outra com **8 lados iguais**.

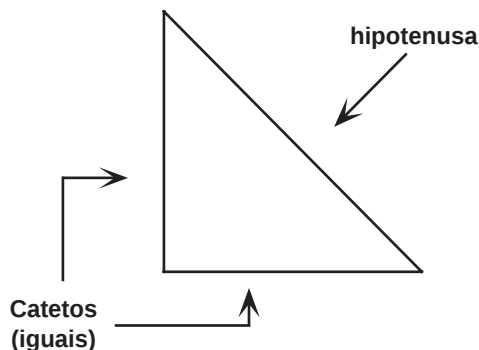
Observe, nas figuras abaixo, o problema do marceneiro.



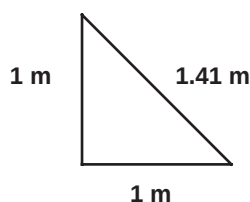
Repare que o problema de transformar a mesa quadrada em outra, com 8 lados iguais, não é um problema fácil. Os cortes precisam ser feitos em lugares certos. Se não, o marceneiro corre o risco de estragar a mesa. Como fazer, então, os cortes perfeitos?

Acompanhe o raciocínio do marceneiro e, mais uma vez, a utilidade da álgebra.

As partes que serão eliminadas da mesa quadrada são triângulos retângulos com dois lados iguais. Eles se chamam **catetos**. O lado maior, onde será feito o corte, chama-se **hipotenusa**.



Para observar direito esse triângulo, ele fez um desenho grande de um triângulo desse tipo, com catetos de 1 m de comprimento, e mediu a hipotenusa.

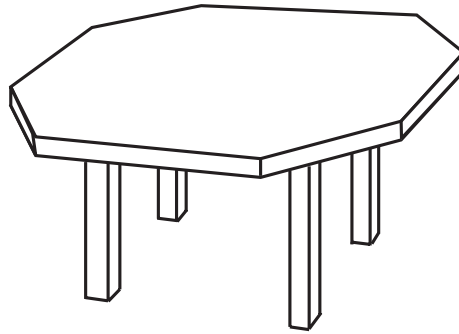


O valor que ele encontrou para a hipotenusa foi **1 metro e 41 centímetros** (este valor não é exato, porém é bem aproximado).

O marceneiro sabia que, para aumentar ou diminuir o tamanho de uma figura, mantendo sua forma, basta multiplicar **todos** os comprimentos dessa figura por um mesmo número. Por exemplo, um triângulo 10 vezes maior que o da figura que o marceneiro fez terá lados de 10 m, 10 m e 14,1 m.

Ele, então, raciocinou corretamente colocando a letra **x** como a medida dos catetos dos triângulos que serão retirados. Assim, a medida da hipotenusa desses triângulos será **1,41x**.

Veja como ficou o projeto da nova mesa.



Na mesa de 8 lados, todos eles devem ser iguais. Portanto, a medida de cada um deles será **1,41x**.

Agora, basta somar os comprimentos sobre um lado do quadrado antigo.

$$x + 1,41x + x = 120$$

Agora, vamos envolver essa equação.

$$2x + 1,41x = 120$$

$$3,41x = 120$$

$$\frac{3,41x}{3,41} = \frac{120}{3,41}$$

$$x = 35,19$$

Concluimos, então, que cada cateto dos triângulos que serão retirados mede, aproximadamente, 35,2 cm. O problema está resolvido. A partir de cada canto da mesa, o marceneiro vai medir comprimentos de 35,2 cm, e passar a serra nas hipotenusas dos triângulos formados.

A mesa ficará com 8 lados iguais. E qual será a medida de cada lado da nova mesa?

Cada lado da nova mesa mede $1,41x$, ou seja, $1,41 \cdot 35,2$, o que dá 49,6 cm. Quase 50 cm de lado.

Como você percebeu, a álgebra foi utilizada para resolver problemas muito diferentes. Mas não se esqueça: ela é apenas uma ferramenta. O mais importante é sempre o raciocínio. A habilidade de resolver problemas se desenvolve aos poucos. Com a prática. Com persistência.

Exercícios

Tente resolver os exercícios desta aula. Se você não conseguir, deixe passar alguns dias e tente de novo. Exercitar o pensamento desenvolve a nossa mente e faz com que os problemas, com o passar do tempo, pareçam mais fáceis.

Exercício 1

Um pediatra anotou as alturas das meninas de 8 anos que foram ao seu consultório em determinada semana:

125 cm, 128 cm, 130 cm, 123 cm, 132 cm e 126 cm

- a) Qual a altura média dessas crianças?
- b) Qual o valor fornecido pela fórmula das alturas das crianças?

Observação: A média de vários números é igual à soma desses números dividida pela quantidade de números dados.

Exercício 2

Uma construtora encomendou tábuas de pinho a 4 fornecedores diferentes. O primeiro entregou tábuas com 225 cm de comprimento; o segundo com 236 cm, o terceiro com 230 cm e o quarto com cm. O mestre de obras calculou que a média dos comprimentos das tábuas era de 231 cm. Qual foi o comprimento das tábuas entregues pelo quarto fornecedor?

Sugestão: Represente por x o comprimento das tábuas do quarto fornecedor e calcule a média dos quatro comprimentos.

Exercício 3

Você certamente já reparou que os calçados são medidos por números: 35, 36 e 37 para as mulheres e 39, 40 e 41 para a maioria dos homens. Mas, existem, é claro, pés maiores.

O número do sapato depende do comprimento do pé, e a fórmula para calcular o número do calçado é a seguinte:

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

onde:

N é o número do sapato

c é o comprimento do pé, em centímetros

- a) Que número calça uma pessoa cujo pé mede 24 cm?
- b) Qual é o comprimento do pé de um jogador de basquete que calça 45?

Exercício 4

Na Europa, existem empresas em que o salário mais alto é, no máximo, 4 vezes o salário mais baixo. Vamos imaginar uma empresa dessas e considerar que ela seja formada por operários, técnicos, engenheiros e diretores. Cada técnico ganha o dobro de um operário. Cada engenheiro ganha o triplo de um operário e cada diretor ganha o quádruplo de um operário. Sabe-se que nessa empresa trabalham 80 operários, 20 técnicos, 4 engenheiros e 2 diretores. Se a folha de pagamento dos salários é de R\$ 74.200,00, pergunta-se:

a) Quanto ganha cada operário?

b) Quanto ganha cada diretor?

Sugestão: Represente o salário de cada operário por x e complete o quadro abaixo:

1 operário ganha x	80 operários ganham
1 técnico ganha	20 técnicos ganham
1 engenheiro ganha	4 engenheiros ganham
1 diretor ganha	2 diretores ganham

Tente descobrir a equação que resolve o problema.

Exercício 5

A cantina de uma escola fez um refresco para as crianças, diluindo 1 litro de suco concentrado de laranja em 9 litros de água. Foram produzidos 10 litros de refresco, no qual 10 % do total é de suco concentrado e 90 % é de água. Como o refresco não ficou bom, resolveu-se acrescentar mais suco concentrado até que o total ficasse com 20 % de suco concentrado.

Pergunta-se: Que quantidade de suco concentrado deve ser adicionada ao refresco?

Sugestão: Observe o quadro abaixo.

	LITROS DE SUCO CONCENTRADO	LITROS DE ÁGUA	TOTAL DE REFRESCO
1º REFRESCO	1	9	10
2º REFRESCO	$1 + x$	9	$10 + x$

Agora escreva uma equação que represente o seguinte:

Suco concentrado = 20% do total do refresco

Coordenadas

Introdução

O subtítulo da aula de hoje poderia ser este: “Visualizando relações entre números”. E esse assunto nos faz lembrar o matemático francês René Descartes (1596-1650). Foi Descartes quem inventou um jeito de visualizar números e relações entre números, que ficou conhecido como **plano cartesiano** - um sistema de eixos coordenados.

Os exemplos que aparecem nesta aula mostrarão como os gráficos no plano cartesiano são simples e naturais e, no entanto, profundos e esclarecedores.

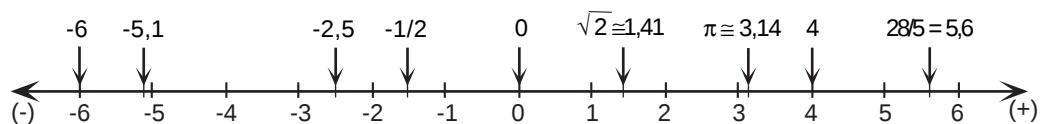
Por enquanto, basta que você se lembre dos gráficos de barras - como aquele que mostra a população do país a cada ano, o seu salário a cada mês, a temperatura de um local a cada hora etc. O plano cartesiano é igualmente fácil, e ainda mais claro visualmente. Vamos a ele!

Nossa aula

Para começar, vamos rever uma conhecida nossa do 1º grau - **a reta numérica**.

Eis aqui a reta numérica, com alguns números representados nela. Observe as distâncias iguais entre números inteiros consecutivos, como:

- 2, - 1, 0, 1, 2, 3 etc.



A reta numérica é **completa**: cada um dos seus infinitos pontos representa exatamente um número real, e todos os infinitos números reais têm lugar nela. Ela se estende indefinidamente (ou ilimitadamente) nos dois sentidos da horizontal. É um eixo orientado: quanto mais à direita, maior o número (ex: 10, 100, 1.000, 10.000 etc.); quanto mais à esquerda, menor (ex: - 10, - 100, - 1000, - 10.000 etc.). Assim, por exemplo: -100 é menor do que -10. Escrevemos:

$$- 100 < - 10$$

Então, - 100 fica à esquerda de - 10. Pode-se dizer também que - 10 é maior do que - 100 e escrever:

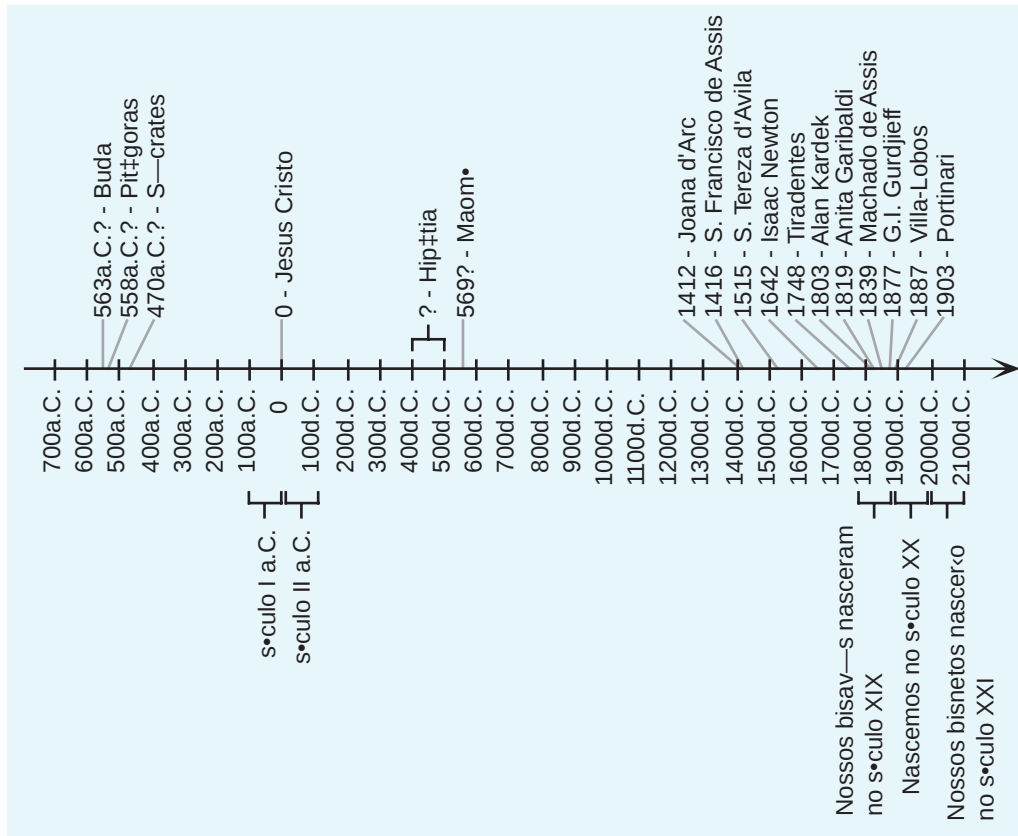
$$- 10 > - 100$$

Um exemplo de reta numérica: a linha do tempo

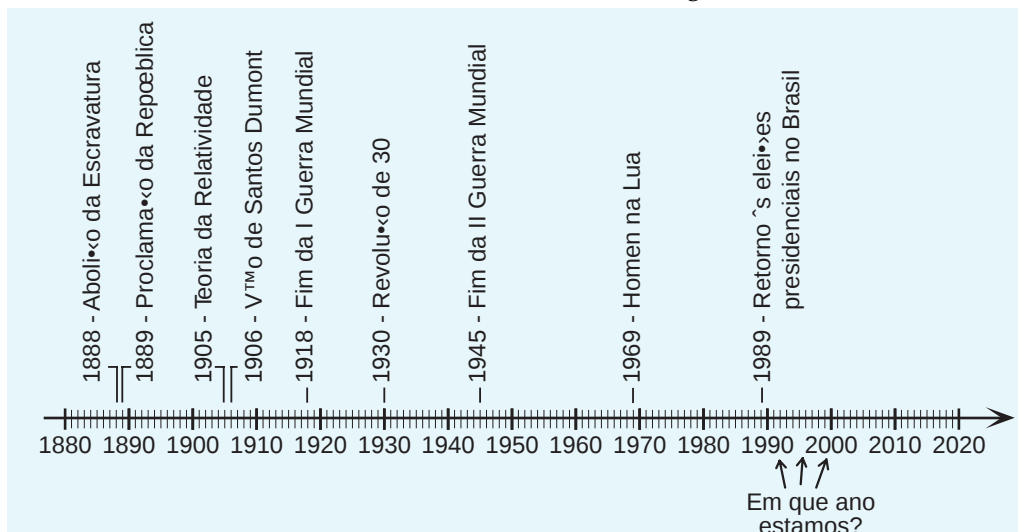
AULA

8

A reta numérica tem aplicações práticas muito importantes. Exemplo disso são as linhas do tempo utilizadas em História. Essa reta também pode ser interessante do ponto de vista de nossa própria vida, de nossa história pessoal. Aqui está um trecho dela, dividido em milênios e subdividido em séculos, com exemplos do ano em que nasceram alguns homens e mulheres que ficaram conhecidos, como líderes, cientistas e artistas, entre outros. A linha do tempo nos ajuda a compreender melhor há quanto tempo cada um deles nasceu. Veja:



Vamos agora fazer um “zoom”, como se diz em linguagem de computador (ou um “close”, em linguagem de fotografia), na reta numérica. Assim podemos visualizar mais de perto (*close*, em inglês) o nosso próprio século XX subdividido em décadas e anos (e seus séculos vizinhos) com alguns acontecimentos:



AULA
8

Você também pode marcar nesta linha do tempo o ano do seu próprio nascimento, e riscar ao longo dela o segmento que corresponde à sua vida até hoje. Por falar nisso: quantos anos você tem? Visualize sua idade nesse segmento. Use outras cores para traçar os “segmentos de vida” de seus familiares. Não fica tudo mais claro com a reta numérica?

Relembrando os gráficos de barras

Vamos relembrar, com o problema que será proposto, o que é um gráfico de barras.

Júlio é um profissional autônomo. Para controlar de perto as finanças familiares, Júlio anota todo mês quanto ganhou e quanto gastou (em reais). Agora ele está analisando a tabela que montou com as anotações de ganhos.

Responda:

- Em que mês Júlio ganhou mais?
- Em que mês seu ganho deu maior salto para cima?
- E para baixo?

MÊS/1994	GANHO (R\$)
jan	300
fev	410
mar	540
abr	380
mai	320
jun	500
jul	490
ago	570
set	380
out	430
nov	420
dez	400

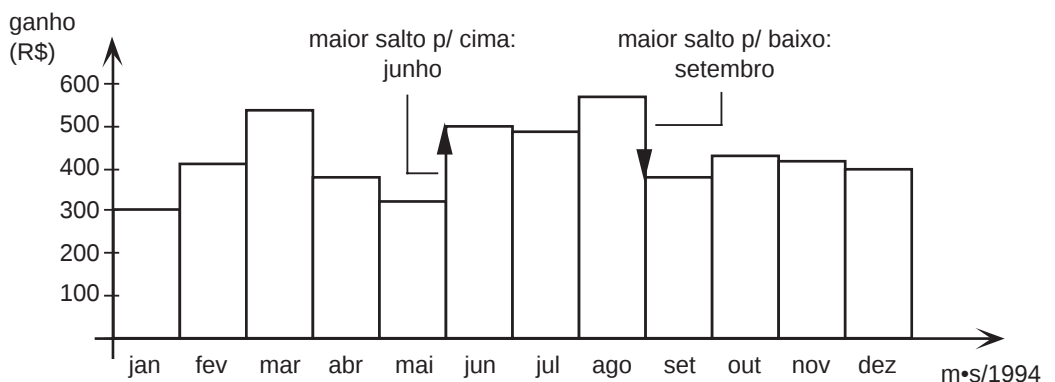
A pergunta do item **a)** é fácil de responder: basta procurar pelo número maior da tabela. (O mês foi agosto: R\$ 570,00).

Já os itens **b)** e **c)** não estão com as respostas tão claras. Uma boa sugestão seria ampliar a tabela para incluir também uma coluna com “Diferença em relação ao mês anterior”.

Ela começaria com os seguintes dados: fev, 10; mar, 130; abr, - 160 etc.

Continue, e responda **b)** e **c)**.

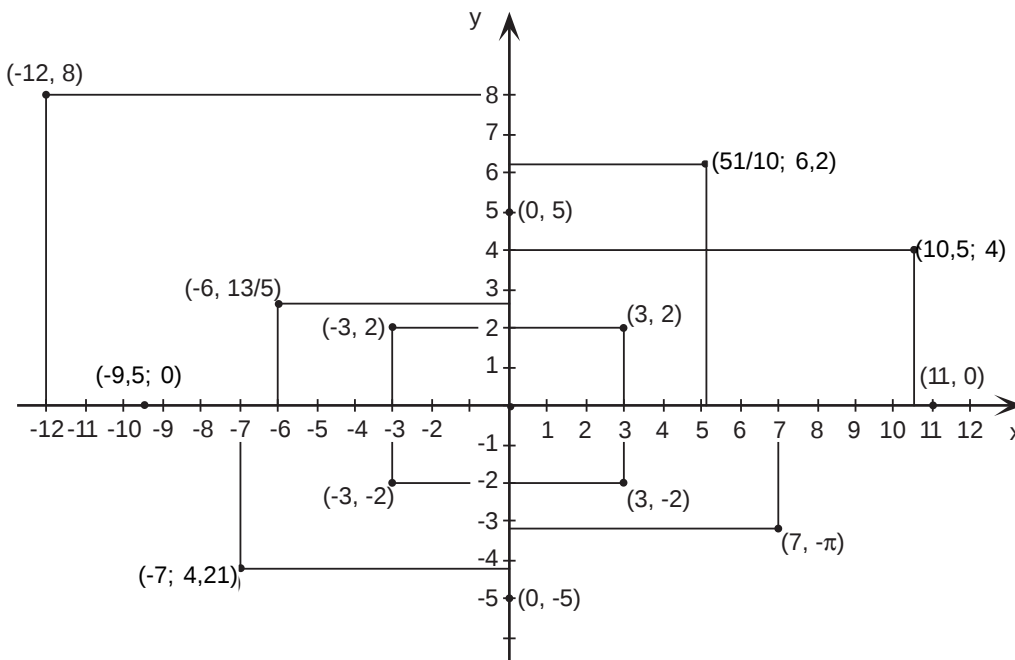
A idéia é fazer um gráfico de barras para que, nele, você visualize as respostas:



Fácil; não é? É por isso que um gráfico tem tanto valor, pois, sem ele, as relações entre os números ficariam bem mais abstratas. Daí a importância da invenção de Descartes, o plano cartesiano. A idéia é igual à de um gráfico de barras, com pequenas mas importantes diferenças: no plano cartesiano, os dois eixos orientados perpendiculares são duas retas numéricas com os dois pontos "0" (zero) superpostos, formando a origem do plano.

O plano cartesiano

Aqui está um exemplo de plano cartesiano, com alguns pontos assinalados. Cada ponto tem duas coordenadas - **x** e **y** - e é simbolizado por **(x, y)**; dizemos que **x** é a **abscissa** do ponto, e **y** é a **ordenada**. Se um dos números representados por **x** ou **y** tiver vírgula, podemos separar as duas letras com ponto e vírgula. Exemplo: (2; 1,5).



Para você se certificar de que compreendeu bem como funciona o plano cartesiano, marque nele estes outros pontos :

(7, 3)
(7, 0)
(7, -3)
(-7, 3)
(-11, -3)

Escreva suas coordenadas junto do ponto (como está na ilustração).

O plano cartesiano é fácil e lógico, não acha? E o melhor está por vir. Quando **x** e **y** não são dois números quaisquer, mas estão **relacionados** por alguma fórmula, ou alguma regra, então acontece uma coisa espantosa! Vejamos logo alguns exemplos. E você também concordará conosco que esse invento é mesmo um auxílio e tanto para entender relações entre números.

AULA

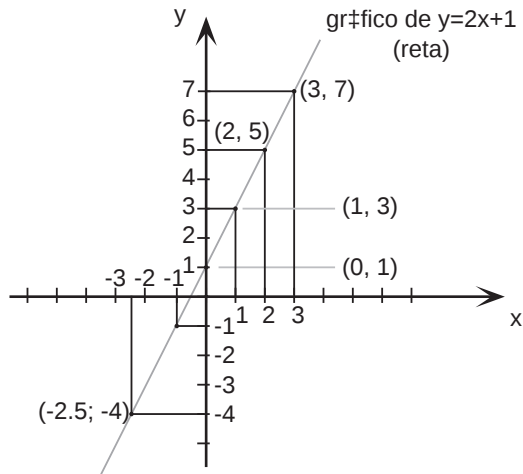
8

Dois exemplos de gráficos de relações entre números

Vamos marcar alguns pontos (x, y) no plano cartesiano, de maneira que x e y satisfaçam uma relação dada. Para isso, primeiro faremos uma **tabela** de valores de x e y , a partir de alguns exemplos. A primeira relação é esta:

a) $y = 2x + 1$

x	$y = 2x + 1$
1	3
2	5
3	7
0	1
-1	-1
-2,5	-4



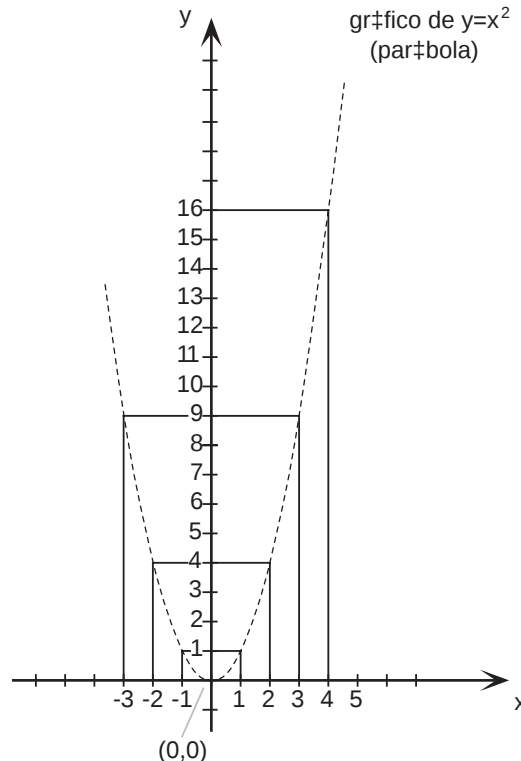
Quanto mais pontos assinalarmos, maior será nossa certeza: se marcássemos todos os pontos $(x, y) = (x, 2x + 1)$ para todos os valores de x , então teríamos desenhado uma reta. Ela é o **gráfico** da relação $y = 2x + 1$, e é formada por todos os pontos (x, y) do plano, tais que $y = 2x + 1$.

Por exemplo: o ponto $(2, 5)$ está nesta reta, pois $5 = 2 \cdot (2) + 1$; já $(2, 6)$ não está, pois $6 \neq 1 \cdot (2) + 1$. Verifique.

Outro exemplo: como será o gráfico dos pontos (x, y) , tais que y seja o número que mede a área de um terreno quadrado de lado x , ou seja, tais que $y = x^2$?

b) $y = x^2$

x	$y = x^2$
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
3	9
-3	9
4	16
2,5	6,25



Lembrete: em matemática, quando queremos escrever uma igualdade usamos o sinal de igual (=); quando queremos mostrar uma diferença, usamos o sinal de diferente ($\neq$).

O gráfico da relação $y = x^2$ é uma curva importante na geometria e na física: uma **parábola**. A parábola é, por exemplo, a curva descrita no ar por uma bola chutada, ou qualquer objeto arremessado. Você também já deve ter ouvido falar em antena parabólica: sua forma é derivada da parábola.

Calcule e marque outros pontos da parábola $y = x^2$. Que tal usar números fracionários?

Conclusão

Esses exemplos são suficientes para nos convencer da importância do plano cartesiano: tanto na solução de problemas da vida prática (área de terrenos, salários, gastos etc), quanto no próprio desenvolvimento da matemática. Com o plano cartesiano, Descartes criou a ferramenta visual para o que veio logo depois: o **cálculo diferencial e integral**. Esse cálculo foi uma verdadeira revolução na matemática, do mesmo modo que foram revolucionárias as suas aplicações em outras ciências, a exemplo da física, da biologia e da astronomia, e também em várias áreas, como em economia e até em psicologia.

Para nós, o plano cartesiano também será de grande auxílio. Vamos nos exercitar nele?

Exercício 1

A figura mostra um joguinho muito popular: a Batalha Naval. Consiste em um tabuleiro quadriculado, no qual a posição de cada quadradinho é dada pelo eixo horizontal, com letras (A, B, C, ...) e, pelo eixo vertical, com números (1, 2, 3, ...).

Aqui estão algumas das peças da Batalha Naval, dadas por seus quadradinhos. Preencha os quadradinhos no quadro à esquerda e veja como são essas peças:

- submarino: E7
- destróyer: G4, G5
- hidroavião: L4, M3, N4
- cruzador: B11, C11, D11, E11
- couraçado: L9, L10, L11, L12, L13

Diga que quadradinhos do quadro à direita estão formando estas peças:

- submarino:
- destróyer:
- hidroavião:
- cruzador:
- couraçado:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1																	1															1
2																	2															2
3																	3															3
4																	4															4
5																	5															5
6																	6															6
7																	7															7
8																	8															8
9																	9															9
10																	10															10
11																	11															11
12																	12															12
13																	13															13
14																	14															14
15																	15															15
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	

Exercícios

☐ No Exercício 2, o gráfico é outra curva importante de geometria: uma **hipérbole**. Por exemplo, a trajetória que um corpo momentaneamente atraído pela Terra descreve no espaço pode ser uma hipérbole, ou mesmo uma parábola. Já a trajetória da Terra em volta do Sol é uma elipse, como descobriu Johannes Kepler (1571-1630).

Exercício 2

Use o plano cartesiano para comparar o tamanho e a forma de todos os terrenos retangulares que têm a mesma área - digamos, de 12 km^2 . Ou seja, use o gráfico de todos os pontos (x, y) tais que, se x e y forem lados de um desses retângulo, então $x \cdot y = 12$. Ou, dividindo tudo por x (que não pode ser zero), então $y = \frac{12}{x}$.

Faça como nos exemplos vistos: tabela e gráfico em papel quadriculado.

Exercício 3

Quais destes pontos devem pertencer ao gráfico de $y = 2x + 1$? Por quê?

- a) (5, 11)
- b) (4, 11)
- c) (- 11, - 20)
- d) $(\pi, 2\pi + 1)$
- e) $(-\frac{1}{2}; 0,1)$
- f) (200, 401)

Exercício 4

Quais destes pontos se encontram sobre a parábola $y = x^2$? Por quê?

- a) (- 4, 16)
- b) (10, 102)
- c) (10, 100)
- d) $(\sqrt{2}, 2)$
- e) (7, - 49)
- f) (- 7, - 49)

O gráfico que é uma reta

Introdução

Agora que já conhecemos melhor o plano cartesiano e o gráfico de algumas relações entre x e y , voltemos ao exemplo da aula 8, onde $y = 2x + 1$ e cujo gráfico é uma reta.

Queremos saber mais sobre como é essa ligação que existe entre a fórmula $y = 2x + 1$ e a figura geométrica da reta. Queremos saber, por exemplo, se outras fórmulas também têm como gráfico uma reta. Caso haja, o que essas fórmulas de retas têm em comum; de que modo se parecem?

É isso que estudaremos hoje. Como você verá, são muitas as situações na vida cotidiana - especialmente nas nossas diversas profissões - em que a relação entre duas grandezas é expressa graficamente por um reta. Veremos isso num exemplo com um automóvel em movimento, na relação entre a distância percorrida e o tempo de percurso. E deixaremos para você aplicar as mesmas idéias na sua própria área de trabalho: na construção civil, na indústria, no comércio, no trabalho em casa etc.

A conclusão da aula é que a Matemática tem uma maneira de visualizar toda uma série de problemas, facilitando imensamente sua resolução.

Um exemplo tirado do futebol

Talvez você já tenha visto um comentarista de futebol dizer o seguinte, analisando um determinado chute a gol: “A velocidade da bola era de aproximadamente 90 km/h, quando foi espalmada pelo goleiro.” O que significa isso? Como se faz essa estimativa de velocidade?

Se um automóvel estivesse a 90 km/h, isso quer dizer que ele percorreria 90 quilômetros de distância no tempo de 1 hora. Possivelmente, a estimativa do comentarista deve ter sido calculada por computador da seguinte maneira: pelo vídeo do chute, é anotado o instante em que o pé do jogador toca a bola e a posição em que ele está no campo; é anotado também o instante em que o goleiro espalma a bola e a posição do goleiro. Assim, obtém-se a **distância** que a bola percorreu e o **tempo** que levou para isso. O que é a velocidade da bola, então?

Se, para simplificar, considerarmos que a velocidade da bola **é constante ao longo de toda sua trajetória**, então, por definição:

Velocidade é a distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

Nossa aula

AULA

9

Rigorosamente falando, isso não é verdade, pois o atrito do ar diminui a velocidade da bola o tempo todo. Estamos simplificando as coisas.) Em linguagem matemática:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}} \text{ ou } v = \frac{e}{t}$$

No caso desse chute, a velocidade equivale a 90 km/h. Em metros por segundo (pois as medidas do campo de futebol são em metros e cada chute se dá em frações de segundo), ela é de:

$$v = 90 \text{ km/h} = \frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

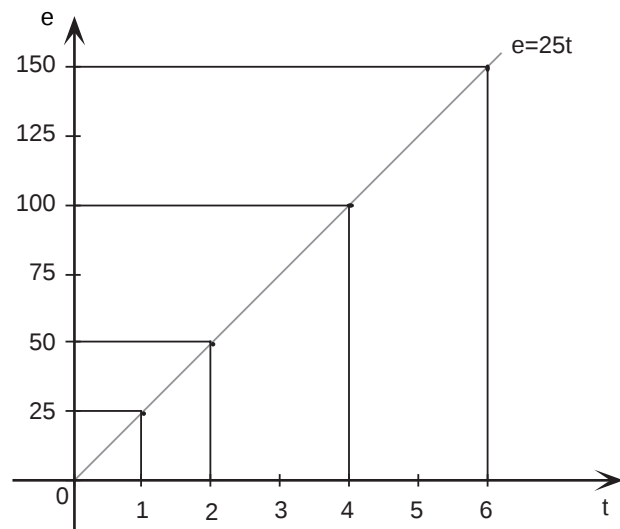
Ou seja, a bola percorre um espaço de **25 metros a cada segundo**. Ou 50 metros a cada 2 segundos, ou 100 metros a cada 4 segundos, ou 150 metros a cada 6 segundos, e assim por diante.

É fácil visualizar de uma só vez a relação do espaço (**e**) percorrido com o tempo (**t**) de percurso - que neste exemplo é:

$$\frac{e}{t} = 25, \text{ ou } e = 25t$$

Para isso, basta construir uma tabela e um gráfico que mostre a maneira como o espaço se relaciona com o tempo:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150



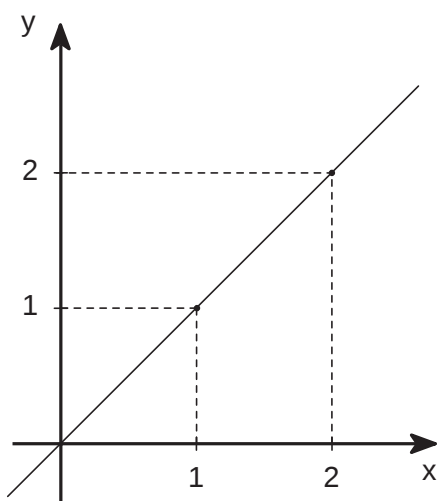
Como vemos, neste caso, temos uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Observe que, nesse exemplo, os eixos do plano cartesiano representam **e** (espaço) e **t** (tempo), que são grandezas diferentes: uma é medida em metros e outra, em segundos, respectivamente. Dessa forma, a marcação dos pontos sobre os eixos pode ser feita também com unidades diferentes. No eixo vertical, cada unidade equivale a 25 metros; enquanto no eixo horizontal cada unidade corresponde a 1 segundo.

O gráfico de $y = ax$: retas pela origem

Observe os exemplos a seguir:

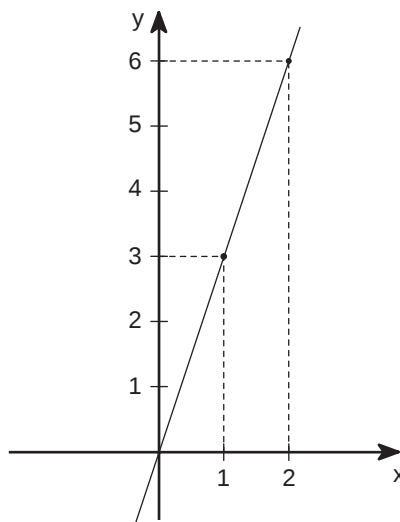
a) $y = x$

x	y
0	0
1	1
2	2



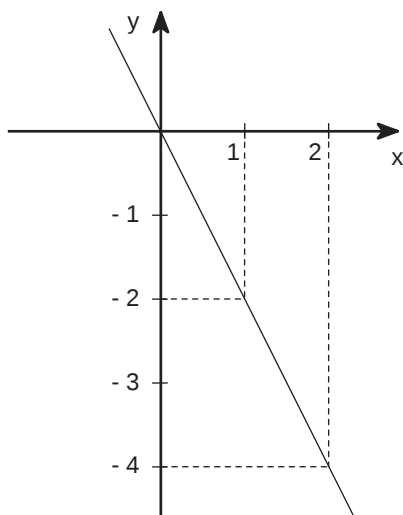
b) $y = 3x$

x	y
0	0
1	3
2	6



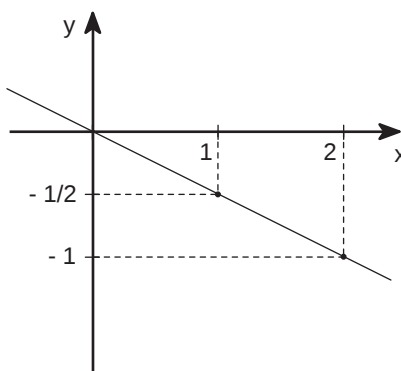
c) $y = -2x$

x	y
0	-0
1	-2
2	-4



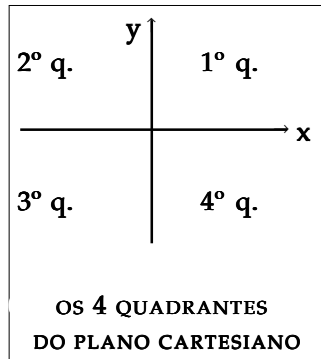
d) $y = -\frac{1}{2}x$

x	y
0	0
1	$-\frac{1}{2}$
2	-1

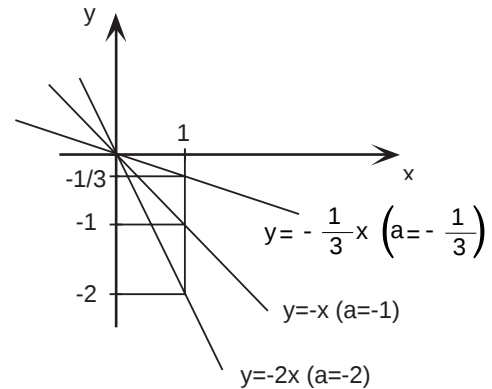
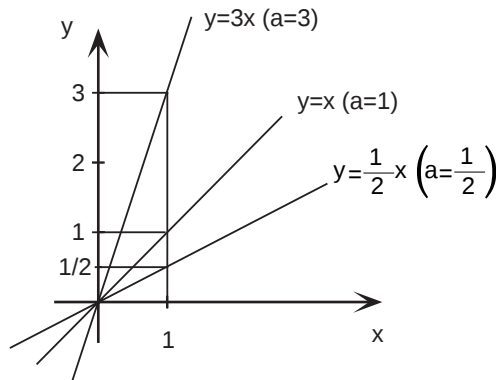


AULA

9



Como você mesmo deve ter notado, o gráfico de $y = ax$ (no qual a é uma constante) é sempre uma reta. Quando a é positivo, a reta está no 1º e no 3º quadrantes do plano cartesiano; quando a é negativo, a reta está no 2º e no 4º quadrantes. Veja nos exemplos abaixo:



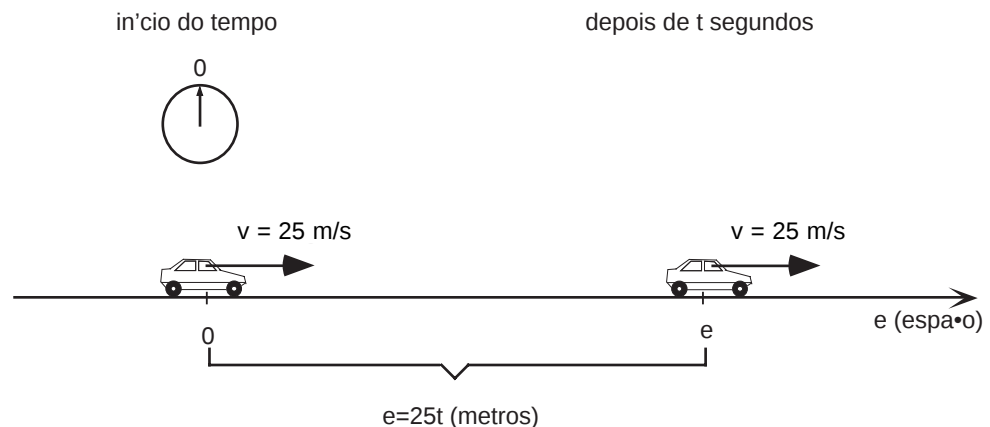
Voltando ao exemplo da velocidade

O gráfico da relação $e = 25t$, que vimos no início da aula, mostra, para cada instante de tempo t , o espaço e percorrido pela bola de futebol, desde o início do movimento até o instante t .

Você se lembra de que verificamos que:

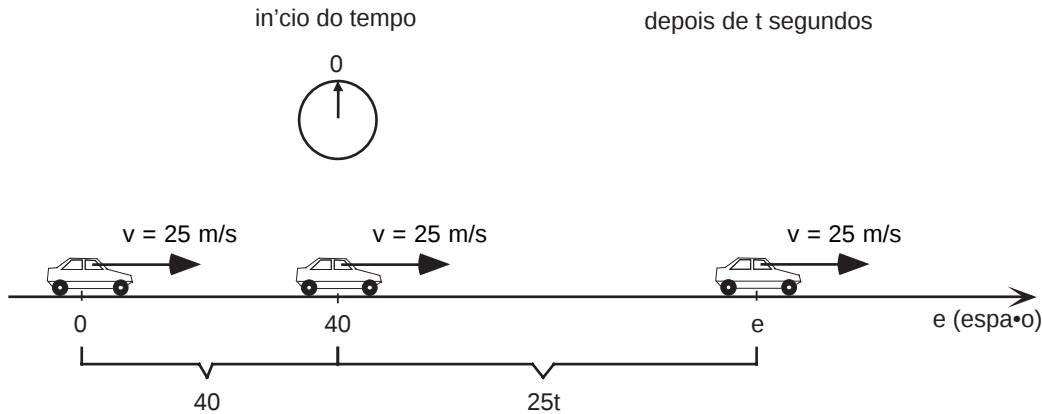
$$v = 25 \text{ m/s é equivalente a } v = 90 \text{ km/h}$$

Imagine agora um carro que se desloca a uma velocidade de **90 km/h**, ou seja, sua velocidade é de **25 m/s**. Na figura abaixo, ilustramos isso, imaginando o eixo e como o próprio caminho do carro para ajudar na visualização. Desenhemos no carro uma seta v , sempre do mesmo tamanho, para representar sua velocidade constante:



O gráfico da página 64 já falou tudo sobre este exemplo, não é mesmo? Vê-se logo que o carro tinha percorrido 25 metros após 1 segundo do início da contagem do tempo; 50 metros após 2 segundos, 75 metros após 3 segundos etc.

Agora vamos mexer um pouco no exemplo. No total, quantos metros teria percorrido o carro se o cronômetro só tivesse sido disparado para começar a contagem do tempo depois de o carro já haver percorrido 40 metros?

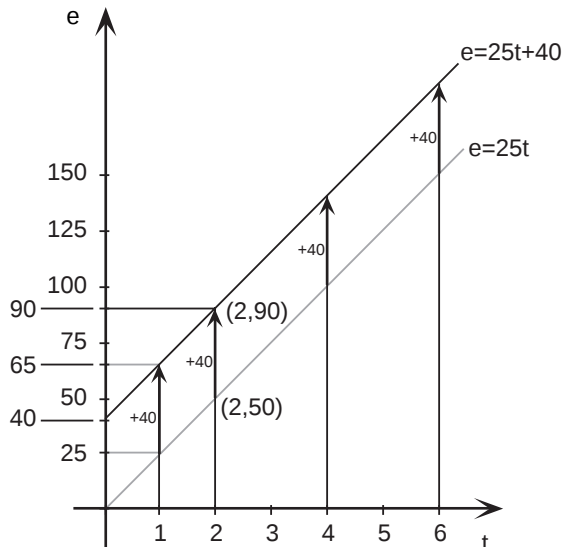


No total, o carro teria percorrido **25t** (como antes) mais **40 metros**. É fácil obter o novo gráfico do espaço percorrido em relação ao tempo, para **e = 25t + 40**. Acompanhe como o espaço inicial, que aqui é de **40 metros**, aparece nas linhas da nova tabela e no gráfico, deslocando a reta anterior para cima em **40 unidades** (40 metros).

TABELA
ANTERIOR:

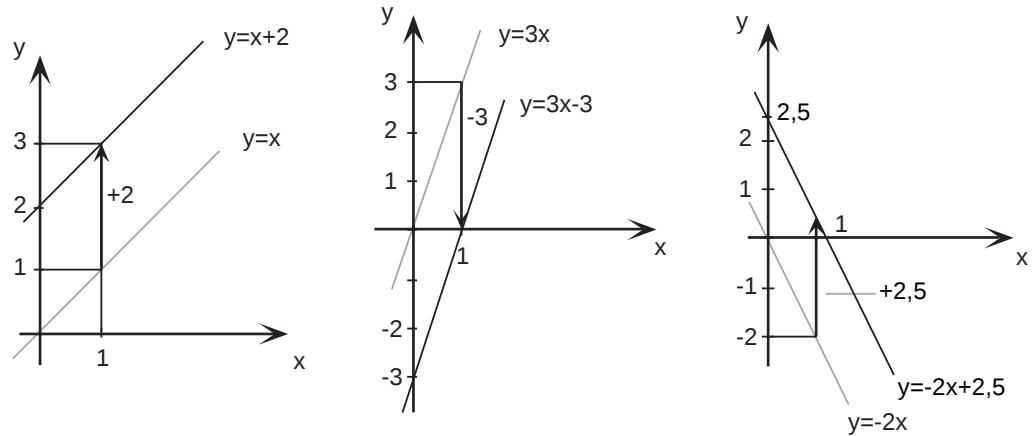
TABELA
NOVA:

t	e = 25t	t	e = 25t + 40
0	0	0	0 + 40 = 40
1	25	1	25 + 40 = 65
2	50	2	50 + 40 = 90
4	100	4	100 + 40 = 140
6	150	6	150 + 40 = 190



O gráfico de $y = ax + c$: retas quaisquer

Nos exemplos abaixo, construímos gráficos de equações do tipo $y = ax + c$. Esses gráficos foram obtidos somando-se c unidades aos gráficos dos exemplos anteriores, cujas equações eram do tipo $y = ax$.



Observe que, quando c é positivo, a reta de $y = ax + c$ corta o eixo y acima da origem; e quando c é negativo, corta o eixo y abaixo da origem.

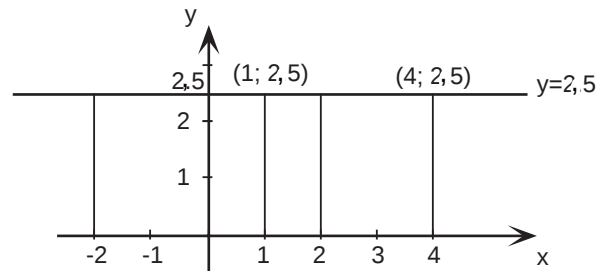
Um caso particular: retas horizontais

Os diversos gráficos de $y = ax$ já nos mostraram que a constante a está relacionada com a inclinação da reta. Quando a é positivo (reta no 1º e 3º quadrantes), dizemos que a reta tem **inclinação positiva**; quando a é negativo (reta no 2º e 4º quadrantes), dizemos que a reta tem **inclinação negativa**.

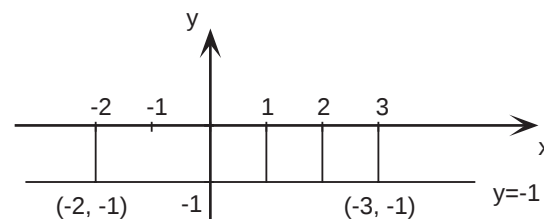
Como a reta de $y = ax + c$ é a reta de $y = ax$ deslocada de c para cima (se $c > 0$) ou para baixo (se $c < 0$), a inclinação permanece igual. Confira nas figuras: as retas são paralelas, tendo a mesma inclinação.

Para quem está atento, uma pergunta logo surge: que dizemos da inclinação, quando a não é positivo nem negativo, mas nulo ($a = 0$)? Dizemos que a inclinação é **nula**. E como será uma reta $y = ax + c$ com $a = 0$, ou seja, tal que $y = c$ (para todo x)? Aqui estão duas delas, com tabela e gráfico:

x	$y = 2,5$
0	2,5
1	2,5
2	2,5
4	2,5
-2	2,5



x	$y = -1$
0	-1
1	-1
2	-1
4	-1
-2	-1



Veja que efeito teve anular **a** na relação **y = ax + c**: ficamos com **y = c**, cujo gráfico é uma **reta horizontal**.

Já conhecemos retas inclinadas de vários modos e, agora, retas horizontais. Que tipo de reta nos falta encontrar? Pense.

Outro caso particular: retas verticais

Relembre que obtivemos retas horizontais anulando o coeficiente **a** de **x** na relação **y = ax + c**. Poderíamos encontrar as retas que nos faltam, as verticais, fazendo a mesma coisa com **y** - ou seja, anulando o seu coeficiente? Do jeito que está não - porque o coeficiente de **y** é 1. Mas se incluirmos também um coeficiente (b) para **y**, então, quando ele for nulo, teremos as retas verticais: é o caso dos dois últimos dos próximos exemplos.

O gráfico de $ax + by = c$: exemplos

Vamos desenhar estes gráficos de retas, usando uma tabela auxiliar:

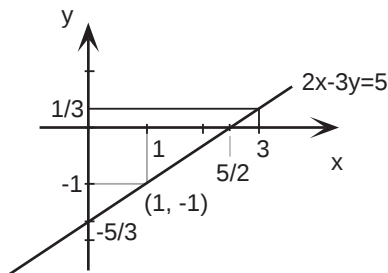
a)

$$2x - 3y = 5$$

$$-3y = -2x + 5$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

x	y = $\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
0	$-\frac{5}{3} = -1,6$
$\frac{5}{2}$	0
1	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$



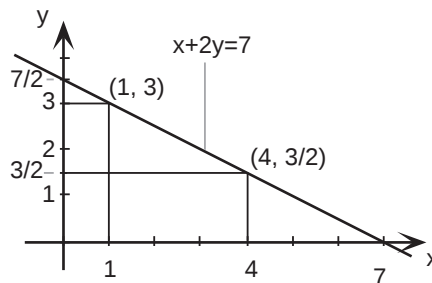
b)

$$x + 2y = 7$$

$$2y = -x + 7$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

x	y = $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
0	$\frac{7}{2} = 3,5$
7	0
1	3
4	$\frac{3}{2}$



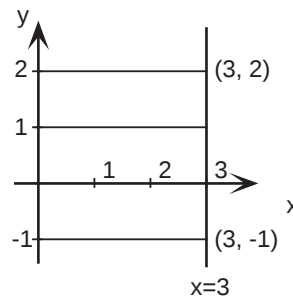
c)

$$x + 0y = 3$$

$$x = 3$$

(para todo y)

x	y
3	0
3	1
3	2
3	-1



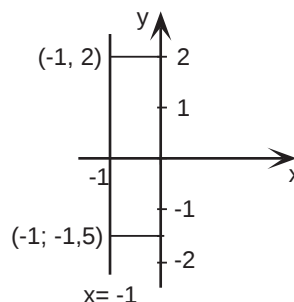
d)

$$x + 0y = -1$$

$$x = -1$$

(para todo y)

x	y
-1	0
-1	2
-1	-1,5



AULA
9

Conclusão: a relação $x = c$ (onde c é uma constante) é representada no plano cartesiano por uma reta vertical: à direita da origem se $c > 0$, e à esquerda se $c < 0$.

“E se $c = 0$?” A reta de $x = 0$ é o próprio eixo y .

Além desta conclusão, os dois primeiros exemplos nos mostram claramente como é o gráfico da relação geral $ax + by = c$, quando a e b não são nulos: é uma reta inclinada que corta o eixo x no ponto $(\frac{c}{a}, 0)$ e o eixo y em $(0, \frac{c}{b})$. Confirme isso nos exemplos.

Sendo assim, já sabemos traçar o gráfico de qualquer reta, isto é, de qualquer relação entre x e y do tipo $ax + by = c$. Vamos praticar?

Exercícios

Atenção: Para os exercícios desta aula, é interessante você trabalhar com papel quadriculado, pois ele ajuda no traçado de gráficos.

Exercício 1

a) Para cada reta abaixo, faça uma tabela auxiliar e use-a para traçar o gráfico da reta. (Desenhe todas as retas num mesmo plano cartesiano).

a1) $y = \frac{12}{5}x$

a2) $y = \frac{12}{5}x + 2$

a3) $y = \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$

a4) $12x - 5y = 7$

b) Qual destas retas tem maior inclinação?

c) Em termos geométricos, o que podemos dizer destas quatro retas?

Exercício 2

a) Observando o gráfico de $e = 25t + 40$, do espaço total (em metros) percorrido pelo automóvel até o instante t , responda: qual o espaço total percorrido até:

a1) 2 segundos?

a2) 4 segundos?

a3) 3 segundos?

a4) 1,5 segundo?

b) Confirme suas respostas pela tabela.

Exercício 3

- a) Com base no gráfico de $e = 25t + 40$, trace no mesmo plano cartesiano o gráfico de $e = 25t + 75$.
- b) O que significa esse 75 no lugar de 40, no exemplo do automóvel?

Exercício 4

- a) Observe, a seguir, cada uma das relações que envolvem x e y , e faça o que se pede. Escreva ao lado de cada uma: (H) se o gráfico da relação for uma reta horizontal; (V) se for uma reta vertical; (I +) se for uma reta de inclinação positiva; e (I -) se for de inclinação negativa.

a1) $y = 2x - 1$

a2) $x = 5$

a3) $y = -3x$

a4) $x = \pi$

a5) $x = 5 - y$

a6) $y = -2$

a7) $3y - 4x = 12$

- b) Usando uma tabela auxiliar, trace o gráfico de cada reta, e confirme sua resposta anterior.

Exercício 5

Aqui estão algumas retas na forma $ax + by = c$. Use o último comentário da aula para responder o que se pede em seguida (ou use as sugestões).

:

reta 1: $\rightarrow 7x + 2y = -14$

reta 2: $\rightarrow x - 3y = 0$

reta 3: $\rightarrow -12x - 31y = 1$

reta 4: $\rightarrow -7x - 2y = 14$

reta 5: $\rightarrow 3x + 5y = 8$

- a) Em que ponto a reta corta o eixo x ? (Sugestão: Faça $y = 0$ e calcule x)
- b) E o eixo y ? (Sugestão: Faça $x = 0$ e calcule y).
- c) Em que casos esses dois pontos bastam para traçar a reta?

A U L A
10

Resolvendo sistemas

Introdução

Nas aulas anteriores aprendemos a resolver equações de 1º grau. Cada equação tinha uma incógnita, em geral representada pela letra **x**.

Vimos também que qualquer equação com duas incógnitas (**x** e **y**) não pode ser resolvida porque, para cada valor de **x**, podemos calcular um valor diferente para **y**. Por exemplo, na equação $2x + y = 20$, se fizermos $x = 3$ e $x = 6$ então teremos, respectivamente:

$$2 \cdot 3 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 6 = 14$$

$$2 \cdot 6 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 12 = 8$$

e assim por diante. Vemos então que, para saber os valores corretos de **x** e **y** precisamos de uma outra informação a respeito das nossas incógnitas.

Se conseguimos obter duas equações a respeito das mesmas incógnitas, temos um **sistema**.

Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

é um sistema de duas equações nas incógnitas **x** e **y**. É possível resolver esse sistema, ou seja, é possível descobrir quais são os valores de **x** e **y** que satisfazem às duas equações simultaneamente.

Você pode verificar que $x = 6$ e $y = 8$ é a solução do nosso sistema, substituindo esses valores nas duas equações, temos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 + 8 = 20 \\ 3 \cdot 6 - 8 = 10 \end{cases}$$

Nesta aula vamos aprender a resolver sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Mas, antes, vamos perceber que, para serem resolvidos, muitos problemas dependem dos sistemas.

Sistemas aparecem em problemas

Nossa aula

Para que você perceba que os sistemas aparecem em problemas simples, imagine a situação a seguir.

Pedro e Paulo conversam despreocupadamente quando chega José, um amigo comum, que está para se aposentar. José fala sobre as idades das pessoas que se aposentam e percebe que os dois amigos ainda estão longe da aposentadoria. Então, ele pergunta:

- Que idade vocês têm?

Pedro, o mais velho, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:

José - *Como? Você está brincando comigo. Esse aí não passa de um garoto e você certamente não chegou aos 50.*

Pedro - *Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Paulo, temos juntos 72 anos.*

José - *Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que **idades** vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada um.*

Pedro - *É claro que não. Você tem duas coisas desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.*

José - *Diga.*

Pedro - *Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Paulo. Agora, José, você tem duas coisas desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.*

Vamos pensar um pouco na situação apresentada. José tem duas coisas a descobrir: a idade de Pedro e a idade de Paulo. Essas são suas incógnitas. Podemos então dar nomes a essas incógnitas:

idade de Pedro = x

idade de Paulo = y

A primeira informação que temos é que os dois juntos possuem 72 anos. Então, nossa primeira equação é:

$$x + y = 72$$

A outra informação que temos é que a idade de Pedro é o dobro da idade de Paulo. Com isso, podemos escrever a nossa segunda equação:

$$x = 2y$$

Essas duas equações formam o nosso sistema:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x = 2y \end{cases}$$

AULA

10

Esse sistema, por simplicidade, pode ser resolvido sem necessidade de nenhuma técnica especial. Se a segunda equação nos diz que x é igual a $2y$, então substituiremos a letra x da primeira equação por $2y$. Veja.

$$\begin{aligned}x + y &= 72 \\2y + y &= 72 \\3y &= 72 \\ \frac{3y}{3} &= \frac{72}{3} \\y &= 24\end{aligned}$$

Como $x = 2y$, então $x = 2 \cdot 24 = 48$. Assim, concluímos que Pedro tem 48 anos e que Paulo tem 24.

Nem sempre os sistemas são tão simples assim. Nesta aula, vamos aprender dois métodos que você pode usar na solução dos sistemas.

O método da substituição

O sistema do problema que vimos foi resolvido pelo método da substituição. Vamos nos deter um pouco mais no estudo desse método prestando atenção na técnica de resolução.

Agora, vamos apresentar um sistema já pronto, sem a preocupação de saber de onde ele veio. Vamos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Para começar, devemos isolar uma das letra em qualquer uma das equações. Observando o sistema, vemos que o mais fácil é isolar a incógnita y na segunda equação; assim:

$$\begin{aligned}4x - y &= 11 \\ -y &= 11 - 4x \\ y &= -11 + 4x\end{aligned}$$

Isso mostra que o valor de y é igual a $4x - 11$. Assim, podemos trocar um pelo outro, pois são iguais. Vamos então substituir y por $4x - 11$ na primeira equação.

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 22 \\ 3x + 2(4x - 11) &= 22\end{aligned}$$

Temos agora uma equação com uma só incógnita, e sabemos o que temos de fazer para resolvê-la:

$$\begin{aligned}3x + 2(4x - 11) &= 22 \\ 3x + 2 \cdot 4x - 2 \cdot 11 &= 22 \\ 3x + 8x &= 22 + 22 \\ 11x &= 44 \\ \frac{11x}{11} &= \frac{44}{11} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Já temos o valor de x . Repare que logo no início da solução tínhamos concluído que $y = -11 + 4x$. Então, para obter y , basta substituir x por 4.

$$\begin{aligned}y &= -11 + 4x \\y &= -11 + 4 \cdot 4 \\y &= -11 + 16 \\y &= 5\end{aligned}$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $x = 4$ e $y = 5$.

Observações - Ao resolver um sistema, é sempre aconselhável conferir a resposta encontrada para ver se não erramos na solução. Os valores de x e de y encontrados estarão certos se eles transformarem as duas equações em igualdades verdadeiras.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \quad x = 4, y = 5$$

$$\begin{aligned}3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 &= 22 \rightarrow \text{certo} \\ 4 \cdot 4 - 5 &= 11 \rightarrow \text{certo}\end{aligned}$$

Tudo confere. Os valores encontrados estão corretos.

Outra coisa que desejamos esclarecer é que isolamos a incógnita y na segunda equação porque isso nos pareceu mais simples.

No método da substituição, você pode isolar qualquer uma das duas incógnitas em qualquer das equações e, depois, substituir a expressão encontrada na outra equação.

O método da adição

Para compreender o método da adição, vamos recordar inicialmente o que significa somar duas igualdades membro a membro. Se temos:

$$\begin{aligned}A &= B \\ \text{e} \\ C &= D\end{aligned}$$

podemos somar os dois lados esquerdos e os dois lados direitos, para concluir:

$$A + C = B + D$$

Considere agora o seguinte problema.

“Encontrar 2 números, sabendo que sua soma é 27 e que sua diferença é 3.”

Para resolvê-lo, vamos chamar nossos números desconhecidos de x e y . De acordo com o enunciado, temos as equações:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

AULA
10

Veja o que acontece quando somamos membro a membro as duas equações:

$$\begin{array}{r} x + y = 27 \\ x - y = 3 \quad + \\ \hline x + x + y - y = 27 + 3 \\ 2x = 30 \\ \frac{2x}{2} = \frac{30}{2} \\ x = 15 \end{array}$$

Encontramos o valor de **x**. Para encontrar o valor de **y** vamos substituir **x** por **15** em qualquer uma das equações. Por exemplo, na segunda:

$$\begin{array}{r} 15 - y = 3 \\ - y = 3 - 15 \\ - y = - 12 \\ y = 12 \end{array}$$

A solução do nosso problema é, portanto, **x = 15** e **y = 12**.

O método da adição consiste em somar membro a membro as duas equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. No sistema que resolvemos, a incógnita **y** foi eliminada quando somamos membro a membro as duas equações. Mas isso freqüentemente não acontece dessa forma tão simples. Em geral, devemos ajustar o sistema antes de somar.

Vamos mostrar a técnica que usamos resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

Para começar, devemos escolher qual das duas incógnitas vamos eliminar. Por exemplo, o **y** será eliminado.

Observe que, multiplicando toda a primeira equação por **2** e toda a segunda equação por **3**, conseguimos tornar os coeficientes de **y** iguais.

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 & (\times 2) \\ 5x + 2y = 13 & (\times 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16x + 6y = 42 \\ 15x + 6y = 39 \end{cases}$$

Para que o **y** seja eliminado, devemos trocar os sinais de uma das equações e depois somá-las membro a membro.

Veja:

$$\begin{array}{r} 16x + 6y = 42 \\ - 15x - 6y = - 39 \quad + \\ \hline 16x - 15x + \cancel{6y} - \cancel{6y} = 42 - 39 \\ x = 3 \end{array}$$

Em seguida, substituímos esse valor em qualquer uma das equações do sistema. Por exemplo, na primeira.

$$8 \cdot 3 + 3y = 21$$

$$24 + 3y = 21$$

$$3y = 21 - 24$$

$$3y = -3$$

$$\frac{3y}{3} = -\frac{3}{3}$$

$$y = -1$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $x = 3$ e $y = -1$

Você agora deve praticar fazendo os exercícios propostos. Procure resolver cada sistema pelos dois métodos para que, depois, você possa decidir qual deles é o de sua preferência. Não se esqueça também de conferir as respostas.

Exercícios

Exercício 1

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$$

Exercício 2

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$$

Exercício 3

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

Exercício 4

$$\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x - y = -13 \end{cases}$$

Exercício 5

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$$

Exercício 6

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercício 7

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sistemas resolvem problemas

Introdução

Na aula anterior, mostramos como resolver sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas. Agora vamos usar essa importante ferramenta da matemática na solução de problemas.

Em geral, os problemas são apresentados em linguagem comum, ou seja, com palavras. A primeira parte da solução (que é a mais importante) consiste em traduzir o enunciado do problema da linguagem comum para a **linguagem matemática**. Nessa linguagem, usamos os números, as operações, as letras que representam números ou quantidades desconhecidas, e as nossas sentenças são chamadas de **equações**.

Para dar um exemplo, considere a seguinte situação: uma costureira de uma pequena confecção ganha R\$ 7,00 por dia mais uma determinada quantia por cada camisa que faz. Certo dia, ela fez 3 camisas e ganhou R\$ 19,00.

Se quisermos saber quanto essa costureira ganha por cada camisa que faz devemos traduzir em linguagem matemática a situação apresentada. Vamos então representar por x a quantia que ela recebe por cada camisa. Ela faz 3 camisas e ganha R\$ 7,00 por dia, independentemente do número de camisas que faz. Se nesse dia ela ganhou R\$ 19,00, a equação que traduz o problema é:

$$7 + 3x = 19$$

Como já sabemos resolver equações e sistemas, daremos mais importância, nesta aula, à tradução do enunciado dos problemas para linguagem matemática.

Nossa aula

Agora vamos apresentar alguns problemas e suas soluções. Entretanto, procure resolver cada um antes de ver a solução. Para ajudar, incluímos algumas orientações entre o enunciado e a solução.

EXEMPLO 1

Em uma festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A quantidade de homens e mulheres serão as nossas incógnitas. Então:

o número de homens = x

o número de mulheres = y

- Traduza em linguagem matemática a frase: “havia 40 pessoas na festa”.
- Se 7 homens saíram, quantos ficaram na festa?
- Traduza em linguagem matemática a frase: “o número de mulheres é o dobro do número de homens que ficaram na festa”.

Solução - Seguindo as nossas orientações, temos como primeira equação $x + y = 40$. Depois, se tínhamos x homens e 7 saíram, então ficaram na festa $x - 7$ homens. E, se o número de mulheres é o dobro do número de homens, podemos escrever $y = 2(x - 7)$.

O problema dado é traduzido em linguagem matemática pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases}$$

Agora, vamos resolvê-lo. Como a incógnita y está isolada na segunda equação, podemos usar o método da substituição. Temos, então:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ x + 2(x - 7) &= 40 \\ x + 2x - 14 &= 40 \\ 3x &= 40 + 14 \\ 3x &= 54 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{54}{3} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 18 + y &= 40 \\ y &= 40 - 18 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

Na festa havia então 22 mulheres.

EXEMPLO 2

Uma omelete feita com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias. Uma omelete feita com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

AULA
11

Orientações - A **caloria** é uma unidade de energia. Todos os alimentos nos fornecem energia em maior ou menor quantidade. Neste problema, vamos chamar de **x** a quantidade de calorias contida em um ovo. Para diversos alimentos, a quantidade de calorias é dada **por grama**. Isso ocorre porque um queijo pode ter diversos tamanhos, assim como uma abóbora pode também ter os mais variados pesos. Então, no nosso problema, vamos chamar de **y** a quantidade de calorias contidas em cada grama de queijo.

- Se cada grama de queijo possui **y** calorias, quantas calorias estão contidas em 30 gramas de queijo?
- Quantas calorias possuem dois ovos?
- Escreva em linguagem matemática a frase: “dois ovos mais 30 gramas de queijo possuem 280 calorias”.
- Escreva em linguagem matemática a outra informação contida no enunciado.

Solução - Vamos novamente seguir as orientações para resolver o problema. Se as nossas incógnitas estão bem definidas, não teremos dificuldade em traduzir o enunciado do problema em linguagem matemática. Temos que:

número de calorias contidas em um ovo = x
número de calorias contidas em um grama de queijo = y

Portanto, se dois ovos e 30 gramas de queijo possuem 280 calorias temos a equação:

$$2x + 30y = 280$$

Da mesma forma, se três ovos e 10 gramas de queijos possuem 280 calorias podemos escrever:

$$3x + 10y = 280$$

O sistema que dará a solução do nosso problema é

$$2x + 30y = 280$$

$$3x + 10y = 280$$

Repare que o problema pergunta qual é o número de calorias contidas em um ovo. Portanto, se a resposta do problema é o valor de **x**, podemos usar o método da adição e eliminar a incógnita **y**.

Observe que, multiplicando a segunda equação por 3, tornamos iguais os coeficientes de **y**.

Se, em seguida, mudamos todos os sinais da primeira equação, estamos prontos para eliminar a incógnita **y**.

$$\begin{array}{lcl} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \times (-1) \\ \rightarrow \\ \times (3) \end{array} & \begin{array}{l} - 2x - 30y = - 280 \\ \\ \underline{9x + 30y = 840} + \\ 9x - 2x = 840 - 280 \end{array} \end{array}$$

$$7x = 560$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{560}{7}$$

$$x = 80$$

Concluimos, então, que cada ovo contém 80 calorias.

Para saber mais

O corpo humano é uma máquina que necessita de combustível para funcionar bem. Quando comemos, a energia contida nos alimentos é transferida para nosso corpo. Muita energia é também gasta em todas as nossas atividades diárias, e o ideal é conseguir um equilíbrio entre o que comemos e o que gastamos. Há pessoas que comem demais. Comendo mais que o necessário, as pessoas acumulam energia em forma de gordura - o que não é bom para a saúde.

Para as atividades normais, o homem necessita de cerca de 2.200 calorias por dia, ou um pouco mais, dependendo de sua atividade. Para que você tenha uma idéia da quantidade de calorias contidas nas coisas que comemos, saiba que um pão francês de 100 gramas contém 270 calorias; um prato de arroz, feijão, bife e batatas fritas contém 900 calorias e uma feijoada completa, mais duas cervejas e sobremesa de goiabada e queijo, contém o incrível número de 2.180 calorias.

Procure, portanto, incluir sempre legumes e verduras nas refeições. Eles têm vitaminas, são bons para o processo digestivo e possuem poucas calorias.

EXEMPLO 3

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada, com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra, com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa até o sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações - A velocidade de um automóvel é o número de quilômetros que ele percorre em uma hora. De uma forma geral, a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo de percurso.

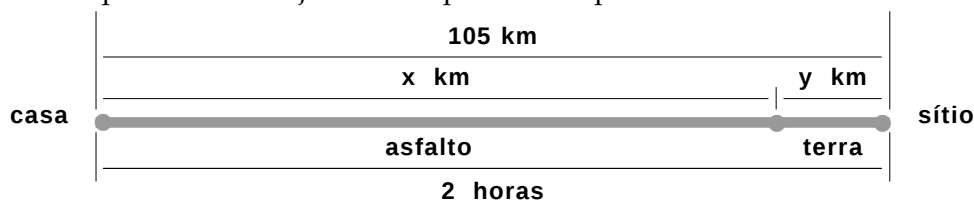
$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

- Estabeleça as incógnitas:

x = distância percorrida na estrada asfaltada

y = distância percorrida na estrada de terra

O esquema abaixo ajuda a compreender o problema.



AULA
11

- Escreva uma equação com as distâncias.
- Procure escrever uma equação com o seguinte significado: “o **tempo** em que João andou na estrada asfaltada mais o **tempo** em que ele andou na de terra é igual a duas horas”.

Solução - Mais uma vez, vamos resolver o problema seguindo as orientações. Se João andou x km na estrada asfaltada e y km na estrada de terra, então a nossa primeira equação é $x + y = 105$.

Observe novamente a relação:

$$(\text{distância}) = (\text{velocidade}) \times (\text{tempo})$$

Na primeira parte do percurso, a distância foi x , a velocidade foi **60** e o tempo gasto será chamado de t_1 . Temos, então:

$$x = 60 \cdot t_1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{x}{60} = t_1$$

Na segunda parte do percurso a distância foi y , a velocidade foi **30** e o tempo gasto será chamado de t_2 . Temos, então:

$$y = 30 \cdot t_2 \quad \text{ou}$$

$$\frac{y}{30} = t_2$$

Como a soma dos dois tempos é igual a **2** horas, conseguimos a segunda equação:

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{30} = 2$$

Vamos melhorar o aspecto dessa equação antes de formarmos o sistema. Multiplicando todos os termos por 60, temos:

$$\cancel{60} \cdot \frac{x}{\cancel{60}} + \cancel{60} \cdot \frac{y}{\cancel{30} \cdot 2} = \cancel{60} \cdot 2$$

$$x + 2y = 120$$

Temos, agora, o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

O valor de y nesse sistema é calculado imediatamente pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} -x - y = -105 \\ x + 2y = 120 \quad + \\ \hline 2y - y = 120 - 105 \\ y = 15 \end{array}$$

Concluimos, então, que a estrada de terra tem 15 km.

Nesta aula você viu a força da álgebra na solução de problemas. Entretanto, para adquirir segurança é preciso praticar. Para cada um dos exercícios, procure “matematizar” as situações descritas usando o método algébrico. Escolha suas incógnitas e arme as equações. Depois, resolva os sistemas e verifique se os valores encontrados estão corretos.

Exercício 1

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Exercício 2

Um marceneiro recebeu 74 tábuas de compensado. Algumas com 6 mm de espessura e outras com 8 mm de espessura. Quando foram empilhadas, atingiram a altura de 50 cm. Quantas tábuas de 8mm ele recebeu?

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Exercício 4

Uma empresa desejava contratar técnicos e, para isso, aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu um ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Exercício 5

Certo dia, uma doceira comprou 3 kg de açúcar e 4 kg de farinha e, no total, pagou R\$ 3,20. Outro dia, ela comprou 4 kg de açúcar e 6 kg de farinha, pagando R\$ 4,50 pelo total da compra. Se os preços foram os mesmos, quanto estava custando o quilo do açúcar e o quilo da farinha?

Exercício 6

Pedro e Paulo têm juntos R\$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Exercício 7

A distância entre duas cidades A e B é de 66 km. Certo dia, às 8 horas da manhã, um ciclista saiu da cidade A, viajando a 10 km por hora em direção à cidade B. No mesmo dia e no mesmo horário um ciclista saiu da cidade B, viajando a 12 km por hora em direção à cidade A. Pergunta-se:

- A que distância da cidade A deu-se o encontro dos dois ciclistas?
- A que horas deu-se o encontro?

A interseção de retas e a solução de sistemas

Introdução

Aqui está um problema que serve de exemplo para as questões que serão tratadas nesta aula. Pense, e veja se consegue resolvê-lo com as próximas sugestões.

A Mercadoria A, uma concorrente da Mercadoria B, estava cobrando por certa mercadoria o dobro do preço que a outra pedia. Percebendo que isso impressionava mal a clientela, o dono da Mercadoria A decidiu dar um desconto de R\$ 10,00 no seu preço. Seu concorrente rebateu, então, dando o mesmo desconto na mercadoria. Desse modo, o preço na Mercadoria A ficou agora o triplo do preço na Mercadoria B! Quanto cada Mercadoria estava pedindo pela mercadoria?

As sugestões que damos são as seguintes:

1. Experimente resolver o problema pelo método algébrico. (É um problema de procura do valor de incógnitas, daquele tipo que já aprendemos).
2. Primeiro, organize suas idéias: pense se vale a pena fazer uma tabela com as informações dadas.
3. Siga aqueles passos conhecidos, vistos nas aulas anteriores. Comece por equacionar o problema, escrevendo-o em linguagem matemática.
4. Depois, resolva as equações e responda o que se pede.

Vamos, então, resolver o problema acima.

Nossa aula

Resolvendo o problema pelo método algébrico

Vamos fazer uma tabela, ou um quadro, para organizar o raciocínio:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM		
PREÇO HOJE		

Aí colocaremos os dados do problema. Quais são eles ?

É simples. Queremos saber quanto cada mercearia estava cobrando (“ontem”) pela mercadoria. Logo, vamos chamar assim:

preço de ontem na Mercearia B = x (reais)

preço de ontem na Mercearia A = y (reais)

Com isso, a tabela fica deste jeito:

MERCADORIA	MERCEARIA B	MERCEARIA A
PREÇO ONTEM	x	y
PREÇO HOJE	$x - 10$	$y - 10$

pois cada mercearia passou a dar um desconto de 10 reais no preço que cobrava.

Agora, vamos escrever as equações que relacionam esses dados. Temos um sistema de duas equações a duas incógnitas, x e y , já que, relendo o enunciado do problema, concluímos que:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

Para resolver o sistema, observamos que a incógnita y está isolada na primeira equação. Isso nos sugere fazer a substituição de y por $2x$ na segunda equação. Daí, temos:

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= 3x - 30 \\ 2x - 3x &= -30 + 10 \\ -x &= -20 \\ x &= 20; \text{ logo, } y = 2 \cdot (20) = 40 \end{aligned}$$

Então, a Mercearia B estava cobrando R\$ 20,00 pela mercadoria, enquanto a Mercearia A cobrava R\$ 40,00 (o dobro). Os preços caíram, hoje, para R\$ 10,00 e R\$ 30,00 (o triplo).

Um fato curioso é que, a primeira vista, a diferença entre os preços parece agora maior. Mas não é. É a mesma de antes, pois as duas baixaram do preço o mesmo valor (R\$ 10,00). O que muda de fato para os dois concorrentes é que, agora, os preços estão mais atrativos, e as vendas devem aumentar.

E quanto ao que deve a Mercearia A fazer para conquistar uma fatia maior de consumidores? Fica para você refletir, se quiser aprofundar na questão.

Uma das conclusões que podem ser tiradas da resolução do problema é que, para evitar que a concorrente continue anulando sempre seu desconto, a Mercearia A pode, por exemplo, aproximar seu preço do de seu concorrente. Isso evita que seu preço seja um múltiplo - como o dobro ou o triplo - do preço da concorrente.

Será possível visualizarmos todas essas informações e confirmarmos nossas respostas? Claro que sim. As aulas anteriores mostraram como obter isso no plano cartesiano, quando se tratava de problemas de uma só incógnita. Como será isso com duas incógnitas ?

Visualizando o problema

O plano cartesiano é usado em problemas que envolvem no máximo duas grandezas. Por exemplo: tempo e espaço, no caso do automóvel; ou aqui, reais e reais.

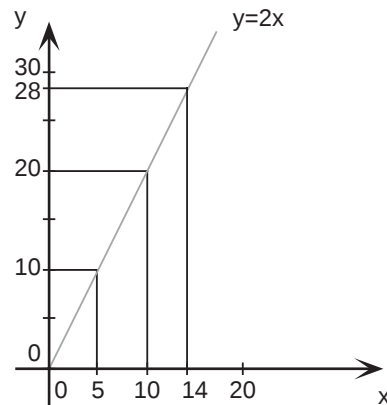
Nele, essas grandezas podem ser interpretadas como duas **variáveis**, **x** e **y**, cada qual sendo representada em um dos eixos. O que fazemos, em cada problema, então, é representar graficamente as relações existentes entre **x** e **y**, para daí procurar no gráfico a solução que o problema pede.

Vamos lá. No nosso problema, encontramos essas relações entre **x** e **y**, expressas num sistema de duas equações.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y - 10 = 3(x - 10) \end{cases}$$

O gráfico de **y = 2x** é uma reta. Nela estão contidos pontos (x, y) como os encontrados por esta tabela, e que estão assinalados no gráfico:

x	y = 2x
0	0
5	10
10	20
14	28



O gráfico, no nosso caso, é uma **semi-reta**, já que **x** e **y** representam preços de mercadoria e não podem ser negativos.

Nessa semi-reta estão contidos não apenas os pontos encontrados pela tabela, mas **todos** os infinitos pontos (x, y) tais que a relação **y = 2x** é verdadeira. Assim, por exemplo: (14, 28) está na reta, pois $28 = 2 \cdot (14)$; já (14, 25) não está, pois $25 \neq 2 \cdot (14)$. Confirme no gráfico.

Portanto, se o valor de **x** e o valor de **y** que procuramos devem satisfazer primeiramente a **y = 2x**, então o ponto (x, y) que os representa no plano cartesiano é algum ponto dessa reta, com certeza.

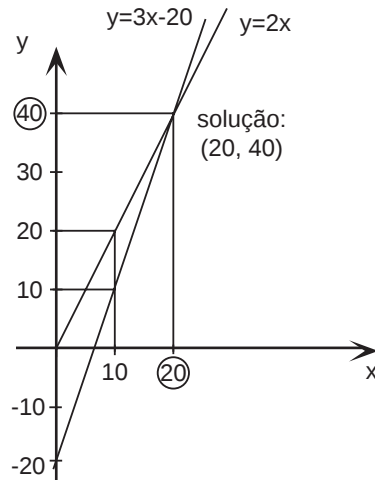
Mas esse mesmo **x** e esse mesmo **y** devem também satisfazer a outra condição do problema: **y - 10 = 3(x - 10)**. Simplificando, temos:

$$\begin{aligned} y - 10 &= 3(x - 10) \\ y - 10 &= 3x - 30 \\ y &= 3x - 30 + 10 \\ y &= 3x - 20 \rightarrow \text{que também representa uma reta} \end{aligned}$$

Retomando nosso raciocínio para visualizar o problema, concluímos que o ponto (x, y), que representa o valor de nossas incógnitas **x** e **y**, deve também estar

sobre a reta $y = 3x - 20$. Conclusão: o ponto (x, y) procurado deve estar sobre as **duas** retas. Logo, deve ser o ponto de interseção das retas!

Veja no gráfico:



O gráfico nos mostra claramente que só quando o valor de x é 20 o valor de y (40) satisfará tanto a $y = 2x$ quanto a $y = 3x - 20$. Pois $40 = 2 \cdot (20)$ e $40 = 3 \cdot (20) - 20$. Confira as contas.

Qualquer outro valor de x produz resultado diferente em $y = 2x$ e em $y = 3x - 20$.

Por exemplo: $x = 10$ nos dá $y = 2 \cdot (10) = 20$ e $y = 3 \cdot (10) - 20 = 10 \neq 20$. Confirme no gráfico. Tudo fica bem claro no gráfico, concorda?

Visualizando o Exemplo 1 da aula 11

Agora, vamos voltar ao Exemplo 1 da aula 11.

Numa festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Na aula passada, o problema foi equacionado e resolvido. Vamos tentar confirmar graficamente o que foi encontrado. Chegou-se a um sistema de duas equações em duas incógnitas, x (o número de homens) e y (o número de mulheres)

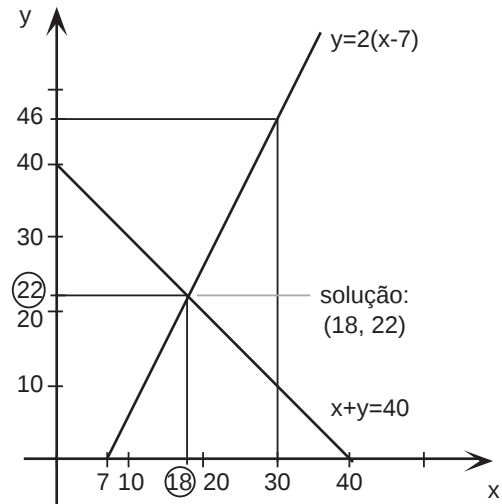
$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y = 40 - x \\ y = 2x - 14 \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta e nesta reta estão contidos todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação. O único ponto que satisfaz as duas equações é, deste modo, o ponto procurado. Esse ponto é o ponto comum às duas retas, o seu ponto de interseção.

AULA
12

Vejam no gráfico:

x	y = 40 - x	x	y = 2(x - 7)
0	40	7	0
40	0	30	46



Um gráfico cuidadoso nos mostra que, de fato, os únicos valores de **x** e **y** que satisfazem as duas equações são **x = 18** e **y = 22**.

Ou seja, a solução é esta: **x = 18** homens e **y = 22** mulheres estavam na festa, como se encontrou resolvendo-se as equações.

Visualizando o Exemplo 2 da aula 11

Vamos fazer a mesma coisa com o Exemplo 2 da aula 11.

Um omelete feito com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias.

Um omelete feito com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?

O problema já foi equacionado naquela aula. Chamando de **x** o número de calorias em um ovo e de **y** o número de calorias em um grama de queijo, chegou-se a este sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x + 15y = 140 \\ 3x + 10y = 280 \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} y = \frac{140-x}{15} \\ y = \frac{280-3x}{10} \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta no plano cartesiano.

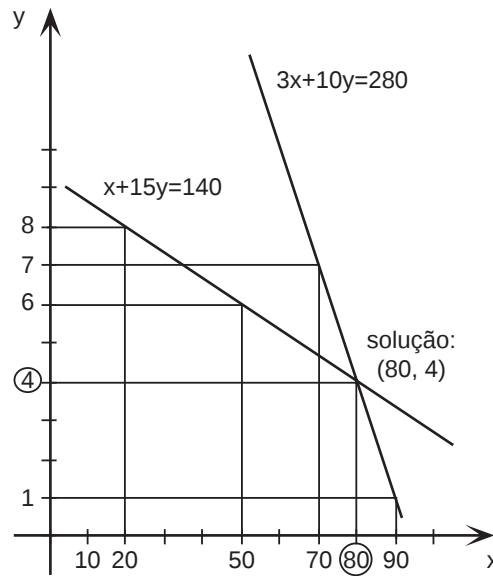
De novo, o ponto (x, y) procurado deve ser a interseção das retas, pois esse é o ponto tal que **x** e **y** satisfazem as duas equações. Que ponto é esse?

Na aula passada, encontramos **x = 80** e **y = 4** para o número de calorias em um ovo e em um grama de queijo, respectivamente.

Como esses números são muito distantes entre si, vamos usar o recurso de trabalhar com unidades de medida diferentes nos dois eixos.

Outra vez, um gráfico cuidadoso nos revela que, realmente, a interseção das retas que representam as equações do problema é o ponto (80, 4). Veja:

x	$y = \frac{140-x}{15}$	x	$y = \frac{280-3x}{10}$
20	8	70	7
50	6	90	1



Como você pode ver, o plano cartesiano nos ajuda muito a visualizar a solução do problema, quando ele recai num sistema de duas equações em **x** e **y**.

Aqui estão alguns exercícios para você praticar essa visualização. Nesta lista de exercícios, vamos visualizar as soluções que encontramos para alguns dos problemas passados na aula anterior.

Exercícios

Sendo assim, para cada um dos problemas abaixo, já apresentamos o seu sistema de duas equações em **x** e **y**. Cada equação representa uma reta no plano cartesiano. Proceda assim:

- Faça uma tabela para cada equação, com alguns valores de **x** e de **y** que a satisfazem.
- Com essa tabela, desenhe o gráfico de cada reta, como fizemos há pouco.
- Assinale o ponto que corresponde à solução do problema.

Exercício 1

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa ao sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra ?

Incógnitas: número de quilômetros no asfalto = **x**
número de quilômetros em terra = **y**

Sistema:
$$\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

AULA
12

Exercício 2

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Incógnitas: um número = x
outro número = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 43 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Incógnitas: número de carros = x
número de motocicletas = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 43 \\ 4x + 2y = 150 \end{cases}$$

Exercício 4

Uma empresa deseja contratar técnicos e para isso aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu 1 ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Incógnitas: número de respostas certas = x
número de respostas erradas = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 50 \\ 4x - y = 130 \end{cases}$$

Exercício 5

Pedro e Paulo têm juntos R\$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Incógnitas: quantia de Pedro = x
quantia de Paulo = y

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 81 \\ 0,9x = y + 0,1x \end{cases}$$

Recordando produtos notáveis

Desde a aula 3 estamos usando letras para representar números desconhecidos. Hoje você sabe, por exemplo, que a solução da equação $2x + 3 = 19$ é $x = 8$, ou seja, o número 8 é o **único** valor que, colocado no lugar de x , torna a igualdade verdadeira.

Vamos agora ampliar o uso das letras. Passaremos a empregar as letras **a**, **b**, **c** etc. para representar **números quaisquer**. Assim, $a + b$ representa a soma de dois números quaisquer, **ab** representa o produto de dois números quaisquer, e assim por diante.

A igualdade

$$2 + 5 = 5 + 2$$

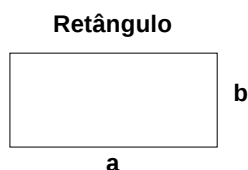
é correta? É claro que sim. Mas o fato de que a ordem das parcelas não altera a soma não vale somente para os números 2 e 5. Isso vale para números quaisquer. É a propriedade comutativa da adição e escreve-se assim:

$$a + b = b + a$$

Temos aí um exemplo de uma **identidade**. Em matemática, uma identidade é uma igualdade que permanece verdadeira quaisquer que sejam os valores que sejam atribuídos às letras. Nesta aula, vamos rever algumas propriedades da aula 1 (agora usando letras) e também vamos conhecer algumas identidades muito famosas da matemática.

Para ilustrar as propriedades que veremos é preciso recordar como se calcula a área de um retângulo.

A área de uma figura é a medida de sua superfície. No caso do retângulo, a área é o produto de suas duas dimensões. Então, chamando de **A** a área de um retângulo de dimensões **a** e **b**, temos:



Área

$$A = ab$$

Introdução

 Comutar quer dizer "trocar". Uma propriedade se chama *comutativa* quando permite que dois números quaisquer troquem de posição.

Nossa aula

AULA
13

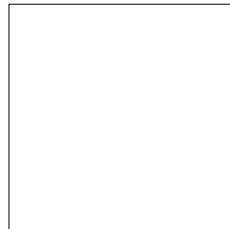
Observe que **ab** representa o produto de dois números quaisquer. Entretanto, quando as letras forem substituídas por números, é preciso colocar um ponto (ou sinal de $\times$) entre eles para evitar confusões. Assim, se as medidas de certo retângulo forem **a = 5** e **b = 2**, sua área será:

$$A = ab = 5 \cdot 2 = 10$$

É claro que se as medidas **a** e **b** forem iguais, o retângulo transforma-se num quadrado, mas a forma de calcular sua área continua igual.

Quadrado

Área



a

$$A = aa = a^2$$

O símbolo **a** lê-se “**a** ao quadrado” e significa o produto de um número por ele mesmo. Por exemplo: **4 = 4 · 4 = 16**.

Por enquanto, precisamos apenas disso. O conceito de área, as unidades e as fórmulas que calculam as áreas das diversas figuras serão vistas na aula 15.

A multiplicação e a propriedade distributiva

A figura a seguir mostra dois retângulos colados. Ambos têm base **a** e as alturas são **b** e **c**.



a

O retângulo total tem base **a** e altura **b + c**. Então sua área é **a(b + c)**.

Por outro lado, a área do retângulo de baixo é **ab** e a área do de cima é **ac**. Somando essas duas áreas temos a área total. Logo:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Esta é a propriedade **distributiva** da multiplicação. Ela tem esse nome por que a letra **a** foi distribuída pelas outras que estavam dentro do parênteses.

Vamos agora calcular algo ligeiramente mais complicado.

EXEMPLO 1

Desenvolver $(a + b)(c + d)$.

Vamos dar uma sugestão para que você tente fazer essa conta sozinho antes de ver a resposta: represente $a + b$ com uma nova letra e use a propriedade que acabamos de ver.

Representaremos a soma $a + b$ pela letra m .

$$\underbrace{(a + b)(c + d)}_m = m(c + d)$$

$$m = mc + md$$

Agora, substituímos a letra m pela soma $a + b$:

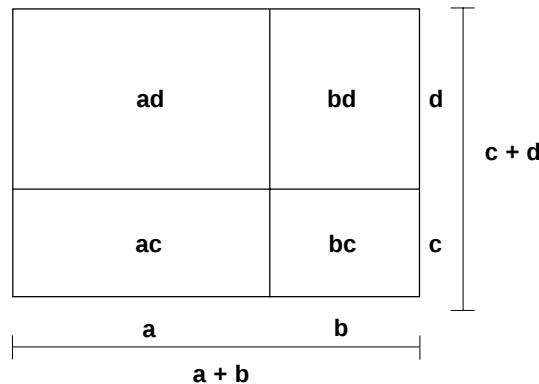
$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= mc + md \\ &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Concluimos, então, que:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Observe a figura a seguir para visualizar o que foi demonstrado. O lado esquerdo de nossa igualdade representa a área de um retângulo cujas medidas são $a + b$ e $c + d$.

Repare que este retângulo é a soma de quatro retângulos menores cujas áreas são as quatro parcelas que aparecem no lado direito da igualdade.



O quadrado de uma soma e de uma diferença

O exemplo que acabamos de ver é a base para a demonstração de uma das mais úteis identidades da matemática:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

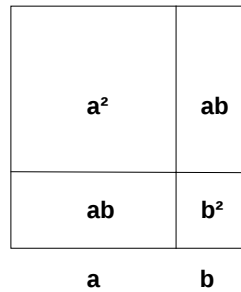
(fórmula 1)

AULA
13

Essa fórmula quer dizer que o quadrado de uma soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Veja a demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= aa + ab + ba + bb \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

A interpretação desse resultado utilizando as áreas dos retângulos poder ser vista na figura a seguir.



A outra identidade, irmã da que acabamos de ver é a seguinte :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(fórmula 2)

Ela nos diz que o quadrado de uma diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Uma das formas de demonstrar esse resultado é escrever $a - b$ como $a + (-b)$ e aplicar o quadrado da soma. Veja:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a + (-b))^2 = \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Calcule 29 .

Ora, se temos uma máquina de calcular, não tem graça.

Se não, é claro que sabemos calcular $29 \cdot 29$ com lápis e papel. Faça a conta.

Vamos dar o resultado de maneira bem rápida e simples. Escrevemos 29 como $30 - 1$ e usamos a *fórmula 2*. Veja:

$$\begin{aligned}29^2 &= (30-1)^2 \\ &= 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1 \\ &= 900 - 60 + 1 \\ &= 841\end{aligned}$$

A diferença de quadrados

A terceira identidade que vamos aprender é a seguinte:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

(fórmula 3)

Ela nos diz que a diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma pela diferença desses números. Para demonstrar isso, basta desenvolver o lado direito da igualdade. Veja:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= aa + \cancel{ab} - \cancel{ba} - bb \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Esta identidade nos será útil em diversos momentos do nosso curso. Por ora, veja como ela pode simplificar certos cálculos.

EXEMPLO 3

Em um loteamento, cada quadra de terreno é um quadrado com 61 metros de lado. O autor do projeto resolveu então aumentar a largura da calçada e, com isso, cada quadra passou a ser um quadrado de 59 metros de lado. Que área os terrenos perderam?

Pense um pouco antes de ver a solução.

Uma forma simples de responder a esta questão é calcular a área antiga, a área nova e depois subtrair. Inicialmente a área da quadra era 61 .

Depois a área da quadra passou a ser 59 . Então a área perdida foi

$$61 - 59$$

É claro que sabemos fazer estas contas. Mas, veja como fica simples o cálculo se utilizamos a fórmula 3.

$$61^2 - 59^2 = (61 + 59)(61 - 59) = 120 \cdot 2 = 240$$

Os terrenos perderam, então, 240 metros quadrados.

Exercício 1

Desenvolva:

a) $x(a + b - c)$

b) $(x + a)(x + b)$

Exercício 2

Resolva a equação: $2(x - 5) + 3(x + 1) = 23$

Exercícios

AULA
13

Exercício 3

Desenvolva: $(x + 3)$

Exercício 4

Desenvolva: $(x - 1)$

Exercício 5

Resolva a equação: $(x - 3) = x - 33$

Exercício 6

Calcule: $173 - 172$

Exercício 7

Simplifique a expressão: $(a + 2)(a - 2) - (a - 3)$

Exercício 8

Resolva a equação: $(x - 5)(x + 5) = (x - 1)$

Exercício 9

Calcule:

a) 82 usando a fórmula 1

b) 99 usando a fórmula 2

c) $42 \cdot 38$ usando a fórmula 3

Operações com potências

Introdução

Quando um número é multiplicado por ele mesmo, dizemos que ele está **elevado ao quadrado**, e escrevemos assim:

$$a \cdot a = a^2$$

Se um número é multiplicado por ele mesmo várias vezes, temos uma **potência**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ fatores}} = a^3 \quad (\text{a elevado a 3 ou a ao cubo})$$
$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ fatores}} = a^4 \quad (\text{a elevado a 4})$$

De uma forma geral, se o fator **a** aparece **n** vezes escrevemos **aⁿ** (a elevado a n). O número **a** é a **base** da potência e **n** é o **expoente**.

Nas ciências, para escrever números muitos grandes ou muito pequenos usamos potências. Por exemplo, um bilhão é o número 1.000.000.000, que é igual a:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9$$

Os astrônomos medem as distâncias entre as estrelas em uma unidade chamada **ano-luz**, que é a distância percorrida pela luz durante um ano. Essa imensa distância vale, aproximadamente, 9.500.000.000.000 km, ou seja, nove trilhões e quinhentos bilhões de quilômetros. Para facilitar, escrevemos esse número assim:

$$1 \text{ ano-luz} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Acontece que essa distância é ainda pequena se olharmos para o universo conhecido. A estrela mais próxima de nós (que está na constelação do Centauro) fica a 4 anos-luz de distância. Mas, existem estrelas que estão a bilhões de anos-luz de distância de nós. Imagine que número gigantesco deve representar essa distância em quilômetros. Podemos então perceber que só é prático representar números desse tamanho usando potências e, além disso, é preciso saber fazer cálculos com elas.

O produto de potências de mesma base

Começamos com um exemplo. Vamos multiplicar a^4 por a^3

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ fatores}} = a^{4+3} = a^7$$

7 fatores

Como cada expoente representa o número de fatores então o número total de fatores é a soma dos expoentes. Concluimos então que para **multiplicar** potências de mesma base devemos **conservar a base e somar os expoentes**. Esse resultado, escrito de forma geral, fica assim:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EXEMPLO 1

Certa estrela está a 1,2 milhões de anos-luz do sol. Sabendo que 1 ano-luz é igual a 9,5 trilhões de quilômetros, determine, em quilômetros, a distância entre essa estrela e o sol. Pense um pouco antes de ver a solução. Procure exprimir os números dados usando potências de 10.

Vamos exprimir os números dados usando números decimais e potências de 10. Observe que:

$$\begin{aligned} \text{mil} &= 1.000 = 10^3 \\ \text{milhão} &= 1.000.000 = 10^6 \\ \text{bilhão} &= 1.000.000.000 = 10^9 \\ \text{trilhão} &= 1.000.000.000.000 = 10^{12} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 1,2 \text{ milhões} &= 1,2 \cdot 10^6 \\ 9,5 \text{ trilhões} &= 9,5 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Para calcular a distância entre o sol e a outra estrela, devemos multiplicar esses dois números. Observe que vamos multiplicar os números decimais e as potências de 10. Veja:

$$1,2 \cdot 10^6 \cdot 9,5 \cdot 10^{12} = 1,2 \cdot 9,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 11,4 \cdot 10^{6+12} = 11,4 \cdot 10^{18} \text{ km}$$

Quando representamos um número por um decimal seguido de uma potência de 10, estamos usando o que se chama de **notação científica**. É assim que os cientistas representam números muito grandes. Entretanto, eles também combinaram o seguinte: para que todos escrevam da mesma forma nunca escreverão mais de um dígito na parte inteira do número decimal. Assim, um verdadeiro cientista não escreveria a distância $11,4 \cdot 10^{18} \text{ km}$. Ele faria assim:

$$11,4 \cdot 10^{18} = \frac{11,4}{10} \times 10 \times 10^{18} = 1,14 \times 10^{19} \text{ km}$$

Observe que $10 = 10^1$. Por isso, $10 \cdot 10^{18}$ é igual a 10^{1+18} , ou seja, 10^{19} .

Vamos então recordar as outras operações.

A divisão de potências de mesma base

Começamos também com um exemplo para descobrir o caso geral. Vamos dividir a^6 por a^2 .

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}^{6 \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ fatores}}} = a^{6-2} = a^4$$

Cada fator do denominador é cancelado com um fator do numerador. Então o número de fatores do resultado é a diferença entre o número de fatores do numerador e o número de fatores do denominador. Concluimos então que, para dividir potências de mesma base, devemos conservar a base e subtrair os expoentes. Esse resultado, escrito de forma geral fica assim:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Observação: Nesta identidade existe uma restrição para a letra **a**: ela pode representar qualquer número, **exceto** o **zero**. Isso acontece porque é impossível a divisão por zero.

A potência do produto e do quociente

Observe as seguintes sequências de cálculos:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

$$\frac{(a/b)^3}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Estes resultados podem ser generalizados para um expoente qualquer

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \quad \frac{(a/b)^n}{1} = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$$

A potência de uma potência

Vamos, mais uma vez, descobrir o caso geral a partir do raciocínio usado em um exemplo. Calculemos então $(a^3)^4$.

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$$

É claro que a letra **a** apareceu como fator 12 vezes, que é o produto dos expoentes. Concluimos então que quando uma potência está elevada a algum expoente, devemos manter a base e multiplicar os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Observação: O que acontece se o expoente for zero? Essa é uma pergunta freqüente, e a resposta é a seguinte. Quando definimos a^n , o expoente **n** é o número de vezes que a letra **a** aparece como fator. Então, **n** pode ser 1, 2, 3, 4 etc, e o caso **n = 0** não está incluído na nossa definição. Portanto, a expressão a^0 precisa ser definida, ou seja, precisamos dar um significado para ela.

Definimos, então:

$$a^0 = 1 \quad \text{para todo } a \neq 0$$

Por que isso? Porque, com essa definição, as propriedades anteriores continuam válidas. Observe.

$$1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$$

Inicialmente os nossos expoentes eram inteiros positivos, e agora o zero foi incluído. O leitor curioso poderá então perguntar o que acontece se o expoente for negativo. Realmente, expoentes negativos existem; mas, como eles não estão incluídos na definição original de potência, precisamos criar um significado para eles. Isso é o que veremos a seguir.

O expoente negativo

Devemos definir potências de expoentes negativos, de forma que as propriedades anteriores permaneçam válidas. A definição conveniente é a seguinte:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observe que, com essa definição, as propriedades que vimos continuam a ser usadas. Veja:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \\ \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2} \end{array} \right.$$

Nas ciências, potências de base 10 com expoente negativo são usadas para representar números muito pequenos.

Observe:

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$

Então, para representar, por exemplo, o número **0,0003** na nossa já conhecida notação científica, fazemos assim:

$$0,0003 = \frac{0,0003 \times 10^4}{10^4} = \frac{3}{10^4} = 3 \times 10^{-4}$$

EXEMPLO 2

Para tratar a água consumida pela população e diminuir a incidência de cáries dentárias, muitos países acrescentam flúor à água que será distribuída. A proporção recomendada é de 700g de flúor para 1 milhão de litros de água. Calcular:

- a) a quantidade de flúor em cada litro de água;
- b) se você tem uma cisterna com 12.000 litros de água não tratada, que quantidade de flúor você deve acrescentar?

Pense um pouco antes de ver a solução.

Este problema se resolve com regra de três mas, é conveniente escrever os números usando potências de 10. Isso vai facilitar os cálculos.

Solução:

- a) Sabemos que 1 milhão é igual a 10^6 . Se **x** é a quantidade de flúor contida em um litro de água, temos a regra de três abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 700\text{g} & \text{———} & 10^6 \text{ litros} \\ x \text{ g} & \text{———} & 1 \text{ litro} \end{array}$$

$$\text{Portanto, } x = \frac{1.700}{10^6} = \frac{7 \cdot 10^2}{10^6} = 7 \cdot 10^{2-6} = 7 \cdot 10^{-4}$$

Temos, então, em cada litro de água tratada, $7 \cdot 10^{-4}$ gramas de flúor.

- b) Para saber a quantidade de flúor que deve ser colocada na cisterna devemos multiplicar $7 \cdot 10^{-4}$ por 12.000 litros.

Observe o cálculo:

$$7 \cdot 10^{-4} \cdot 12.000 = 7 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^4 = 7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4+4} = 7 \cdot 1,2 = 8,4$$

Então, devemos acrescentar 8,4 gramas de flúor para tratar a água dessa cisterna.

Exercícios

Exercício 1

Escreva cada uma das expressões a seguir na forma de uma única potência de base 2.

- a) $2^5 \cdot 2^3$ b) $\frac{2^9}{2^3}$ c) $(2^3)^5$ d) $\frac{2 \times 2^5}{2^9}$

Exercício 2

Escreva os números a seguir utilizando um número decimal (ou inteiro) multiplicado por uma potência de 10.

- a) 23.000 b) 2.000.000 c) 0,04 d) 0,000.015

Exercício 3

Simplifique $\frac{2^3 \times 4^5}{8^6}$

Atenção: observe que $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$

Exercício 4

Simplifique $100^5 \cdot 1000^7 \cdot (100^2)^{-4} \cdot 10000^{-3}$

Exercício 5

Escreva cada uma das expressões a seguir usando uma única potência de base 3.

- a) $3^{-2} \cdot 3^{-5}$ b) $\frac{3^6}{3^{-4}}$ c) $\frac{1}{3^{-2} \cdot 3^5}$ d) $\frac{3 \times 9^5}{27^6}$

Exercício 6

Calcule $2,4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$

Exercício 7

O planeta Plutão, o mais afastado do sistema solar, está a 5900 milhões de quilômetros de distância do Sol. Escreva essa distância:

- a) em quilômetros usando um número decimal com 1 dígito na parte inteira e uma potência de 10;
b) em anos-luz.

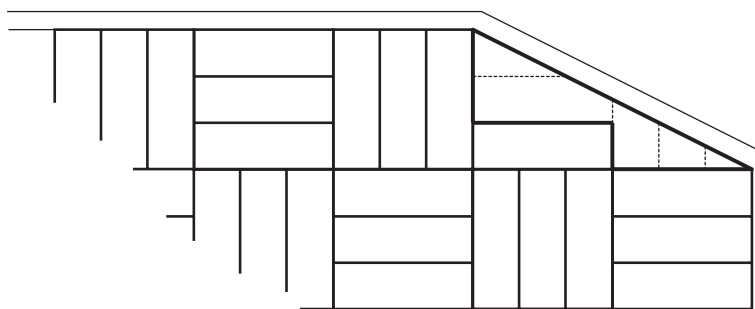
Exercício 8

Muitas fábricas lançam na atmosfera uma substância chamada dióxido de enxofre. A Organização Mundial de Saúde estabeleceu que a quantidade máxima dessa substância no ar que respiramos deve ser de $4 \cdot 10^{-5}$ gramas em cada metro cúbico de ar. Acima desse valor o ar é considerado poluído. Certo dia, em uma amostra de $2,5 \text{ m}^3$ de ar de Sorocaba (SP) havia $0,135 \cdot 10^{-3}$ gramas de dióxido de enxofre. O ar de Sorocaba estava poluído ou não?

Áreas de polígonos

Introdução

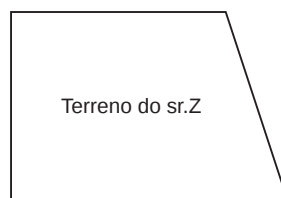
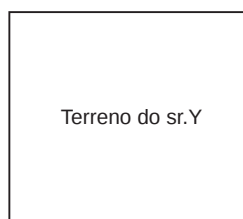
Seu Raimundo é pedreiro. Assim, frequentemente ele se vê tendo que resolver verdadeiros quebra-cabeças na hora de encaixar os últimos pedaços de lajota no piso de uma sala torta. Também podem ser tacos ou azulejos. Agora mesmo ele está se perguntando: “De quantos tacos preciso para completar a parte que está faltando?” Como você poderia ajudá-lo?



Está vendo por que dissemos que seu Raimundo enfrenta verdadeiros quebra-cabeças no seu ofício de pedreiro? Problemas desse tipo são comuns também em outras áreas profissionais, como na carpintaria, na costura, na agronomia e em muitas outras áreas.

Se você cursou o **Telecurso 2000 - 1º grau** talvez ainda se lembre daquele problema de comparação dos terrenos do sr. Y e do sr. Z (aula 15).

Lá, a resposta à pergunta sobre qual dos terrenos é maior também veio quando encaramos o problema como um quebra-cabeças: exatamente como o do seu Raimundo. Os terrenos têm esta forma:

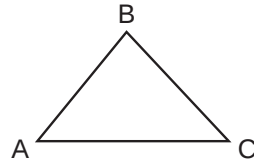


Você sabe avaliar qual das áreas é a maior? A sugestão é esta: Pense no terreno do Sr. Z como um quebra-cabeça de papel. Onde devemos cortar para que as peças se reagrupem formando um outro retângulo? (A área do retângulo é mais fácil de ser calculada!)

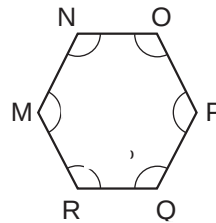
Área de polígonos

A grande maioria dos problemas práticos em que podemos aplicar nossos conhecimentos geométricos fala de figuras tais como retângulos, quadrados, triângulos, hexágonos e outros polígonos.

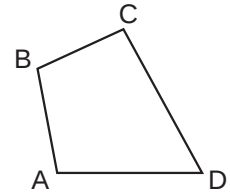
Polígonos são figuras formadas por segmentos de reta (seus **lados**) dispostos numa linha poligonal fechada. Aqui estão alguns exemplos de polígonos:



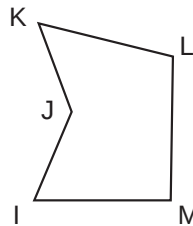
Triângulo ABC
(tri=3; 3 lados)
lados: AB, BC, AC



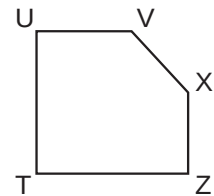
Hexágono de lados iguais
(hexa = 6; 6 lados)
lados: MN, NO, OP, PQ, QR, RM



Quadrilátero ABCD
(quadri=4; 4 lados)
lados: AB, BC, AC, AD



Pentágono IJKLM
lados: IJ, JK, KL, LM, MN



Pentágono TUVXZ
(penta=5; 5 lados)
lados: TU, UV, VX, XZ, ZT

Há também octógonos (8 lados), decágonos (10 lados), dodecágonos (12 lados) etc. Você não precisa decorar estes nomes agora. A prática talvez o conduza a usá-los, talvez não. Os nomes não são tão importantes quanto os fatos geométricos que estão por trás de nossas situações cotidianas. Nesta aula, o que estamos fazendo é resolver quebra-cabeças: há muito o que aprender com eles, além de ser divertido estudar este assunto desta maneira!

É claro que os polígonos acima são apenas cinco exemplos de polígonos entre a infinidade de formas de triângulos, quadriláteros etc, que existem. Mas já podemos perceber que todo polígono ocupa uma certa quantidade de superfície, uma certa **área**.

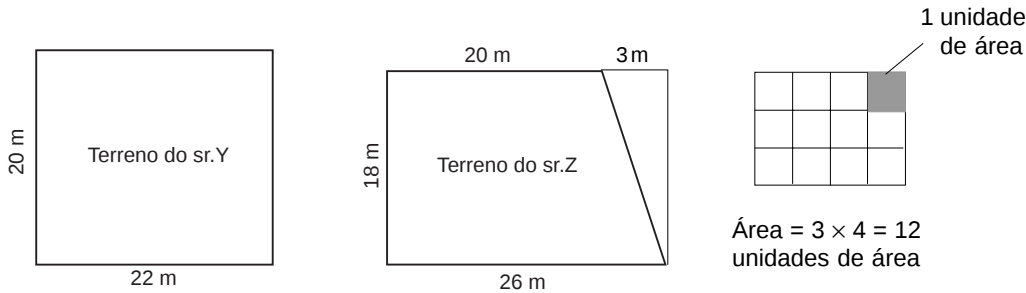
Na vida prática, conhecer essa área pode me ajudar a calcular o que preciso - seja o tamanho do meu terreno, ou a quantidade de tacos para ocupar um espaço de piso, seja a quantidade de tecido para um vestido, seja o gasto de papel para imprimir um folheto, ou muitas outras coisas.

Os incas da América do Sul foram habilidosos construtores em pedra. Observe como são variados os polígonos empregados em suas construções.



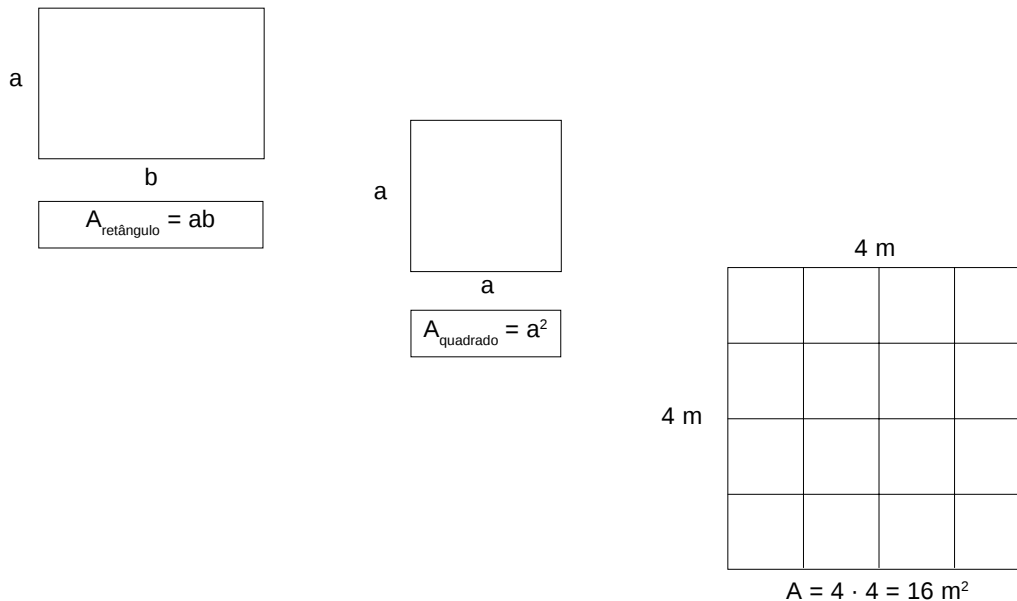
Área de retângulos e quadrados

O retângulo é uma das figuras geométricas mais comuns que encontramos na vida diária, como podemos constatar em nossas casas, móveis e utensílios. Sua área é muito fácil de ser calculada, como vimos ao calcularmos a área dos terrenos do sr. Y e Z.



O terreno do sr. Y mede $20 \times 22 = 440 \text{ m}$, e o do sr. Z mede $18 \times 23 = 414 \text{ m}$, sendo maior, portanto, o terreno do sr. Y. Isso porque, como a figura da direita mostra, um retângulo de 3 por 4 (unidades de comprimento) tem $3 \times 4 = 12$ unidades de área. Assim, do mesmo modo, um retângulo de altura **a** e largura **b** tem área **A = ab**. Se **a** e **b** forem expressos em centímetros, então **A** será dada em **cm**. Se estiverem em metros, **A** será dada em **m**, e assim por diante.

Quanto ao quadrado, que é um retângulo especial, onde **a = b**, sua área é igualmente simples de ser calculada. Chamando de **a** o lado do quadrado, temos: **A = a · a = a²**.



Continuaremos agora estudando outro quadrilátero muito comum: o paralelogramo. Para calcular a área de um paralelogramo vamos aplicar novamente um raciocínio do tipo quebra-cabeça.

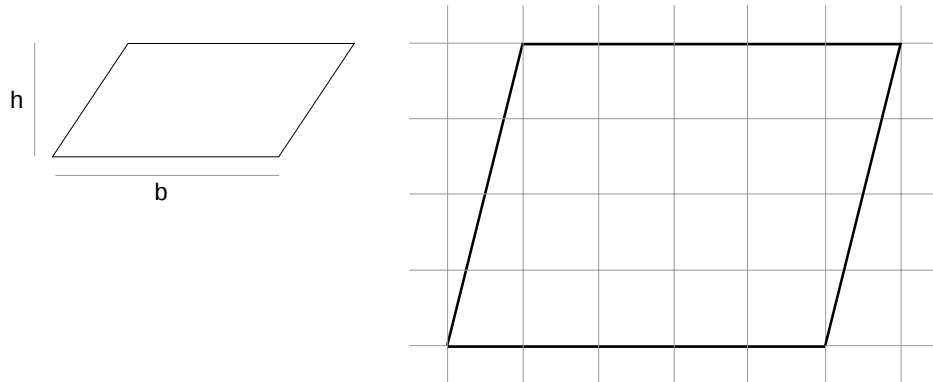
EXEMPLO 1

As questões que você verá neste exemplo serão solucionadas no decorrer da aula. Preste atenção!

- a) Como devemos cortar o quadrilátero da esquerda, abaixo, (um paralelogramo, como veremos) em duas partes, de modo a reagrupá-las depois formando um retângulo?

Sugestão: papel e tesoura!

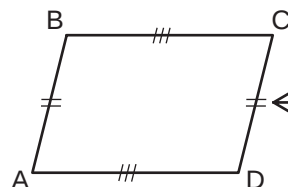
- b) Se dissermos que esse retângulo tem largura **b** e altura **h**, quanto medirá a área do paralelogramo?



- c) O paralelogramo à direita foi desenhado sobre papel quadriculado. Quantos quadradinhos unitários o formam, isto é, qual é sua área?

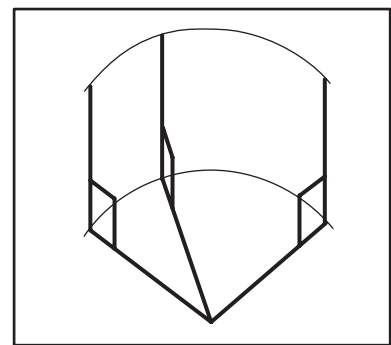
Área de paralelogramos e losangos

Retângulos são um caso particular de um tipo de quadrilátero que talvez você já conheça: o paralelogramo. O **paralelogramo** é um quadrilátero de lados opostos paralelos dois a dois. Ocorre, então, que esses lados opostos são também iguais dois a dois, como mostra o desenho abaixo:



Paralelogramo ABCD
onde $AB = CD$
e $AD = BC$

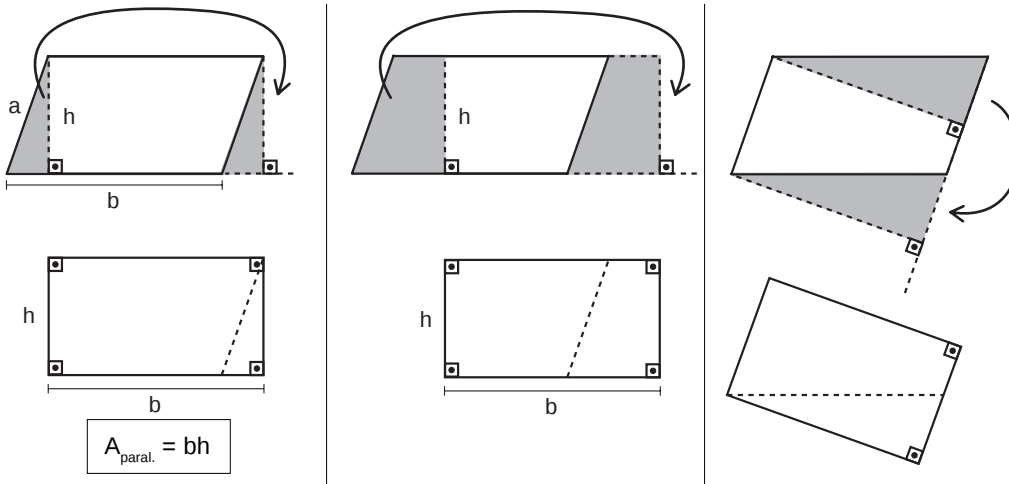
Este sinal
significa "igual
ao outro lado"



Limpador de pára-brisa

Uma aplicação interessante do paralelogramo é o limpador de pára-brisa, que se mantém sempre na vertical. Quando encontrá-lo, nos ônibus e automóveis, procure observar as hastes: elas formam um paralelogramo. Outras aplicações do paralelogramo podem ser, por exemplo, o mecanismo que liga a roda da frente à de trás, na locomotiva do trem e o mecanismo que abre janelas basculantes.

Paralelogramos também são conhecidos como **retângulos tombados**, sendo o retângulo, então, um paralelogramo cujos ângulos são todos retos. No **Exemplo 1** foi pedido que você, cortando adequadamente o paralelogramo, o transformasse depois num retângulo. Isso pode ser feito de muitas maneiras:

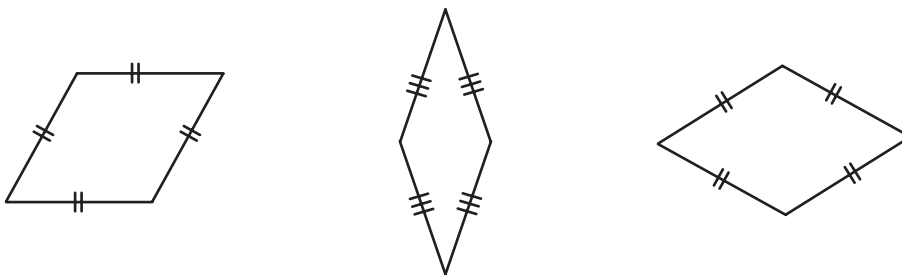


Observamos em todos os exemplos que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo em que foi transformado.

Na figura, tal área é dada por $A = bh$, onde b é um dos lados do paralelogramo e h é sua altura perpendicular a esse lado. Assim temos: $b = 2,5$ e $h = 1,2$ (cm); logo, a área desse paralelogramo é 3,0 cm.

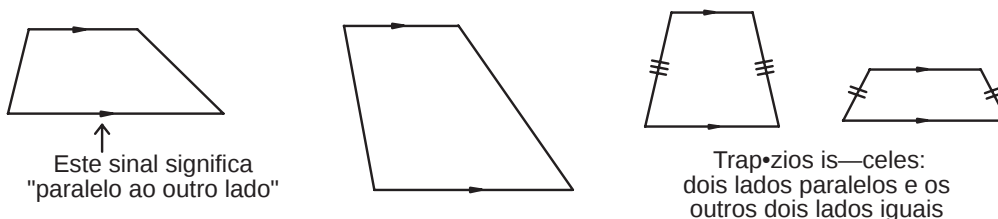
Quanto aos **losangos** (ou “balões”), são uma classe especial de paralelogramo. Sua área é calculada do mesmo jeito: multiplica-se um dos lados pela altura. **Losangos** são paralelogramos de quatro lados iguais e paralelos dois a dois.

Aqui estão alguns exemplos de losangos:



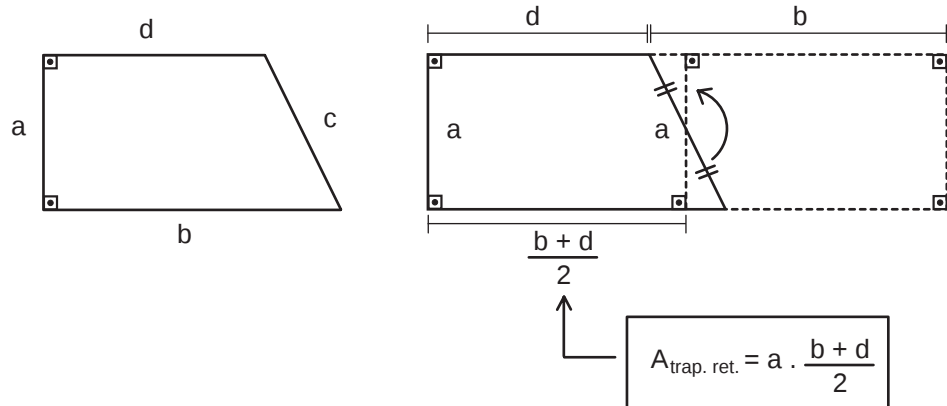
Área de trapézios

Os quadriláteros que têm apenas dois lados opostos paralelos são chamados de **trapézios**. Os mais comuns no nosso cotidiano são os **trapézios isósceles**, que têm os dois lados não-paralelos com a mesma medida.



E, como veremos depois, os **trapézios retângulos**, que têm dois ângulos retos vizinhos. Aqui mesmo nesta aula já encontramos alguns trapézios retângulos: tanto o terreno do sr. Z quanto algumas das peças que seu Raimundo tem que preencher com os pedaços de tacos são trapézios retângulos. (Identifique-os na figura da introdução da aula.) Você se lembra de já ter encontrado alguma situação prática envolvendo um trapézio?

Já vimos aqui, inclusive, como um trapézio retângulo se transforma num retângulo. Qual é, então, a área de um trapézio retângulo cujos lados paralelos (suas **bases**) medem **b** e **d**, e cuja altura (medida sobre o lado perpendicular a estes) é **a**? A figura mostra que:

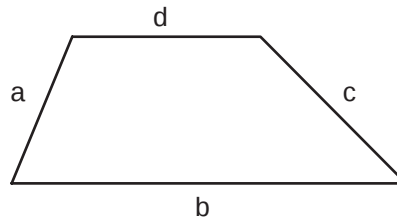


E quanto aos trapézios que não são retângulos: como calcular suas áreas? Como transformá-los em retângulos?

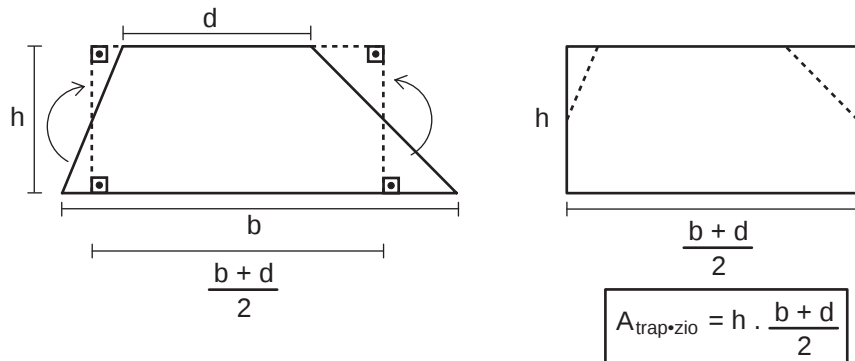
EXEMPLO 2

Faça cortes precisos neste trapézio, de modo que possamos reagrupar suas peças num retângulo.

Sugestão: Que tal transformar o trapézio em dois trapézios retângulos? Deste ponto você já sabe como continuar sozinho.



Você constatará que a mesma fórmula vale também aqui: a área do trapézio é o produto de sua **base média** (isto é, o segmento que liga os pontos médios dos lados não-paralelos) pela altura (**h**, na figura):

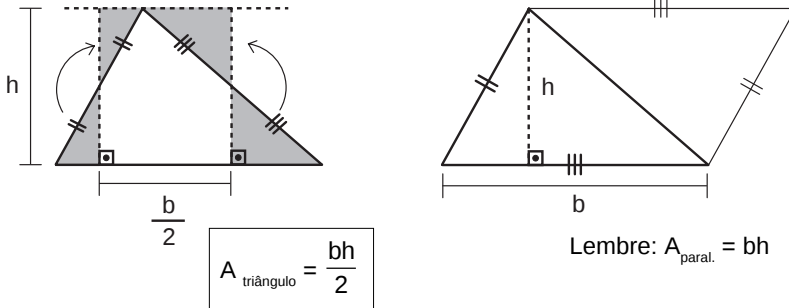


Área de triângulos

Como fazer para transformar um triângulo qualquer num retângulo, de forma que aprendamos a calcular sua área? Experimente com este triângulo: transforme-o em retângulo.

A solução pode ser inspirada na resposta que demos para o trapézio: basta anularmos o lado **d** que teremos um triângulo; assim, fazemos **d = 0**. Portanto, a área de um triângulo de base **b** e altura (relativa a essa base) **h** é $A = h \cdot \frac{b}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$

De fato, ela é a metade da área do paralelogramo de onde tiramos dois triângulos desses.

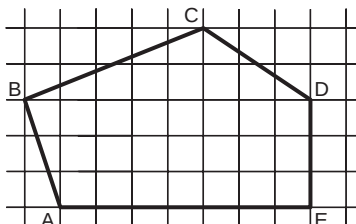
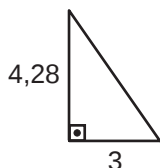
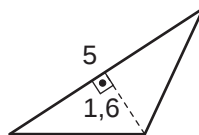
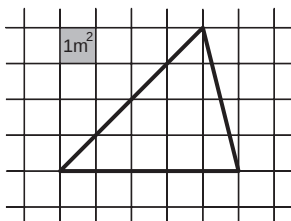
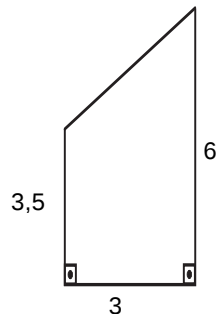
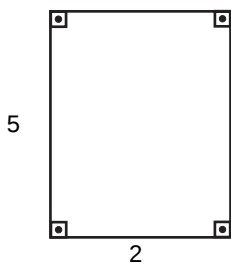


EXEMPLO 3

As questões que você verá neste exemplo também serão solucionadas no decorrer da aula. Atenção!

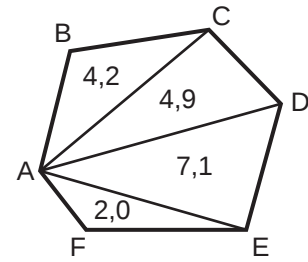
a) Calcule a área dos terrenos abaixo, considerando a medida de seus lados em metros (m).

Sugestão: Quanto ao pentágono ABCDE: que tal dividi-lo em triângulos?

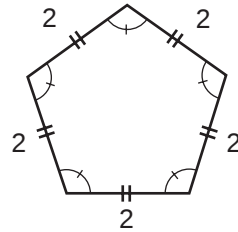


- b) Dentro deste hexágono ABCDEF foram desenhados os triângulos ABC, ACD, ADE e AEF.

A área de cada triângulo (em cm) foi calculada pela fórmula dada anteriormente e está escrita no desenho. É apenas o rascunho da situação, sem as medidas reais. Qual é a área do hexágono ABCDEF?



- c) Calcule a área deste pentágono regular (5 lados iguais e 5 ângulos iguais) cujo lado mede 2 cm. (Meça o que for preciso.)



Pentágono regular

EXEMPLO 4

Atenção: para a solução deste problema, acompanhe o desenrolar da aula. Seu Raimundo recebeu uma importante encomenda de trabalho: cobrir de mármore o piso de um salão. Acontece que o piso não tem a forma retangular; ele é um pentágono regular (“igual em todo canto”, como diz seu Raimundo), onde cada lado mede 4 m. Como resolver este problema?

Área de outros polígonos

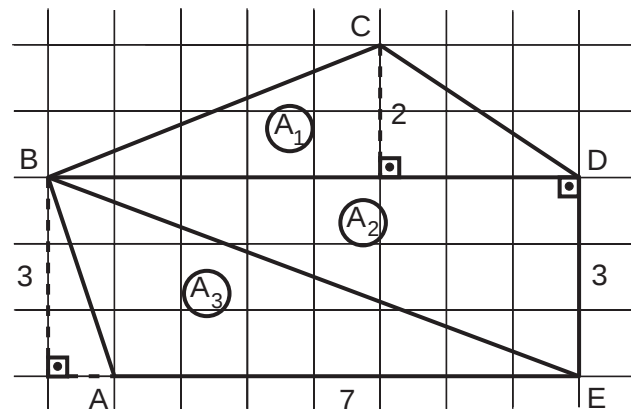
Dado um polígono de vértices ABCDE, representamos sua área por $A_{AB...E}$. Usando essa notação, vamos à solução para o último terreno do **Exemplo 3a**. A área do pentágono ABCDE mede:

$$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDE} + A_{ABE}; \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= \frac{8 \times 2}{2} + \frac{8 \times 3}{2} + \frac{7 \times 3}{2} \\ &= 8 + 12 + 10,5 \\ &= 30,5 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Da mesma forma, a área do hexágono do **Exemplo 3b** é facilmente calculada, pois:

$$\begin{aligned} A_{ABCDEF} &= A_{ABC} + A_{ACD} + A_{ADE} + A_{AEF} \\ &= 4,2 + 4,9 + 7,1 + 2,0 = 18,2 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



Repare que, com esses dois exemplos, estamos constatando dois fatos muito importantes no cálculo de áreas de polígonos. O primeiro é:

Qualquer polígono pode ser dividido num certo número de triângulos, número esse que depende do número de lados do polígono.

O segundo fato nós temos usado desde o começo da aula assumindo sua validade, mas sem comentá-lo. Trata-se do que veremos a seguir.

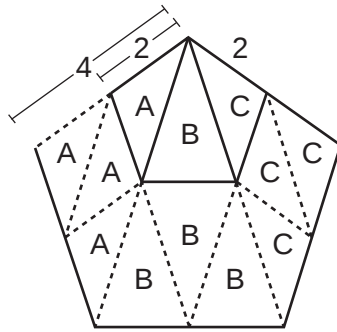
Soma e diferença de áreas

Quando reunimos duas figuras (sem superpô-las), a área da figura total é a soma das áreas de cada figura que a forma.

Por exemplo, trabalhando ainda com o **Exemplo 3**, a área do pentágono ABCDE (30,5 m) é a soma das áreas dos três triângulos (8 + 12 + 10,5).

“E quanto ao problema do seu Raimundo?”, você poderia perguntar. Bem, veja que fica fácil resolvê-lo comparando a sala de 4 m de lado com o pentágono do **Exemplo 3c**).

Dividindo este último em três triângulos de áreas A, B e C e continuando esta divisão no pentágono do seu Raimundo (não importa que, aqui, **A = C**), vemos



uma coisa curiosa: existem exatamente quatro triângulos do tipo A, quatro do tipo B e quatro do tipo C. (Confira com papel e tesoura!). Logo, a área daquele salão é:

$$\begin{aligned} A_{\text{pentágono sr. Raimundo}} &= 4A + 4B + 4C = 4(A + B + C) \\ &= 4A_{\text{pentágono Exemplo 3c}} \\ &= 4(6,8) = 27,2 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Quando multiplicamos por 2 cada lado do pentágono, sua área também fica multiplicada por 2? Não: a área fica multiplicada por 4! (E se cada lado é multiplicado por 3?) Isso diz respeito à soma de áreas: nós somamos as áreas quando reunimos figuras numa figura maior. Da mesma forma, quando retiramos uma figura de outra as áreas se subtraem.

Bem, isso encerra nossa aula de hoje. Talvez você devesse revê-la com cuidado em uma outra hora. É uma aula com muitos resultados importantes e úteis em nossa vida prática, no trato com tecidos, papel, madeira, terra etc.

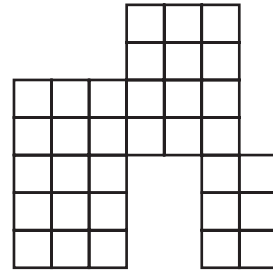
Exercícios

Exercícios

Exercício 1

Calcule a área deste terreno desenhado em papel quadriculado:

- Contando os quadradinhos de área unitária.
- Separando-o em retângulos e calculando as respectivas áreas.

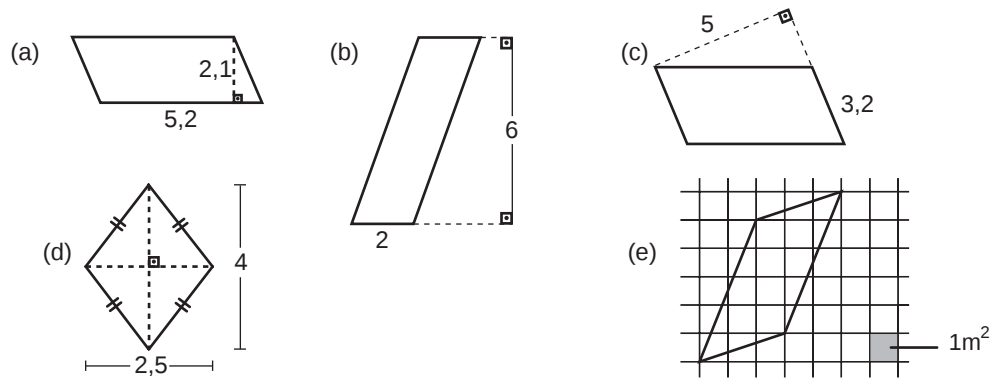


Exercício 2

Tome 36 quadrados iguais, de papel, e forme retângulos usando, para cada retângulo, todos os quadrados. Se cada retângulo tem, portanto, 36 unidades de área, responda: Caso se tratasse de terrenos retangulares, qual deles gastaria menos cerca para cercá-lo completamente? (Qual deles tem menor perímetro?)

Exercício 3

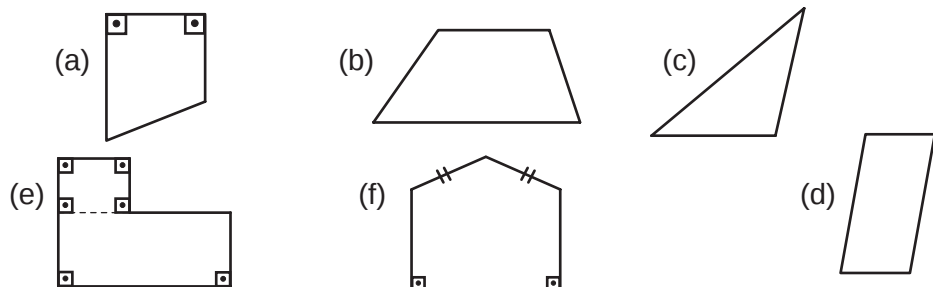
Calcule a área destes paralelogramos:



Exercício 4

Transforme cada polígono abaixo num retângulo, recortando-o em pedaços e reagrupando-os:

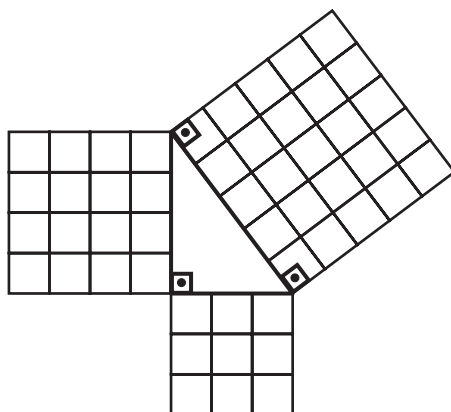
(Sugestão: Use tesoura e papel. No item (e), transforme primeiro os dois retângulos empilhados em um trapézio retângulo).



Exercício 5

É um fato da geometria que o triângulo construído com lados iguais a 3, 4 e 5 é um triângulo retângulo. Com cada um dos lados, construímos um quadrado, como mostra a figura.

- O que podemos afirmar sobre as áreas dos três quadrados?
- Para comprovar que essa afirmação é válida para qualquer triângulo retângulo, faça a mesma construção com qualquer outro triângulo retângulo, chamando os lados de **a**, **b** e **c**.

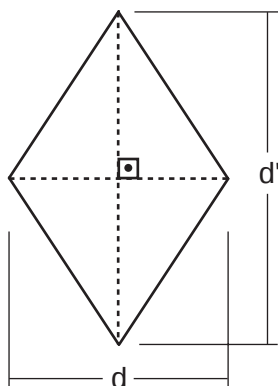


Exercício 6

- Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um pentágono? E um hexágono? (Antes de responder desenhe vários pentágonos, e para cada um deles, dê várias soluções. Faça o mesmo com hexágonos).
- Qual o número mínimo de triângulos em que pode ser dividido um polígono de n lados? Reflita baseado no item a).

Exercício 7

Baseado em sua resposta para o Exercício 7d), “invente” uma fórmula que calcule a área de um losango cujas diagonais (que são perpendiculares) medem **d** e **d'** (lê-se: “**d** linha”).



A U L A

16

Comprimento e área do círculo

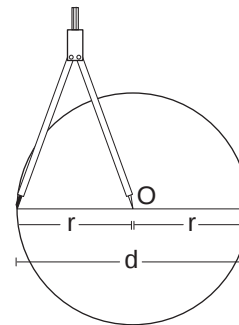
Introdução

Nesta aula vamos aprender um pouco mais sobre o círculo, que começou a ser estudado há aproximadamente 4000 anos. Os círculos fazem parte do seu dia-a-dia. A superfície de uma moeda e de um disco são exemplos de círculos.

Para desenhar um círculo utilizamos o **compasso** como você pode observar na ilustração ao lado.

A linha desenhada pelo compasso é conhecida como **circunferência**. Ela é o contorno do círculo.

A medida da abertura do compasso é o **raio** do círculo ou da circunferência. A distância entre os dois pontos diametralmente opostos da circunferência é o **diâmetro**, que vale o dobro do raio. Ainda hoje os astrônomos têm grande interesse em estudar os fenômenos da natureza que envolvem o círculo e suas partes. Observe esta matéria publicada no jornal *O Globo* em novembro de 1994.



O → centro
r → raio
d → diâmetro
 $d = 2r$

Brasil terá no dia 3 imagem espetacular do eclipse solar

Astrônomos de todo o mundo têm encontro marcado na próxima quinta-feira, dia 3 de novembro, em Santa Catarina, quando estará ocorrendo um eclipse total do Sol.

A Lua se alinhará entre o Sol e a Terra e o disco solar ficará completamente encoberto pela Lua. A importância do fenômeno estará na possibilidade de estudar a física da coroa solar, a física da atmosfera e a calibração das órbitas (detalhes sobre a posição da Lua e da Terra).

Fenômeno será visto por poucos

Eclipses ocorrem quando, do ponto de vista do observador, um astro se interpõe na frente de outro. Quando a Lua se alinha entre o Sol e a Terra, ocorre um eclipse do Sol. O eclipse só é total se o disco solar ficar completamente



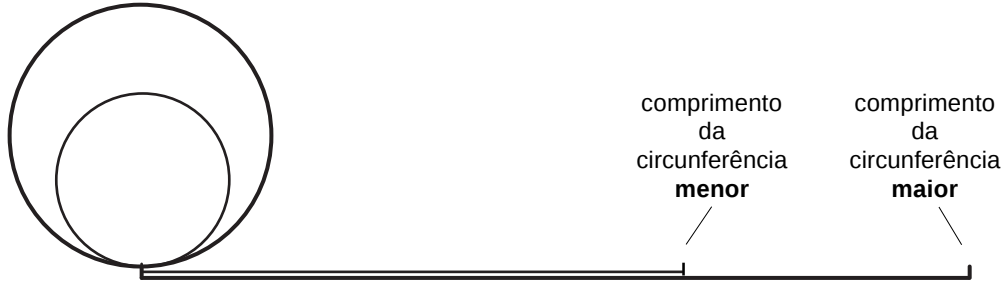
encoberto pela Lua. Esse fenômeno ocorre numa região relativamente pequena, de poucas centenas de quilômetros, se comparada aos 12.742 km de diâmetro médio da Terra.

Comprimento da circunferência

Nossa aula

Medir o comprimento desta curva chamada circunferência é o nosso problema. Uma das maneiras de resolver um problema matemático é tentar compreendê-lo, observando suas propriedades e fazendo experiências. É desta forma que vamos encontrar uma expressão matemática para o cálculo do comprimento de qualquer circunferência.

Uma primeira olhada em várias circunferências nos leva a concluir que seu comprimento depende da medida do raio. É fácil notar que quanto maior o raio maior é o comprimento da circunferência.



Podemos partir desta observação para descobrir qual a relação matemática existente entre estas duas medidas.

No quadro abaixo foram anotadas algumas medidas dos comprimentos e diâmetros de várias circunferências. Na última coluna dividimos cada medida obtida do comprimento (**C**) pela medida do diâmetro correspondente (**d**).

OBJETO MEDIDO	C	d	$\frac{C}{d}$
FICHA TELEFÔNICA	6,9cm	2,2cm	3,13
FUNDO DE UM COPO	15,5cm	4,9cm	3,16
MESA DE JANTAR	4,40m	1,40m	3,14

Faça você mesmo mais algumas medidas e verifique se o resultado da divisão $\frac{C}{d}$ é sempre um número um pouco maior do que 3. Quanto mais precisas forem nossas medidas, mais próximo estaremos de um número constante conhecido como **número pi**, cujo símbolo é π .

O número π é um número irracional cujo valor aproximado é 3,14. Na verdade este número possui infinitas casas decimais, mas na prática utilizamos apenas uma aproximação de seu valor.

$$\pi = 3,14159265358979323846264...$$

$$\pi \approx 3,14$$

A partir deste resultado obtemos uma expressão geral:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$C = \pi d$$

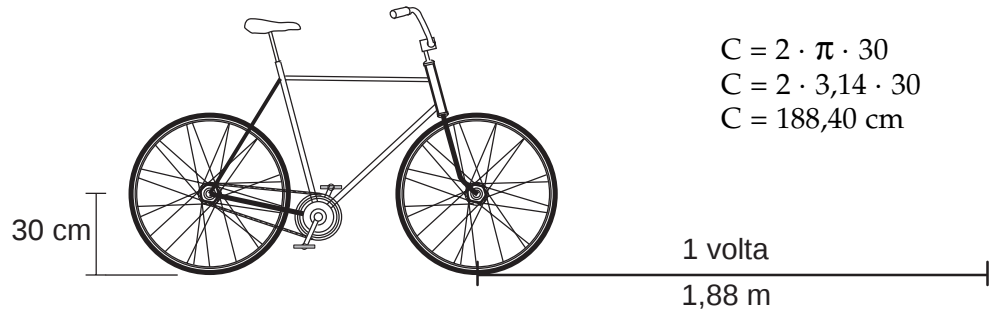
$$C = \pi 2 r$$

$$C = 2 \pi r$$

EXEMPLO 1

Qual o comprimento da roda de uma bicicleta de aro 26?

Uma bicicleta aro 26 tem o raio de sua roda medindo 30 cm. Substituindo $r = 30$ cm na fórmula $C = 2 \pi r$ temos:

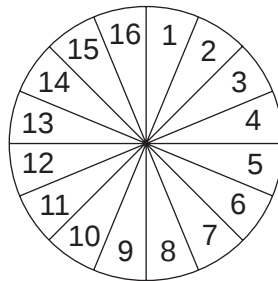


Observe este resultado: $188,40$ cm = $1,884$ m. Isso significa que uma volta completa da roda desta bicicleta equivale a uma distância de aproximadamente 1 metro e 88 centímetros.

Área do círculo

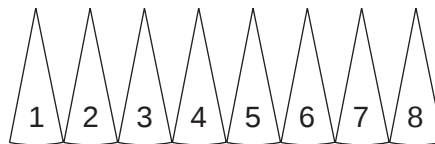
Da mesma forma que o comprimento da circunferência, a área do círculo depende da medida de seu raio.

Na aula 15 você aprendeu a fazer o cálculo da área de várias figuras planas. Para obter aquelas expressões, muitas vezes nós recortamos figuras e movemos suas partes para transformá-la em outra figura mais simples. Nós sempre podemos proceder desta maneira para encontrarmos a área de qualquer figura. É o que faremos também com o círculo.

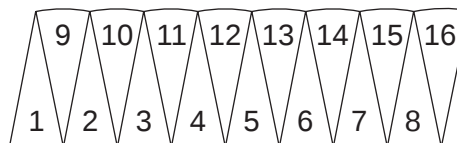


Dividimos o círculo ao lado em 16 partes iguais. Cada uma destas partes é denominada **setor circular**.

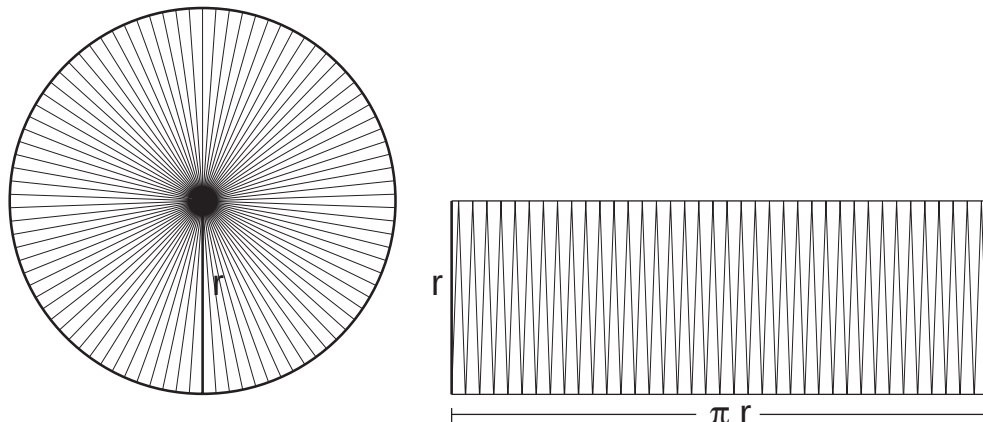
Podemos pegar a metade destes setores e rearrumá-los como na figura abaixo.



A outra metade pode ser encaixada sobre esta, de forma a não deixar espaços vazios.



Essa figura ainda não é um quadrilátero, pois dois de seus lados são formados por arcos sucessivos e não por segmentos de reta. No entanto, usando um pouco a imaginação, podemos dividir nosso círculo em setores circulares cada vez menores:



Área do círculo $\approx$ Área do retângulo

Repetindo o que fizemos com as 16 partes vamos pegar a metade dos setores em uma certa posição e encaixarmos sobre estes a outra metade. Note que nos aproximamos muito mais de um retângulo de altura igual ao raio e comprimento igual a metade do comprimento da circunferência deste círculo.

$$A = \pi r \cdot r$$

$$A = \pi r^2$$

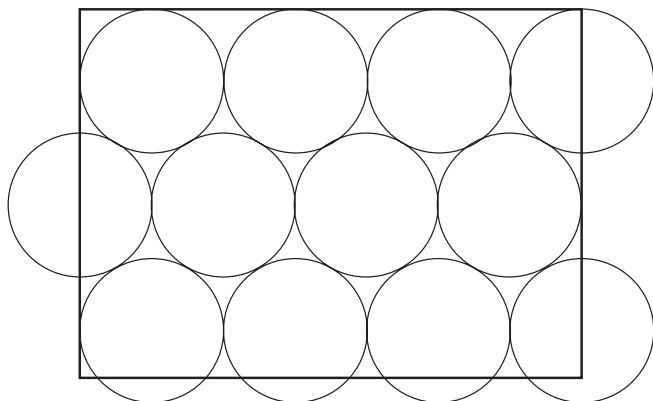
EXEMPLO 2

Quantos círculos de raio igual a 10 cm poderão ser cortados em uma cartolina de 70 cm por 50 cm?

- Área da cartolina = $70 \times 50 = 3500 \text{ cm}^2$
- Área do círculo = $3,14 \times 10^2 = 3,14 \times 100 = 314 \text{ cm}^2$

Para calcular quantos círculos de 314 cm^2 de área cabem num retângulo de 3500 cm^2 de área dividimos 3500 por 314, o que equivale a aproximadamente 11,15. Isto significa que cabem 11 círculos e, como era de esperar, sobra cartolina.

No entanto, este problema nos faz relacioná-lo com um outro. Como devo desenhar estes círculos para aproveitar a cartolina ao máximo?

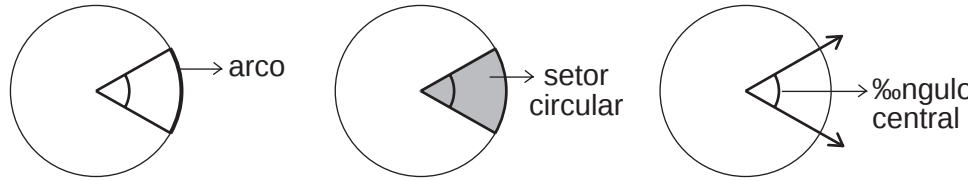


Para você pensar:

O que se pode concluir desmembrando a figura ao lado? É realmente possível desenhar 11 círculos de 10 cm de raio nesta cartolina? Por quê?

Comprimento do arco e área do setor circular

Muitas vezes estamos interessados em calcular apenas o comprimento de uma parte da circunferência (arco) ou a área de uma “fatia” do círculo (setor circular).



A todo arco está associado um ângulo central e a todo setor também corresponde um ângulo central. O ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.

O ângulo central máximo, que corresponde a uma volta completa e está associado à circunferência toda, mede 360° .

Sabendo disto, utilizamos o método de cálculo conhecido por **regra de três** para calcular o comprimento de um arco ou a área de um setor. Para tanto basta conhecer a medida do ângulo central correspondente.

EXEMPLO 3

O círculo ao lado tem raio medindo 2 cm. Vamos calcular a área de um setor circular de 45° .

$$\text{Área do círculo} = \pi (1,5) \cong 7,065 \text{ cm}$$

$$\text{Área do setor} = S = ?$$

$$7,065 \text{ cm} \quad \text{---} \quad 360^\circ$$

$$S \quad \text{---} \quad 45^\circ$$

$$S = \frac{7,065 \times 45^\circ}{360^\circ} @ 0,883 \text{ cm}^2$$

Usando novamente a regra de três podemos calcular o comprimento do arco, que corresponde ao ângulo de 45° nesta circunferência.

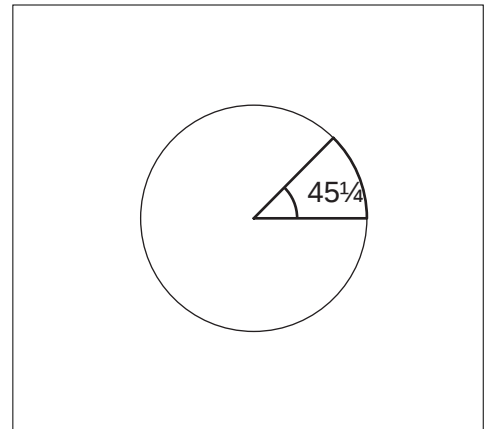
$$\text{Comprimento da circunferência} = 2 \cdot \pi \cdot 1,5 \cong 9,42 \text{ cm}$$

$$\text{Comprimento do arco} = c$$

$$9,42 \quad \text{---} \quad 360^\circ$$

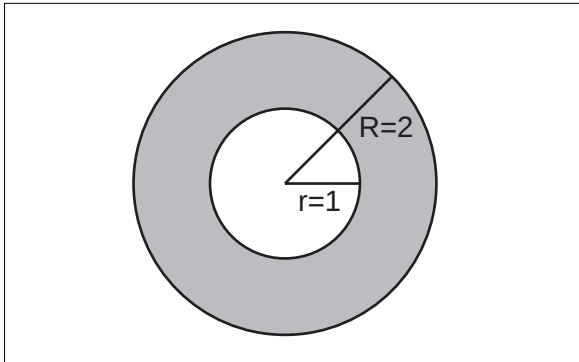
$$c \quad \text{---} \quad 45^\circ$$

$$c = \frac{9,42 \times 45^\circ}{360^\circ} @ 1,1775 \text{ cm}$$



Área da coroa circular

Como você leu na reportagem do início desta aula, coroa circular é a parte compreendida entre as circunferências de dois círculos de mesmo centro.



Na figura ao lado, a parte pintada é uma coroa circular. A área da coroa circular é calculada subtraindo-se as áreas dos dois círculos que a formam.

Nesta figura temos :

$$\text{Área do círculo maior} = \pi \cdot 2^2 \cong 12,56 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do círculo menor} = \pi \cdot 1^2 \cong 3,14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da coroa circular} = 12,56 - 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$$

Podemos escrever, de uma forma geral, que a área A de uma coroa circular é $A = \pi R^2 - \pi r^2$ ou $A = \pi (R^2 - r^2)$, onde R é o raio do círculo maior e r é o raio do círculo menor.

Razão entre áreas

Uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R\$ 4,80. Quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30 cm de diâmetro ?

Observe que o diâmetro da pizza maior é igual a $3/2$ do diâmetro da menor:

$$\frac{3}{2} \text{ de } 20 = (20 : 2) \times 3 = 30$$

No entanto, se você respondeu R\$ 7,20 = $(3/2) \cdot 4,80$ sua resposta está errada, pois, para o cálculo do preço, o que interessa é a razão entre as áreas das pizzas:

$$\text{Área da pizza menor} = 3,14 \cdot (20)^2 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da pizza maior} = 3,14 \cdot (30)^2 = 2826 \text{ cm}^2$$

$$\text{Razão entre as áreas} = \frac{2826}{1256} = \frac{9}{4}$$

Vemos então que a área da pizza maior é $9/4$ da área da menor. Portanto, o preço da maior deve ser $9/4$ do preço da pizza menor.

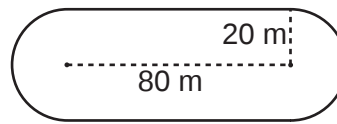
$$\frac{9}{4} \cdot \text{R\$ } 4,80 = \text{R\$ } 10,80$$

Conclusão: a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os comprimentos (diâmetro ou raio). Neste exemplo, $\frac{9}{4} = \left(\frac{30}{20}\right)^2$

Exercícios

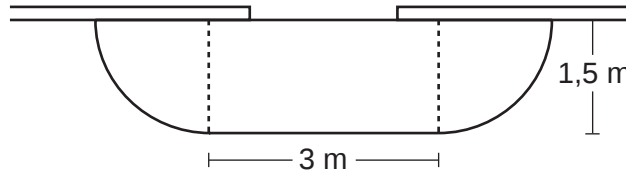
Exercício 1

Calcule o comprimento da pista de atletismo representada na figura abaixo.



Exercício 2

Calcule a área da varanda representada na figura abaixo



Exercício 3

O comprimento da linha do equador da Terra tem aproximadamente 40.000 km. Qual é o raio da Terra?

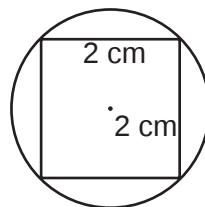
Exercício 4

Se o raio de um círculo é o triplo do outro, quantas vezes a área do primeiro é maior que a do segundo?

Exercício 5

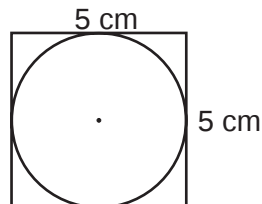
Calcule a área do círculo nas figuras abaixo.

a)



circunferência circunscrita

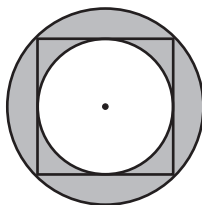
b)



circunferência inscrita

Exercício 6

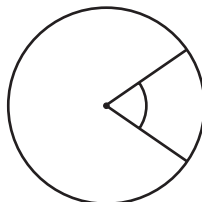
Determine a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita num mesmo quadrado de lado $\ell = 4$ cm



Exercício 7

Num círculo de raio $r = 10$ cm, calcule :

- o comprimento de um arco com $\alpha = 45^\circ$
- a área de um setor circular com $\alpha = 60^\circ$
- a área de um setor circular com $\alpha = 120^\circ$



α • um %ngulo central

Exercício 8

Uma pizza tem raio igual a 15 cm e está dividida em 6 fatias. Calcule a área de cada fatia.

Exercício 9

Uma praça circular tem 200 m de raio. Quantos metros de grade serão necessários para cerca-lá?

Exercício 10

Numa bicicleta de aro 26 (como no exemplo desta aula), quantas voltas completas as rodas precisam dar para um percurso de 3,76 km?

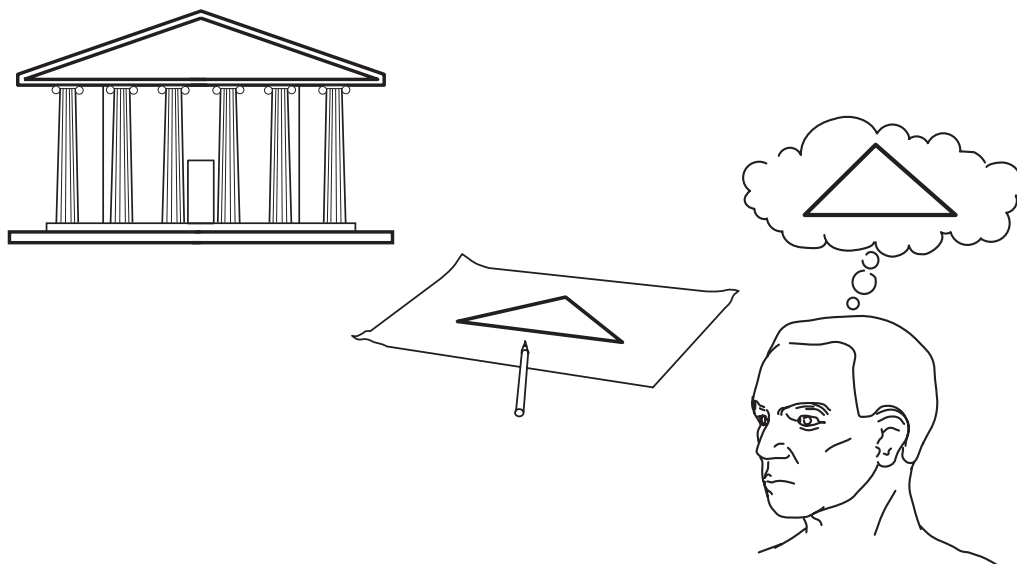
O Teorema de Tales

Introdução

A ciência, tão fundamental na era moderna, teve seu início por volta do ano 600 a.C. na cidade de Mileto, Grécia, especialmente com de Tales de Mileto. Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C. Não se sabe ao certo em que ano morreu.

Foi ele quem primeiro chamou a atenção para o aspecto abstrato dos objetos geométricos, ao considerar um triângulo ou uma pirâmide, por exemplo, não como coisas concretas, feitas de madeira ou pedra, mas como objetos do nosso pensamento. Uma de suas descobertas no campo filosófico foi a de que “não apenas os homens estão sujeitos a leis, mas também a Natureza”. E apontando para a sombra dos degraus de um estádio desportivo, teria dito: “Os ângulos dos degraus obedecem a uma lei: são todos iguais”. (Depois veremos esse exemplo com maiores detalhes.)

Assim, uma das idéias deste grande filósofo e matemático é esta: uma lei que se aplique a triângulos vale tanto para triângulos de construção (por exemplo, a construção de uma casa) como para aqueles desenhados (a planta da casa) e mesmo para triângulos...“imaginários”, como ele se referia aos triângulos abstratos, os do nosso pensamento, aqueles com que de fato lida a geometria.

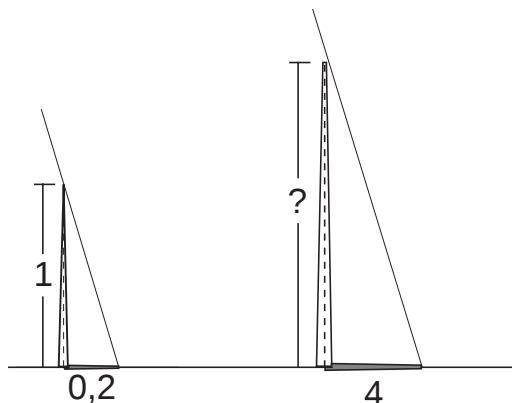


Outra importantíssima característica do pensamento de Tales é que estas leis matemáticas - ou **teoremas**, como são chamadas - devem ser provadas (ou demonstradas) por um raciocínio lógico. (E não apenas explicadas com argumentos religiosos ou míticos, como se fazia até então em lugares antes mais desenvolvidos, como o Egito e a Babilônia.) Desse modo, Tales procurava sempre demonstrar cada uma de suas afirmações novas baseando-se em outras afirmações já demonstradas, outros teoremas, formando assim cadeias de raciocínio.

Nesta aula você terá a oportunidade de redescobrir alguns desses teoremas bastante interessantes e úteis na vida prática que são atribuídos a Tales, especialmente aquele que ficou conhecido com seu nome: o Teorema de Tales.

Você ficará surpreso ao ver quantas aplicações diferentes existem destes teoremas: desde o cálculo da altura de prédios e outras distâncias inacessíveis (veja a aula 20) até o modo certo de aumentar a feijoada! Como veremos, tudo isso trata de proporcionalidade de números (ou **regra de três**). Na realidade, o Teorema de Tales é “a figura da regra de três”. Mas... cada coisa a seu tempo!

Conta-se que, numa viagem ao Egito, Tales foi desafiado pelos sacerdotes egípcios a explicar como “adivinhar” a altura de uma das pirâmides. Os sacerdotes acreditavam que essa informação era sagrada e havia sido inadvertidamente fornecida a ele, que, por esse motivo deveria ser preso. Tales explicou seu raciocínio exemplificando-o com o cálculo da altura de um obelisco cuja sombra era mais fácil de ser medida. Aqui está o problema para você tentar responder: Em certo momento do dia, uma vareta de 1 m, espetada verticalmente no chão, faz uma sombra que mede 20 cm. No mesmo instante, um obelisco de pedra, ali perto, faz uma sombra de 4 m. Qual a altura do obelisco?

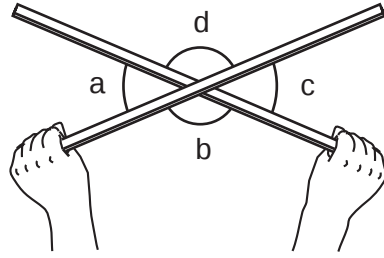


Atenção: como o Sol está muito longe de nós, podemos considerar seus raios como retas paralelas. Tente encontrar o que se pede trabalhando com papel quadriculado e régua.

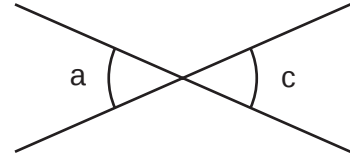
Ângulos opostos pelo vértice

Nossa aula

Um dos teoremas atribuídos a Tales é muito simples de ser entendido concretamente: quando seguramos uma vareta de madeira em cada mão e cruzamos essas varetas estamos representando retas concorrentes. Independentemente da abertura que você dá às varetas, elas sempre formam, à sua esquerda e à direita, dois ângulos (opostos pelo vértice) iguais.



Duas varetas formam
4 ângulos, opostos
dois a dois

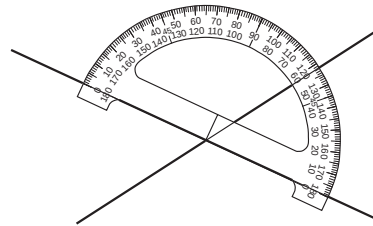


Quanto mede cada
um destes dois ângulos
opostos pelo vértice?

$\hat{a} = \dots$

$\hat{c} = \dots$

Lembre: Como se mede um ângulo com transferidor:



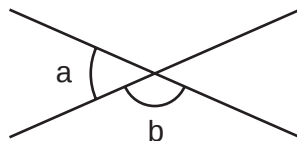
Exemplo: O menor dos ângulos que estas retas formam mede 58° . O maior mede $180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

“Por que ângulos opostos pelo vértice são sempre iguais?”, Tales se perguntou. Podemos explicar isso do seguinte modo, baseando-se na figura do transferidor: os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ formam juntos um ângulo de 180° (ângulo raso), que chamamos de ângulos suplementares (veja a figura abaixo); da mesma forma, também $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são ângulos suplementares. Ou seja:

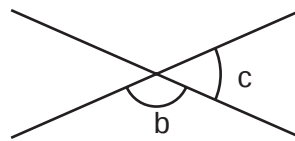
$$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ ; \text{ então } \hat{a} = 180^\circ - \hat{b}$$

$$\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ ; \text{ então } \hat{c} = 180^\circ - \hat{b}$$

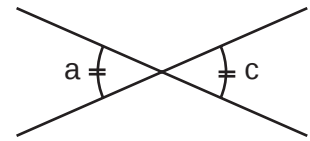
Conclusão : $\hat{a} = \hat{c}$ (C.Q.D.!).



$$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$$



$$\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

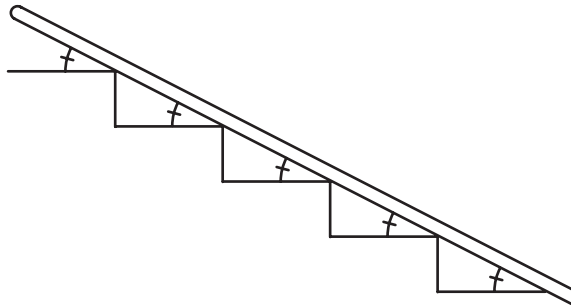


$$\text{Logo: } \hat{a} = \hat{c}$$

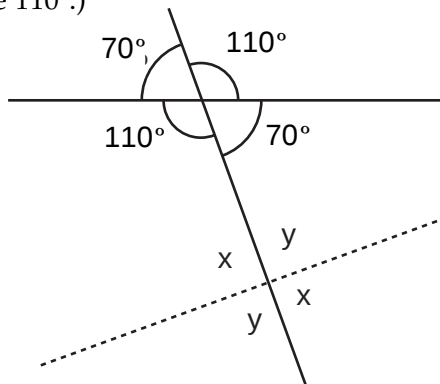
Sobre duas retas concorrentes não há muito mais o que dizer: dos quatro ângulos que se formam, quaisquer dos ângulos vizinhos são suplementares e quaisquer dos ângulos opostos pelo vértice são iguais. Assim, vamos estudar agora o que ocorre quando acrescentamos uma terceira reta a estas duas, paralela a uma delas.

Retas paralelas cortadas por uma transversal

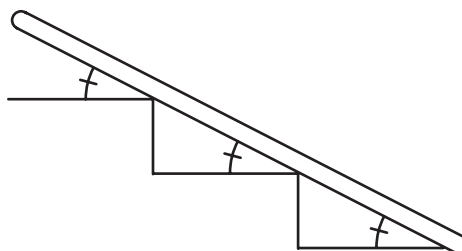
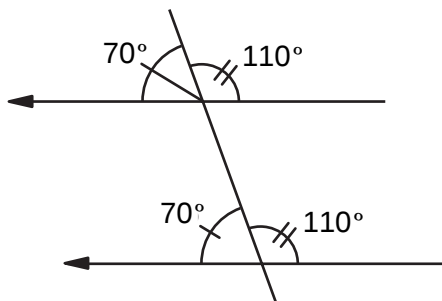
Júnior é um garoto esperto. Outro dia, no “velho Maracanã”, ele mostrava ao tio (com quem conversa muito sobre seus estudos) os ângulos formados nos degraus do estádio. Ele ilustrou seu raciocínio deitando o pau da bandeira de seu clube atravessado em relação aos degraus. Visto de lado, o pau da bandeira forma ângulos iguais com todos os degraus. Vemos também que isso só acontece porque os degraus são todos horizontais, e portanto paralelos.



Voltemos, então, ao que acontece quando acrescentamos uma terceira reta às duas retas concorrentes do início da aula. De modo geral, a terceira reta formará quatro novos ângulos (dois pares), diferentes dos ângulos das retas iniciais... (Meça os ângulos x e y da figura abaixo, e compare-os com os ângulos iniciais, que medem 70° e 110° .)



Mas há uma posição especial na terceira reta em que x e y medem precisamente 70° e 110° : quando a terceira reta é paralela a uma das retas. (Como os degraus que Júnior viu no estádio, que são paralelos).



Esta experiência do garoto pode ter sido vivida também por Tales de Mileto, que há 2600 anos enunciou:

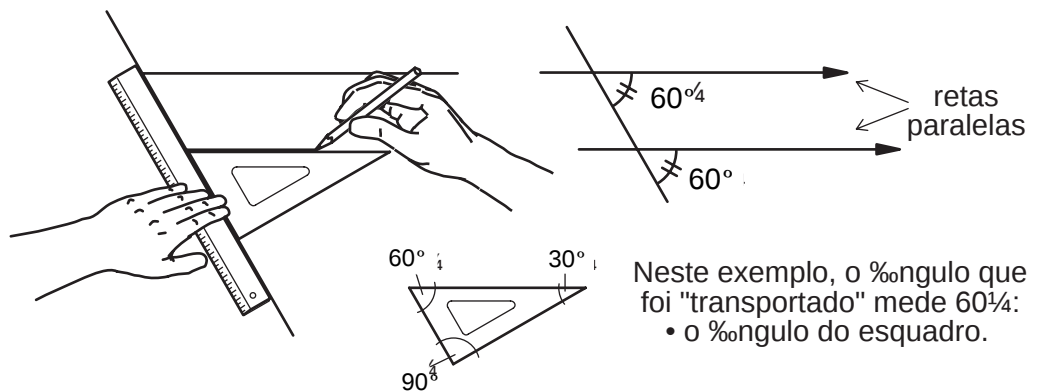
Quando retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, os ângulos formados numa das retas paralelas são correspondentes e iguais aos ângulos da outra.

É fácil verificar isso concretamente. A seguir, o item sobre a aplicação prática no desenho técnico mostra como o ângulo de uma das retas paralelas é “transportado” pela reta transversal até encaixar-se no ângulo da outra reta. Por isso os ângulos são correspondentes e iguais.

Uma aplicação prática no desenho técnico

Na verdade, você pode verificar experimentalmente (como fez acima, ao medir os ângulos) que a **recíproca** desta afirmação também é verdadeira. Ou seja: quando os ângulos são correspondentes e iguais, então as retas são paralelas. Desenhe ângulos correspondentes e constate o paralelismo das retas.

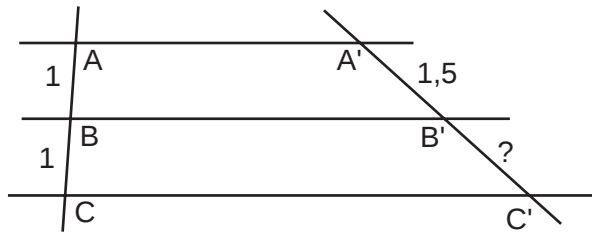
Este novo fato tem uma aplicação prática muito usada no desenho técnico, como, por exemplo, no desenho da planta de uma casa. Para traçar retas paralelas seguramos a régua e o esquadro e riscamos as retas, como mostra a figura:



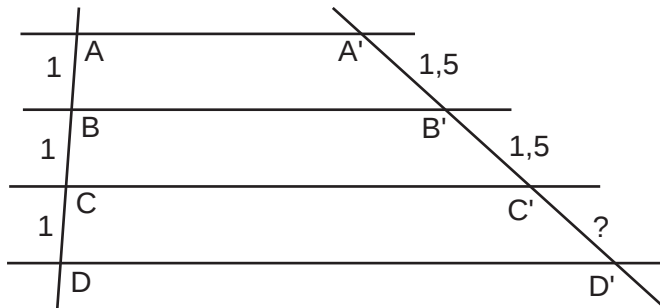
Segmentos proporcionais

Vimos o que acontece com os ângulos quando duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal: eles são transportados de uma das retas paralelas à outra. Vejamos o que ocorre quando não duas mas três retas são paralelas: como você já sabe, os ângulos formados em todas as três são iguais. Mas não apenas isso; agora também formam-se segmentos.

Na figura a seguir, eles estão representados por AB e BC. Algo muito interessante aconteceu. Se AB e BC forem iguais (no exemplo $AB = BC = 1$ cm) e traçarmos qualquer outra reta transversal, então os dois novos segmentos A'B' (lê-se: "A linha, B linha") e B'C'-serão.... (meça B'C'; e compare-o com A'B', que neste exemplo mede 1,5 cm. Então conclua a frase anterior.)

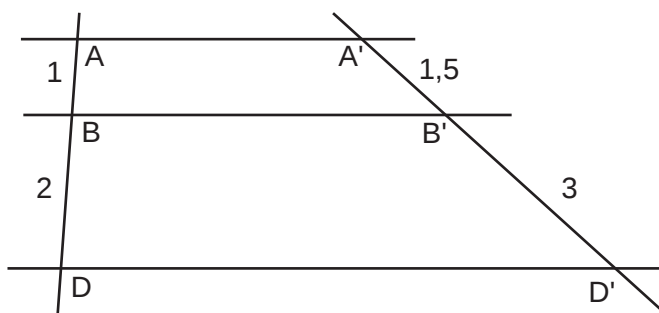


$A'B'$ e $B'C'$ também serão iguais isto é, $B'C' = 1,5 = A'B'$. Da mesma forma, se traçássemos uma quarta reta paralela passando pelo ponto D tal que também $CD = 1$, então quanto mediria $C'D'$? É claro que, pelo mesmo motivo, $C'D' = 1,5 = B'C' = A'B'$.



Podemos enunciar isto da seguinte maneira: quando um feixe (isto é, um conjunto de três ou mais retas) de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, se os segmentos numa das retas forem iguais, (no exemplo, $AB = BC = CD = 1$), então os segmentos na outra reta também o serão ($A'B' = B'C' = C'D' = 1,5$).

“Mas, e se os segmentos na primeira reta não forem iguais? Como no exemplo acima, onde $AB = 1$ cm e $BD = 2$ cm o que podemos dizer sobre $A'B'$ e $B'D'$ (além do fato de que também não são iguais)? Veja a figura abaixo: se $A'B' = 3$ cm, temos $B'D' = 6$ cm. Olhe para estes quatro números da figura: 1; 2; 1,5 e 3. Tomados nesta ordem, formam duas frações iguais: $\frac{1}{2} = \frac{1,5}{3}$.

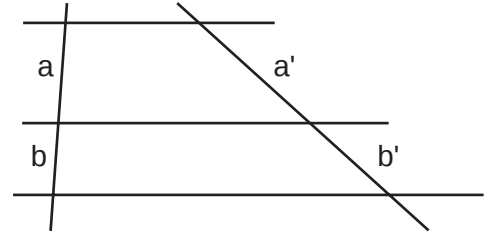


Dizemos que estes quatro números são **números proporcionais**, e escrevemos : “1:2 :: 1,5:3”. (Lê-se: “1 está para 2, assim como 1,5 está para 3). Assim, os segmentos que têm estas medidas, na figura representados respectivamente por AB, BC, $A'B'$ e $B'C'$, são segmentos proporcionais. De um modo geral, definimos: AB e BC são **segmentos proporcionais** a $A'B'$ e $B'C'$ (nesta ordem), se $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

O Teorema de Tales

Como se pôde ver na última figura da página anterior, o feixe de retas paralelas “transporta” uma razão de segmentos: ali, a razão dos segmentos AB e BC (no caso, $\frac{1}{2}$) é igual à razão dos segmentos $A'B'$ e $B'C'$ ($\frac{3}{6}$). O Teorema de Tales fala exatamente isso:

Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das retas transversais são proporcionais aos segmentos determinados na outra.



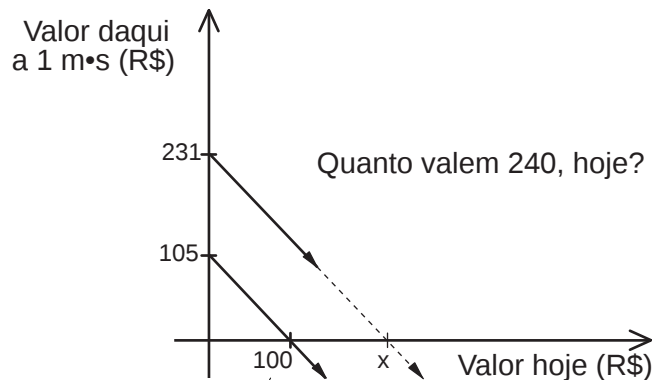
Teorema de Tales: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

(se as três retas forem paralelas.)

Uma “aplicação rendosa” do Teorema de Tales

Dona Tetê quer saber qual entre dois crediários é o mais vantajoso. Na Loja X um aparelho de som custa R\$ 410,00 à vista. Já na Loja Y, o mesmo aparelho de som sai por duas parcelas a primeira de R\$ 200,00 e a segunda, no próximo mês, de R\$ 231,00. Considerando que a inflação prevista é de 5% no próximo mês, qual dos dois crediários sai mais “em conta” para dona Tetê?

Dona Tetê pode resolver este problema com um gráfico, se quiser visualizar os números com que está trabalhando. Veja como:



Note: inflação = 5%

Os valores em reais no próximo mês serão proporcionais aos valores de hoje devido à inflação. Assim se chamamos de x o valor correspondente hoje aos R\$ 231,00 do próximo mês, podemos escrever: $\frac{100}{x} = \frac{105}{231}$

Temos uma regra de três. Portanto, para achar x podemos usar a fórmula “o produto dos meios (x e 105) é igual ao produto dos extremos (100 e 231)”.

Logo, $105x = 23.100$, e então $x = 220$. Se dona Tetê traçar, pelo valor 240 do gráfico, uma reta paralela à que liga o 105 (daqui a um mês) ao 100 (hoje), encontrará precisamente 220 no eixo do hoje. Isso significa que, em valores de hoje, os R\$ 231,00 que dona Tetê pagaria no próximo mês equivalem a R\$ 220,00. Assim, o crediário Y está pedindo $200 + 220 = \text{R\$ } 420,00$ pelo aparelho de som, enquanto no crediário X o compramos por R\$ 410,00 que é, portanto, o mais vantajoso dos dois para o bolso do consumidor. É, dona Tetê: mais R\$ 10,00 para o nosso “crédito de gratidão” ao mestre Tales de Mileto, não é mesmo?

Semelhança de Triângulos

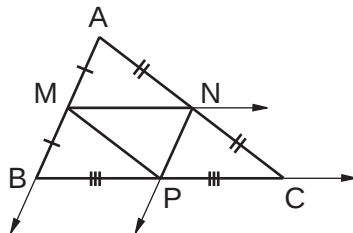
Se aplicarmos o Teorema de Tales num triângulo qualquer vamos obter resultados bastante interessantes e reveladores sobre os triângulos. Sendo ABC um triângulo, traçamos por M, ponto médio de AB, uma reta paralela ao lado BC e encontramos N. Então:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \text{ logo, } AN = NC, \text{ e N é o ponto médio do segmento.}$$

1

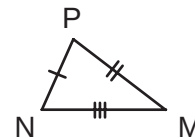
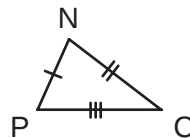
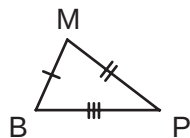
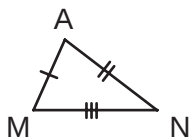
Analogamente, uma reta passando por N paralela a AB nos indica P, ponto médio de BC: $BP = PC = \frac{BC}{2}$. Mas, como BMNP é um paralelogramo,

$$MN = \frac{BC}{2} = BP = PC$$



Pelo mesmo raciocínio vemos que $NP = AM = MB$ e $MP = AN = NC$. Isso significa que se você desenhar o triângulo, cujos vértices são os pontos médios do triângulo maior, verá que são formados quatro triângulos... Todos iguais! (Lembre-se que ABC é um triângulo qualquer.)

Estes quatro triângulos são iguais, pois têm os três lados e os ângulos respectivamente iguais, conforme nos garante o teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal. (Assinale esses ângulos iguais na figura anterior e depois nesta abaixo.)



É comum dizer “triângulos congruentes” (bem como “segmentos congruentes”) no lugar de “iguais”. Mas alguns professores hoje estão abandonando este termo.

Exercícios

Exercício 1

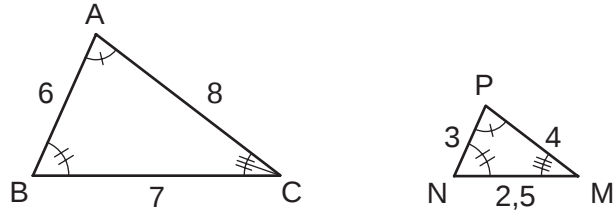
No triângulo ABC da figura acima, temos AB = 6 cm, AC = 8 cm e BC = 7 cm. Quanto medem os lados PNM (nas mesmas unidades)?

MN =

NP =

PM =

Cada lado de PNM é a metade de um dos lados de ABC, conforme as figuras acima nos mostraram. Assim, cada novo lado de PNM é obtido tomando-se a mesma razão ($\frac{1}{2}$) em relação a um lado do triângulo inicial ABC. Observe que apesar dos dois triângulos ABC e PNM não serem iguais eles têm os mesmos ângulos.



Quanto aos ângulos:

$$\hat{P} = \hat{A}$$

$$\hat{N} = \hat{B}$$

$$\hat{M} = \hat{C}$$

Quanto aos lados:

$$\frac{PN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{PM}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{NM}{BC} = \frac{2,5}{7} = \frac{1}{2}$$

Neste caso, dizemos que ABC e PNM são triângulos semelhantes e a razão da semelhança do segundo triângulo em relação ao primeiro é $\frac{1}{2}$.

De um modo geral, dizemos que dois triângulos - vamos chamá-los de A'B'C' e ABC, para dizer que A' corresponde a A, B' corresponde a B, e C' a C - são **triângulos semelhantes**, quando:

- os ângulos de A'B'C' e ABC são correspondentes e iguais: $\hat{A'} = \hat{A}$
 $\hat{B'} = \hat{B}$
 $\hat{C'} = \hat{C}$ ou
- os lados de A'B'C' e ABC são correspondentes e proporcionais:

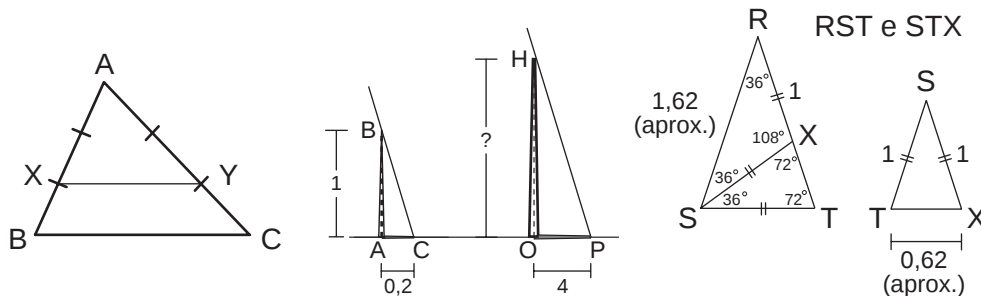
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Esta razão constante é a **razão de semelhança** de A'B'C' para ABC.

Dá para perceber que dois triângulos semelhantes têm sempre a mesma forma, sendo um deles uma ampliação ou uma redução do outro. No exemplo acima, PNM é metade de ABC. Que tal agora reler a aula e fazer os exercícios?

Exercício 2

Estes pares de triângulos são triângulos semelhantes. Encontre a razão de semelhança do segundo triângulo para o primeiro:



a) ABC e AXY

$$\frac{AX}{AB} = \dots\dots$$

$$\frac{AY}{AC} = \dots\dots$$

$$\frac{XY}{BC} = \dots\dots$$

b) OHP e ABC

$$\frac{AB}{OH} = \frac{AC}{OP} = \dots\dots$$

c) RST e STX

$$\frac{SX}{RT} = \dots\dots$$

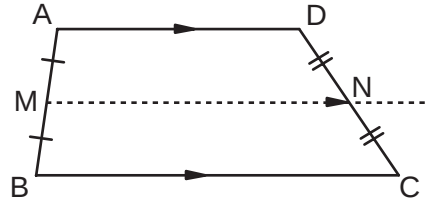
$$\frac{TX}{ST} = \dots\dots$$

São a mesma razão?

Sugestão: Já que os lados de ABC estão divididos em 3 partes iguais, divida ABC em 9 triângulos iguais.

Exercício 3

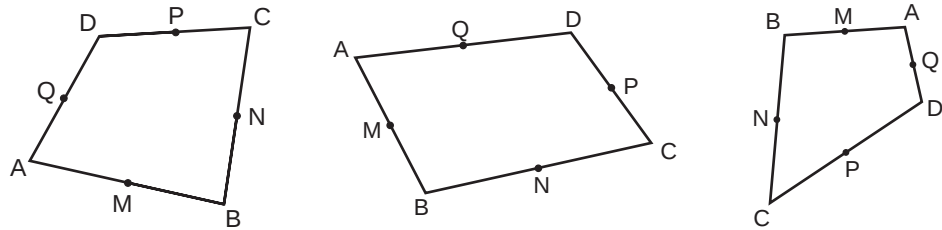
Seja ABCD um trapézio de bases BC e AD e M o ponto médio de AB



- Qual dos teoremas desta aula nos garante que, se traçarmos por M uma reta paralela às bases do trapézio encontraremos N, também ponto médio (de CD)?
- Por que MN é chamada de “base média” do trapézio? Como calcular MN?
- Meça AD, BC e MN na figura, e confirme sua resposta para o item b).

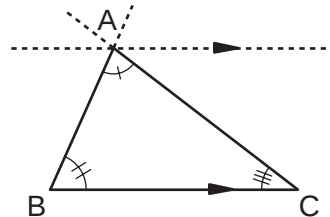
Exercício 4

Que tipo de quadrilátero é MNPQ, formado pelos pontos médios de cada lado de ABCD?



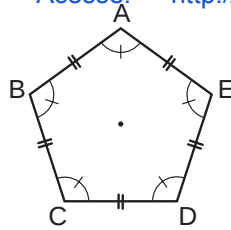
(Sugestão: Trace, nos quadriláteros as diagonais AC e BD; depois use esta aula para mostrar que os lados de MNPQ são paralelos a essas diagonais. Logo...)

Exercício 5



- Seja ABC um triângulo qualquer. Trace uma reta paralela a BC passando por A. Usando os teoremas desta aula, “transporte” os ângulos B e C para junto do ângulo A e mostre que A, B e C formam um ângulo raso; isto é, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.
- Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Que fórmula podemos deduzir para a soma de seus ângulos?
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \dots$
 (Sugestão: Como aprendemos a fazer com outros polígonos: divida ABCD em triângulos.)
- Se ABCDE é um pentágono qualquer, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \dots$
 Dê exemplo.
- Quanto mede a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados?
 (Sugestão: Observe os itens anteriores: triângulo ($n = 3$), quadrilátero ($n = 4$) e pentágono ($n = 5$) depois, responda o que se pede para n genérico, testando sua fórmula nestes três casos já respondidos.)

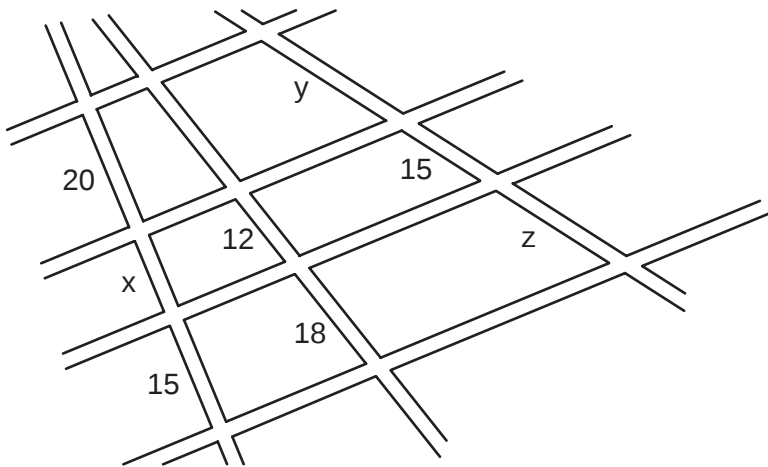
Exercício 6



- Se ABCDE é um pentágono regular, isto é, de lados iguais e ângulos iguais, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \dots\dots\dots$ (Rever o **Exercício 5c.**)
- Encontre os ângulos do triângulo ACD.
- Você já viu um triângulo semelhante a esse nesta aula?

Exercício 7

Este mapa mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa (em km), mas as outras precisam ser calculadas. Complete o mapa com as distâncias que faltam.



Exercício 8

Dados os números **a**, **b**, **c** e **d**, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, escrevemos também **a : b :: c : d** (e lê-se: **a** está para **b**, assim como **c** está para **d**). Em cada item abaixo, escreva V ou F conforme ele seja verdadeiro ou falso. Os quatro números dados são, na ordem em que aparecem, números proporcionais?

- 1:3 :: 2:4 () (Que relação esta proporção tem com 1:2 :: 3:6?)
- 6:2 :: 3:1 () (idem.)
- 3:1 :: 2:6 ()
- 10:12 :: 20:26 ()
- $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3:2$ ()

Exercício 9

Uma propriedade dos números proporcionais afirma que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Ilustre esta propriedade com uma figura e meça todos os segmentos que aparecem: a, b, c, d, a + c e b+d.

Sugestão: "Pegue carona" em alguma figura da aula de hoje.

A raiz quadrada

Introdução

Qual é o número positivo que elevado ao quadrado dá 16? Basta pensar um pouco para descobrir que esse número é 4.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

O número 4 é então chamado **raiz quadrada** de 16, e essa operação, chamada de **radiciação**, é representada assim:

$$\sqrt{16} = 4$$

Vamos agora explorar um pouco mais este exemplo pedindo ao leitor para resolver a equação

$$x^2 = 16$$

Lembre que resolver uma equação significa encontrar **todos** os valores que, se colocados no lugar do **x**, tornam a igualdade correta. Já sabemos que **x = 4** é uma solução porque **4² = 16**. Já que, também,

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

descobrimos que a equação **x² = 16** tem **duas** soluções: **x = 4** e **x = -4**. Então, toda vez que tivermos uma equação desse tipo, nós a resolveremos assim:

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Observe que o símbolo **±4** (lê-se: mais ou menos 4) representa dois números: o **4** e o **-4**, que são as duas soluções da equação dada.

Vamos então explorar a raiz quadrada e ver algumas aplicações. Em primeiro lugar, observe os exemplos a seguir:

$\sqrt{9} = 3$	porque	$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$\sqrt{100} = 10$	porque	$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$\sqrt{5,76} = 2,4$	porque	$2,4^2 = 2,4 \cdot 2,4 = 5,76$

Nossa aula

Repare que os dois primeiros exemplos são simples, mas o terceiro já parece difícil. Como podemos descobrir que a raiz quadrada de 5,76 é 2,4? Esta pergunta será respondida ao longo desta aula, mas antes, vamos mostrar como isso começou.

Um Pouco de História

Por volta do século VI a.C. a matemática começou a se desenvolver de forma organizada. Temos conhecimento de que, ainda antes dessa época, existiam povos, como os egípcios e os babilônios, que usavam matemática para resolver problemas que ocorriam em suas comunidades. Mas, suas fórmulas, descobertas através de experiências, nem sempre eram corretas, ou seja, davam certo em alguns casos mas em outros não.

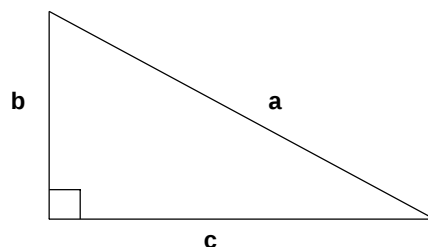
Esse desenvolvimento organizado da matemática teve início na Grécia antiga devido, principalmente, às descobertas de dois gênios chamados Tales e Pitágoras. Tudo o que sabemos desses dois primeiros grandes matemáticos que a humanidade conheceu foram relatos de outras pessoas, de forma que, hoje, é impossível saber o que é lenda e o que realmente aconteceu. De qualquer forma, o importante foram as idéias que surgiram naquela época e que permitiram o rápido e sólido desenvolvimento da matemática. Esse desenvolvimento se deu através de **teoremas** que são afirmações válidas em **todas** as situações de um mesmo tipo, e são demonstradas a partir de conhecimentos anteriores.

O Teorema de Pitágoras

No século VI a.C. foi descoberta uma propriedade válida em todos os triângulos retângulos. Ela ficou conhecida como **Teorema de Pitágoras**.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Essa afirmação, que será demonstrada na nossa próxima aula, pode ser escrita como uma fórmula. Se em um triângulo retângulo, representamos o comprimento da hipotenusa por **a** e os comprimentos dos catetos por **b** e **c** (como na figura abaixo),



então, o Teorema de Pitágoras nos diz que

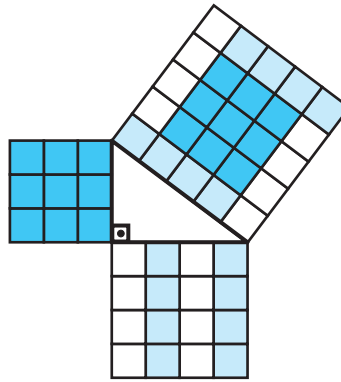
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Por exemplo, já era conhecido mesmo antes de Pitágoras que o triângulo de lados **3, 4 e 5** é um triângulo retângulo. De fato, observe que, se na fórmula acima fizemos **a = 5, b = 4 e c = 3**, obtemos:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

que é uma igualdade correta. Observe ainda que **5²** é a área de um quadrado de lado **5**; **4²** é a área de um quadrado de lado **4** e **3²** é a área de um triângulo de lado **3**. Veja então na figura a seguir a seguinte interpretação do Teorema de Pitágoras:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

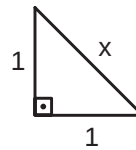


A volta da raiz quadrada

Será que todo número positivo possui uma raiz quadrada?

Esta é uma pergunta intrigante e a resposta é: sim.

Vejamos o seguinte exemplo. Consideremos um triângulo retângulo com catetos iguais a 1 e tratemos de calcular sua hipotenusa.



Esse é um triângulo conhecido. Ele já apareceu na aula 7 e esse problema foi resolvido, aproximadamente, pela medida do comprimento da hipotenusa. Agora, podemos resolvê-lo pelo teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

Já sabemos que essa equação tem duas soluções: uma positiva e outra negativa. Mas, como **x** é um comprimento, então ele é representado por um número positivo.

Daí,

$$x = \sqrt{2}$$

Temos então que x é a **raiz quadrada** de 2. Mas, que número é esse? Sabemos que ele existe porque estamos vendo sua representação no desenho. Vamos ver que, neste caso, ele só pode ser determinado **aproximadamente**.

Façamos então algumas tentativas.

$$\begin{aligned} 1,2^2 &= 1,44 && (\text{é pouco}) \\ 1,3^2 &= 1,69 && (\text{é pouco}) \\ 1,4^2 &= 1,96 && (\text{é pouco mas está próximo}) \\ 1,5^2 &= 2,25 && (\text{passou de 2}) \end{aligned}$$

Concluimos que 1,4 é uma **aproximação** de $\sqrt{2}$ por falta, ou seja, ele é próximo mas é **menor** que o valor que procuramos. Vamos então acrescentar mais uma casa decimal ao 1,4 para continuar nossas tentativas.

$$\begin{aligned} 1,41^2 &= 1,9881 && (\text{é pouco}) \\ 1,42^2 &= 2,0164 && (\text{passou}) \end{aligned}$$

Concluimos agora que 1,41 é uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$ melhor que a anterior. Podemos continuar tentando encontrar mais uma casa decimal.

$$\begin{aligned} 1,413 &= 1,9966 && (\text{é pouco}) \\ 1,414 &= 1,9994 && (\text{é pouco}) \\ 1,415 &= 2,0022 && (\text{passou}) \end{aligned}$$

Temos então que 1,414 é uma aproximação ainda melhor para $\sqrt{2}$. Esse processo pode continuar mas, infelizmente, **nunca** conseguiremos encontrar um número decimal cujo quadrado seja exatamente 2. Tudo o que podemos fazer é encontrar aproximações cada vez melhores.

Uma máquina de calcular comum, com tecla de raiz quadrada, faz isso muito bem. Apertando as teclas $\boxed{2}$ e $\sqrt{}$ encontramos no visor o número 1,4142135 que é uma excelente aproximação para a raiz quadrada de 2.

Esses números, com infinitas casas decimais e que só podemos conhecer por meio de aproximações, são chamados de números **irracionais**.

Os números irracionais aparecerão com grande frequência em nosso curso. Mas, felizmente, em nossos problemas práticos só necessitaremos de aproximações com poucas casas decimais.

Uma aplicação da raiz quadrada

Certo dia, um automóvel vinha em grande velocidade por uma estrada quando um transeunte distraído foi atravessá-la. O motorista pisou fundo no freio, os pneus cantaram no asfalto e felizmente o carro parou a uma pequena distância do assustado pedestre. Um guarda próximo quis logo multar o motorista por excesso de velocidade mas o motorista garantiu que vinha a menos de 80 km por hora, que era a velocidade máxima permitida naquele trecho. Como o guarda poderia saber a velocidade com que vinha o carro?

É possível saber. Em uma freada de emergência os pneus deixam uma marca no asfalto. Medindo o comprimento dessa marca é possível saber, aproximadamente a velocidade com que vinha o carro. A fórmula, obtida através da física, é a seguinte:

$$v = 14,6\sqrt{c}$$

onde c é o comprimento da marca deixada pelos pneus em metros e v é a velocidade do carro em quilômetros por hora.

Na nossa história, os pneus do carro deixaram gravadas no asfalto uma marca de 43 m. Aplicando a fórmula, teremos:

$$v = 14,6 \cdot \sqrt{43} = 14,6 \cdot 6,56 = 95,78$$

ou seja, o carro vinha a aproximadamente 96 km/h e, portanto, seu motorista deveria ser multado.

Propriedades da raiz quadrada

Já sabemos que todo número positivo possui raiz quadrada. Quanto vale a raiz quadrada de zero?

Pense:

Vale zero, é claro, porque $0^2 = 0$. E quanto será a raiz quadrada de - 3?

Pense:

Essa não existe, porque quando elevamos qualquer número ao quadrado, o resultado é sempre positivo. Logo, nenhum número negativo possui raiz quadrada. A nossa primeira propriedade será, então:

$$\text{I - Se } a \geq 0 \text{ existe } \sqrt{a}. \text{ Se } a < 0, \text{ não existe } \sqrt{a}$$

A nossa segunda propriedade é uma consequência da definição de raiz quadrada:

$$\text{II - Se } a \geq 0, \text{ então } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

A terceira e a quarta propriedades vão nos ajudar a operar com as raízes quadradas:

$$\text{III - Se } a \text{ e } b \text{ são positivos, então } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{IV - Se } a \text{ e } b \text{ são positivos (e } b \neq 0), \text{ então } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Observe agora o exemplo seguinte, no qual aplicaremos essas propriedades na solução de uma equação:

EXEMPLO

Use a máquina de calcular para obter aproximadamente (4 casas decimais) a solução positiva da equação.

$$3x^2 = 7$$

Solução:

A primeira coisa a fazer é dividir por 3 para isolar a incógnita.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{3} &= \frac{7}{3} = \\ x^2 &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Agora vamos extrair a raiz quadrada. Neste caso, não precisaremos colocar o sinal $\pm$ do lado direito porque o enunciado só nos pede para determinar a solução positiva. Temos então:

$$x = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Observe agora como usamos as propriedades para dar a resposta de outra forma. Pela propriedade IV, podemos escrever

$$x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

É sempre incômodo ter uma raiz no denominador de uma fração. Para resolver isso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo próprio denominador. Chamamos isto de **racionalizar** o denominador.

$$x = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

Pelas propriedades II e III temos que $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ e ainda, $\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{7 \times 3} = \sqrt{21}$. Então,

$$x = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Esta é a solução positiva da nossa equação. Usando a máquina, e digitando

$$\boxed{2} \boxed{1} \boxed{\sqrt{}} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{=}$$

encontraremos como aproximação de x o número 1,5275.

Exercício 1

Determine as raízes quadradas

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{64}$

c) $\sqrt{196}$

Exercício 2

Resolva as equações

a) $x^2 = 36$

b) $2x^2 = 98$

Exercício 3

Sem usar a tecla $\sqrt{}$ de sua calculadora, determine as raízes abaixo fazendo tentativas e aproximações.

a) $\sqrt{529}$

b) $\sqrt{1156}$

c) $\sqrt{57,76}$

Exercício 4

Determine um valor aproximado para $\sqrt{3}$ com duas casas decimais.

Exercícios

Exercício 5

Se a é um número positivo, complete:

a) $\sqrt{a^2} =$

b) $\sqrt{a^4} =$

c) $\sqrt{a^6} =$

Exercício 6

Simplifique as raízes fatorando o número que está em baixo do radical.

Exemplo: $\sqrt{512} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{2} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

(Para recordar as regras de operações com potências reveja a aula 14.)

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{800}$

Exercício 7

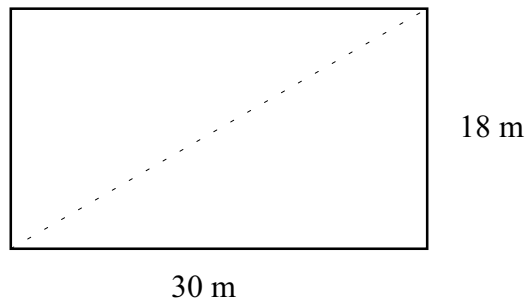
Racionalize os denominadores e dê valores aproximados (com 2 decimais) para as frações abaixo.

a) $\frac{10}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

Exercício 8

Uma certa quadra de futebol de salão tem 30 m de comprimento e 18 m de largura. Determine um valor aproximado para o comprimento de sua diagonal.



Exercício 9

Na casa de João existe um quarto cujo chão é quadrado e tem 12 m^2 de área. Quanto mede, aproximadamente o lado desse quadrado?

O Teorema de Pitágoras

Introdução

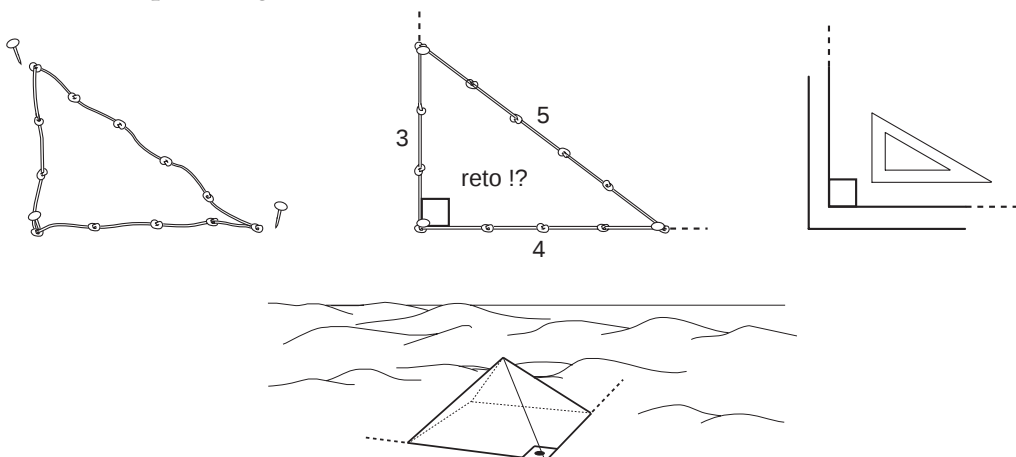
Sem dúvida, “O Teorema de Pitágoras!” é a resposta mais freqüente que as pessoas dão quando perguntamos do que elas se lembram das aulas de Matemática. E quando questionamos se elas sabem o que o teorema diz, muitas respondem: “Não lembro ao certo, mas falava da hipotenusa e dos catetos... o quadrado da hipotenusa...”

Estas palavras a gente não esquece: **Teorema de Pitágoras, hipotenusa, catetos**. Alguns, no entanto, já não se lembram mais do enunciado do Teorema de Pitágoras. Mas nós acreditamos que, depois da aula de hoje, mesmo que você também não se lembre, ainda assim saberá como deduzi-lo novamente.

Vamos mostrar na página 143 uma figura muito simples e reveladora que os chineses já conheciam há muito tempo, antes mesmo de Pitágoras, e que nos permite deduzir o teorema. Essa figura você não esquecerá, principalmente se você a fizer com recortes de papel ou mesmo blocos de madeira. A beleza do teorema compensa o esforço desse trabalho extra.

Antes de começarmos nossa aula, aqui está uma aplicação prática e interessante deste famoso teorema para que você possa refletir a respeito.

Alguns povos antigos usavam um instrumento muito simples e prático para obter ângulos retos: uma corda. Nela faziam nós a distâncias iguais e, então, marcavam três nós a distâncias de três, quatro e cinco nós entre si, conforme mostra a ilustração, juntando depois o primeiro ao último nó. Quando esticavam esta corda, fixando-a nos três nós marcados, obtinham um triângulo... retângulo! Será mesmo reto o ângulo maior do triângulo 3, 4 e 5? (Faça o experimento e meça o ângulo maior do triângulo com seu esquadro ou transferidor. Você concorda que o ângulo é reto?)



Seria impossível resumir a vida e as idéias de Pitágoras apenas em alguns parágrafos, tal é a multiplicidade de aspectos que apresenta. Sem falar no mistério que envolve sua figura. Acredita-se que tenha nascido em Samos (Grécia antiga) por volta de 558 a.C., e tenha vivido até os 99 anos, embora esses dados não sejam exatos. Desse véu de mistério o que emerge é o Pitágoras filósofo, matemático e músico. Buscou sabedoria em toda parte, até mesmo quando esteve preso na Babilônia. Um de seus mestres foi Tales de Mileto (que acabamos de conhecer na Aula 17), que o teria aconselhado a visitar o Egito, onde não só estudou geometria, como seu mestre, mas também aprendeu a ler hieróglifos (a escrita egípcia) com os próprios sacerdotes egípcios. E mais ainda: parece ter sido iniciado nos mistérios da religião egípcia.

Outros aspectos interessantes da vida de Pitágoras dizem respeito a algumas idéias bastante avançadas para sua época. Por exemplo: dizem que era vegetariano e um forte defensor da vida em geral, tendo-se declarado contrário ao sacrifício de animais, muito comum em sua época. Como seu contemporâneo distante Buda, acreditava que todos os seres humanos eram iguais e mereciam a liberdade; seria este o motivo pelo qual teria libertado seu escravo Zalmoxis. Pitágoras e os pitagóricos, alunos da escola que fundou, eram conhecidos amantes da liberdade.

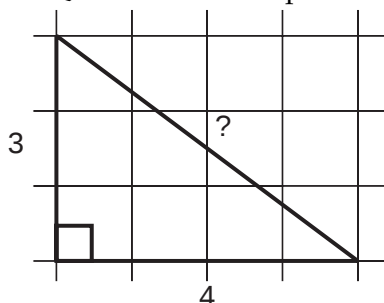
Se você está atento ao que dissemos, deve ter ficado intrigado: *“Por que chamamos Teorema de Pitágoras, se os chineses já conheciam o teorema muito antes dele?”*

Você não deixa de ter razão. Na verdade é muito comum que um teorema receba o nome de alguém que não tenha sido o primeiro a demonstrá-lo. Mas o mérito de Pitágoras não é menor, pois foi o responsável por ter aprendido a pensar a geometria de maneira abstrata, e não em relação a objetos concretos, como se fazia até então. Espírito científico, Pitágoras afirmava: *“A fórmula da hipotenusa em relação aos catetos é verdadeira não apenas em triângulos retângulos de lajotas ou aqueles desenhados na lousa, mas também para todos os triângulos retângulos que ainda não vimos, e mais ainda, para qualquer triângulo retângulo que pensemos”*.

“Mas, afinal, o que é o Teorema de Pitágoras?”, você deve estar se perguntando. Vamos a ele!

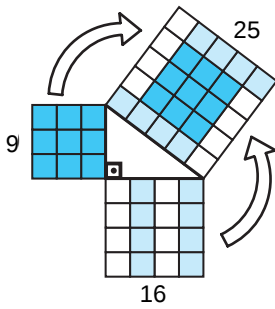
O Teorema de Pitágoras

Vamos trabalhar um pouco com as mãos. Pegue um papel quadriculado e desenhe um triângulo retângulo de 3 cm na vertical e 4 cm na horizontal. Sabemos que este triângulo é um triângulo retângulo, porque seus lados (catetos) estão em direções perpendiculares (horizontal e vertical). A pergunta para você é: *“Quanto mede a hipotenusa desse triângulo?”*



Você deve ter encontrado 5 cm para a medida da hipotenusa. Será mesmo? Será que a geometria pode provar que a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cm mede 5 cm?

“O que há de especial em medir 5 cm e não 5,1 ou 4,9?”, alguém poderia perguntar. Pois veja o que acontece se os lados forem iguais a 3, 4 e 5 cm. Se construirmos um quadrado com cada um dos três lados, então teremos o triângulo retângulo cercado por três quadrados. O que podemos dizer sobre as áreas destes três quadrados?



área do
quadrado
de
um cateto

$$3^2$$

$$9$$

área do
quadrado
do outro
cateto

$$4^2$$

$$16$$

+

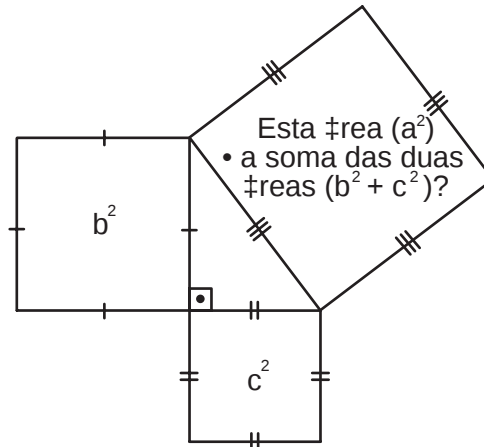
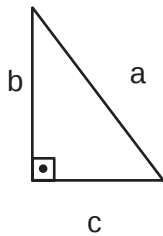
área do
quadrado da
hipotenusa
(se 5 estiver certo)

$$5^2$$

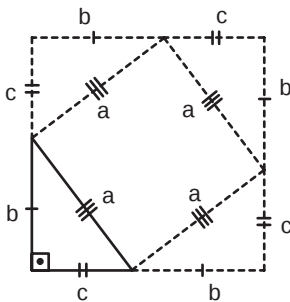
$$25$$

=

O que Pitágoras se perguntou foi: “Será que não apenas neste, mas em todo triângulo retângulo **o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos**?” E obteve a resposta: “Sim, em qualquer triângulo retângulo...”. E para que você veja logo como isso é bem simples, olhe para a figura abaixo.



O que queremos demonstrar é que, se a hipotenusa de um triângulo retângulo é **a** e seus catetos são **b** e **c**, então **a² = b² + c²**. Vamos começar desenhando o quadrado de lado **a**. Brincando com outras peças iguais a estas em papel ou papelão, vemos algo interessante: quatro cópias do triângulo retângulo colocadas em torno do quadrado formam um novo quadrado de lado **b + c**. O que nos dizem as áreas das figuras abaixo?



área do
quadrado
de lado
b + c

$$(b + c)^2$$

área do
quadrado
de lado
a

$$a^2$$

4 · (área do triângulo)

$$4 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$\text{Logo: } b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (\text{C.Q.D.})$$

Muito engenhosa essa figura dos chineses que usamos para comprovar o teorema, não é? Assim, está provado o Teorema de Pitágoras:

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Exercício 1

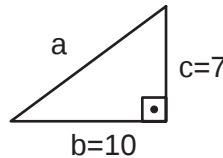
Em cada item abaixo temos um triângulo retângulo com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**. Calcule o lado ou altura que se pede (nas mesmas unidades):

a) $a = 10$

$b = 6$

$c = ?$ (Faça a figura. Meça e confirme com o Teorema de Pitágoras.)

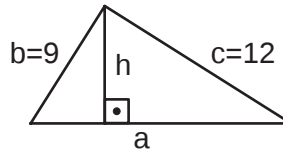
b) $a = ?$ (Use a calculadora, no teorema. Meça e confirme.)



c) $a = ?$

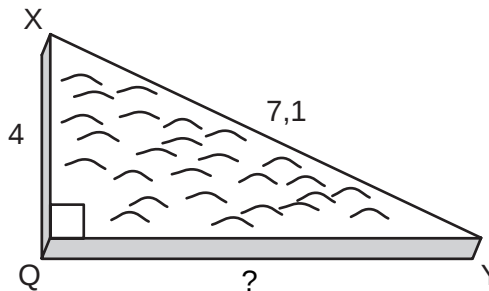
$h = ?$

(Faça uso novamente do teorema. Depois, pense na área do triângulo para achar **h**. Meça e confirme.)



Exercício 2

Seu Raimundo precisa encomendar lajotas de mármore com o formato que está na figura abaixo. Ele observou que duas delas juntas formam um retângulo. Quanto mede o outro lado do retângulo?



Resolvendo o exercício

Em se tratando de calcular comprimentos nossa atitude natural é procurar por triângulos semelhantes e aplicar a regra de três como vimos na aula 17 e veremos novamente na aula 21. Quando esses comprimentos são lados de um triângulo retângulo, então a outra idéia que logo nos ocorre é aplicar o Teorema de Pitágoras. Temos:

a) $a^2 = b^2 + c^2$
 $10^2 = 6^2 + c^2$; $c^2 = 100 - 36 = 64$. Logo, **$c = 8$ cm.**

b) $a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = 10^2 + 7^2 = 149$. Logo, **$a = 12,2$ cm.**

c) $a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Logo, **$a = 15$ cm.**

E para achar **h**? Observamos que a área do triângulo pode ser calculada de dois modos (pelo menos), usando a mesma fórmula:

$$A_{\text{triang}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

• com base = $c = 12$ e altura = $b = 9$: $A_{\text{triang}} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$

• com base = $a = 15$ e altura = h : $A_{\text{triang}} = \frac{ah}{2} = (\text{figura anterior})$

$$= \frac{15h}{2}$$

$$= \frac{15h}{2} = 54. \text{ Logo } h = 7,2 \text{ cm}$$

Seu Raimundo também deve usar o Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, $a^2 = b^2 + c^2$ - considerando:

$$a = XY = 11,3 \quad \text{Assim:} \quad (7,1)^2 = 4^2 + QY^2$$

$$b = QY = 4 \quad 50,41 = 16 + QY^2$$

$$c = QY = ? \quad QY^2 = 34,41 \text{ e } QY = 5,87$$

A recíproca do Teorema de Pitágoras

Sebastião é um operário muito atento ao trabalho e um aluno igualmente atento de 2º grau. Quando o professor terminou de demonstrar o Teorema de Pitágoras e de dar exemplos sobre ele, Sebastião pediu a palavra: *“Professor, o teorema está provado e os exemplos nos mostram que ele tem inúmeras aplicações,*

AULA
19

tanto na Matemática quanto no aspecto que mais nos interessa da nossa vida profissional, quero dizer, como pedreiros, marceneiros etc”.

E prosseguiu ele: “Mas nós ainda não resolvemos o problema. O Teorema de Pitágoras nos afirma que: **se** o ângulo entre os lados **b** e **c** for reto, então **a** = **b** + **c**. Agora, nossa questão é precisamente demonstrar que o ângulo é reto, sabendo que **a** = **b** + **c** para **a** = **5**, **b** = **3** e **c** = **4**. Isto é exatamente a recíproca do Teorema de Pitágoras?”

De fato, é muito freqüente, na vida cotidiana, encontrarmos uma pessoa confundindo as afirmações com suas recíprocas. Você se lembra de algum caso assim?

Uma prova da recíproca do teorema

O professor de Sebastião precisou então de mais alguns argumentos para concluir com exatidão que, de fato, o triângulo de lados que medem 3, 4 e 5 cm, tão usado pelos antigos e tão prático até hoje tem mesmo um ângulo reto. A demonstração a princípio intrigou o nosso amigo Sebastião, mas depois de refletir em casa ele a aceitou. O professor usou o que se chama de **método socrático**. Ele fez perguntas ao aluno que o levaram à conclusão verdadeira. O professor e o aluno tiveram o seguinte diálogo:

Método socrático

Em homenagem ao grande sábio grego Sócrates (469 a.C., 399 a.C).

Professor - O que estamos querendo provar, Sebastião?

Sebastião - Que se os lados do triângulo medem **3, 4 e 5** cm, **então** o ângulo entre os lados de **3 e 4** cm é um ângulo reto.

P - Muito bem; você inclusive separou a parte da afirmação que começa com “se” (a **hipótese**) da parte que começa com “então” (a **tese**). Excelente. Diga-me agora: você já viu algum triângulo com lados 3, 4 e 5 cm?

S - Vi, no início da aula nós o desenhamos em papel quadriculado para ajudar a resolver o problema.

P - Isso mesmo. Mas não havia uma dúvida lá a respeito da medida, se seria mesmo 5 ou 5,1 cm...

S - Sim, mas depois o senhor nos ensinou o Teorema de Pitágoras; se o ângulo é reto, então **a** = **b** + **c**. Logo, para **b** = **3** e **c** = **4** vimos que **a** = **5**.

P - Então você viu mesmo um triângulo de lados **3, 4 e 5** cm: onde de fato, os lados que medem **3 e 4** cm fazem um ângulo reto. Agora diga-me: Quantos triângulos de lados **3, 4 e 5** cm podemos ter?

S - Ora, professor, isso eu vi quando desenhei o triângulo **ABC** de lados **a** = **BC** = **5**, **b** = **AC** = **3** e **c** = **AB** = **4** (cm). Comecei pelos pontos A e B. (Figura) Então pensei: se **AC** = **3**, então **C** dista 3 cm de A e tracei com o compasso um círculo de centro **A** e raio 3 cm. E como **C** dista 5 cm de **B**, então **C** também deve estar sobre um círculo de centro **B** e raio 5 cm.

P - Portanto, quantos triângulos de lados **3, 4 e 5** cm existem?

- S** - Dois, mas que de fato são iguais; um é o reflexo do outro num “espelho horizontal”, o lado **AB**.
- P** - E quanto mede o ângulo entre os lados de **3** e **4** cm, nesse triângulo?
- S** - Bem, o triângulo que vimos antes...
- P** - É o único que vimos com estas medidas, não é? Continue.
- S** - Sim, ele tem ângulo reto.
- P** - Pode haver algum triângulo com estes lados cujo ângulo não seja reto?
- S** - Não, professor: se um triângulo tem lados **3**, **4** e **5** cm, então ele é um triângulo retângulo, pois só há um triângulo com estes lados e ele é retângulo!

Na aula seguinte, Sebastião foi direto ao professor: “A recíproca do Teorema de Pitágoras que o senhor me provou ser verdadeira, no caso do triângulo de lados **3**, **4** e **5** cm, é verdadeira não só para este, mas para qualquer triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c**!”

E Sebastião exibiu, então, seu raciocínio abstrato, herança de mestres como Tales e Pitágoras: “A mesma figura que nos ajudou a raciocinar anteriormente também nos mostra que há apenas um triângulo (a menos de reflexão no espelho) em que os lados medem **a**, **b** e **c**. Suponha que em nosso triângulo **a = b + c**, qual é, então, o ângulo entre **b** e **c**?”

E concluiu em seguida: “Como no triângulo retângulo **a = b + c** e só existe um triângulo de lados **a**, **b** e **c** em que **a = b + c**, então indiretamente concluímos que o ângulo entre **b** e **c** só pode ser um ângulo reto!”

“Raciocínio perfeito, Sebastião! Continue a desenvolvê-lo. Às vezes a mais preciosa lição de uma aula de matemática não se refere a números ou triângulos, mas a uma maneira criativa de pensar.”

Nós concordamos. E esperamos que você, aluno ou aluna deste Telecurso, esteja também atento à precisão e à pureza do raciocínio matemático. Hora de praticá-lo, então, nos exercícios de hoje!

Exercício 3

Em cada um destes itens, calcule o terceiro lado do triângulo; desenhe o triângulo e confirme. Todas as medidas estão em cm:

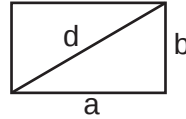
- a) $a = 17$
 $b = 15$
- b) $b = 10$
 $c = 10$
- c) $a = 12,1$
 $c = 6$

Exercícios finais

AULA
19

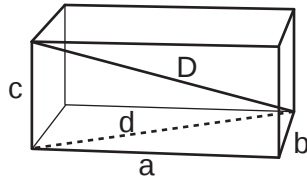
Exercício 4

- Quanto mede a diagonal do piso de uma sala retangular de 3×4 m?
- Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se quer guardar deitado no chão de uma sala de 3×4 m?
- Seja **d** a diagonal de um retângulo de lados **a** e **b**, encontre uma fórmula que calcule **d** a partir de **a** e **b**.



Exercício 5

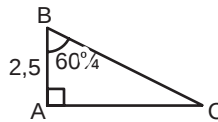
- Qual o tamanho máximo que pode ter um pau de cortina que se deseja guardar provisoriamente num quarto de 3×4 m e altura 3 m?
- Seja **D** a diagonal interna de um paralelepípedo de lados **a**, **b** e **c**, calcule **D**.



Sugestão: Traçando a diagonal **d** da base retangular vemos que **c** e **d** são perpendiculares pois **c** é vertical e **d** é horizontal. Logo, o triângulo de lados **c**, **d** e **D** é retângulo.

Exercício 6

Um triângulo retângulo **ABC** tem $\bar{A} = 90^\circ$, $\bar{B} = 60^\circ$ e $AB = 2,5$ cm:



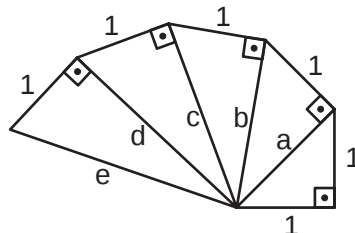
- Calcule a hipotenusa **BC**.

Sugestão: Desenhe um triângulo igual a **ABC**, chame-o **AB'C**, resultado de **ABC** refletido no "espelho" **AC**. Quanto medem os ângulos de **BB'C**? Que tipo de triângulo é **BB'C**? Quanto mede, então, **BC**?

- Calcule o outro cateto.

Exercício 7

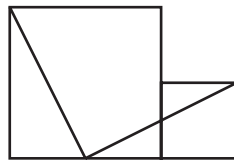
- Encontre **a**, **b**, **c**, **d** e **e**.
- Complete a figura. Observe que os vértices dos ângulos retos formam uma espiral.



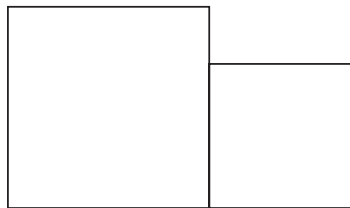
Exercício 8

Quebra-cabeça

Quaisquer dois quadrados, não importa seus tamanhos relativos, podem ser cortados em cinco peças que se juntarão novamente para formar um só quadrado maior. Os cortes estão ilustrados nos quadrados do exemplo abaixo.



Exemplo: Trace estes outros dois quadrados. Você sabe onde fazer os cortes de modo que depois sejamos capazes de remontar as peças num outro quadrado?



Exercício 9

O triângulo retângulo de lados com **3**, **4** e **5** cm, que conhecemos nesta aula, se tornou famoso devido ao fato de que seus lados são medidos por números naturais (i.e, inteiros positivos) pequenos. Este exercício apresenta outros triângulos desse tipo. Faça uma tabela como esta contendo na horizontal e na vertical os quadrados dos números naturais. Observe que cada número na tabela é soma de dois quadrados. Por exemplo $5 = 1 + 4$. Chamemo-los **b** e **c**.

- a) Procure pelos **b + c** que são eles próprios também quadrados, estando então na sequência **1 - 4 - 9 - 16 - etc.** Por exemplo, $9 + 16 = 25 = 5^2$

		n →				
		1	2	3	4	5
		n ² ↓				
		1	4	9	16	25
1	1	2	3	10	17	26
2	4		8	13	20	29
3	9			18	25	34
4	16				32	

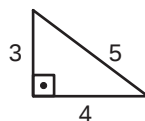
Sugestão: Para facilitar, use esta tabela de quadrados:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

AULA
19

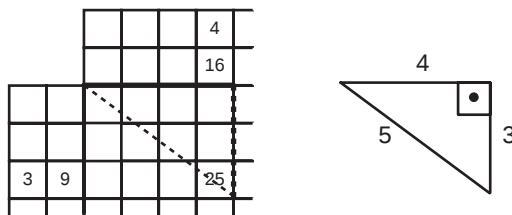
b) Desenhe os triângulos que você encontrou

Exemplo:



Sugestão: Faça sua tabela em papel quadriculado. Você perceberá que a própria tabela lhe dá o triângulo desenhado.

Exemplo:



c) Existem triângulos semelhantes entre os encontrados? Isto é, de mesmo formato mas de tamanhos diferentes?

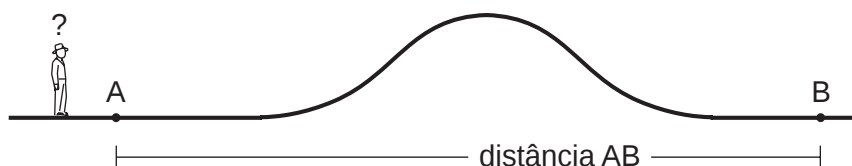
Exercício 10

Inspirando-se no exercício da aula, prove que num triângulo retângulo de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, a altura relativa à hipotenusa mede $h = \frac{bc}{a}$

Calculando distâncias sem medir

Introdução

No campo ocorrem freqüentemente problemas com medidas que não podemos resolver diretamente com ajuda da trena. Por exemplo: em uma fazenda, como podemos calcular a distância entre dois pontos se existe um morro no meio?



- É claro que, observando o desenho acima, se esticarmos uma trena de A até B, subindo e descendo o morro, encontraremos um valor maior que o correto. Lembre-se de que quando falamos de **distância** entre dois pontos estamos considerando que a medida foi feita sobre a **reta** que une esses dois pontos. No nosso exemplo essa medida não pode ser calculada diretamente.
- Também na cidade, a altura de um edifício ou mesmo de um poste são medidas difíceis de serem calculadas diretamente. Vamos mostrar, então, que com o auxílio da semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras podemos descobrir distâncias sem fazer o cálculo direto das medidas.

Para determinarmos medidas no campo precisamos de uma trena, algumas estacas, um rolo de barbante e, para algumas situações, um esquadro. As estacas e o barbante formam triângulos; a trena mede os comprimentos, enquanto o esquadro formará ângulos retos.

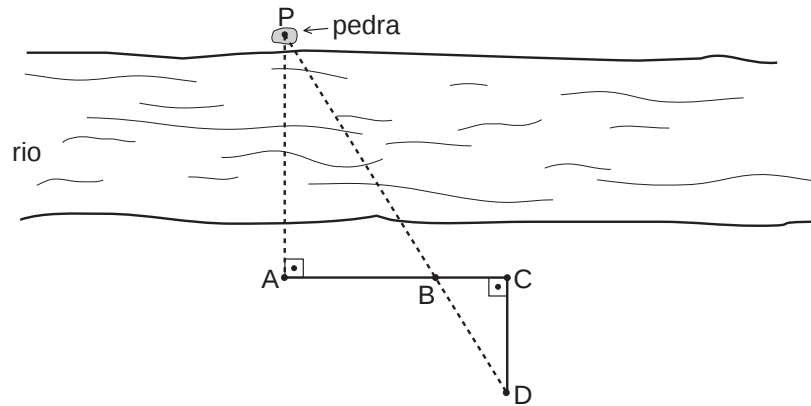
Acompanhe então os problemas desta aula e suas criativas soluções.

Nossa aula

EXEMPLO 1

A largura de um rio

Estamos em uma fazenda cortada por um rio bastante largo. Temos uma trena de 20 m e a largura do rio parece ser muito maior que isso. O que podemos fazer para determinar a largura desse rio? Observe o desenho.



As pessoas que vão fazer as medidas estão na parte de baixo do desenho. Elas procuram na outra margem algum objeto para fixar a atenção. Imagine então que uma das pessoas, estando no ponto **A**, veja uma pedra **P** do outro lado do rio. Para determinar a distância **AP** fazemos o seguinte.

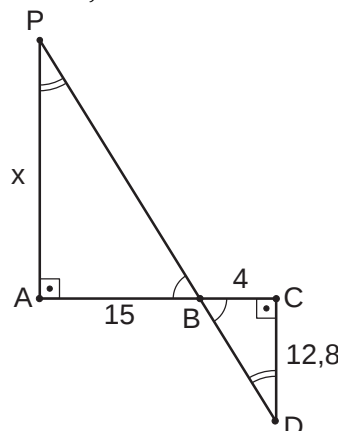
- Fixamos uma estaca no ponto **A** e amarramos nela um barbante. O barbante é esticado até um ponto **C** qualquer, de forma que o ângulo **PAC** seja reto;
- Fixamos uma estaca em **C**. Sobre o barbante esticado **AC** devemos agora escolher um ponto **B** qualquer, que, de preferência, esteja mais próximo de **C** que de **A**.
- Fixamos então uma estaca em **B**.
- Riscamos agora no chão uma reta que parte de **C** e faz ângulo reto com o barbante, como mostra o desenho. Vamos caminhando sobre essa reta até que a estaca **B** esconda atrás de si a pedra **P** que está do outro lado do rio. Isto faz com que os pontos **P**, **B** e **D** do desenho fiquem em linha reta. Ora, na margem de baixo todas as distâncias podem ser medidas. Suponha então que os valores encontrados tenham sido os seguintes:

$$AB = 15 \text{ m}$$

$$BC = 4 \text{ m}$$

$$CD = 12,80 \text{ m}$$

Observe o próximo desenho já com as medidas encontradas e os **ângulos iguais** assinalados.

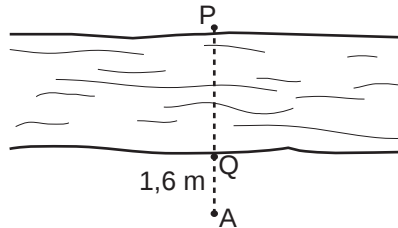


Os triângulos **ABP** e **CBD** são semelhantes porque possuem os mesmos ângulos. Logo, seus lados são **proporcionais**. Fazendo a distância **AP** igual a **x** temos a proporção:

$$\frac{x}{12,8} = \frac{15}{4}$$

$$x = \frac{12,8 \times 15}{4} = 48\text{m}$$

Falta pouco agora. Medimos então a distância da estaca **A** ao rio.



Suponha que encontramos **PQ = 1,60 m** (Veja o desenho.) Então, a largura do rio é

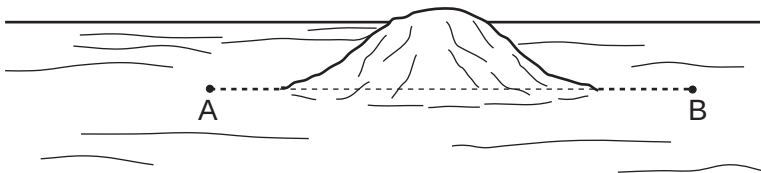
$$PQ = 48 - 1,6 = 46,4 \text{ m}$$

Tendo resolvido o problema da largura do rio, vamos ver agora como se resolve o problema da distância entre dois pontos com o obstáculo no meio.

EXEMPLO 2

A distância entre dois pontos com um obstáculo no meio

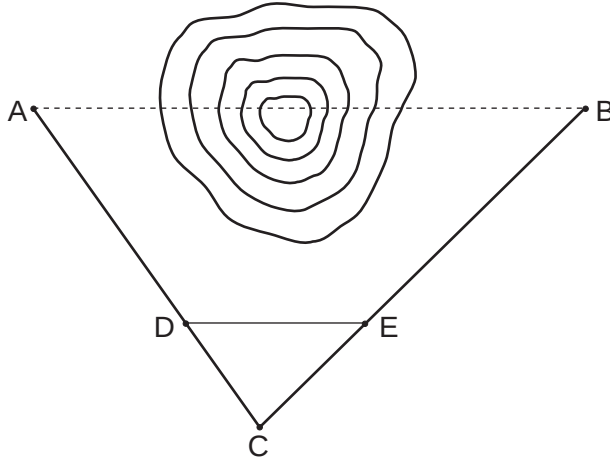
Estamos ainda fazendo medições em nossa fazenda. Temos agora que calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** situados de tal maneira que, se você estiver em um deles, não aviste o outro.



No nosso caso, o terreno em volta do morro é razoavelmente plano, mas os pontos **A** e **B** estão de tal forma localizados que medir diretamente a distância entre eles em linha reta é impossível. O que podemos fazer?

Como do ponto **A** não podemos ver o ponto **B**, a solução não pode ser feita da mesma forma que no problema anterior. Procuramos então encontrar um ponto **C** de onde se possa avistar os pontos **A** e **B**.

A figura a seguir mostra a nossa situação vista de cima.



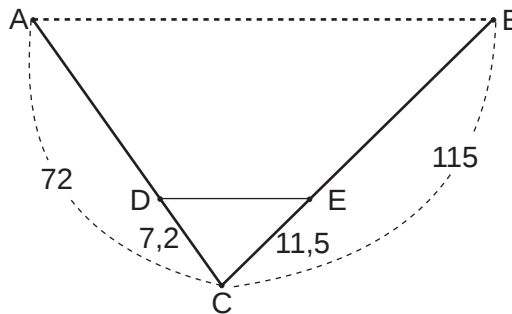
Fixamos então uma estaca em **C** e medimos com a trena (aplicada várias vezes) as distâncias **AC** e **BC**. Os valores encontrados foram os seguintes:

$$\begin{aligned} AC &= 72 \text{ m} \\ BC &= 115 \text{ m} \end{aligned}$$

Agora, vamos dividir essas distâncias por um número qualquer. Por exemplo:

$$\frac{72}{10} = 7,2 \quad \text{e} \quad \frac{115}{10} = 11,5$$

Sobre a reta **AC** fixamos uma estaca no ponto **D**, onde **DC = 7,2 m**. Sobre a reta **BC** fixamos uma estaca no ponto **E**, onde **EC = 11,5 m**. O que temos então?



Criamos o triângulo **CDE** que é **semelhante e dez vezes menor** que o triângulo **CAB**. Podemos medir agora a distância **DE**.

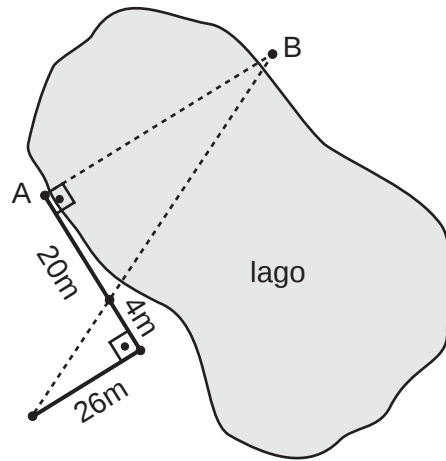
Se encontramos **DE = 12,3 m**, como sabemos que **AB** é **dez vezes maior** que **DE**, temos que **AB = 123 m**. O problema está resolvido.

Resumindo, para calcular uma distância que não pode ser medida diretamente devemos formar com ela um triângulo e, em seguida, um outro semelhante bem menor.

Medindo os lados desse triângulo menor e utilizando a semelhança dos triângulos, podemos calcular o lado desconhecido no triângulo maior.

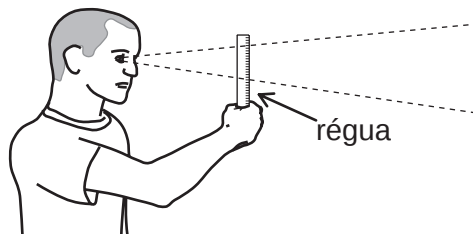
Exercício 1

Para calcular a distância entre os pontos **A** e **B** situados próximos a um lago foi utilizada a mesma técnica vista no problema da largura do rio. Com as medidas que estão no desenho, determine a distância.



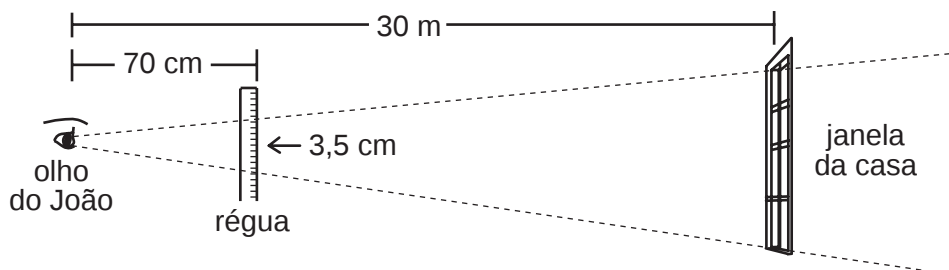
Exercício 2

João está em sua varanda desenhando a casa que está do outro lado da rua. Ele sabe que sua distância até esta casa é de 30 m. Para conhecer as medidas da casa ele usa o seguinte artifício: segurando com o braço esticado uma régua e fechando um olho ele “mede” os detalhes da casa (tamanho das janelas, portas, altura do telhado etc.).



Sabe-se que a distância do olho de João até a régua é de 70 cm. Observando uma das janelas da casa, João verificou que sua altura, medida na régua, era de 3,5 cm. Qual é a medida real dessa janela?

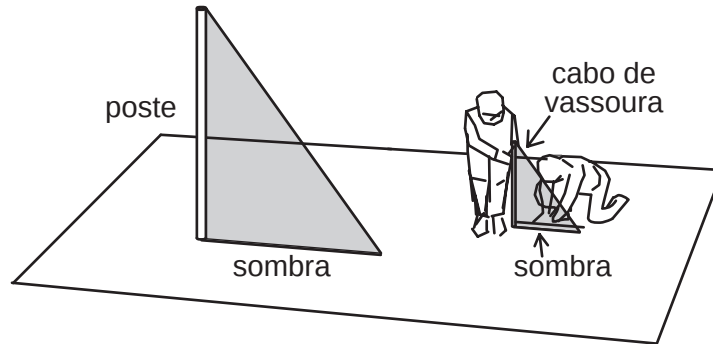
(Sugestão: Observe o desenho a seguir e use semelhança de triângulos. Nos cálculos use todas as distâncias na mesma unidade.)



Exercício 3

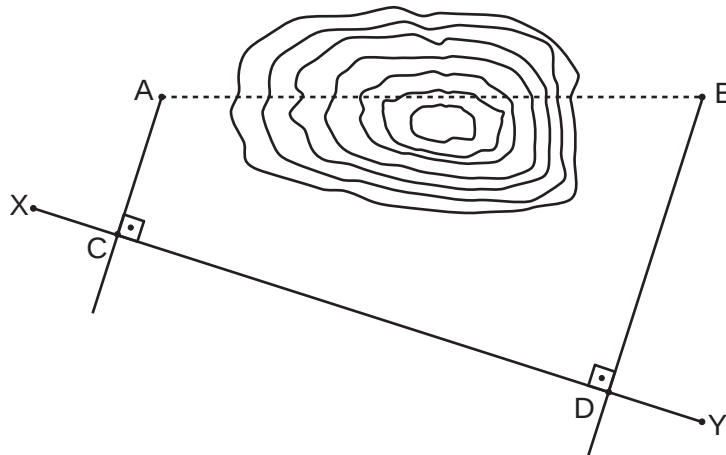
Para medir a altura de um poste, João observou que em certo momento ele fazia uma sombra no chão de 3,40 m de comprimento. Ele colocou então na vertical, um cabo de vassoura com 110 cm de comprimento e verificou que sua sombra era de 44 cm. Qual é a altura do poste?

(Sugestão: Levando em conta que os raios do sol são paralelos, observe que os dois triângulos formados pelo poste e pelo cabo de vassoura com suas respectivas sombras são semelhantes.)



Exercício 4

Para calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** com um obstáculo no meio podemos usar um outro método:



Estique um barbante no chão, e prenda-o nas estacas **X** e **Y**. Amarre um outro barbante em **A** e encontre uma posição para que ele esticado faça ângulo reto com **XY**. Fixe então uma estaca no ponto **C**. Faça o mesmo com outro barbante amarrado em **B**, encontre o ponto **D**, e fixe uma estaca nesse lugar. Sabendo que foram encontradas as seguintes medidas **AC = 22 m**, **CD = 68 m** e **DB = 56 m**, calcule a distância **AB**.

Sugestão: No desenho, trace por **A** uma paralela a **CD** até formar um triângulo. Observe que esse triângulo é retângulo e que os dois catetos são conhecidos. Use então o Teorema de Pitágoras.

Gabaritos das aulas

1 a 20

Aula 1 - Recordando operações

Introdução

- a) adição ($180 + 162$)
- b) subtração ($50 - 37$)
- c) multiplicação (16×12)
- d) divisão ($24 : 3$)

Exercícios

1.
 - a) 80
 - b) 37
 - c) - 37
 - d) 5
 - e) 19
 - f) - 15
 - g) - 15
 - h) - 3
 - i) 91
 - j) - 72
 - l) 16
 - m) 20
2.
 - a) 10
 - b) 24
 - c) 346
3. R\$ 945,00
4. R\$ 320,00
5.
 - a) 15
 - b) 213
 - c) 24
6. Sim. Sobrará no tanque menos de 2 litros.
7. 38 mesas
8. 28 alunos
9. 500 m

Aula 2 - Frações e números decimais

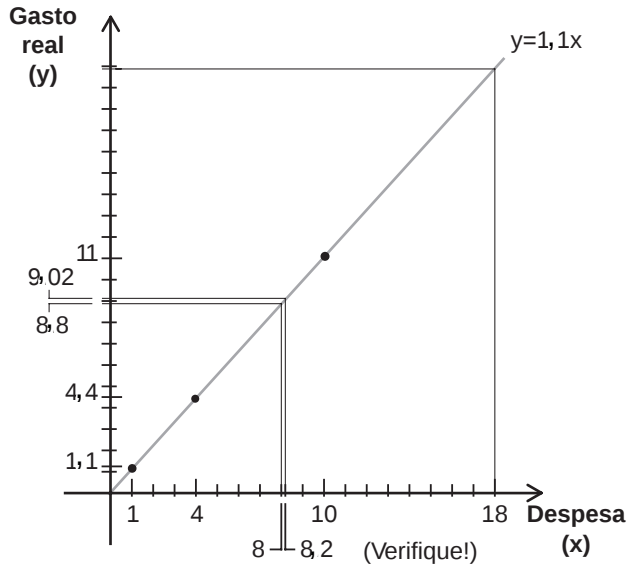
1.
 - a) $\frac{5}{8}$
 - b) $\frac{2}{3}$
 - c) $\frac{4}{5}$
 - d) $\frac{1}{10}$
2.
 - a) $>$
 - b) $>$
 - c) $<$
 - d) $=$
3.
 - a) $\frac{13}{24}$
 - b) $\frac{1}{30}$
 - c) $\frac{1}{12}$
 - d) $\frac{31}{30}$
4.
 - a) $\frac{6}{35}$
 - b) $\frac{5}{4}$
 - c) $\frac{14}{15}$
 - d) $\frac{3}{7}$
5.
 - a) 12
 - b) 120
 - c) 3
 - d) 9
6.
 - a) 0,67
 - b) 0,43
 - c) 0,36
 - d) 2,23
7.
 - a) 12,5%
 - b) 83,33%
 - c) 17,5%

Aula 3 - O raciocínio algébrico

1. 289 m
2. 24 anos. 12 anos.
3.
 - a) qualquer número
 - b) 7
 - c) 14
 - d) 15
5. R\$ 111,11
6.
 - 2 $\rightarrow$ d)
 - 0 $\rightarrow$ c)
 - 3 $\rightarrow$ b)
 - 3 $\rightarrow$ e)
 - 1 $\rightarrow$ a)

Aula 4 - O método aritmético e o método algébrico

1.



2.

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA	
4	0,40	4,40	4,40	
4	0,40	4,40	8,80	→ a) Despesa = 4 + 4 = 8 reais
0,1	0,01	0,11	8,91	
0,1	0,01	0,11	9,02	→ b) Despesa = 4 + 4 + 0,1 + 0,1 = 8,2 reais
10	1	11	11	
8	0,8	8,8	19,8	→ c) Despesa = 10 + 8 = 18 reais

3. Gasto = $(1,1) \cdot \text{Despesa}$

a) Gasto = 8,8 → $8,8 = (1,1) \cdot \text{Despesa}$. Logo, Despesa = 8

b) Gasto = 9,02 → $9,02 = (1,1) \cdot \text{Despesa}$. Logo, Despesa = 8,2

c) Gasto = 19,8 → $19,8 = (1,1) \cdot \text{Despesa}$. Logo, Despesa = 18

4 I)

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA
1	0,2	1,2	1,2
1	0,2	1,2	2,4
1	0,2	1,2	3,6
1	0,2	1,2	4,8
1	0,2	1,2	6,0
1	0,2	1,2	7,2
1	0,2	1,2	8,4
0,1	0,02	0,12	8,52
0,1	0,02	0,12	8,64
0,1	0,02	0,12	8,76 → a) despesa = 7 + 0,3 = 7,30 reais
0,1	0,02	0,12	8,88
0,1	0,02	0,12	9,0 → b) despesa = 7 + 0,5 = 7,50 reais
0,1	0,02	0,12	9,12
10	2	12	12
5	1	6	18
1	0,2	1,2	19,2
0,1	0,02	0,12	19,32
0,1	0,02	0,12	19,44
0,1	0,02	0,12	19,56
0,1	0,02	0,12	19,68
0,1	0,02	0,12	19,8 → c) Despesa = 10 + 5 + 1 + 0,5 = 16,50 reais

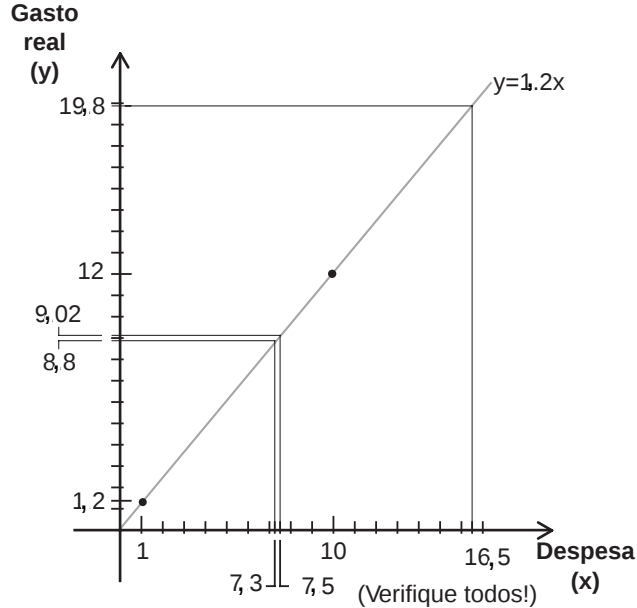
4 II) $\text{Gasto} = (1,2) \cdot \text{Despesa}$

a) $\text{Gasto} = 8,8 = (1,2) \cdot \text{Despesa}$. Logo, $\text{Despesa} = 7,30$ reais (aproximadamente)

b) $\text{Gasto} = 9,02 = (1,2) \cdot \text{Despesa}$. Logo, $\text{Despesa} = 7,50$ reais (aproximadamente)

c) $\text{Gasto} = 19,8 = (1,2) \cdot \text{Despesa}$. Logo, $\text{Despesa} = 16,50$ reais

4 III)



Aula 5 - Equacionando os problemas

1.

a) incógnita: x = o número

b) $\frac{x-4}{2} + 3x = \frac{4x}{5} + 7$

c) o número, x .

2.

I a) incógnita: x = aresta do cubo

I b) $6x = x$

I c) a aresta, x .

II) $x = 6$, já que $6 \cdot x \cdot x = x \cdot x \cdot x$

3.

a) x = idade do pai

y = idade do filho

Equações:

$$x = 3y$$

$$y = x - 22$$

b) A diferença das idades é, ao mesmo tempo: 22 anos e o dobro da idade do filho. (Por quê? É o triplo da idade menos ela mesmo). Logo, a idade do filho é 11 anos e a do pai, 33 anos.

4.

a) p = idade do pai

f = idade do filho

Equações:

$$p = 3f$$

$$f = p - 22$$

As incógnitas devem ser, respectivamente, iguais: $x = p$, $y = f$.

b) p e f , pois lembra imediatamente pai e filho.

5. Incógnita:

x = lado maior

Equação

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Aula 6 - Resolvendo equações

- 1.
- a) 7
- b) 9
- c) 10
- d) $\frac{10}{7}$
2. 24
3. 16, 18 e 21 anos, respectivamente.
4. A segunda.
5. Tem 18 bancos.
6. Daqui a 15 anos.
7. 192 alunos.
8. R\$ 18,00

Aula 7 - A álgebra nas profissões

- 1a) 127,3 b) 127,1
2. 233 cm
- 3a) 37 b) 30,4 cm
- 4a) R\$ 530 b) R\$ 2120
5. 1,25 litro

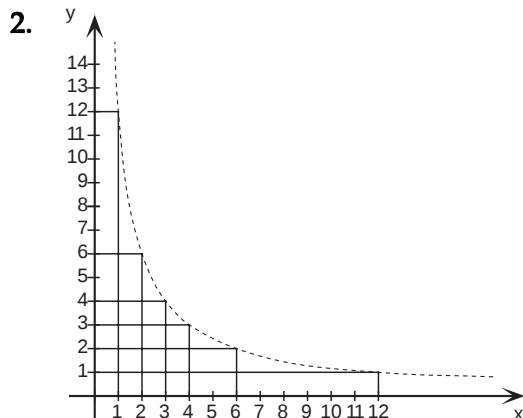
Aula 8 - Coordenadas

1 a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1															1																1	
2															2																2	
3															3																3	
4															4																4	
5															5																5	
6															6																6	
7															7																7	
8															8																8	
9															9																9	
10															10																10	
11															11																11	
12															12																12	
13															13																13	
14															14																14	
15															15																15	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	

1 b)

- submarino: I3
- destroyer: B2, C2
- hidroavião: E13, F12, G13
- cruzador: L6, L7, L8, L9
- couraçado: C8, D8, E8, F8, G8



- 3.
- a) Sim: $11 = 2 \cdot (5) + 1$
 - b) Não: $11 \neq 2 \cdot (4) + 1$
 - c) Não: $-20 \neq 2 \cdot (-11) + 1$
 - d) Sim: $2\pi + 1 = 2 \cdot (\pi) + 1$
 - e) Não: $0,1 \neq 2 \cdot (-1/2) + 1$
 - f) Sim: $401 = 2 \cdot (200) + 1$

- 4.
- a) Sim: $16 = (-4)^2$
 - b) Não: $102 \neq (10)^2$
 - c) Sim: $100 = (10)^2$
 - d) Sim: $2 = (\sqrt{2})^2$
 - e) Não: $-49 \neq (7)^2$
 - f) Não: $-49 \neq (-7)^2$

Aula 9 - O gráfico que é uma reta

1.

a1)

x	$y = \frac{12}{15}x$
0	0
5	12

a2)

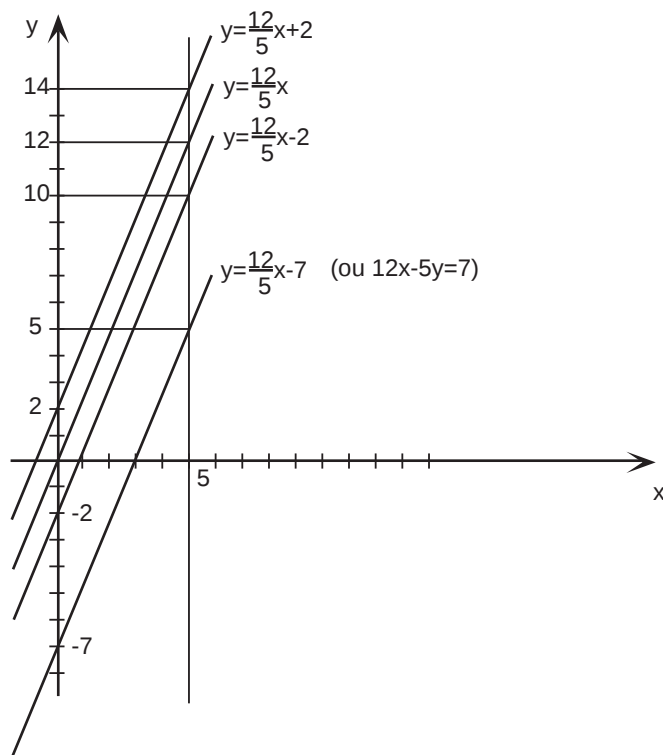
x	$y = \frac{12}{15}x + 2$
0	2
5	14

a3)

x	$y = \frac{12}{15}x - 2$
0	$-\frac{2}{5}$
5	10

a4)

x	$y = \frac{12}{15}x - 7$
0	$-\frac{7}{5}$
5	5

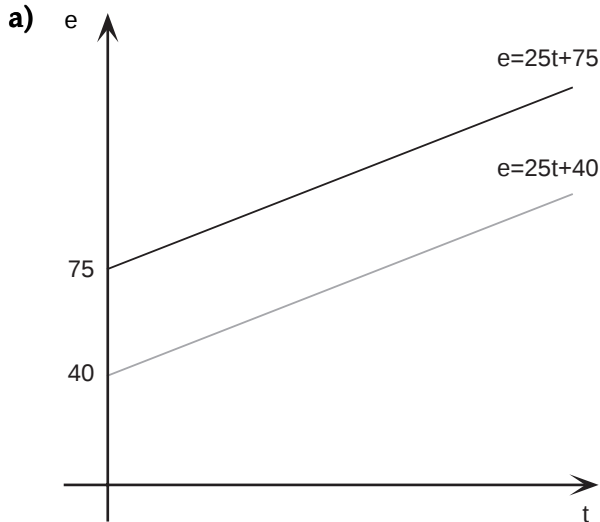


- b) Todas as retas têm a mesma inclinação, pois, colocadas na forma $y = ax + c$, todas têm o mesmo a .
- c) As quatro retas são paralelas.

2.

- a1) 90 m
a2) 140 m
a3) 115 m
a4) 77,5 m

3.



- b) Significa que o automóvel já havia percorrido 75 metros, e não 40, antes do cronômetro ser disparado.

4. a1) I + a2) V a3) I - a4) V a5) I - a6) H a7) I +

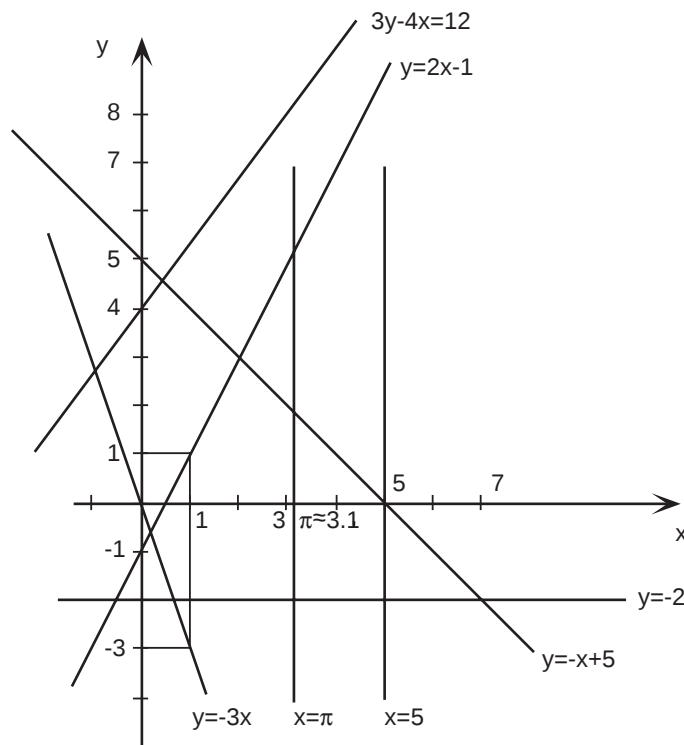
b)

x	$y = 2x - 1$
0	-1
1	1

x	$y = -3x$
0	0
1	-3

x	$y = -x + 5$
0	5
5	0

x	$y = \frac{4x}{3} + 4$
0	4
3	8



5a)

reta 1: $(-2, 0)$

reta 2: $(0, 0)$

reta 3: $(-\frac{1}{2}, 0)$

reta 4: $(-2, 0)$

reta 5: $(\frac{8}{3}, 0)$

5b)

reta 1: $(0, -7)$

reta 2: $(0, 0)$

reta 3: $(0, -\frac{1}{31})$

reta 4: $(0, -7)$

reta 5: $(0, \frac{8}{5})$

5c) Em todos os casos, menos no da reta 2, onde os dois pontos coincidem e é necessário mais um ponto para definir a reta.

Aula 10 - Resolvendo sistemas

1. $x = 4, y = 1$

2. $x = 3, y = 4$

3. $x = 5, y = -2$

4. $x = -2, y = 3$

5. $x = 3/2, y = 1$

6. $x = 2, y = 0$

7. $x = 4, y = 3$

Aula 11 - Sistemas resolvem problemas

1. 25 e 18

2. 28

3. 32 automóveis; 11 motos

4. 36

5. açúcar: R\$ 0,60; farinha: R\$ 0,35

6. Pedro: R\$ 45,00; Paulo: R\$ 36,00

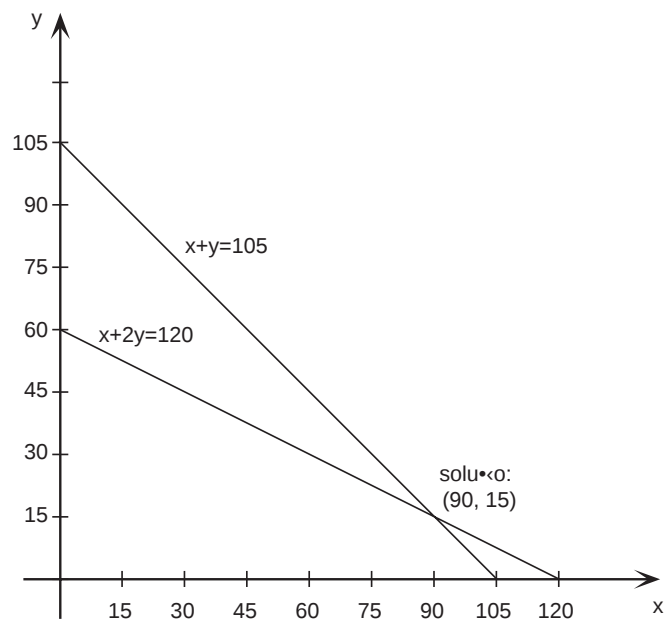
7. 30 km; 11 horas

Aula 12 - A interseção de retas e a solução de sistemas

1.

x	y = 105 - x
0	105
105	0

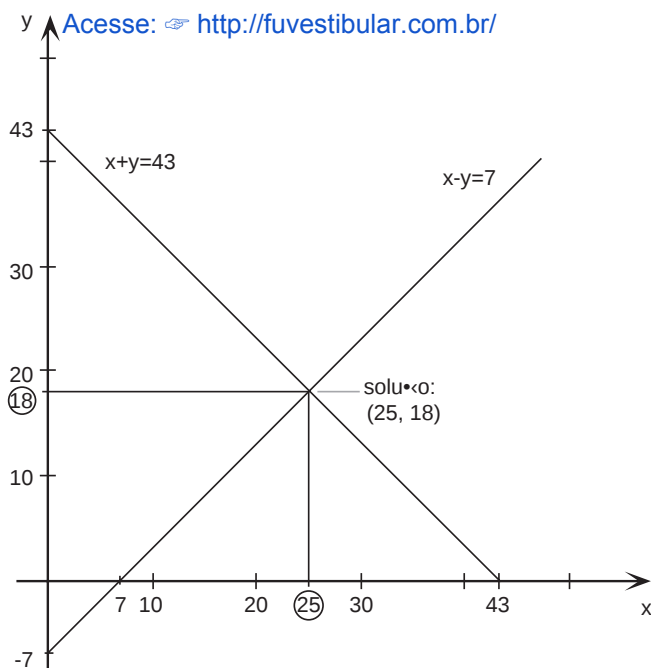
x	y = $\frac{120 - x}{2}$
0	60
120	0



2.

x	y = 43 - x
0	43
43	0

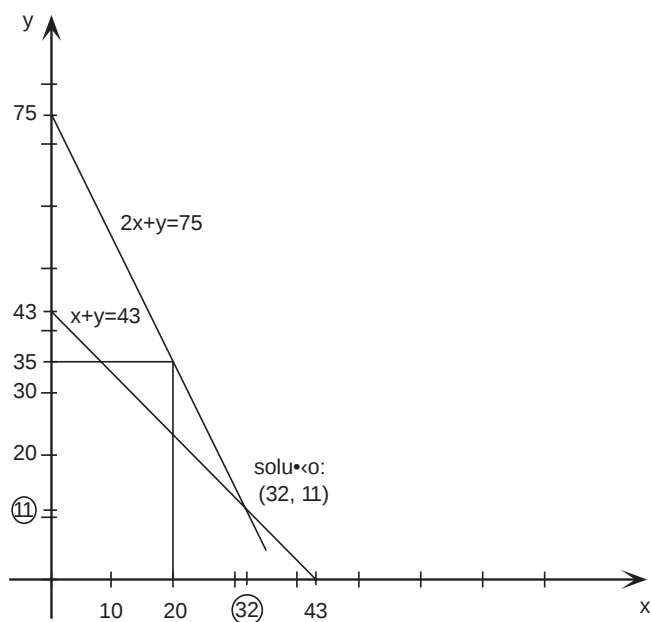
x	y = x - 7
0	-7
7	0



3.

x	y = 43 - x
0	43
43	0

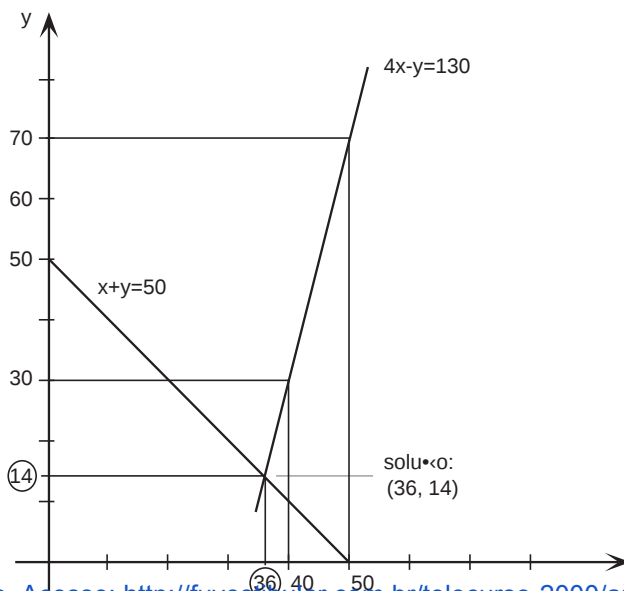
x	y = 75 - 2x
0	75
20	35



4.

x	y = 50 - x
0	50
50	0

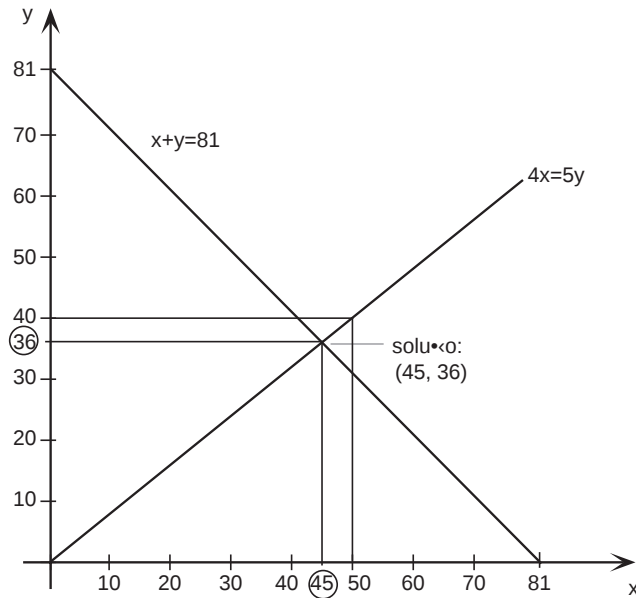
x	y = 4x - 130
40	30
50	70



5.

x	$y = 81 - x$
0	81
81	0

x	$y = \frac{4x}{5}$
0	0
50	40



Aula 13 - Recordando produtos notáveis

1.

- a) $xa + xb - xc$
 b) $x + ax + bx + ab$

2. $x = 6$

3. $x + 6x + 9$

4. $x - 2x + 1$

5. $x = 7$

6. 345

7. $6a - 13$

8. $x = 13$

9.

a) $(80 + 2) = 6400 + 2 \cdot 80 \cdot 2 + 4 = 6724$

b) $(100 - 1) = 10000 - 2 \cdot 200 \cdot 1 + 1 = 9801$

c) $(40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$

Aula 14 - Operações com potências

1.

a) 2^8

b) 2^6

c) 2^{15}

d) 2^{-3}

2.

a) $2,3 \cdot 10^4$

b) $2 \cdot 10^6$

c) $4 \cdot 10^{-2}$

d) $1,5 \cdot 10^{-5}$

Atenção: a sua resposta não precisa ser exatamente igual à que demos.
 Por exemplo, 0,04 também se pode escrever $0,4 \cdot 10^{-1}$.

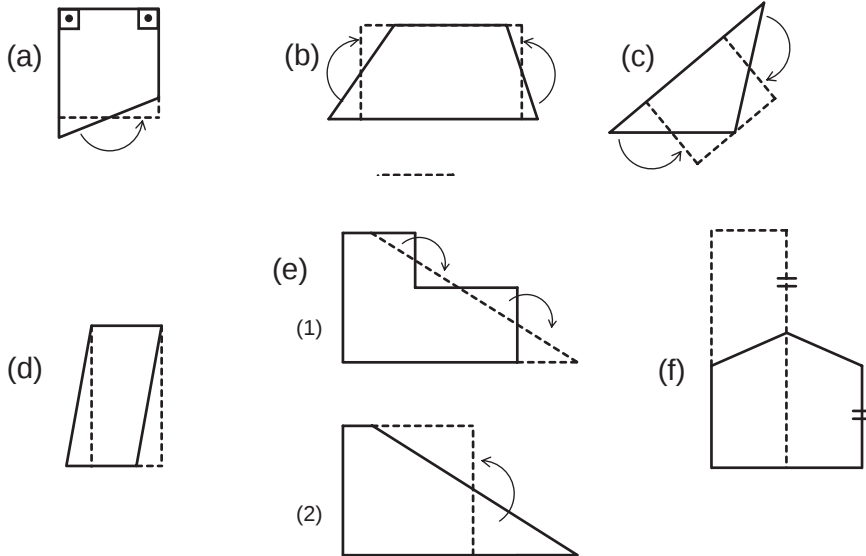
3. 2^{-5}

4. $10^3 = 1000$

5.
 a) 3^{-7}
 b) 3^{10}
 c) 3^{10}
 d) $3^{-1} = 1/3$
 6. $12 \cdot 10^{-9}$ ou $1,2 \cdot 10^{-8}$
 7.
 a) $5,9 \cdot 10^9$ km
 b) $0,62 \cdot 10^{-3}$ anos-luz
 8. Estava poluído porque a quantidade de dióxido de enxofre no ar de Sorocaba nesse dia era de $5,4 \cdot 10^{-5}$ gramas por m^3 .

Aula 15 - Áreas de polígonos

1.
 a) 33 unidades de área (u. a.)
 b) $15 \text{ u. a.} + 12 \text{ u. a.} + 6 \text{ u. a.} = 33 \text{ u. a.}$
 2. O retângulo de lados iguais a 6 cm, cujo perímetro é 24 cm.
 3.
 a) 10,92 u. a.
 b) 12 u. a.
 c) 16 u. a.
 d) 5 u. a.
 e) 13 m^2
 4.



5.
 a) A área do quadrado maior (25 u. a.) é igual à soma das áreas dos quadrados menores (9 e 16).
 b) $a^2 = b^2 + c^2$
 6.
 a) 3; 4
 b) $n - 2$
 7. $A_{\text{losango}} = \frac{d \cdot d'}{2}$

Aula 16 - Comprimento e área do círculo

1. 285,6 m
2. 8,0325 m
3. aproximadamente 6.366 km
4. 9 vezes
- 5.
- a) 6,28 cm
- b) 19,625 cm
6. 12,56 cm
- 7.
- a) 3,92 cm
- b) 52,33 cm
- c) 104,66 cm
8. 117,75 cm
9. $1.256 \text{ m} = 1,256 \text{ km}$
10. 2.000 voltas completas.

Aula 17 - O Teorema de Tales

1. $MN = 3,5$
 $NP = 3$
 $PM = 4$
- 2.
- a) $\frac{2}{3}$
- b) 0,02
 $OH = 20 \text{ m}$
- c) 1,62, aproximadamente (A razão é a mesma, é claro.)
- 3.
- a) O Teorema de Tales.
- b) Pois é paralelo às bases, e MN é a média aritmética da bases:
 $MN = \frac{AD + BC}{2}$, como vimos na Aula 15.
- c) $AD = 3,2 \text{ cm}$
 $BC = 4,8 \text{ cm}$
 $MN = 4 \text{ cm}$
 $\frac{3,2 + 4,8}{2} = 4$
4. Traçando a diagonal AC, vemos que: como Q é ponto médio e P também é ponto médio, as razões de segmentos $\frac{AQ}{QD}$ e $\frac{CP}{PD}$ são ambas iguais a 1; logo, são iguais entre si. Se os segmentos foram divididos em razões iguais, então é porque as retas são paralelas. (A recíproca do Teorema de Tales, é verdadeira dentro do triângulo). Logo, QP é paralelo a AC e também MN é paralelo a AC; daí que QP e MN são paralelos. Do mesmo jeito, mostra-se que PN e QM são também paralelos. Portanto, MNPQ é sempre um **paralelogramo!**
- 5.
- a) $B = b$ (ângulos correspondentes)
 $C = c$ (idem)
Considerando que ângulos opostos pelo vértice são iguais, chegamos a:
 $A + b + c = 180^\circ$ (um ângulo raso)
Logo: $A + B + C = 180^\circ$
- b) $A + B + C + D = 360^\circ$
- c) $A + B + C + D + E = 540^\circ$

- d) $180^\circ (n - 2)$, pois dividimos o polígono em $n-2$ triângulos.
- 6.
- a) $A = B = C = D = E = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$
- b) $CAD = 36^\circ$
 $ACD = ADC = 72^\circ$
- c) Os triângulos RST e STX do Exercício 1c) são semelhantes a estes, pois têm os mesmos ângulos que estes. (Para triângulo, ter ângulos iguais já garante a proporcionalidade dos lados).
7. $x = 10$ km; $y=30$ km; $z=22,5$ km
- 8.
- a) V (É a mesma proporção, trocando-se os meios)
- b) V (É a mesma proporção, trocando-se os extremos).
- c) F
- d) F
- e) V

Aula 18 - A raiz quadrada

- 1.
- a) 5
- b) 8
- c) 14
- 2.
- a) $x = \pm 6$
- b) $x = \pm 7$
- 3
- a) 23
- b) 34
- c) 7,6
4. 1,73
- 5.
- a) a
- b) a
- c) a
- 6.
- a) $2\sqrt{3}$
- b) 12
- c) $20\sqrt{2}$
- 7.
- a) $5\sqrt{2} \cong 7,07$
- b) $2\sqrt{3} \cong 3,46$
8. 35 m
9. 3,46 m

Aula 19 - O Teorema de Pitágoras

1.

a) $c = 8$

b) $a = 10\sqrt{2} \cong 14,1$

c) $b \cong 10,5$

2.

a) 5 m

b) 5 m

c) $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.

a) 5,87 m

b) $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

4.

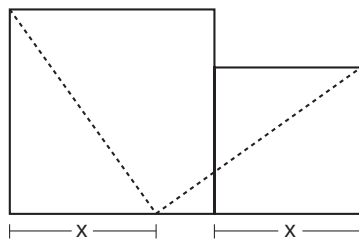
a) O triângulo $BB'C$ é equilátero, pois seus três ângulos são iguais a 60° . Logo, $BC = BB' = 2 \cdot AB = 5$.

b) $AC = 2,5\sqrt{3}$

5.

a) $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3}$; $c = \sqrt{4} = 2$; $d = \sqrt{5}$; $e = \sqrt{6}$

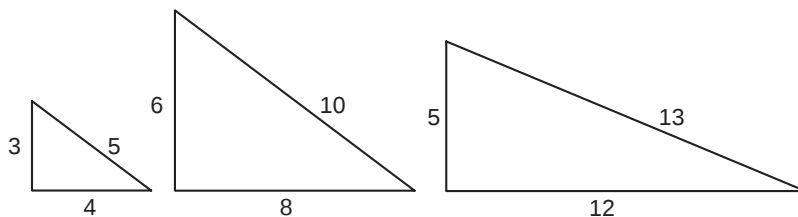
6.



7.

a) Aqui estão algumas soluções: 3 - 4 - 5; 6 - 8 - 10; 5 - 12 - 13

b)



c) Os triângulos 3 - 4 - 5 e 6 - 8 - 10 são semelhantes, pois $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

8. Como foi feito em aula: A área do triângulo tanto é $\frac{bc}{2}$ como $\frac{ah}{2}$.

$$\text{Logo, } \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2} \text{ e } h = \frac{bc}{a}$$

Aula 20 - Calculando distâncias sem medir

1. 130 m
2. 1,5 m
3. 8,5 m
4. 76 m

Para suas anotações

[illegible]

Para suas anotações

[illegible]

Para suas anotações

[illegible]

Para suas anotações

[illegible]

Para suas anotações

[illegible]