

# A equação do 2º grau

## Introdução

Freqüentemente, ao equacionarmos um problema, obtemos uma equação na qual a incógnita aparece elevada ao quadrado. Estas são as chamadas equações do 2º grau.

Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned}x^2 - 6 &= 0 \\2x^2 &= 10x \\x^2 - 5x + 6 &= 0\end{aligned}$$

Repare que em todas aparece o termo  $x^2$ .  
De forma geral, a equação do 2º grau é escrita assim:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde **a**, **b**, e **c** são números quaisquer. Mas, o número **a** não pode ser zero, porque, nesse caso, o termo  $x^2$  seria eliminado.

O número **a** é o *coeficiente* de  $x^2$ .

O número **b** é o *coeficiente* de  $x$ .

O número **c** é o *termo independente*.

Observe os valores de **a**, **b** e **c** nos exemplos:

- Na equação  $x^2 - 6 = 0$  temos **a = 1**, **b = 0** e **c = -6**
- A equação  $2x^2 = 10x$  é a mesma que  $2x^2 - 10x = 0$ ; portanto, **a = 2**, **b = -10** e **c = 0**.
- Na equação  $x^2 - 5x + 6 = 0$  temos **a = 1**, **b = -5** e **c = 6**.

Nesta aula, vamos aprender a resolver equações do 2º grau, ou seja, a encontrar suas *soluções* ou *raízes*.

Uma *raiz* (ou solução) de uma equação é um número que, se colocado no lugar de  $x$ , torna a igualdade correta.

Por exemplo, consideremos a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

O que acontece se substituirmos a letra  $x$  pelo número 1?

Vejamos:

$$\begin{aligned} 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 &= 0 \\ 1 - 5 + 6 &= 0 \\ 2 &= 0 \rightarrow \text{errado} \end{aligned}$$

Com essa experiência, descobrimos que  $x = 1$  **não** é uma solução dessa equação. Veja agora o que acontece se substituirmos a letra  $x$  pelo número 2.

$$\begin{aligned} 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 &= 0 \\ 4 - 10 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \rightarrow \text{certo} \end{aligned}$$

Sabemos agora que  $x = 2$  é uma solução (ou raiz) dessa equação.

É natural que agora você tenha perguntas a fazer, tais como:

- “Será que existem outras soluções?”
- “Como encontrá-las?”

As respostas virão com o estudo desta aula. Você descobrirá que uma equação do 2º grau possui, no máximo, duas soluções, e vai também aprender a encontrá-las.

Leia com atenção os exemplos e procure fazer os exercícios propostos.

## Resolvendo $ax^2 + b = 0$

### EXEMPLO 1

Vamos resolver  $x^2 - 9 = 0$

**Solução:** Transpondo  $-9$  para o outro lado, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ \text{ou} \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ \text{ou, ainda,} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Temos, então, que a equação  $x^2 - 9 = 0$  possui duas raízes:  $x = 3$  e  $x = -3$ .

**Nota:** Nem sempre as soluções de uma equação desse tipo são números inteiros. Veja a equação

$$x^2 - 10 = 0$$

Fazendo da mesma forma, temos:

$$x^2 = 10 \text{ e}$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

Isso significa que essa equação tem também duas soluções:

$$x = \sqrt{10} \text{ e } x = -\sqrt{10}$$

Se você quiser saber, aproximadamente, quanto valem esses números, use sua máquina de calcular. Com aproximações até a 3ª casa decimal, as raízes da equação  $x^2 - 10 = 0$  são:  $x = 3,162$  e  $x = -3,162$ .

### Exercício 1

Resolva as equações:

- a)  $x^2 - 36 = 0$
- b)  $x^2 - 3 = 0$
- c)  $2x^2 - 8 = 0$

### EXEMPLO 2

Resolver a equação  $4x^2 - 3 = 0$ .

**Solução:** Para resolver, passamos  $-3$  para o outro lado e em seguida dividimos os dois lados por 4. Observe:

$$4x^2 = 3$$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Lembre-se de que a raiz quadrada de uma fração é igual à raiz quadrada do numerador dividida pela raiz quadrada do denominador, ou seja:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A equação tem, portanto, as soluções:  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### Exercício 2

Resolva as equações:

- a)  $3x^2 = 9$
- b)  $2x^2 - 10 = 0$
- c)  $16x^2 - 5 = 4$

**Resolvendo  $x^2 + px = q$** **EXEMPLO 3**

Vamos resolver  $(x - 3)^2 = 16$ .

Iniciamos extraindo a raiz quadrada dos dois lados:

$$x - 3 = \pm\sqrt{16} \text{ ou}$$

$$x - 3 = \pm 4$$

Passando o  $- 3$  para o outro lado, temos:

$$x = 4 + 3$$

ou seja, as raízes da nossa equação são

$$x = + 4 + 3 = 7 \text{ e}$$

$$x = - 4 + 3 = - 1$$

**EXEMPLO 4**

Resolver a equação  $(x - 4)^2 = 5$ .

**Solução:** Procedendo da mesma forma, temos:

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \text{ e}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5}$$

ou seja, as raízes são  $x = 4 + \sqrt{5}$  e  $x = 4 - \sqrt{5}$

**Nota:** No caso que acabamos de ver, as raízes são números chamados *irracionais*, ou seja, são números que só podem ser conhecidos por aproximações. A máquina de calcular nos mostra essas aproximações.

Para calcular  $x = 4 + \sqrt{5}$ , digite

$$\boxed{4} \boxed{+} \boxed{5} \boxed{\sqrt{\phantom{x}}} \boxed{=} \rightarrow \boxed{6,236}$$

Para calcular  $x = 4 - \sqrt{5}$ , digite

$$\boxed{4} \boxed{-} \boxed{5} \boxed{\sqrt{\phantom{x}}} \boxed{=} \rightarrow \boxed{1,764}$$

**Exercício 3**

Resolva as equações abaixo. Caso encontre raízes irracionais, use sua calculadora para obter aproximações até a 3ª casa decimal.

- a)  $(x + 1)^2 = 4$   
 b)  $(x - 2)^2 = 15$   
 c)  $(x + 5)^2 - 3 = 0$

Para resolver o caso geral ( $x^2 + px = q$ ), devemos aprender a criar um quadrado perfeito a partir da expressão  $x^2 + px$ . A partir de agora, devemos ter em mente as conhecidas fórmulas:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### EXEMPLO 5

Resolver a equação  $x^2 + 6x = 7$

**Solução:** Observe atentamente nossa solução. Vamos começar com algo que, a princípio, pode parecer misterioso.

**Somamos 9 aos dois lados da equação.**

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

Repare que, com esse artifício misterioso, o lado esquerdo é exatamente igual a  $(x + 3)^2$ . Confira.

Temos, então:

$$(x + 3)^2 = 16$$

E essa é uma equação que sabemos resolver.

$$x + 3 = \pm\sqrt{16}$$

$$x + 3 = 4$$

$$x + 3 = -4$$

As raízes são, portanto,

$$x = 4 - 3 = 1 \quad e$$

$$x = -4 - 3 = -7$$

Fica então a pergunta: como adivinhamos que, se somássemos 9 aos dois lados da equação, a solução apareceria? Respondemos logo.

Para obter um quadrado perfeito a partir da expressão  $x^2 + px$ , devemos somar a essa expressão

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Observe que

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Portanto, se temos, por exemplo a expressão  $x^2 + 6x$ , para obter um quadrado perfeito, devemos somar

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Pratique, no exercício, como completar quadrados.

**Exercício 4**

Complete as expressões abaixo:

a)  $x^2 + 10x + \square = (x + \square)^2$

**solução:**  $\frac{10}{2} = 5$  e  $5^2 = 25$ . Portanto,

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

b)  $x^2 + 12x + \square = (x + \square)^2$

c)  $x^2 - 6x + \square = (x - \square)^2$

d)  $x^2 + 3x + \square = (x + \square)^2$

Estamos agora preparados para resolver o caso geral da equação do 2º grau.

**EXEMPLO 6**

Resolva a equação  $x^2 - 8x + 10 = 0$ .

**Solução:** Observe os passos que vamos seguir; todos são conhecidos.

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$

$$x^2 - 8x = -10$$

$$x^2 - 8x + 16 = -10 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 6$$

$$x - 4 = \pm \sqrt{6}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{6}$$

As raízes são  $x = 4 + \sqrt{6}$  e  $x = 4 - \sqrt{6}$

Aprendemos hoje a resolver equações do 2º grau. Na próxima aula vamos deduzir uma fórmula que resolve essas equações, e que você poderá utilizar sempre que quiser. Em seguida, apresentaremos os problemas que são resolvidos com auxílio das equações do 2º grau.

**Exercício 5**

Resolva as equações:

a)  $(x - 2)^2 = 12$

b)  $(x + 3)^2 = 25$

**Exercício 6**

A equação  $(x - 1)^2 + 3 = 0$  não possui solução. Por quê?

**Exercício 7**

Resolva as equações:

a)  $x^2 - 6x - 40 = 0$

b)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

c)  $x^2 - 4x = 0$

**Exercícios  
finais**