AULA

25

A fórmula da equação do 2º grau

Introdução

Nesta aula vamos encontrar uma fórmula para resolver a equação do 2º grau.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ (com } a \neq 0)}$$

Você poderá naturalmente perguntar por que será necessária tal fórmula, já que conseguimos, na aula anterior, resolver equações sem usar fórmulas. Diremos então que a fórmula torna a resolução mais rápida e permite o uso mais eficiente da máquina de calcular para obter as raízes da equação. Ainda observando a fórmula, vamos descobrir quando uma equação do 2º grau possui soluções ou não.

Nossa aula

Inicialmente, vamos resolver uma equação do 2º grau para recordar o método que desenvolvemos na aula passada. Observe cuidadosamente todos os passos porque eles serão os mesmos que utilizaremos no caso geral.

Resolução da equação $3x^2 + 5x + 1 = 0$

EXEMPLO 1

Solução:
1º passo: Como o coeficiente de **x** é 3, dividimos todos os termos da equação por 3.

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

2º passo: Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$$

3º passo: Agora, vamos acrescentar aos dois lados da equação um número capaz de transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito. Para fazer isso, pegamos a metade do coeficiente de x:

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

e elevamos ao quadrado: $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

Temos, então, $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$

ou, ainda, $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$

Observe agora que o lado esquerdo é um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores.

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{12}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

4º passo: Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

5º passo: Deixamos a letra x isolada do lado esquerdo para obter as duas soluções.

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

O caso geral: a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$

Desejamos agora que você acompanhe a dedução da fórmula, observando que os passos são exatamente os mesmos.

1º passo: Como o coeficiente de **x** é **a**, dividimos todos os termos da equação por **a**.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2º passo: Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3º passo: Para transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito, pegamos a metade do coeficiente de **x**:

$$\frac{1}{2} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{2a}$$

e o elevamos ao quadrado: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Depois, acrescentamos esse número aos dois lados:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Observando que o lado esquerdo é agora um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{4a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

4º passo: Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$\mathbf{x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

5º passo: Deixamos **x** isolado do lado esquerdo.

$$\mathbf{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

E aí está nossa fórmula.

Quando uma equação do 2º grau possui solução?

Na fórmula que encontramos para a solução da equação do 2º grau, vemos que, dentro da raiz quadrada, existe o número **$b^2 - 4ac$**. Esse número é, em geral, representado pela letra grega Δ (delta) e chama-se ***discriminante***. Usando essa nova letra, temos que as raízes da equação **$ax^2 + bx + c = 0$** são:

$$\mathbf{x = -\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x = -\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

onde $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$

Veja agora que, se o número Δ for ***positivo***, encontramos duas raízes diferentes.

Se, entretanto, Δ for ***zero***, encontramos um só valor para a raiz. Se Δ for ***negativo*** a equação não terá solução.

EXEMPLO 2

Resolver a equação **$2x^2 - 7x + 3 = 0$**

Solução: Vamos resolvê-la usando a fórmula:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Na nossa equação, **a = 2**, **b = – 7** e **c = 3**. Substituindo, temos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\mathbf{x = \frac{7 \pm 5}{4}}$$

As soluções são, portanto:

$$\mathbf{x = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3}$$

$$\mathbf{x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Veja que, nesse exemplo, o ***discriminante*** é 25, que possui raiz quadrada exata. Mas, isso nem sempre acontece. No exemplo do início desta aula, encontramos, para raízes da equação **3x + 5x + 1 = 0**, os valores:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{-5 + \sqrt{13}}}{\mathbf{2}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{-5 - \sqrt{13}}}{\mathbf{2}}$$

Para obter valores aproximados desses números, podemos utilizar a máquina de calcular. É o que veremos a seguir.

Usando a máquina de calcular

Consideremos, mais uma vez, a equação $\mathbf{3x^2 + 5x + 1 = 0}$.

Vamos resolvê-la outra vez, usando agora a fórmula.

Temos **a = 3**, **b = 5** e **c = 1**. Substituindo, temos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 . 3 . 1}}{2 . 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{-5 \pm \sqrt{13}}}{\mathbf{6}}$$

Rapidamente encontramos as soluções. Para obter valores aproximados dessas duas raízes, começamos calculando $\sqrt{13}$ e guardando o resultado na memória.

Digitamos, então:

$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}} \quad \rightarrow$ VISOR $\boxed{\mathbf{3{,}6055512}}$

O resultado que aparece no visor está guardado. Podemos então limpá-lo apertando a tecla $\boxed{\text{ON/C}}$

Para obter a 1ª solução, digitamos.

$\boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{=} \quad \rightarrow$ VISOR $\boxed{\mathbf{-0{,}2324081}}$

Para obter a 2ª solução, digitamos:

$\boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{=} \quad \rightarrow$ VISOR $\boxed{\mathbf{-1{,}4342585}}$

Concluímos então que, com duas casas decimais, as raízes da equação **3x + 5x + 1 = 0** são, aproximadamente, **– 0,23** e **– 1,43**.

Casos particulares

Na equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, quando encontramos $\mathbf{b = 0}$ ou $\mathbf{c = 0}$, não há vantagem em utilizar a fórmula. Observe os exemplos seguintes.

EXEMPLO 3

Resolva a equação $\mathbf{2x^2 - 32 = 0}$.
Solução: Para resolver essa equação, passamos o termo independente para o outro lado e, em seguida, dividimos os dois lados por 2 (o coeficiente de **x**).

$$\mathbf{2x^2 = 32}$$

$$\mathbf{\frac{2x^2}{2} = \frac{32}{2}}$$

$$\mathbf{x^2 = 16}$$

Extraindo a raiz quadrada, temos $\mathbf{x = \pm 4}$.

EXEMPLO 4

Resolva a equação $\mathbf{2x \;\; - 5x = 0}$.
Solução: Para resolver essa equação (que possui $\mathbf{c = 0}$), o procedimento é diferente. Inicialmente colocamos a letra **x** em evidência:

$$x \,.\, (2x - 5) = 0$$

Temos então um produto de dois números que dá zero. Isto só é possível se um desses números for zero. Como primeiro caso, podemos ter $\mathbf{x = 0}$. Como segundo caso, podemos ter:

$$\mathbf{2x - 5 = 0}$$

$$\mathbf{2x = 5}$$

$$\mathbf{x = \frac{5}{2}}$$

Assim, as duas raízes de $2x^2 - 5x = 0$ são $\mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{x = \frac{5}{2}}$.

Exercícios

Exercício 1

Resolva as equações:

a) $x^2 - 9 = 0$
b) $x^2 + 5 = 0$
c) $x^2 - 3 = 0$

Exercício 2

Resolva as equações:

a) $x^2 - 3x = 0$
b) $3x^2 + 12x = 0$

Exercício 3

Resolva as equações:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 - 3x - 10 = 0$
c) $x^2 - 3x + 1 = 0$
d) $x^2 - 6x + 9 = 0$
e) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Exercício 4

Resolva as equações seguintes e use a máquina de calcular para obter valores aproximados das raízes (duas casas decimais são suficientes).

a) $2x^2 + 3x - 4 = 0$
b) $3x^2 - 10x + 6 = 0$