AULA **26**

Problemas do 2º grau

Introdução

Nas Aulas 24 e 25, tratamos de resoluções de equações do 2º grau. Nesta aula, vamos resolver problemas que dependem dessas equações.

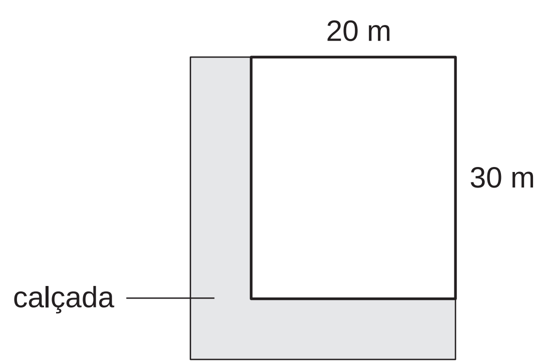
Observe que o significado das incógnitas deve ficar bem claro para que o equacionamento do problema possa ser feito sem dificuldade. Após a resolução da equação, devemos verificar se as duas raízes servem como resposta para o problema em questão. Freqüentemente, como você irá perceber, uma delas não faz sentido.

Nossa aula

Como esta é uma aula de resolução de problemas, é interessante que você leia atentamente cada enunciado e pense um pouco antes de ver a solução.

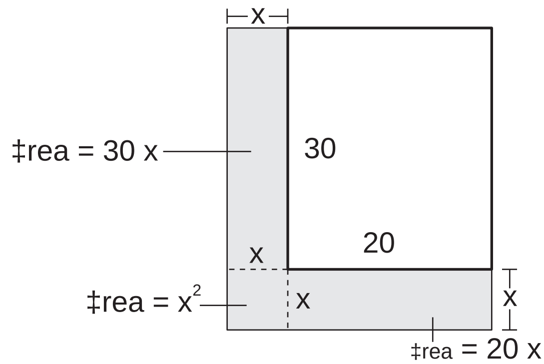
PROBLEMA 1

Um operário foi contratado para construir uma calçada em volta de dois lados de um terreno retangular, como mostra a figura abaixo.



O terreno mede 20 m por 30 m e a calçada deve ter sempre a mesma largura. Sabendo que o operário dispõe de 72 m² de lajotas para fazer a obra, qual deve ser a largura da calçada?

Solução: É claro que a largura da calçada é nossa incógnita. Vamos então chamar de **x** a medida que desejamos calcular. Podemos calcular de várias formas a área da calçada, que é igual a 72 m². Uma delas é a que mostramos na figura abaixo:



Somando as áreas das três partes em que a calçada foi dividida, temos:

$$x^2 + 30x + 20x = 72 \text{ ou}$$

$$x^2 + 50x - 72 = 0$$

Essa é uma equação do 2º grau e nossa incógnita **x**, a largura da calçada, é uma de suas raízes. Vamos então resolver a equação:

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \times 1 \cdot (-72)}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2.500 + 288}}{2}$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2.788}}{2}$$

Utilizando uma calculadora para obter valores aproximados das raízes, temos:

$$x = \frac{-50 \pm 52,8}{2} \begin{cases} \nearrow \dfrac{-50 - 52,8}{2} = -\dfrac{102,8}{2} = -51,4 \\ \searrow \dfrac{-50 + 52,8}{2} = \dfrac{2,8}{2} = 1,4 \end{cases}$$

Observe que a raiz **x = - 51,4** não faz sentido no nosso problema. A medida do comprimento é sempre um número ***positivo***. Portanto, a largura da calçada é de 1,4 m, ou seja, 1 metro e 40 centímetros.

PROBLEMA 2

João comprou um certo número de camisetas (todas iguais) para dar a seus empregados e gastou R$ 96,00. Dias depois, passando em outra loja, viu a mesma camiseta em promoção, R$ 2,00 mais barata. Desta vez, comprou uma camiseta a mais que na compra anterior e gastou R$ 90,00. Quantas camisetas João comprou ao todo?

Solução: precisamos dar nome às nossas incógnitas, isto é, àquilo que não conhecemos no problema. Nós não sabemos quantas camisetas João comprou da primeira vez. Vamos então chamar essa quantidade de **x**. Também não sabemos o preço da camiseta na primeira compra. Vamos chamar esse preço de **y**. Desta forma, na segunda compra, João comprou **x + 1** camisetas e o preço de cada uma é **y - 2**, ou seja, R$ 2,00 a menos. Podemos então resumir o que conhecemos no quadro abaixo:

COMPRA	Nº DE CAMISETAS	PREÇO	TOTAL GASTO
1ª COMPRA	x	y	96
2ª COMPRA	x + 1	y - 2	90

Multiplicando o número de camisetas pelo preço de uma delas, teremos o total gasto em cada compra. Logo, as equações são as seguintes:

$$\begin{cases} xy = 96 \\ (x+1)(y-2) = 90 \end{cases}$$

Temos aqui um sistema de duas equações com duas incógnitas. Vamos inicialmente desenvolver a 2ª equação:

$$(x+1)(y-2) = 90$$

$$xy - 2x + y - 2 = 90$$

Como a 1ª equação nos informa que xy = 96, ficamos com:

$$96 - 2x + y - 2 = 90$$

$$-2x + y = -4$$

$$y = 2x - 4$$

Agora, vamos substituir esse valor de y na 1ª equação:

$$xy = 96$$

$$x(2x - 4) = 96$$

$$2x^2 - 4x - 96 = 0$$

Aí está a equação do 2º grau fornecida pelo problema. Vamos simplificar todos os termos por 2 e resolvê-la.

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 14}{2}$$

$$x = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

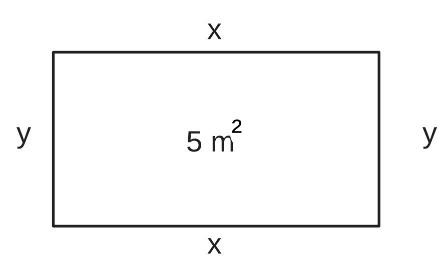
$$x = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Lembre-se de que **x** é o ***número*** de camisetas que João adquiriu na primeira compra. Logo, esse número não pode ser - 6. Concluímos que x = 8, ou seja, João comprou 8 camisetas. Como na segunda compra ele adquiriu uma camiseta a mais, o número total de camisetas compradas é **8 + 9 = 17**.

PROBLEMA 3

Com uma corda de 10 m de comprimento, Pedro deseja cercar uma área retangular de 5 m². Quais as medidas dos lados desse retângulo?

Solução: Vamos chamar de **x** e **y** o comprimento e a largura do retângulo, respectivamente, como mostra a figura:



Já que o perímetro do retângulo é 10 m, temos, como 1ª equação:

x + y + x + y = 10 ou

2x + 2y = 10 ou ainda

x + y = 5

Como a área do retângulo deve ser 10 m², temos, como 2ª equação:

xy = 5

As duas equações formam o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

que é resolvido facilmente. Da 1ª equação temos **y = 5 - x**; substituindo na 2ª equação, encontramos:

$$x\,(5 - x) = 5$$

Vamos então desenvolver, arrumar e resolver essa equação:

$$5x - x^2 = 5$$

$$-x^2 + 5x - 5 = 0$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Usando a máquina de calcular para obter valores aproximados das raízes, encontramos:

$$x = \frac{5 \pm 2,24}{2} \begin{cases} \nearrow \dfrac{5 + 2,24}{2} = \dfrac{7,24}{2} = 3,62 \\ \searrow \dfrac{5 - 2,24}{2} = \dfrac{2,76}{2} = 1,38 \end{cases}$$

Chegamos a dois valores diferentes para **x** e, aparentemente, ambos servem ao nosso problema. No entanto, **x** é o comprimento do retângulo e precisamos ainda calcular a largura **y**. Observando novamente o desenvolvimento, vemos que **x + y = 5**, ou seja, **y = 5 - x**. Então:

a) se **x** = 3,62 então **y** = 5 - 3,62 = 1,38

b) se **x** = 1,38 então **y** = 5 - 1,38 = 3,62

Não encontramos, portanto, dois retângulos diferentes. As duas raízes da equação fornecem como resposta o ***mesmo*** retângulo. Suas medidas aproximadas são **3,62** m e **1,38** m, não importando qual delas é o comprimento ou a largura.

AULA
26

Conferindo resultados

Depois de resolver um problema, é aconselhável conferir o resultado encontrado para verificar se ele está mesmo correto. Afinal, é sempre possível ocorrer algum engano. Vamos então conferir os resultados dos três problemas que resolvemos nesta aula.

Conferindo o problema 1

Nesse problema, encontramos para a largura da calçada x = 1,4 m, aproximadamente. Vamos então calcular a área da calçada usando esse valor:

$$\begin{aligned}\text{Área da calçada} &= 1{,}4^2 + 30 \,.\, 1{,}4 + 20 \,.\, 1{,}4\\ &= 1{,}96 + 42 + 2{,}8\\ &= 71{,}96\end{aligned}$$

que é aproximadamente 72. Se o operário tem 72 m² de lajotas para fazer a calçada, então a largura de 1,4 m está certa.

Conferindo o problema 2

Concluímos nesse problema que João adquiriu 8 camisetas na primeira compra e 9 na segunda. Vamos então calcular o valor de **y**, que é o preço de cada camiseta na primeira compra.
Temos **x = 8** e a equação **xy = 96**. Logo,

$$8y = 96$$

$$y = \frac{96}{8} = 12$$

Então, cada camiseta custou R$ 12,00.
Vamos agora conferir a segunda compra. Sabemos que ele comprou 9 camisetas e cada uma custou R$ 10,00, ou seja, R$ 2,00 a menos. Então, ele gastou $9 \cdot 10 = 90$ reais, o que confere com o enunciado.

Conferindo o problema 3

Nesse problema, concluímos que as medidas do retângulo devem ser 3,62 m e 1,38 m. Vamos então conferir sua área.
Área do retângulo = 3,62 **.** 1,38 = 4,9956 m², que é aproximadamente 5 m², como pede o enunciado. Nossa resposta, portanto, está certa.

Exercícios

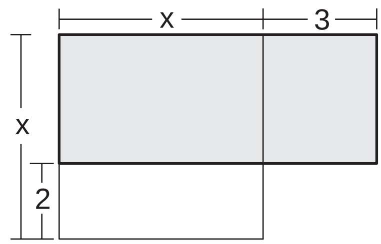
Exercício 1
Os números 1, 2, 3, 4 ... são chamados de ***números naturais***. Cada número natural possui um ***consecutivo***, que é o número que vem depois dele. Por exemplo, o consecutivo de 1 é 2. O consecutivo de 8 é 9 etc. Multiplicando-se um número natural por seu consecutivo, encontramos 132. Que número é esse?

Exercício 2
Um triângulo retângulo tem hipotenusa 15. Um dos catetos tem 3 unidades a mais que o outro. Qual é o perímetro desse triângulo?
Sugestão: Chame o menor cateto de **x** e recorra ao Teorema de Pitágoras.

Exercício 3

Um terreno retangular tem 50 m² de área. Diminuindo seu comprimento em 3 m e aumentando sua largura em 2 m, o terreno transforma-se em um quadrado. Qual é a área desse quadrado?

Sugestão: Observe a figura abaixo:



Exercício 4

Um grupo de pessoas saiu para almoçar em um restaurante, sendo que três delas são mulheres. A conta, de R$ 72,00, foi inicialmente dividida entre todos, mas depois os homens resolveram que, por gentileza, as mulheres não deveriam pagar. Então, cada homem contribuiu com mais R$ 4,00 e a conta foi paga. Quantas pessoas havia no grupo?

Sugestão: Escolha as seguintes incógnitas:

x = número de pessoas do grupo
y = valor que cada um deveria pagar

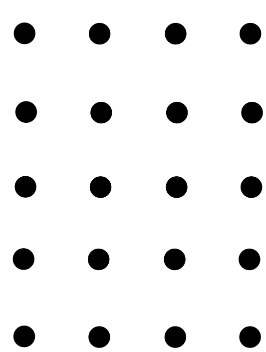
a) Se a conta foi de R$ 72,00, qual é a primeira equação?

b) Se existem 3 mulheres no grupo, quantos são os homens?

c) Se, no pagamento, cada homem contribuiu com mais R$ 4,00, qual é a segunda equação?

Exercício 5

Na figura abaixo existem 20 pontos arrumados em 5 ***linhas*** e 4 ***colunas***:



Imagine que 480 soldados estão formados, arrumados em linhas e colunas. O número de linhas é 4 unidades maior que o número de colunas. Quantas são as linhas e as colunas dessa formação?