AULA

27

A noção de função

Introdução

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de ***função***. Ele se aplica não somente a esta área, mas também à Física, à Química e à Biologia, entre outras. Além disso, está muito presente em nosso dia-a-dia, ajudando a melhor compreender o mundo que nos cerca.

Esta aula introduz o conceito de função, que o qual trabalharemos até a Aula 32. Veja alguns exemplos da aplicação desse conceito:

- o preço de um armário é função da área que ele cobre;
- a dose de um remédio é função do peso da criança que é medicada;
- a altura de uma criança é função de sua idade;
- o desconto do Imposto de Renda é função da faixa salarial;
- o salário de um vendedor é função do volume de vendas;
- a área de um quadrado é função da medida de seus lados;
- o buraco na camada de ozônio é função do nível de poluição etc.

Nossa aula

Esses são apenas alguns exemplos. O que você precisa para entender o conceito de ***função*** é pensar em duas grandezas que variam, sendo que a variação de uma depende da variação da outra.

A construção de uma tabela

Para representar duas grandezas que dependem uma da outra, utilizamos uma tabela. A que segue mostra a variação do preço do armário embutido por metro quadrado.

ÁREA (m^2)	1	2	3	4	5
PREÇO (R$)	120,00	240,00	360,00	480,00	600,00

Vemos que a área do armário é uma grandeza variável; o preço é uma grandeza variável; e a variação do preço depende da variação da área. Dizemos então que ***o preço é função da área***. Para cada um dos outros exemplos, podemos construir uma tabela como a que acabamos de ver.

Vamos imaginar a bula de um remédio pediátrico que diz:

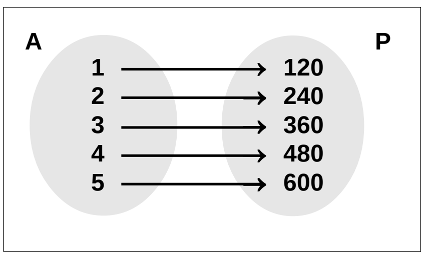
MODO DE USAR OU POSOLOGIA: 2 gotas a cada kg de peso

Pela tabela abaixo, podemos ver a variação dessa função:

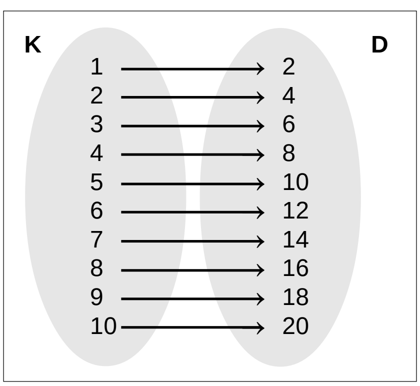
PESO (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DOSE (nº de gotas)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Representação por diagrama

É também muito comum representarmos a dependência entre duas grandezas que variam (variáveis) utilizando conjuntos e flechas. Observe como ficariam representadas as funções apresentadas nas duas tabelas:



O conjunto **A** é o conjunto dos números que expressam a medida da área, e o conjunto **P** é o conjunto dos preços do armário para cada área.
A cada elemento de **A,** corresponde um único elemento de **P**, ou seja, para cada área, temos um único preço.



No caso do remédio, chamaremos **K** o conjunto dos valores que expressam os pesos e **D** o conjunto do número de gotas.
Observe que, para cada peso, corresponde uma única dose do remédio. Caso contrário, continuaríamos sem saber que dose administrar e não teríamos uma função.

A leitura de uma tabela

Observe o exemplo do cálculo do Imposto de Renda deduzido na fonte (Receita Federal - 1995).

VENCIMENTOS	%
até R$ 676,70	0%
de R$ 676,71 a R$ 1.319,57	15%
de R$ 1.319,58 a R$ 12.180,60	26,6%
acima de R$ 12.180,60	35%

Note que o percentual de desconto depende da faixa salarial do trabalhador. Uma pessoa que ganhe até R$ 676,70 está isenta do Imposto de Renda deduzido na fonte. Outra pessoa que ganhe R$ 700,00 por exemplo, cai na faixa de 15% de desconto. O desconto é função da faixa salarial. Os conjuntos numéricos que se relacionam nesse exemplo são: de um lado, os valores dos salários (S), e do outro, dependendo do primeiro, o percentual de desconto (D).

Notação de uma função

Utilizamos a letra **f** para representar uma função. Nos exemplos que acabamos de estudar, representamos:

f: A → P PREÇO = f (área)	Função de A em P; preço é função da área.	Função que relaciona área ao preço do armário.
f: K → D DOSE = f (peso)	Função de K em D; dose é função do peso.	Função que relaciona o peso à dose de remédio.
f: S → D DESCONTO = f (salário)	Função de S em D; desconto é função do salário.	Função que relaciona o salário ao desconto do IR.

Em Matemática, como você já sabe, utilizamos letras para representar grandezas variáveis. Numa função, temos sempre duas variáveis: chamamos **x** a variável do primeiro conjunto e **y** a variável que depende do valor da primeira. Assim:

$$\boxed{\mathbf{y = f(x)} \quad \textbf{significa que y é função de x}}$$

Vejamos um outro exemplo. A área do quadrado é função da medida de seu lado. Você sabe que a expressão para o cálculo da área de um quadrado é:

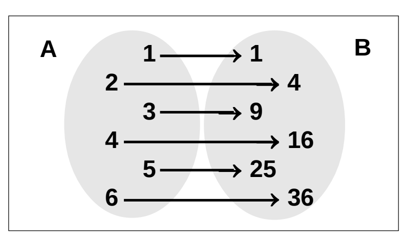
$$\boxed{A = \ell^2}$$

Utilizando os conceitos já estudados, temos:

- A tabela

LADO (cm)	1	2	3	4	5	6
ÁREA (cm²)	1	4	9	16	25	36

- O diagrama



- A notação

f : A → B
y = f(x) onde A é o conjunto das medidas do lado
B é o conjunto das medidas das áreas
y é a área
x é a medida do lado

A fórmula matemática que associa **y** e **x** é:

$$\boxed{y = x^2}$$

Domínio e imagem

No exemplo anterior, o conjunto A dos números que expressam a medida do lado é chamado ***domínio*** e o conjunto B dos números que expressam a área do quadrado é chamado ***imagem***.

Vamos pensar nas seguintes questões:

- Nos outros exemplos que vimos, quais eram o ***domínio*** e a ***imagem***?
- Qual é a lei que associa as variáveis daquelas funções?
- É possível representar essas leis matematicamente?

Veja como podemos responder a todas essas questões:

$f : A \rightarrow P$ Domínio = A Imagem = P
$y = f(x) = x \,.\, 120{,}00$

$f : K \rightarrow D$ Domínio = K Imagem = D
$y = f(x) = 2x$

$f : S \rightarrow D$ Domínio = S Imagem = D

$$y = f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq 676{,}70 \\ 15\%\ x, & \text{se } 676{,}71 \leq x \leq 1.319{,}57 \\ 26{,}6\%\ x, & \text{se } 1.319{,}58 \leq x \leq 12.180{,}60 \\ 35\%\ x, & \text{se } x \geq 12.180{,}61 \end{cases}$$

Mais um exemplo

Mário é um vendedor que recebe mensalmente seu salário em duas partes: uma é fixa, no valor de R$ 150,00, e a outra é variável, sendo igual a 1% do total que ele vende no mês. Vamos chamar de **x** o total de vendas no mês e de **y** o salário de Mário. Como você já deve ter notado **y = f(x)**, ou seja, o salário do vendedor é função do total de suas vendas no mês.

Podemos, agora, calcular os valores de **y** (o salário) atribuindo valores para **x** (o total de vendas) e construir uma tabela para essa função:

TOTAL DE VENDAS x	1% DE x	SALÁRIO y
3.000,00	30,00	150,00 + 30,00 = 180,00
5.000,00	50,00	150,00 + 50,00 = 200,00
10.000,00	100,00	150,00 + 100,00 = 250,00
50.000,00	500,00	150,00 + 500,00 = 650,00
80.000,00	800,00	150,00 + 800,00 = 950,00

Sabendo que o menor valor do total de vendas de um funcionário é de R$ 3.000,00 e o maior valor já conseguido é R$ 80.000,00, o ***domínio*** dessa função é o conjunto de valores de R$ 3.000,00 a R$ 80.000,00.

DOMÍNIO: R$ 3.000,00 $\leq x \leq$ R$80.000,00

Nesse exemplo, como podemos observar na tabela anterior os valores de **y** variam de R$ 180,00 a R$ 950,00:

IMAGEM: R$ 180,00 $\leq$ y $\leq$ R$ 950,00

A lei matemática que associa **y** e **x** pode ser escrita assim:

$$y = 150{,}00 + 1\%\ x \quad \text{ou}$$
$$y = 150{,}00 + 0{,}01\ x$$

Observe que, utilizando essa lei, podemos calcular **y** para qualquer valor de **x** que esteja no domínio:

$$f(3.000{,}00) = 150{,}00 + 30{,}00 = 180{,}00$$
$$f(3.550{,}00) = 150{,}00 + 35{,}50 = 185{,}50$$
$$f(4.000{,}00) = 190{,}00$$
$$f(4.200{,}00) = 192{,}00 \text{ e assim por diante.}$$

Exercícios

Exercício 1

Responda:

a) Se o lado de um quadrado mede 10 cm, qual é sua área?
b Se o lado do quadrado mede 7 cm, qual a sua área?
c) A área do quadrado é função da medida do lado?
d) Calcule o perímetro dos quadrados de 10 cm e 7 cm.
e) O perímetro do quadrado é função da medida do lado? Por quê?
f) Escreva a lei que associa a medida do lado **x** ao perímetro do quadrado **y**.

Exercício 2

Um automóvel consome 1 litro de combustível a cada 8 km.

a) Complete a tabela abaixo:

D: DISTÂNCIA (km)	8	16				
C: CONSUMO (ℓ)	1	2				

b) O consumo é função da distância percorrida?
c) Escreva uma lei que associe a distância **x** ao consumo de combustível **y**.
d) Represente esta função usando conjuntos e flechas.

Exercício 3

Uma função tem domínio D = {4, 7, 9} e associa a cada elemento do domínio o dobro do valor dele. Qual é a imagem dessa função?

Exercício 4

A tabela abaixo representa as distâncias percorridas por um ciclista numa velocidade de 20 km/h:

A: TEMPO	30 min	1 h	1 h 30 min	2 h
B: DISTÂNCIA	10 km	20 km	30 km	40 km

a) Qual o domínio? **b)** Qual a imagem?

Exercício 5

Considere o conjunto A = {-1, 0, 1, 2, 3} e uma função $f:A \rightarrow B$ definida por $y = x + 1$. Determine:

a) O domínio de f.
b) A representação de f por diagrama.
c) f(-1) = f(0) = f(1) =
f(2) = f(3) =
d) A imagem de f.