

# A função do 2º grau

## Introdução

Na aula anterior, estudamos a função do 1º grau ( $y = ax + b$ ) e verificamos que seu gráfico é uma reta. Nesta aula, vamos estudar outra função igualmente importante: a função do 2º grau. Ela é representada pela fórmula:

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde as letras **a**, **b** e **c** são números conhecidos e **a** é diferente de zero. Veja alguns exemplos de funções do 2º grau:

$$y = 2x^2 - 3 + 4$$

$$y = -3x^2 + 9$$

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 6x$$

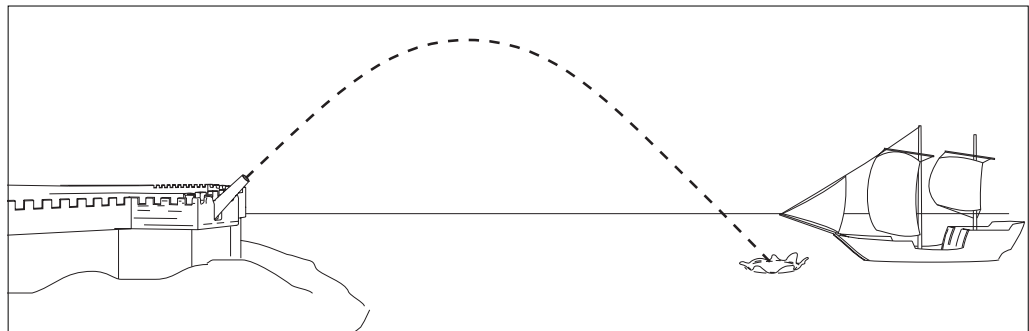
## Nossa aula

O objetivo desta aula é investigar os gráficos dessas funções, que são sempre uma curva: a **parábola**.

Acompanhe os próximos exemplos para ter noção da forma de uma parábola.

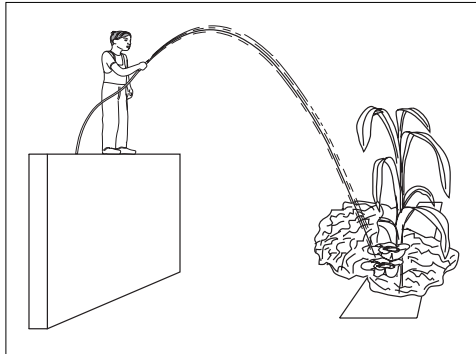
### EXEMPLO 1

Imagine um forte antigo, com canhões preparados para atirar em navios inimigos que se aproximassem:



Um navio se aproxima e um canhão dá um tiro. A trajetória da bala segue muito aproximadamente essa curva, chamada **parábola**. Se não houvesse a resistência do ar, a bala do canhão descreveria exatamente uma parábola.

**EXEMPLO 2**



Um menino, em cima de um muro, rega as plantas com uma mangueira. Visualizando o jato d'água, você terá uma idéia clara da forma dessa curva.

**A parábola**

Os exemplos mostraram, aproximadamente, a forma da parábola. Agora, vamos construir uma delas com maior precisão. Escolhemos então a função:

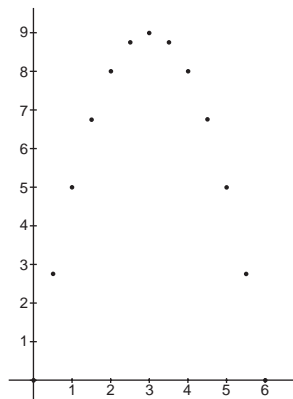
$$y = -x^2 + 6x$$

O **domínio** dessa função é o conjunto de todos os números reais. Vamos atribuir a **x** alguns valores e calcular os valores correspondentes de **y**. Observe:

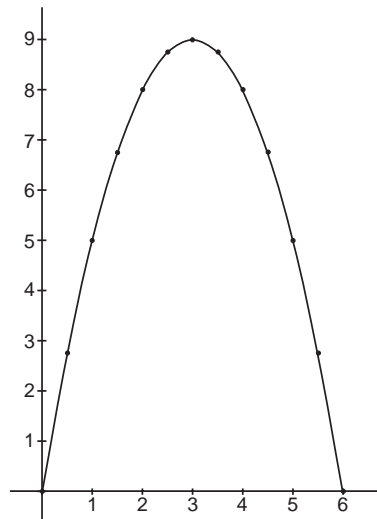
se	$x = 0$	então	$y = -0^2 + 6 \cdot 0 = 0$
se	$x = 0,5$	então	$y = -0,5^2 + 6 \cdot 0,5 = 2,75$
se	$x = 1$	então	$y = -1^2 + 6 \cdot 1 = 5$
se	$x = 1,5$	então	$y = -1,5^2 + 6 \cdot 1,5 = 6,75$

Esse trabalho continua e nos permite organizar uma tabela com diversos pontos. Mostramos abaixo a tabela correspondente a alguns valores de **x** entre 0 e 6 e os valores calculados para **y**. Assinalando no gráfico cartesiano cada um desses pontos, você tem uma primeira idéia do comportamento dessa função. Veja:

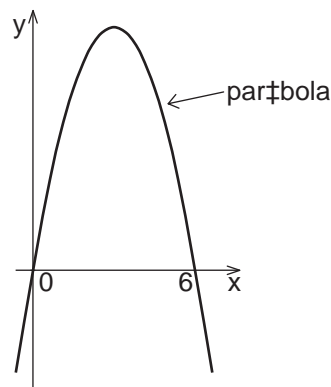
x	y
0	0
0,5	2,75
1	5
1,5	6,75
2	8
2,5	8,75
3	9
3,5	8,75
4	8
4,5	6,75
5	5
5,5	2,75
6	0



Para visualizar melhor o gráfico da função  $y = -x^2 + 6x$ , podemos aumentar a nossa tabela para obter mais pontos. O resultado você vê na figura a seguir, que já mostra o gráfico da nossa função entre  $x = 0$  e  $x = 6$ .



É bom lembrar que esse desenho é apenas parte do gráfico da nossa função. Para valores de  $x$  menores que  $0$  ou maiores que  $6$  os valores calculados para  $y$  serão sempre negativos (experimente) e, portanto, o gráfico continuará abaixo do eixo dos  $x$ . Veja:



### A concavidade

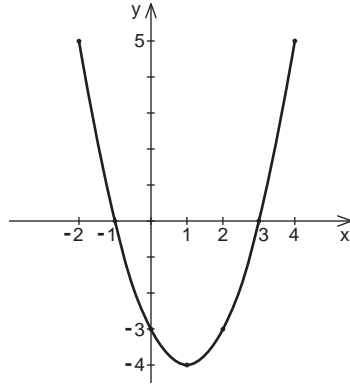
Vamos fazer uma outra experiência para observar a parábola em uma outra posição. Tomemos como exemplo a função:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Agora, vamos organizar nossa tabela. Atribuimos a  $x$  valores entre  $-2$  e  $4$  e calculamos os valores correspondentes de  $y$ . Você compreenderá, um pouco mais tarde, a razão da escolha desses valores para  $x$ .

De qualquer forma, sugerimos que confira nossos cálculos, observe a marcação dos pontos e a construção do gráfico:

x	y
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5

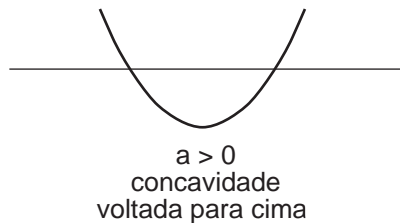


Esse gráfico tem exatamente a mesma forma daquele que encontramos no exemplo anterior, com uma diferença: está em outra posição.

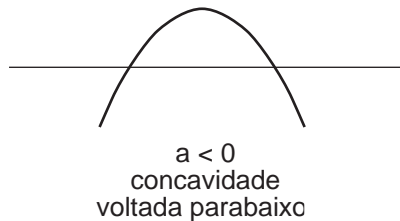
***Dizemos que essa parábola tem a concavidade voltada para cima, enquanto a do exemplo anterior tem a concavidade voltada para baixo.***

Antes de construir o gráfico da função  $y = ax^2 + bx + c$ , é possível saber como será a sua concavidade. Basta observar o sinal do coeficiente  $a$ :

- Se  $a > 0$  ( $a$  positivo), a concavidade estará voltada **para cima**:



- Se  $a < 0$  ( $a$  negativo), a concavidade estará voltada **para baixo**:



## As raízes

As raízes de uma função são os pontos onde seu gráfico corta o eixo dos  $x$ . Na função do 2º grau  $y = ax^2 + bx + c$ , se  $y = 0$  obtemos a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ . Podemos, então, ter três casos:

- A equação tem **duas raízes diferentes**. A parábola, então, corta o eixo dos  $x$  em dois pontos distintos.

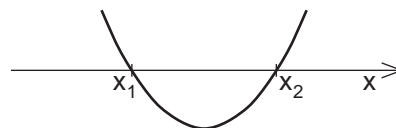


fig A: a função tem duas raízes:  $x_1$  e  $x_2$

- A equação tem apenas **uma raiz**. A parábola é, então, **tangente** ao eixo dos  $x$ .

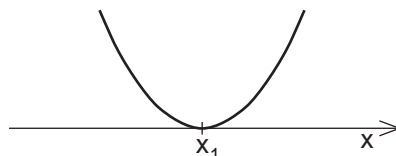


fig B: a função tem uma única raiz:  $x_1$

- A equação **não tem raiz**. A parábola, então, **não** corta o eixo dos  $x$ .

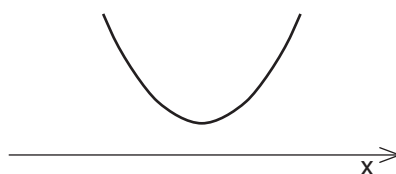


fig C: a função não tem raízes.

### EXEMPLO 3

Tomemos como exemplo a função:

$$y = x^2 - 6x + 8$$

Para construir seu gráfico assinalando poucos pontos, devemos inicialmente verificar se a função possui raízes. Vamos então resolver a equação  $x^2 - 6x + 8 = 0$  usando a fórmula que aprendemos na Aula 25:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

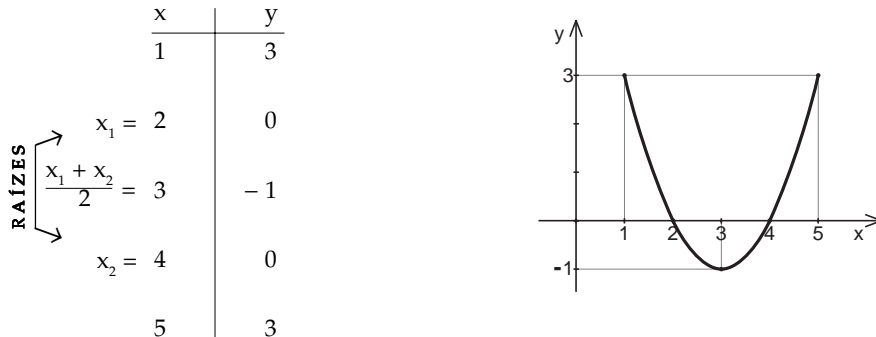
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

As raízes da nossa função são, portanto:

$$x_1 = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow x_1 = 2$$

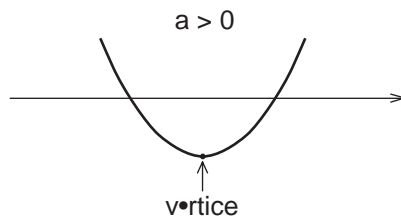
$$x_2 = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow x_2 = 4$$

Descobrimos que o gráfico da nossa função corta o eixo dos  $x$  nos pontos  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 4$  e sabemos também que a parábola terá concavidade voltada para cima porque  $a = 1$  (positivo). Basta, então, para construir a tabela, atribuir a  $x$  outros valores próximos aos que já temos. É muito importante atribuir a  $x$  o valor  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ , porque ele fica bem no meio das raízes e vai determinar o ponto **mais baixo** da parábola:

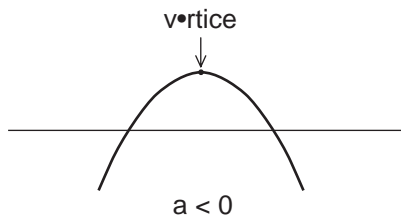


### O vértice

No gráfico que acabamos de construir, o ponto  $V = (3, -1)$  é o **vértice** da parábola. Ele é o ponto **mais baixo** da parábola quando  $a > 0$ .



No gráfico da função  $y = -x^2 + 6x$ , que você viu no início da aula, o ponto  $(3, 9)$  é também o **vértice** da parábola, que fica no ponto **mais alto** do gráfico, porque  $a < 0$ :



Para a construção do gráfico de uma função do 2º grau, o **vértice** é seu ponto mais importante. É possível encontrá-lo de forma bastante simples. Chamando de  $x_v$  a abscissa do vértice da parábola  $y = ax^2 + bx + c$ , temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

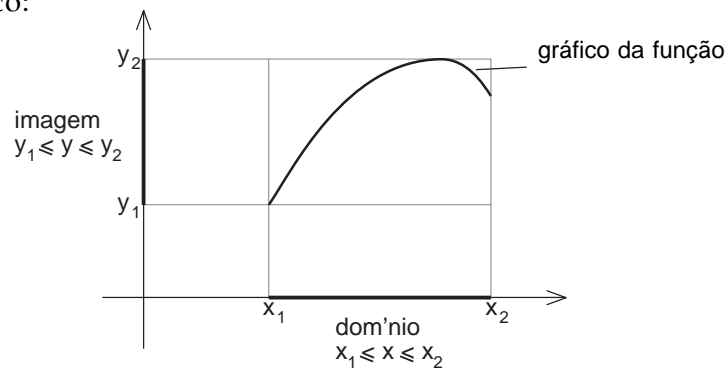
Além disso, se a função possui raízes  $x_1$  e  $x_2$ , podemos encontrar a **abscissa do vértice** determinando o seu ponto médio, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Esses resultados serão demonstrados no **Apêndice**, no final da aula, mas você já pode usá-los para construir de forma rápida e eficiente o gráfico de uma função do 2º grau.

### A imagem

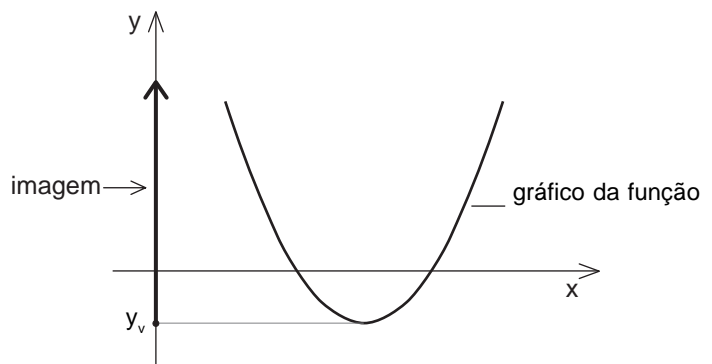
Como você já sabe, a **imagem** de uma função é o conjunto dos valores de  $y$  que correspondem aos valores de  $x$  no domínio. Recorde essa noção observando o gráfico:



Para determinar a imagem de uma função do 2º grau (cujo domínio é o conjunto de todos os números reais), precisamos conhecer seu vértice. Se  $a > 0$ , então o vértice é o ponto **mais baixo** de seu gráfico, e neste caso, a imagem da função fica assim:

Observando o gráfico anterior e chamando de  $y_v$  a **ordenada** do vértice da parábola, a imagem será o conjunto de todos os valores de  $y$  tais que  $y \geq y_v$ .

Se  $a < 0$ , ocorre o contrário: a concavidade estará voltada para baixo e a imagem será o conjunto dos números reais tais que  $y \leq y_v$ .



**EXEMPLO 4**

Consideremos a função  $y = x^2 - x + 5$ .

Sabemos que ela tem concavidade voltada para cima, pois  $a = 1$ .

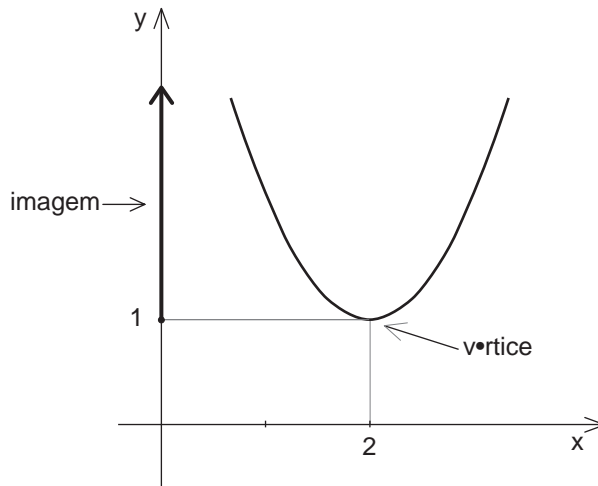
Para fazer um esboço de seu gráfico, determinamos seu vértice. Primeiro, precisamos encontrar sua abscissa:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

Substituímos então esse valor de  $x$  na função para encontrar a ordenada do vértice:

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$$

Portanto, o vértice é o ponto  $(2, 1)$  e, como a concavidade está voltada para cima, o gráfico tem este aspecto:



A imagem da função é então o conjunto dos valores de  $y$  tais que  $y \geq 1$ .

**Apêndice**

Vamos mostrar agora porque a abscissa do vértice da função do 2º grau é  $-\frac{b}{2a}$ . Observe as transformações na função: elas criam um quadrado perfeito:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



Veja que se  $a$  é positivo,  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  é sempre positivo ou nulo. Então, para obter o ponto mais **baixo** da parábola, fazemos  $x + \frac{b}{2a} = 0$ , ou seja,  $x = -\frac{b}{2a}$ . Para esse valor de  $x$ , temos  $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , que é chamado de **valor mínimo** da função.

Da mesma forma, se  $a$  é negativo,  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  é sempre negativo ou nulo. Então, para obter o ponto mais **alto** dessa parábola, fazemos  $x + \frac{b}{2a} = 0$ , ou seja,  $x = -\frac{b}{2a}$ . Para esse valor de  $x$ , temos  $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$  que é chamado de **valor máximo** da função.

Se existem raízes  $x_1$  e  $x_2$ , a abscissa do vértice da parábola é o valor  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ . De fato, representando por  $D$  (delta) o número  $b^2 - 4ac$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b - \Delta}{2a} + \frac{-b + \Delta}{2a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2b)}{2a} = \\ &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Portanto, a **média** das raízes é também a abscissa do vértice da parábola.

Procure agora fazer os exercícios propostos.

## Exercícios

### Exercício 1

Faça o gráfico da função  $y = x^2 - 6x + 7$ .

**Sugestão:** Organize uma tabela atribuindo a  $x$  os valores  $-2, -1, 0, 1$  e  $2$ .

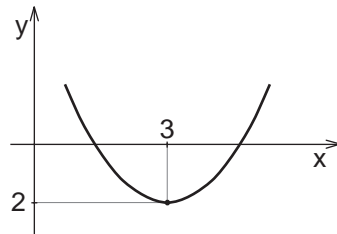
### Exercício 2

Observe o exemplo e faça um pequeno esboço do gráfico das funções calculando o vértice da parábola e verificando sua concavidade.

**Exemplo:**

$$y = x^2 - 6x + 7$$

$$\text{vértice} \quad \begin{cases} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \\ y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2 \end{cases}$$



a)  $y = x^2 - 4x + 5$

b)  $y = -x^2 + 6x - 5$

c)  $y = x^2 + 2$

**Exercício 3**

Faça o gráfico das funções determinando as raízes e o vértice da parábola.

a)  $y = x^2 - 4x + 3$

b)  $y = -x^2 + 8x - 12$

**Exercício 4**

Determine as imagens das funções do Exercício 3.

**Exercício 5**

Faça o gráfico e determine a imagem da função  $y = (x - 3)^2$ .