AULA

32

Máximos e mínimos

Introdução

Problemas de máximos e mínimos estão presentes em quase todas as atividades do mundo moderno. Por exemplo, você pode imaginar como um carteiro distribui a correspondência? Qual seria seu itinerário para que o tempo de distribuição fosse o menor possível?

Uma variação desse problema é o trajeto do ônibus escolar. Ele deve passar na casa de cada criança para levá-las à escola. Conhecendo os endereços, é preciso planejar o percurso para fazer o serviço no menor tempo possível.

Em qualquer empresa, grande ou pequena, ouvimos falar em *encontrar a receita máxima*, *reduzir o desperdício ao mínimo* entre outras coisas.

Na prática, os problemas de ***máximos*** e ***mínimos*** são, freqüentemente, complexos, porque envolvem muitas variáveis. Entretanto, existem também aqueles que se resolvem por uma simples função do 2º grau. Vamos mostrar alguns desses problemas. Sugerimos que você releia com atenção a Aula 31, para compreender bem as nossas soluções.

Nossa aula

PROBLEMA 1

Os técnicos de uma fábrica de automóveis fizeram diversos testes com um de seus carros populares para examinar o consumo de gasolina. O carro percorria 100 km em uma estrada plana, com velocidade constante. O percurso foi feito muitas vezes e, a cada vez, usou-se uma velocidade diferente. No final de cada viagem, os técnicos verificaram a quantidade de combustível gasta e observaram que o consumo não se mantinha o mesmo, pois era ***função*** da velocidade.

A conclusão foi a seguinte: para velocidade entre 40 e 120 km/h, o consumo desse carro é dado por:

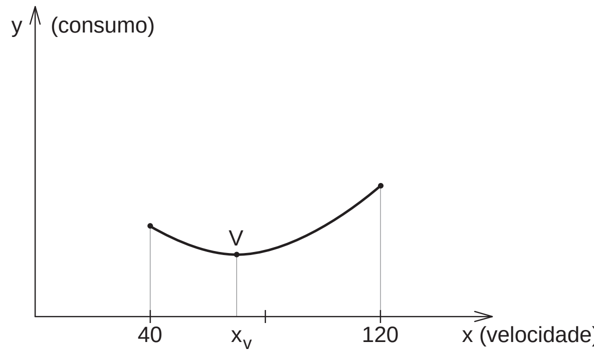
$$\mathbf{y = 0{,}005\,x^2 - 0{,}6\,x + 26}$$

onde **x** é a velocidade em quilômetros por hora e **y** é o número de litros de gasolina gastos para percorrer 100 km.

Em que velocidade devemos andar com esse carro, para gastar o ***mínimo*** de combústivel?

Este é um problema interessante. Muita gente acha que andar bem devagar economiza combustível. Não é verdade! É certo que andar muito rápido faz com que o consumo seja alto, mas cada carro possui uma velocidade em que o consumo é o menor possível.

Solução: A função que os técnicos encontraram é do tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$. Como o coeficiente **a** é positivo, sabemos que existe um valor mínimo dessa função. Seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



O ponto mais baixo do gráfico é o ***vértice*** (**v**) da parábola e o número $\mathbf{x_v}$ é a velocidade que faz com que o consumo seja o menor possível. Na Aula 31 aprendemos a calcular a abscissa do vértice da parábola. Observe:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-0,6}{2 \times 0,005} = \frac{0,6}{0,01} = 60$$

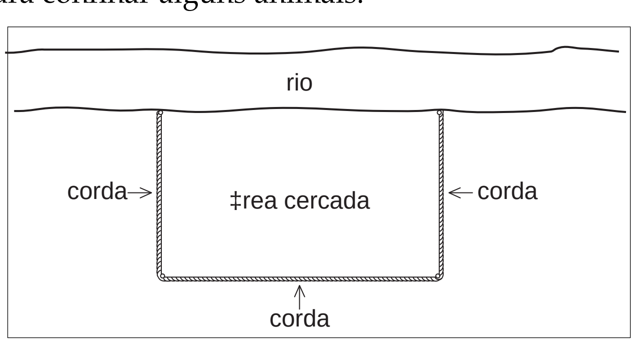
Logo, a velocidade que dá o mínimo consumo é de **60 km/h** para gastar a menor quantidade possível de gasolina. Se, entretanto, desejarmos saber qual o gasto mínimo de combustível para percorrer os 100 km, basta substituir o **x** da função por 60. Teremos então:

$$\begin{aligned} y &= 0,005 \cdot 60^2 - 0,6 \cdot 60 + 26 \\ &= 18 - 36 + 26 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Portanto, andando a 60 km/h, gastaremos apenas **8 litros** de gasolina para percorrer os 100 km.

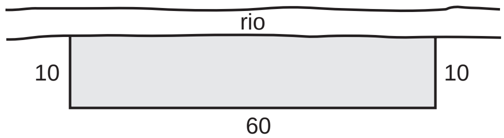
PROBLEMA 2

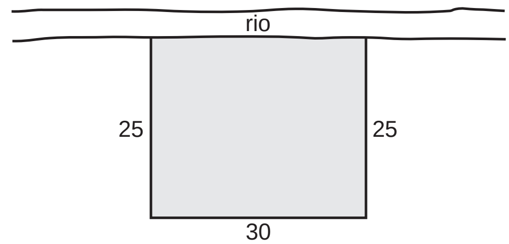
Com 80 m de corda, um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

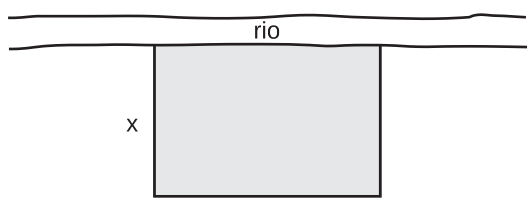
Conhecido o comprimento da corda (80 m) e uma das medidas do retângulo, é facil calcular as outras. Mas, existem muitas opções para formar esse retângulo. Veja duas delas:



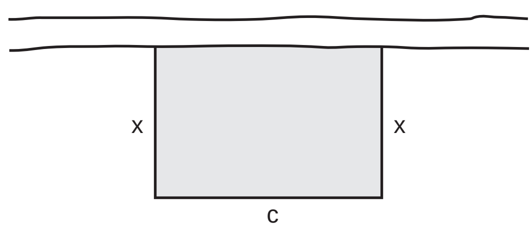


Nos dois exemplos, o comprimento total da corda é 80 m, mas as áreas cercadas são diferentes. No primeiro caso, ela é 10 . 60 = 600 m^2 *e no segundo,* 25 . 30 = 750 m^{22} . *Vemos, então, que a área cercada é* ***função*** *das medidas do retângulo.*

Solução: Vamos chamar de **x** uma das medidas do retângulo.



A área será representada por **y**. Como os lados opostos do retângulo são iguais, temos um outro lado de tamanho **x** e o outro de tamanho **c**. Veja:



Se o comprimento total da corda é 80 m, então:

$$x + c + x = 80 \quad \text{ou}$$
$$c = 80 - 2x$$

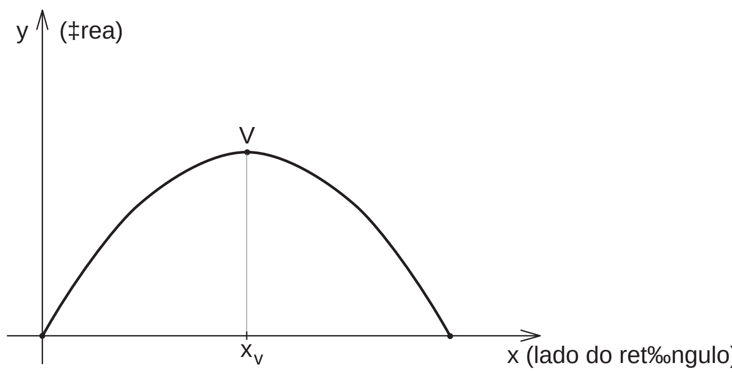
Agora, a área cercada é:

$$y = x \,.\, c \qquad \text{ou}$$
$$y = x\,(80 - 2x)$$

Desenvolvendo, temos:

$$y = 80x - 2x^2 \quad \text{ou melhor}$$
$$y = -\,2x^2 + 80\,x$$

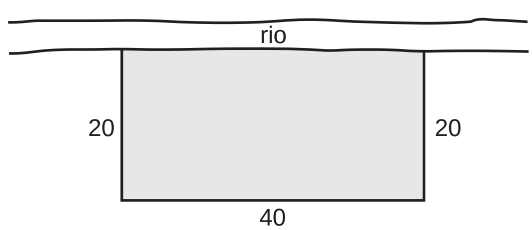
Estamos diante de uma função do 2º grau, que relaciona o lado **x** do retângulo com a área **y**. O gráfico tem a seguinte forma:



O ponto mais alto do gráfico é o vértice **v** da parábola; sua abscissa $\mathbf{x_v}$ é o valor do lado do retângulo que faz com que sua área seja máxima. Calculamos, então, essa abscissa da mesma forma que no problema anterior:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2\,(-2)} = \frac{80}{4} = 20$$

Portanto, se fizermos a largura do retângulo igual a 20 m, teremos a certeza de que a área cercada será a maior possível. Veja como ele ficou:



A área, neste caso, será de 20 x 40 = 800 m²; maior, como se pode ver, que as áreas dos retângulos que apareceram nos dois exemplos iniciais.

Exercícios

Exercício 1

Usando a função do Problema 1 da nossa aula, calcule:

a) O consumo de combustível a 50 km/h;

b) O consumo de combustível a 90 km/h;

c) Em que velocidade, maior que 60 km/h, o carro andou se gastou 10 litros para percorrer os 100 km?

Exercício 2

Qual é o valor mínimo da função $y = x^2 - 6x + 13$?

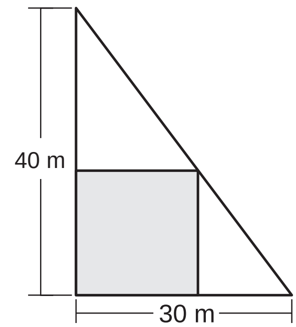
Exercício 3

Qual é o valor máximo da função $y = -3x^2 + 12x + 5$?

Sugestão (para os Exercícios 2 e 3): Calcule a abscissa do vértice pela fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$ e substitua esse valor encontrado no **x** da função.

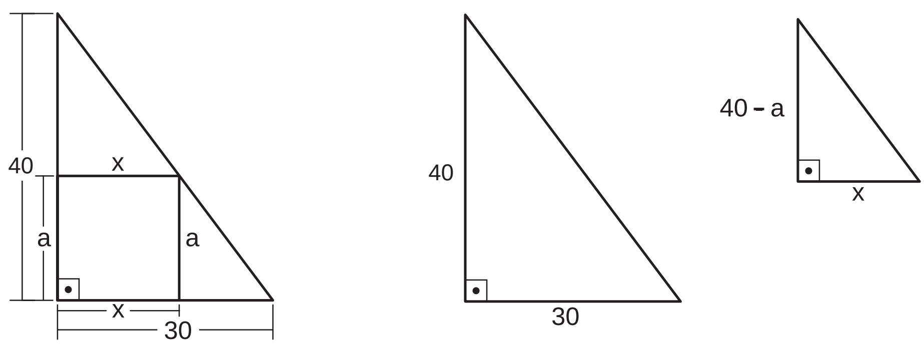
Exercício 4

Desejamos construir um edifício de base retangular no interior de um terreno triangular, como mostra a figura:



Determine as medidas do retângulo de maior área possível que caiba dentro de um triângulo retângulo de catetos 30 m e 40 m.

Sugestão: Seja **x** uma das medidas do retângulo e **y** sua área. Vamos calcular **y** em função de **x** (fig. A):



Os dois triângulos da figura B são semelhantes. Relacione seus elementos e calcule o segmento **a** em função de **x**. A área do retângulo é $y = x \cdot a$. Substituindo **a** pela expressão encontrada, obtém-se uma função do 2º grau. Determine, então, para que valor de **x** encontra-se o máximo de **y**.

Exercício 5

João tem uma pequena fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00 cada uma. Entretanto percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima? Qual o valor máximo dessa receita?

Sugestão: Inicialmente ele vendia 300 caixas por R$ 20,00 cada uma. Sua arrecadação era $300 \cdot 20 =$ R$ 6.000,00. Diminuindo R$ 1,00 no preço, ele venderá 40 caixas a mais. Nesse segundo caso, sua arrecadação será $340 \cdot 19 =$ R$ 6.460,00. Portanto a arrecadação aumentou. Complete alguns valores da tabela abaixo.

Imagine agora que ele dê um desconto de **x** reais em cada caixa. Assim, o preço será **20 - x** e o número de caixas vendidas será **300 + 40x**. Se **y** é a sua receita, você deve observar que **y** é dado por uma função do 2º grau.

PREÇO	Nº DE CAIXAS VENDIDAS	RECEITA
20	300	6.000
19	340	6.460
18		
17		