AULA

34

Somando os termos de uma progressão aritmética

Introdução

Na aula passada, mostramos como calcular qualquer termo de uma progressão aritmética se conhecemos um de seus termos e a razão. Nesta aula, vamos aprender a somar rapidamente qualquer quantidade de termos de uma PA. Deduziremos a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética usando a mesma idéia que um menino de 10 anos teve no ano de 1787. Esse menino, que se tornou um dos maiores matemáticos de todos os tempos, chamava-se Carl Friedrich Gauss, e uma pequena parte de sua história é a que relatamos a seguir:

Um pouco de História

O menino Gauss era alemão e vivia na cidade de Brunswick, onde, aos 10 anos, freqüentava a escola local. Certo dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Mas, para sua enorme surpresa, o pequeno Gauss anunciou a resposta quase imediatamente: "Dá 5.050".

Vamos mostrar como ele calculou "de cabeça" a soma:

$$1 + 2 + 3 + ... + 100$$

Primeiro vamos representar pos S essa soma.

Depois, escrevemos a mesma soma na ordem inversa e, em seguida, somamos as duas, termo a termo.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S = & 100 & + & 99 & + & 98 & + \dots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S = & 101 & + & 101 & + & 101 & + \dots + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

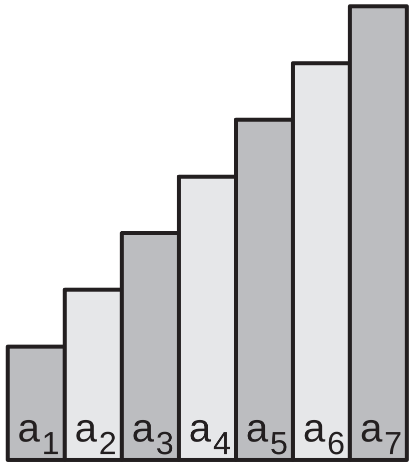
Assim, duas vezes S é igual à soma de 100 parcelas, todas iguais a 101. Logo:

$$\begin{aligned}
2S &= 100 \cdot 101 \\
2S &= 10.100 \\
S &= 5.050
\end{aligned}$$

Não há dúvida de que esse episódio da vida do menino Gauss nos mostra uma idéia brilhante. Vamos aproveitá-la para deduzir a fórmula da soma dos termos de qualquer progressão aritmética.

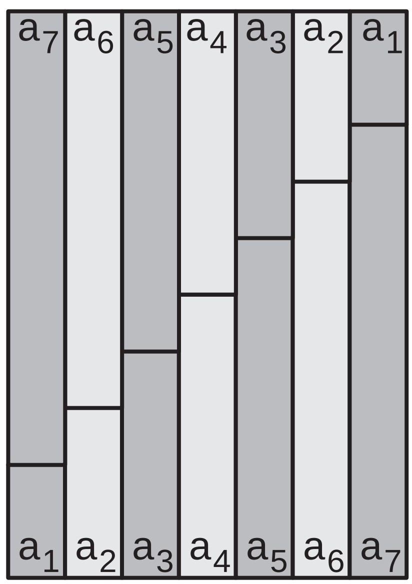
Nossa aula

Como vimos na aula passada, podemos imaginar os termos de uma progressão aritmética como os degraus de uma escada. Veja uma de sete degraus, por exemplo:



Agora, como faremos para calcular a soma das alturas de todos os degraus?

Podemos usar a idéia do menino Gauss. Vamos considerar duas ***escadas iguais*** e encaixar uma na outra, como mostra o desenho a seguir:



Observando o desenho, vemos que $a_1 + a_7$ é igual a $a_2 + a_6$ que é igual a $a_3 + a_5$ e assim por diante. Temos então:

$$\mathbf{S} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4} + \mathbf{a_5} + \mathbf{a_6} + \mathbf{a_7}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{a_7} + \mathbf{a_6} + \mathbf{a_5} + \mathbf{a_4} + \mathbf{a_3} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_1}$$

Somando as duas igualdades, obtemos, do lado esquerdo, 2S e, do lado direito, 7 vezes $a_1 + a_7$. Logo:

$$2S = (a_1 + a_7) \cdot 7$$

$$S = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$$

O raciocínio utilizado para obter a soma dos 7 termos da progressão que nos serviu de exemplo pode ser aplicado a qualquer outra. Portanto, se uma progressão tiver **n** termos, a soma de todos eles será:

$$\boxed{S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Nessa fórmula, é bom lembrar que:

$\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo,

$\mathbf{a_n}$ é o último termo,

n é o número de termos.

EXEMPLO 1

Calcule a soma dos 30 primeiros números ímpares.
Solução: Os números ímpares são:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Eles formam uma progressão aritmética de razão 2.
Para calcular o trigésimo (30º) termo dessa progressão, precisamos usar a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)R$ que aprendemos na aula passada. Substituindo então **n** por 30, obtemos:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)R$$

$$a_{30} = 1 + 29 \cdot 2$$

$$a_{30} = 59$$

Vamos usar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, fazendo também **n = 30**:

$$S = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2}$$

Substituindo os valores do primeiro e do último termo, temos:

$$S = \frac{(1 + 59) \cdot 30}{2} = \frac{60 \cdot 30}{2} = 900$$

Concluímos então que a soma dos 30 primeiros números ímpares é:

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 59 = 900}$$

EXEMPLO 2

No Exemplo 3 da aula passada, vimos que João ganhava R$ 70,00 em janeiro de certo ano e passou a receber um aumento de R$ 4,00 todos os meses. Desejamos saber agora qual foi o total que ele recebeu em dois anos de trabalho, ou seja, até dezembro do ano seguinte.

Solução: Nós vimos que o salário de João forma uma progressão aritmética de razão 4. O primeiro termo é 70 e o vigésimo quarto (24º) termo foi calculado.

a_1	a_2	a_3	....	a_{24}
70	74	78	....	162

Vamos agora somar todos esses valores usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. Com 24 parcelas, a fórmula fica assim:

$$S = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2}$$

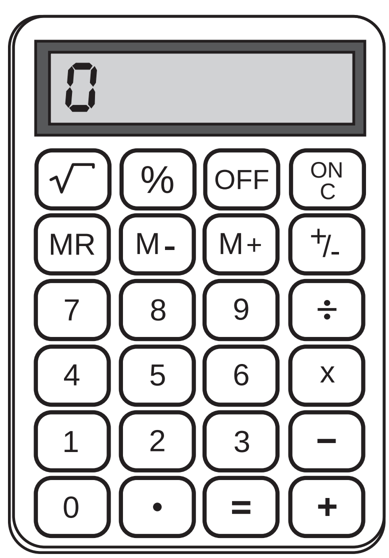
Substituindo os valores do primeiro termo e do último, temos:

$$S = \frac{(70 + 162) \cdot 24}{2} = 2.784$$

Concluímos que João ganhou, ao longo dos dois anos, um total de **R$ 2.784,00**.

A progressão aritmética na máquina de calcular

Hoje em dia, todos nós usamos uma máquina simples para facilitar nossos cálculos: a máquina de calcular. Além de realizar as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), a máquina calcula raiz quadrada e tem memória.



A maioria dessas calculadoras é capaz de mostrar, com muita facilidade, os termos de uma progressão aritmética qualquer. Como exemplo, consideremos a progressão aritmética de razão R = 7, começando em $a_1 = 9$. Para visualizar quantos termos você quiser, digite:

9 + 7 = = = = = ...

A primeira vez que você apertar a tecla = o visor mostrará 16, que é o segundo termo da progressão. Continuando a apertar a tecla = diversas vezes, o visor mostrará os termos seguintes da progressão: 23, 30, 37, 44 etc.

A máquina de calcular também soma os termos de uma progressão aritmética. Se não forem muitos os termos que precisamos somar, o uso da calculadora é bastante eficiente. Vamos mostrar então como obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PA, cujo primeiro termo é 15,86 e cuja razão é 0,17.

Para obter os 5 termos, procedemos como no exemplo anterior. Devemos apenas, após cada termo que aparecer no visor, apertar a tecla M+. Isto faz com que os termos da progressão sejam acumulados na memória da calculadora. Depois que você apertar pela quinta vez a tecla M+, aperte a tecla MR e a soma dos 5 termos da progressão aparecerá no visor.

O esquema da operação que vamos fazer é o seguinte:

a_1 M+ + R = M+ = M+ = M+ = M+ MR

Iniciando com $a_1 = 15,86$ e com R = 0,17, e procedendo como indicamos acima, encontraremos, para a soma dos 5 termos da progressão, o valor 81.

Exercícios

Exercício 1

Dada a progressão: 5, 16, 27, 38, ..., calcule:

a) o vigésimo (20º) termo;

b) a soma dos 20 primeiros termos.

Exercício 2

Calcule a soma de todos os números ímpares de dois algarismos.

Sugestão: Os números ímpares de dois algarismos formam a progressão 11, 13, 15, 17, ..., 99. É preciso saber ***quantos*** termos ela possui. Para isso, ultilize a fórmula do termo geral: $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) R}$, com $\mathbf{a_1 = 11}$ **e** $\mathbf{a_n = 99}$. O valor de **n** que você encontrar é o número de termos da progressão. Ultilize então a fórmula da soma.

Exercício 3

Calcule a soma dos 25 primeiros termos da PA:
100, 94, 88, 82, ...

Exercício 4

Um corredor planejou seu treinamento da seguinte forma: pretende correr 5 km no primeiro dia e depois ir aumentando a distância em 500 m todos os dias.

a) Quanto ele estará correndo no trigésimo (30º) dia do treinamento?

b) Nesses 30 dias, qual foi a distância total que ele percorreu?

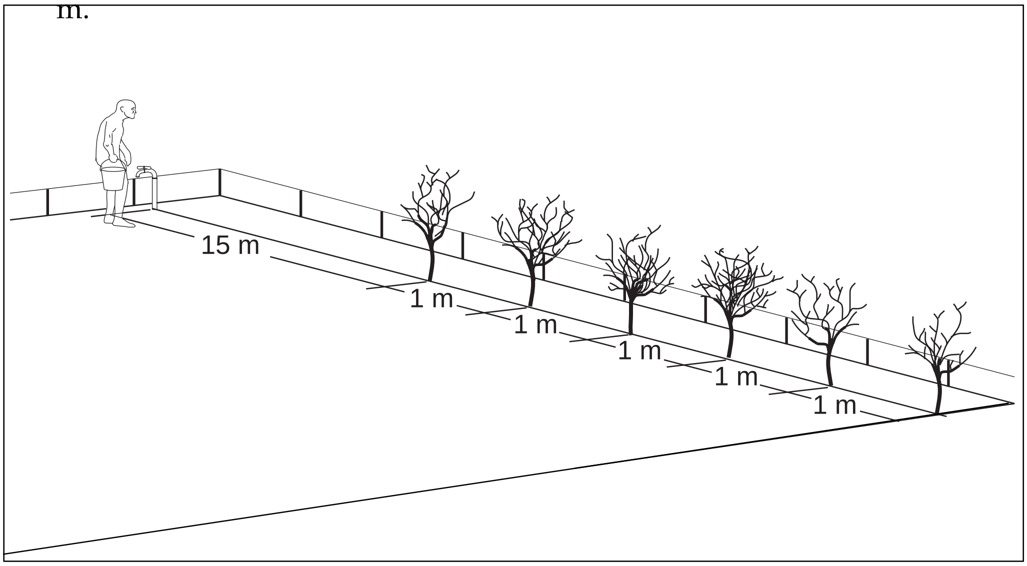
Sugestão: Construa uma PA da seguinte forma a_1 = 5 km, a_2 = 5,5 km etc. Calcule a_{30} pela fórmula do termo geral e depois some todos os termos.

Exercício 5

Qual é a soma de todos os múltiplos de 5 que possuem três algarismos?

Exercício 6

Em uma casa de campo existem, ao longo da cerca, uma torneira e 18 roseiras. A torneira está a 15 m da primeira roseira e o espaço entre as roseiras é de 1 m.



O jardineiro tem apenas um balde. Ele enche o balde na torneira, rega a primeira roseira, volta para encher o balde, rega a segunda roseira, e assim por diante. Após regar a décima oitava (18ª) roseira ele retorna para deixar o balde junto à torneira. Qual foi a distância total percorida pelo jardineiro?