

# Progressões geométricas

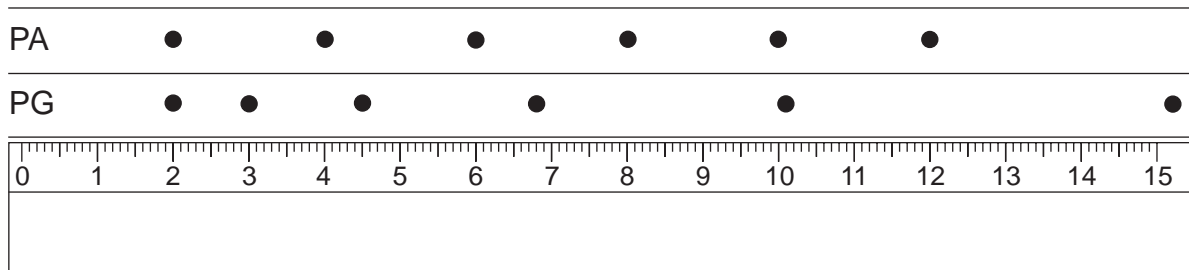
## Introdução

Nesta aula, vamos abordar outra importante seqüência: a *progressão geométrica*. É possível que você já tenha ouvido alguém preocupado com o número de habitantes do nosso planeta dizer a seguinte frase: "A produção de alimentos cresce em progressão aritmética enquanto a população mundial cresce em progressão geométrica".

O que essa frase significa?

A primeira parte da frase diz que o aumento da produção de alimentos é *constante*, ou seja, a cada ano aumenta do mesmo valor. A segunda parte da frase fala de uma seqüência cujo crescimento é *cada vez mais rápido*.

Para que você tenha uma primeira idéia do que vamos estudar, mostramos, no desenho seguinte, alguns termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica, situados sobre uma régua. Observe o crescimento constante da progressão aritmética e o crescimento, *cada vez mais rápido*, da progressão geométrica.



## Nossa aula

*Progressão geométrica* (ou simplesmente **PG**) é uma seqüência de números não nulos em que cada um deles, *multiplicado* por um número fixo, fornece o próximo elemento da seqüência. Esse número fixo chama-se *razão*, e os elementos da seqüência são os *termos* da progressão geométrica.

Por exemplo, vamos obter os termos de uma progressão geométrica de razão 2, partindo do número 3.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 3 & 6 & 12 & 24 & 48 & 96 & 192 & 384 & 768 & 1.536 & \dots \\
 \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \dots \\
 \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \dots
 \end{array}$$

Observe como o crescimento é rápido.

Os termos da progressão geométrica são representados, como em qualquer seqüência, por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , e a razão será representada pela letra  $q$ . Assim, no exemplo anterior, temos  $a_1=3, a_2=6, a_3=12$  etc. e  $q = 2$ .

Se cada termo da PG *multiplicado* pela razão dá o termo seguinte, então podemos afirmar que:

*A razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior.*

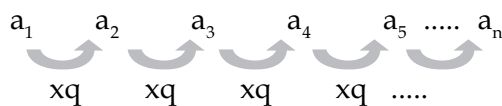
No nosso estudo, vamos considerar apenas progressões geométricas de *termos positivos*. São as que têm interesse prático e ocorrem em diversos fenômenos naturais.

Observe três exemplos que mostram a classificação das progressões geométricas:

- $a_1 = 2, q = 5$   
PG: 2, 10, 50, 250, 1.250, ...  
É uma progressão *crescente*.
- $a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$   
PG: 8, 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  ...  
É uma progressão *decrecente*.
- $a_1 = 3, q = 1$   
PG: 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...  
É uma progressão *estacionária*.

Pelo que vimos acima, concluímos que, se a razão for maior que 1, a progressão geométrica é crescente e, se a razão for um número entre 0 e 1, a progressão é decrescente.

Vamos agora obter uma fórmula para determinar qualquer termo de uma PG a partir do primeiro termo e da razão. Observe então uma progressão geométrica qualquer:



A partir da definição de PG, temos que  $a_2 = a_1 \cdot q$ .

O terceiro termo é  $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$ . O quarto termo é  $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$  e assim por diante.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Para obter então o termo de ordem  $n$ , devemos multiplicar o primeiro termo pela razão  $n-1$  vezes, ou seja,

**Fórmula do termo geral**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

EXEMPLO 1

Determinar o 12º termo da PG 7, 14, 28, .....

Como a razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior, temos que:

$$q = \frac{14}{7} = 2.$$

Para calcular o 12º termo dessa progressão, substituímos  $n$  por 12 na fórmula do termo geral. Temos então:

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 7 \cdot 2^{11} \\ a_{12} &= 7 \cdot 2.048 = 14.336 \end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada *treponema pallidum*): cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1 hora. Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

**Solução:** A população de bactérias forma uma progressão geométrica:

momento inicial	→	$a_1 = 1$
1 hora depois	→	$a_2 = 8$
2 horas depois	→	$a_3 = 64$
.....		

Vemos então que, 12 horas depois, devemos calcular o 13º termo da progressão geométrica com  $a_1 = 1$  e  $q = 8$ . Aplicando novamente a fórmula do termo geral, com  $n = 13$ , temos:

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12}$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão, encontramos:

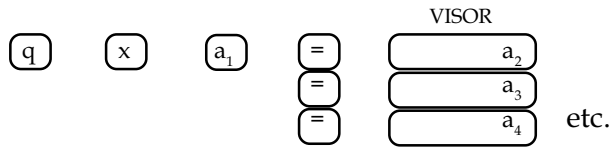
$$a_{13} = 1 \cdot 8^{12}$$

Esse resultado dá o incrível número **68.719.476.736**, ou seja, mais de 68 bilhões de bactérias!

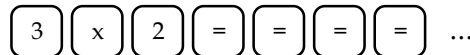
## A PG na calculadora

A maioria das calculadoras simples é capaz de mostrar no visor os termos de uma progressão geométrica de forma bastante prática. Basta digitar a razão, o sinal de multiplicação, o primeiro termo e a tecla [=] sucessivas vezes.

Os termos da PG vão aparecendo no visor:



Por exemplo, para obter diversos termos da PG de razão 3 com primeiro termo 2, digite, nesta ordem:



Você verá então os seguintes números aparecerem no visor:



### EXEMPLO 3

João investiu R\$ 500,00 em ações de uma empresa. Por infelicidade, esse dinheiro sofreu desvalorização de 5% todos os meses. Quanto João ainda tinha no fim de 1 ano?

Quem perde 5% fica com 95% do que tinha antes.

$$95\% = \frac{95}{100} = 0,95$$

Se ele tinha R\$ 500,00, um mês depois passou a ter  $500 \cdot 0,95 = 475$ , ou seja, ele passou a ter apenas 95% do que tinha antes.

O raciocínio continua igual. Se ele agora tem R\$ 475,00, no mês seguinte ele passará a ter  $475 \cdot 0,95 = 451,25$ , ou seja, apenas 95% do que tinha. Você observou então que:

**Para desvalorizar uma quantia em 5%, devemos multiplicá-la por 0,95.**

O dinheiro de João forma então uma progressão geométrica decrescente:

$$\begin{aligned} \text{mês inicial} &\rightarrow a_1 = 500 \\ 1 \text{ mês depois} &\rightarrow a_2 = 500 \cdot 0,95 \\ 2 \text{ meses depois} &\rightarrow a_3 = 500 \cdot 0,95^2 \\ &\dots\dots\dots \\ 12 \text{ meses depois:} &\rightarrow a_{13} = 500 \cdot 0,95^{12} \end{aligned}$$

Para encontrar esse valor, use a máquina de calcular. Digite primeiro a razão (0,95), o sinal de multiplicação, o primeiro termo (500) e, em seguida, 12 vezes a tecla [=].

No visor aparecerá o número 270,18. Isso quer dizer que os R\$ 500,00 de João foram sendo desvalorizados em 5% a cada mês e, no fim de um ano, ficaram reduzidos a **R\$ 270,18**.

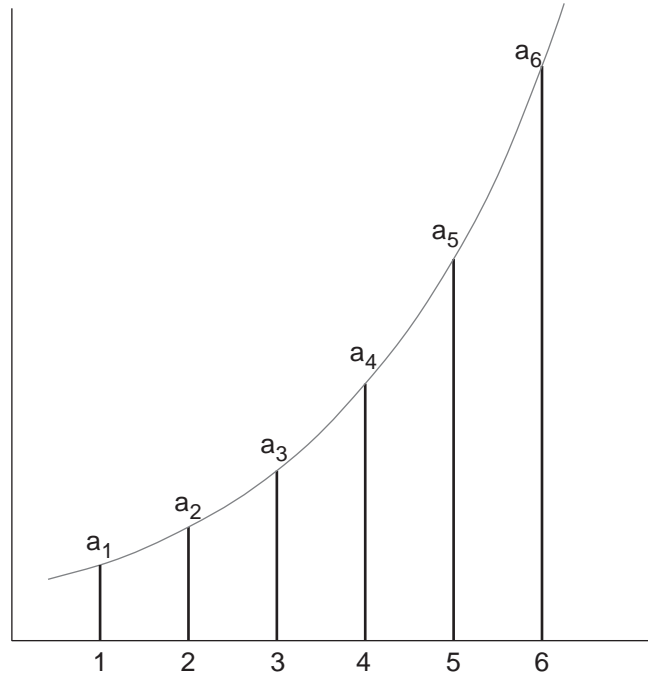
## Propriedades da PG

### O gráfico

Esse gráfico de barras representa a progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 1,5. O termo geral dessa PG é portanto:

$$a_n = 1 \cdot (1,5)^{n-1}$$

Repare que, na progressão aritmética (Aula 33), as extremidades das barras estão sobre uma reta. Na progressão geométrica, as extremidades das barras estão sobre uma curva. Essa curva, chamada *curva exponencial*, será objeto de nosso estudo na Aula 58.



### Progressão de três termos

Suponha inicialmente que os números **a**, **b**, **c**, formem uma progressão aritmética. Como a razão é igual a **b - a** e também igual a **c - b** temos:

$$b - a = c - b$$

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Dizemos então que **b** é a *média aritmética* entre **a** e **c**.

Agora, se os números positivos **a**, **b**, **c** formam uma progressão geométrica, então a razão é igual a **b/a** e também igual a **c/b**. Daí,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}$$

Dizemos então, nesse caso, que **b** é *média geométrica* entre **a** e **c**.

Observe duas progressões, uma aritmética e outra geométrica, ambas com três termos.

PA: 4, 10, 16, → 10 é média aritmética entre 4 e 16.

PG: 4, 8, 16, → 8 é média geométrica entre 4 e 16.

**Exercício 1**

Escreva os 8 primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 5 e cuja razão é 2.

**Exercício 2**

Calcule o valor de  $x$  em cada uma das progressões geométricas abaixo:

- a) 4, 12,  $x$   
 b) 2,  $x$ , 50  
 c)  $x$ , 6, 9

**Exercício 3**

Uma pequena empresa está em desenvolvimento, e seu faturamento aumenta 20% todos os meses. Se em janeiro ela faturou R\$ 7.400,00, quanto ela deverá faturar em outubro do mesmo ano?

**Sugestão:** Se o faturamento em certo mês é  $x$ , então no mês seguinte será 20% maior, ou seja,

$$x + \frac{20}{100} \cdot x = x + 0,2x = (1 + 0,2) x = 1,2x$$

Esse cálculo mostra que, para conhecer o faturamento do mês seguinte, basta *multiplicar* o faturamento atual por 1,2. Portanto, os faturamentos formam uma progressão geométrica de razão 1,2.

janeiro	→	$a_1 = 7.400$
fevereiro	→	$a_2 = 7.400 \cdot 1,2$
março	→	$a_3 = 7.400 \cdot 1,2^2$
.....		
outubro	→	$a_{10} = ?$

Use a máquina de calcular para determinar o faturamento de outubro.

**Exercício 4**

O número  $x$  é positivo e os números 8,  $x$  e  $x + 6$  formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule  $x$ .

**Exercício 5**

Uma indústria começou a funcionar em 1980 e aumentou sua produção em 10% a cada ano. Em que ano a produção será, pela primeira vez, maior que o dobro da inicial?

**Sugestão:** Se a produção em certo ano é  $x$ , no ano seguinte será 10% maior, ou seja,

$$x + \frac{10}{100} x = x + 0,1x = (1 + 0,1) x = 1,1x$$

Então, para calcular a produção do ano seguinte, basta multiplicar a produção atual por 1,1.

Considere um valor qualquer para a produção inicial, por exemplo, 100. Construa uma PG de razão 1,1 e, com auxílio da máquina de calcular, verifique quando essa produção passará de 200.

### Exercício 6

O protozoário chamado *plasmodium vivax* é um dos causadores da malária. Ele se reproduz muito rápido. No espaço de um dia, cada um deles se transforma em 4 iguais.

Se um deles penetra no organismo de uma pessoa, quantos eles serão (aproximadamente) 10 dias depois?

### Exercício 7

A partir de 1970 a incidência de certa doença passou a diminuir de 40% a cada ano. Em que ano o número de doentes foi de cerca de 1% do número registrado em 1970?

**Sugestão:** Construa a progressão geométrica abaixo:

ANO	1970	1971	1972	1973	.....
Nº DE DOENTES	100	60	36		

e, com auxílio da máquina de calcular, verifique em que ano aparece um número próximo de 1.