

Somando os termos das progressões geométricas

Quando estudamos as progressões aritméticas (Aula 34), encontramos uma fórmula bastante prática para calcular a soma de qualquer quantidade de termos. Vamos fazer a mesma coisa nesta aula com as progressões geométricas.

Imagine, por exemplo, a soma:

$$8 + 24 + 72 + 216 + 648 + 1.944 + 5.832 + 17.496 + 52.488$$

As parcelas formam uma progressão geométrica de razão 3, começando em 8. Será possível obter o resultado sem precisar somar todas as parcelas? A resposta é **sim**, como veremos a seguir.

Vamos representar por S a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão q . Para facilitar a compreensão, vamos considerar uma PG com, por exemplo, sete termos. Você perceberá que a dedução da fórmula da soma é exatamente a mesma, qualquer que seja o número de termos. Seja então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \quad (1)$$

Agora, vamos multiplicar todos os termos dessa igualdade pela razão da PG:

$$\begin{array}{cccccccc} Sq & = & a_1q & + & a_2q & + & a_3q & + & a_4q & + & a_5q & + & a_6q & + & a_7q \\ & & \downarrow \\ Sq & = & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & + & a_7q \end{array} \quad (2)$$

Observe que cada termo da PG multiplicado pela razão resulta no próximo, ou seja, $a_1q = a_2$, $a_2q = a_3$ e assim por diante.

Em seguida, vamos subtrair as igualdades (2) e (1). Veja:

$$\begin{array}{rcl} Sq & = & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_7q \\ -S & = & -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 \\ \hline Sq - S & = & -a_1 + a_7q \end{array}$$

Introdução

Nossa aula

Repare que os outros termos foram cancelados. Como a_7 é igual a a_1q^6 , temos:

$$Sq - S = a_1q^6q - a_1$$

Colocando em evidência S do lado esquerdo e a_1 do lado direito encontramos:

$$S(q - 1) = a_1 (q^7 - 1)$$

ou

$$S = \frac{a_1(q^7 - 1)}{q - 1}$$

Essa fórmula calcula a soma de sete termos de uma PG cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q . Temos então que, no caso geral, a soma dos n termos de uma progressão é dada por:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

EXEMPLO 1

Calcular, com auxílio da fórmula, a soma que apareceu na introdução da aula.

Solução: A soma que você vê na introdução desta aula tem 9 parcelas. Essas parcelas formam uma progressão geométrica com

$$a_1 = 8 \quad \text{e} \quad q = \frac{24}{8} = 3$$

Então, fazendo na fórmula as substituições $a_1 = 8$, $q = 3$ e $n = 9$, encontramos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{8(3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{8(19.683 - 1)}{2} \\ &= 4 \cdot 19.682 \\ &= \mathbf{78.728} \end{aligned}$$

Aí está o resultado da soma proposta.

Usando a máquina de calcular

Para utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, precisamos calcular o número q^n que nela aparece. Quando a razão não é um número inteiro ou quando n é grande, essa conta é trabalhosa. Devemos usar a calculadora da seguinte forma:

$$\boxed{q} \boxed{\times} \underbrace{\boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \cdots \boxed{=}}_{n-1 \text{ vezes}} \rightarrow q^n$$

Assim, no exemplo anterior, para calcular 3^9 , digitamos:

$$\boxed{3} \boxed{\times} \underbrace{\boxed{=} \boxed{=} \boxed{=} \cdots \boxed{=}}_{8 \text{ vezes}} \rightarrow 19.683$$

EXEMPLO 2

Uma indústria iniciou suas atividades produzindo 5.000 objetos por ano e, a cada ano, a produção aumentou em 10% em relação ao ano anterior. Qual foi o total de objetos produzidos em 10 anos de atividade?

Solução: Repare que se, em um ano qualquer, a produção foi de x objetos, então, no ano seguinte, será de:

$$\begin{aligned} x + 10\% \text{ de } x &= \\ &= x + \frac{10}{100} \cdot x = \\ &= x + 0,1 \cdot x = \\ &= x(1 + 0,1) = \\ &= x \cdot 1,1 \end{aligned}$$

Assim, se a produção em um ano é igual à do ano anterior **multiplicada** por 1,1, temos que as produções anuais formam uma progressão geométrica de razão 1,1.

$$\begin{aligned} a_1 &= 5.000 \\ a_2 &= 5.000 \cdot 1,1 \\ a_3 &= 5.000 \cdot 1,1 \\ &\dots\dots\dots \text{etc.} \end{aligned}$$

Para calcular o número total de objetos produzidos em 10 anos, usamos nossa fórmula com $a_1 = 5.000$, $q = 1,1$ e $n = 10$

$$S = \frac{5.000(1,1^{10} - 1)}{1,1 - 1}$$

O número $1,1^{10}$ é calculado com auxílio da máquina de calcular, como mostramos anteriormente. Lembramos, ainda, que devemos fazer uma **aproximação** do resultado que vemos no visor, porque o número de casas decimais já é grande demais. Temos então:

$$S = \frac{5.000(2,5937 - 1)}{1,1 - 1}$$

$$S = \frac{5.000 \cdot 1,5937}{0,1}$$

$$S = 79.685$$

Essa indústria produziu, em 10 anos de atividade, aproximadamente **79.690** objetos. Repare que, no cálculo de $1,1^{10}$, nossa aproximação foi para **menos**. Então, o número real de objetos produzidos foi, certamente, um pouco superior ao calculado. Portanto, o número 79.690 é uma **estimativa**, que sabemos estar próxima da realidade.

EXEMPLO 3

Em certa região do país, a pesca predatória fez com que a produção de pescados caísse em 20% a cada ano. Se, em 1991, foram pescados nessa região 2,5 toneladas de peixe, qual foi a produção total de 1991 até 1995?

Solução: Se a produção em certo ano foi de x toneladas, então, no ano seguinte, será 20% menor, ou seja, será:

$$\begin{aligned} & x - 20\% \text{ de } x = \\ & = x - \frac{20}{100} \cdot x = \\ & = x - 0,2x = \\ & = x(1 - 0,2) = \\ & = x \cdot 0,8 \end{aligned}$$

Logo, se a produção em cada ano é igual à do ano anterior multiplicada por 0,8, temos a seguinte progressão:

$$1991 \rightarrow a_1 = 2,5 \text{ toneladas}$$

$$1992 \rightarrow a_2 = 2,5 \cdot 0,8$$

$$1993 \rightarrow a_3 = 2,5 \cdot 0,8$$

$$1994 \rightarrow a_4 = 2,5 \cdot 0,8$$

$$1995 \rightarrow a_5 = 2,5 \cdot 0,8^4$$

Para somar esses resultados, podemos usar a nossa fórmula:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2,5(0,8^5 - 1)}{0,8 - 1} = \\ &= \frac{2,5(0,32768 - 1)}{0,8 - 1} = \\ &= \frac{2,5(-0,67232)}{-0,2} = \\ &= 8,404 \end{aligned}$$

Concluimos então que, nesses 5 anos, foram pescados, aproximadamente, **8,4 toneladas** de peixe.

A PG decrescente

Observe que, quando um número entre 0 e 1 é elevado a potências cada vez maiores, vai sempre diminuindo, como se pode ver no exemplo abaixo:

$$\begin{aligned}0,4^1 &= 0,4 \\0,4^2 &= 0,16 \\0,4^3 &= 0,064 \\0,4^4 &= 0,0256 \\0,4^5 &= 0,01024\end{aligned}$$

e assim por diante. Os resultados diminuem sempre. Para que você tenha uma idéia da rapidez com que eles diminuem, calculamos $0,4^{16}$ e o resultado foi (aproximadamente) 0,000000429. Portanto, quando q está entre 0 e 1, as potências de q diminuem quando o expoente aumenta. Elas se tornam **cada vez mais próximas de zero**. Assim, se $0 < q < 1$, e se o número de termos da PG é muito grande, o termo q^n que aparece na fórmula é tão pequeno que, na prática, pode ser desprezado. A fórmula então fica assim:

$$S = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Retirando o termo q^n , ficamos com:

$$\lim S = \frac{a_1 (-1)}{q - 1}$$

$\lim S = \frac{a_1}{1 - q}$

Esse resultado chama-se **limite da soma da PG decrescente**. Daí o símbolo **lim S** colocado no lugar de **S**.

Ele fornece um resultado muito próximo da soma dos termos da PG quando o número de parcelas é muito grande.

Quanto maior o número de parcelas, mais a soma ficará próxima de **lim S**. Por exemplo, considere a soma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

As parcelas formam uma PG com $a_1 = 1$ e $q = 0,5$.

Se somarmos 20 parcelas, encontraremos como resultado:

$$S = \frac{1(0,5^{20} - 1)}{0,5 - 1} \cong 1,999998$$

enquanto que a fórmula do **limite da soma** nos diz que:

$$\lim S = \frac{1}{1 - 0,5} = \frac{1}{0,5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Portanto, quanto maior for o número de parcelas, mais próxima de 2 estará a soma.

Exercícios

Exercício 1

Calcule a soma $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$, com 10 parcelas.

Exercício 2

Calcule a soma $S = 2 + 10 + 50 + 250 + \dots$, com 8 parcelas.

Exercício 3

Calcule a soma $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$, com 6 parcelas.

Exercício 4

João ganhou em janeiro R\$ 70,00 e, a partir daí, passou a ganhar um aumento de 10% todos os meses. Qual foi o total que ele ganhou em todo esse ano?

Sugestão: Considere a PG formada pelos salários de João:

$$\begin{aligned} a_1 &= 70 \\ a_2 &= 70 \cdot 1,1 \\ a_3 &= 70 \cdot 1,1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Use a fórmula da soma para obter o resultado.

Exercício 5

Uma loja de eletrodomésticos vende uma televisão de duas maneiras:

- a) à vista por R\$ 540,00;
- b) pelo “plano maluco”, no qual você paga prestações durante toda sua vida, sendo a primeira de R\$ 256,00 e cada uma das outras igual à metade da anterior.

Qual delas você deve preferir?

Sugestão: Calcule o limite da soma das prestações do “plano maluco”.