AULA
37

A Matemática e o dinheiro

Introdução

Muita gente pensa que a Matemática, em relação ao dinheiro, só serve para fazer troco e para calcular o total a pagar no caixa. Não é bem assim. Sem a Matemática, não conseguiríamos entender nossos contracheques, calcular nossos aumentos de salário, perceber os produtos que aumentaram demasiadamente de preço etc...

Nesta aula, vamos conhecer as porcentagens, os juros compostos e diversas outras coisas que fazem parte do nosso dia-a-dia, como aumentos e descontos. Aconselhamos que você confira os cálculos desta aula usando uma calculadora, a qual também deverá ser usada para a resolução dos exercícios.

Nossa aula

Porcentagens

Vamos começar com um exemplo.

Se o preço de um artigo era de R$ 4,00 e passou a ser de R$ 5,00, o aumento de preço foi de R$ 5,00 - R$ 4,00 = R$ 1,00. Portanto, o aumento foi de R$ 1,00 sobre um preço de R$ 4,00, e a fração que representa o aumento do preço, chamada de ***taxa de aumento***, é $\frac{1}{4}$. Comumente preferimos representar essas frações em centésimos, que são chamados de ***por cento*** e representados por %. Como $\frac{1}{4} = 0,25$ ou seja, 25 centésimos, a taxa de aumento do preço foi de 25%.

Vejamos mais alguns exemplos.

EXEMPLO 1

O preço de um artigo era de R$ 36,00 e sofreu uma diminuição de 15%. Para quanto passou?

Solução: Como 15% = 0,15, a diminuição de preço foi de 0,15 . 36 = 5,40, ou seja, o novo preço é R$ 36,00 - R$ 5,40 = **R$ 30,60**.

EXEMPLO 2

Uma loja oferece um desconto de 20% nos preços, para pagamento à vista. Quanto custa, à vista, um artigo cujo preço é de R$ 45,00?

Solução: O desconto é de $0,20 \cdot 45 = 9$. O preço para pagamento à vista é R$ 45,00 - R$ 9,00 = **R$ 36,00**.

Aumentos e descontos sucessivos

Imagine que um produto sofra um aumento de 30% em um mês e um de 20% no mês seguinte. Qual será a taxa de aumento total que sofrerá o preço do produto nesses dois meses?

Essa é uma pergunta interessante, porque a maioria das pessoas pensa, erroneamente, que a taxa de aumento total foi de 30% + 20% = 50%. Se o preço do produto era de 100 (sempre podemos tomar o preço igual a 100; basta tomar como unidade de preço um centésimo do preço do produto), o primeiro aumento foi de 30% de 100, isto é, de $0,30 \cdot 100 = 30$, o que elevou o preço do produto para $100 + 30 = 130$; o segundo aumento foi de 20% de 130, isto é, de $0,20 \cdot 130 = 26$, o que elevou o preço do produto para $130 + 26 = 156$. O aumento total foi de $156 - 100 = 56$ sobre o preço de 100. A taxa total de aumento foi de

$$\frac{56}{100} = 0,56 = 56\%$$

Vejamos mais alguns exemplos:

EXEMPLO 3

O preço de um artigo sofreu dois descontos sucessivos, de 30% e de 20%. Qual foi a taxa total de desconto?

Solução: Se o preço do artigo era 100, o primeiro desconto foi de $0,30 \cdot 100 = 30$, o que baixou o preço para $100 - 30 = 70$; o segundo desconto foi de $0,20 \cdot 70 = 14$, o que mudou o preço para $70 - 14 = 56$. A redução total do preço foi de $100 - 56 = 44$ sobre um preço de 100. A taxa total de desconto foi de

$$\frac{44}{100} = 0,44 = 44\%$$

EXEMPLO 4

Um artigo é vendido, em uma promoção, com um desconto de 30%. Encerrada a promoção, o artigo retorna ao preço normal. Em quantos por cento aumenta o preço do artigo?

Solução: Se o preço era 100, o preço com desconto é de:

$$100 - 0,30 \cdot 100 = 100 - 30 = 70$$

Para retornar ao preço normal, ele deve sofrer um aumento de 30 em relação a um preço de 70. A taxa de aumento é de

$$\frac{30}{70} \cong 0,43 = 43\%$$

Juros

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital $\mathbf{C_0}$ (chamado de ***principal***), empresta-o a outra pessoa por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital $\mathbf{C_0}$ de volta, acrescido de uma remuneração **J** pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de ***juro***. A soma $\mathbf{C_0 + J}$ é chamada de ***montante***. A razão $\mathbf{i} = \frac{J}{C_0}$, que é a taxa de aumento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de ***taxa de juros***.

Por exemplo, se Pedro tomou um empréstimo de R$ 100,00 e, dois meses depois, pagou R$ 120,00, os juros pagos por Pedro são de R$ 20,00, e a taxa de juros é $\frac{20}{100} = 0{,}20 = 20\%$ ao bimestre.

O principal, que é a dívida inicial de Pedro, é igual a R$ 100, e o montante, que é a dívida de Pedro na época do pagamento, é igual a R$ 120,00.

Note que Pedro e quem lhe emprestou o dinheiro concordaram que R$ 100,00 no início do referido bimestre têm o mesmo valor que R$ 120,00 no final do referido bimestre.

É importante notar que o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Na próxima aula este fato será abordado com mais detalhes.

Agora vamos falar um pouco sobre juros compostos. Imagine que Paulo tomou um empréstimo de R$ 100,00, a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Paulo será acrescida de 0,10 **.** 100, ou seja, R$ 10,00 de juros, pois $\mathbf{J = i\ C}$, passando a R$ 110,00.

Se Paulo e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por R$ 121,00, pois os juros relativos ao segundo mês serão de 0,10 **.** 110, ou seja, R$ 11,00.

Esses juros aqui calculados são chamados de ***juros compostos***. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

Um fato extremamente importante é que:

> ***No regime de juros compostos de taxa*** i,
> ***um principal*** C_0 ***transforma-se, após*** n ***períodos de tempo,***
> ***em um montante*** $C_n = C_0\,(1 + i)^n$.

Com efeito, se um capital **C** recebe, em um período de tempo, juros de taxa **i**, ele se transforma, ao fim do período, em $\mathbf{C + i\,C = (1 + i)\,C}$. Ou seja, após cada período de tempo, a dívida sofre uma multiplicação por 1 + i. Então, depois de dois períodos de tempo, a dívida inicial C_0 sofrerá duas multiplicações por 1 + i, isto é, ficará multiplicada por $(1 + i)^2$.

Prosseguindo nesse raciocínio, a dívida em **n** períodos de tempo será igual à dívida inicial multiplicada por $(1 + i)^n$, ou seja, será igual a:

$$\boxed{\mathbf{C_n = C_0\,(1 + i)^n}}$$

EXEMPLO 5

Cristina toma um empréstimo de R$ 150,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Cristina três meses depois?

Solução: Temos que o principal é $C_0 = 150$, a taxa de juros é $i = 0{,}12$ e $n = 3$. O montante da dívida será:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0\ (1 + i)^3 = \\ &= 150 \,.\, (1 + 0{,}12)^3 = \\ &= 150 \,.\, 1{,}12^3 = \\ &= 150 \,.\, 1{,}404928 = \\ &= 210{,}7392 \end{aligned}$$

Portanto, a dívida de Cristina ao fim desses três meses será de **R$ 210,7**4.

EXEMPLO 6

Uma inflação mensal de 3% ao mês equivale a uma inflação anual de quanto?

Solução: A taxa de inflação é a taxa média de elevação dos preços dos produtos e serviços. Se o preço médio inicial é 100, após 12 meses ele será igual a $100 \,.\, (1 + 0{,}03)^{12}$. Com auxílio de uma calculadora, como vimos na Aula 35, obtemos 142,58, aproximadamente. O aumento médio foi de 42,58 sobre um preço de 100, isto é, a taxa de inflação anual foi de 42,58%, aproximadamente.

Exercícios

Exercício 1
O quilo do açúcar custava R$ 0,48 e passou a custar R$ 0,58 enquanto o pacote de meio quilo de café custava R$ 2,80 e passou a custar R$ 3,20. Quais foram os aumentos porcentuais desses dois produtos? Qual deles aumentou mais?

Exercício 2
O salário mensal bruto de Severino é de R$ 120,00. Se ele é descontado em 8% para a Previdência Social, qual é o seu salário líquido?
Observação: Salário líquido é o salário bruto menos os descontos.

Exercício 3
Depois de um aumento de 15%, um televisor passou a custar R$ 460,00. Qual era o preço do televisor antes do aumento?
Sugestão: Se **x** é o preço antigo, então $x + 0{,}15x = 460$.

Exercício 4

Aumentos sucessivos de 20% e de 10% equivalem a um aumento único de quanto? E descontos sucessivos de 20% e de 10% equivalem a um desconto único de quanto?

Exercício 5

Se um artigo aumentou em 25%, de quanto ele deve diminuir para voltar ao preço antigo?

Exercício 6

Os trabalhadores de certa categoria estão reivindicando uma reposição salarial de 29% mais um aumento real de 5%. Qual é o aumento total que está sendo pleiteado?

Exercício 7

Investindo seu dinheiro a juros de 5% ao mês, qual é o rendimento trimestral que você obtém?

Sugestão: Faça o principal igual a 100 e determine o montante.

Exercício 8

Uma inflação de 15% em 4 meses é gerada por uma inflação mensal média de quanto?

Sugestão: Lembre-se de que a raiz quarta de um número pode ser obtida, na calculadora, apertando duas vezes a tecla de raiz quadrada.