AULA

38

À vista ou a prazo?

Introdução

Um dos problemas matemáticos mais comuns no dia-a-dia é a decisão entre comprar à vista ou a prazo. As lojas costumam atrair os consumidores com promoções como esta:

20% DE DESCONTO À VISTA
OU EM 3 VEZES SEM ACRÉSCIMO

Para o consumidor, qual é a melhor opção? É claro que, se ele não dispõe no momento da quantia necessária para o pagamento à vista, não há o que discutir. Mas, mesmo que ele disponha do dinheiro para comprar à vista, pode ser que ele prefira investir esse dinheiro e fazer a compra a prazo. A decisão nem sempre é a mesma para todos, como veremos nesta aula.

Nossa aula

O valor do dinheiro

Vimos, na aula passada, um fato extremamente importante: o valor de uma quantia depende da época à qual ela se refere. Por exemplo, se Pedro consegue investir seu dinheiro a juros de 5% ao mês, é indiferente para ele pagar R$ 100,00 agora ou pagar R$ 105,00 daqui a um mês; portanto, para Pedro, R$ 100,00 agora têm o mesmo valor que R$ 105,00 daqui a um mês, ou seja, ***o dinheiro vale*, *para Pedro*, *5% ao mês***.

Portanto, o valor do dinheiro não é o mesmo para todas as pessoas. Todas as decisões em matéria de dinheiro passam sempre por esta questão: "Quanto você consegue fazer render o seu dinheiro?"

Por exemplo, se a caderneta de poupança está rendendo 3% ao mês, então R$ 100,00 hoje valerão R$ 103,00 em um mês, R$ 106,09 depois de dois meses, R$ 109,27 depois de três meses e assim por diante. Observe ainda que valores são traduzidos por quantias iguais apenas se as quantias se referem à mesma época.

Vimos na aula passada que, no regime de juros compostos de taxa **i**, um capital principal C_0 transforma-se, após **n** períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0\,(1 + i)^n$. Logo, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de **n** períodos de tempo, a uma quantia $F = A\,(1 + i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

***Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por* $(1+i)^n$.**
***Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por* $(1+i)^n$.**

Todos os problemas de matemática financeira são apenas aplicações dessa fórmula fundamental, conforme mostraremos nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

O juro do cheque especial está em 12% ao mês. Se João ficar com saldo negativo de R$ 80,00 durante um mês, quanto terá de pagar?

Solução: Para transportar R$ 80,00 para o futuro (1 mês depois) devemos multiplicá-lo por 1 + i. Como i = 0,12, temos:

$$80\,(1 + 0{,}12) =$$
$$= 80 \cdot 1{,}12 = 89{,}60$$

Logo, João pagará **R$ 89,60** para zerar sua conta.

EXEMPLO 2

Pedro prometeu pagar a João R$ 100,00 no dia 15 de agosto. Mas, um mês antes, no dia 15 de julho, resolveu saldar sua dívida. Se eles tinham combinado um juro de 6% ao mês, quanto Pedro deverá pagar?

Solução: Pedro resolveu antecipar o pagamento. Então, a dívida de R$ 100,00 deverá ser transformada do futuro para o presente (1 mês antes). Para isso, devemos dividi-la por 1 + i. Como i = 0,06, temos:

$$\frac{100}{1+0{,}06} = \frac{100}{1{,}06} = 94{,}34$$

Logo, a dívida de R$ 100,00 em 15 de agosto poderá ser saldada em 15 de julho com um pagamento de **R$ 94,34**.

EXEMPLO 3

Geraldo tomou um empréstimo de R$ 300,00 a juros mensais de 15%. Dois meses depois, Geraldo pagou R$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Solução: Os esquemas de pagamento a seguir são equivalentes. Logo, R$ 300,00 na data 0 (zero) têm o mesmo valor de R$ 150,00 dois meses depois, mais um pagamento igual a P, na data 3. Isso é representado assim:

Para resolver o problema, devemos igualar os valores pagos e recebidos, em uma mesma época (0, por exemplo). O valor 300 já está referido à época 0. O valor 150 deve retroceder dois meses; para isso devemos dividi-lo por $(1 + i)^2$. O valor P, que devemos retroceder três meses, deverá ser dividido por $(1 + i)^3$.

Como $i = 0{,}15$, obtemos:

$$300 = \frac{150}{(1 + 0{,}15)^2} + \frac{P}{(1 + 0{,}15)^2}$$

Daí, multiplicando todos os termos por $1{,}15^3$, obtemos:

$$300 \cdot 1{,}15^3 = 150 \cdot 1{,}15 + P$$
$$456{,}2625 = 172{,}5 + P$$
$$P = 456{,}2625 - 172{,}5 \cong 283{,}76$$

O último pagamento foi de **R$ 283,76**.

EXEMPLO 4

Telma tem duas opções de pagamento na compra de um vídeo: três prestações mensais de R$ 180,00 cada, ou seis prestações mensais de R$ 100,00 cada.Se o dinheiro vale 10% ao mês para Telma, o que ela deve preferir?

Solução: As alternativas de pagamento estão representadas deste modo:

180	180	180
0	1	2

100	100	100	100	100	100
0	1	2	3	4	5

Para resolver o problema, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2.
Temos na primeira opção:

$$V_1 = 180\,(1 + 0{,}10)^2 + 180\,(1 + 0{,}10) + 180 = 595{,}80$$

e, na segunda opção,

$$V_2 = 100\,(1 + 0{,}10)2 + 100\,(1 + 0{,}10) + 100 + \frac{100}{1+0{,}10} + \frac{100}{(1+0{,}10)^2} + \frac{100}{(1+0{,}10)^3} \cong 579{,}69$$

Logo, Telma deve preferir o pagamento em seis prestações, porque o valor total é menor.

Você deve ter observado que a matemática financeira faz o dinheiro viajar pelo tempo. Podemos transportar uma quantia do presente para o futuro ou do futuro para o presente. Mas os cálculos variam de pessoa para pessoa. Tudo depende de quanto cada um consegue fazer render o seu dinheiro. No exemplo anterior, Telma tinha um ótimo investimento, que lhe dava 10% ao mês, e todos os cálculos foram feitos em função disso. Continue aprendendo com os próximos exemplos.

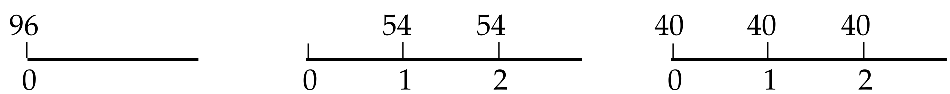
EXEMPLO 5

João tem três opções de pagamento na compra de vestuário:

a) À vista, com 20% de desconto.
b) Em duas prestações mensais iguais, com desconto de 10%, vencendo a primeira um mês após a compra.
c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para João, se o dinheiro vale, para ele, 10% ao mês?

Solução: Fixando o preço em 120 unidades, temos os três esquemas:



Comparando os valores na época 2 (por exemplo), obtemos:

a) $V_1 = 96\,(1 + 0{,}10)^2 = 116{,}16$
b) $V_2 = 54\,(1 + 0{,}10) + 54 = 113{,}40$
c) $V_3 = 40\,(1 + 0{,}10)^2 + 40\,(1 + 0{,}10) + 40 = 132{,}40$

A melhor alternativa para João é a compra em duas prestações, e a pior é a compra em três prestações.
É interessante observar que a melhor alternativa para João pode não ser a melhor para José.
Se José é pessoa de poucas posses e compra a prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provável que ele invista o dinheiro que seria usado na compra à vista em uma caderneta de poupança, que lhe renderia, digamos, 5% ao mês. Então, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 5% ao mês.
Se João é um comerciante, por exemplo, ele poderia fazer render o dinheiro a, digamos, 10% ao mês. Então, seria atrativo para João comprar a prazo com juros de 5% ao mês.
Logo, ***o dinheiro tem valores diferentes para João e para José***. A taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu capital, é chamada de ***taxa mínima de atratividade***. O motivo do nome é claro: para essa pessoa, um investimento será atrativo se render, no mínimo, a essa taxa.

O exemplo a seguir mostra uma situação ocorrida no Rio de Janeiro, em uma época na qual a inflação era de cerca de 15% ao mês. Veja que absurdo!

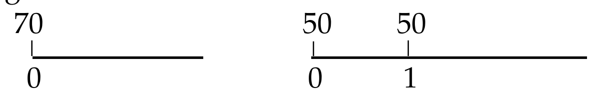
EXEMPLO 6

Uma loja oferece duas opções de pagamento:
a) À vista, com 30% de desconto.
b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira sendo paga

no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução: Fixando o preço em 100 unidades, temos os esquemas de pagamento a seguir:



Igualando os valores na época 1, por exemplo, obtemos:

$$\begin{aligned} 70\,(1+i) &= 50\,(1+i)+50 \\ 20\,(1+i) &= 50 \\ 1+i &= 2{,}5 \\ i &= 1{,}5 = 150\% \end{aligned}$$

A loja cobrava o extorsivo juro de **150%** ao mês nas vendas a prazo!

O cálculo de prestações

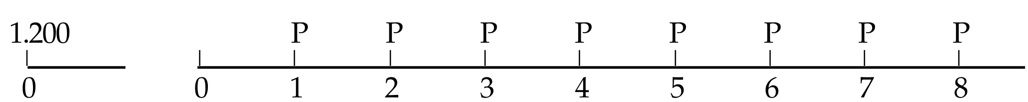
Quando compramos um artigo a prazo, efetuamos geralmente seu pagamento em uma série de prestações iguais e igualmente espaçados no tempo. Essa série de prestações é equivalente a um pagamento único, que seria o pagamento à vista.

Vamos mostrar como se faz o cálculo das prestações no próximo exemplo.

EXEMPLO 7

Um televisor, cujo preço à vista é R$ 1.200,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 9% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução: Os dois esquemas de pagamento aqui representados são equivalentes:



Igualando os valores na época 0 (zero), obtemos:

$$1.200 = \frac{P}{1{,}09} + \frac{P}{1{,}09^2} + \frac{P}{1{,}09^3} + \ldots + \frac{P}{1{,}09^9}, \quad \text{ou}$$

$$1.200 = P\left(\frac{1}{1{,}09} + \frac{1}{1{,}09^2} + \frac{1}{1{,}09^3} + \ldots + \frac{1}{1{,}09^8}\right)$$

Para facilitar, calculamos $q = \frac{1}{1,09} = 0,9174311$. Portanto, a soma que apareceu entre parênteses é $q + q^2 + q^3 + ... + q^8$, que é a soma dos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é **q** e cuja razão também é igual a **q**.
Aplicando a nossa conhecida fórmula dos termos da PG, temos:

$$\text{Soma} = \frac{a_1\ (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{q(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{q^9 - q}{q - 1}$$

Calculamos na máquina $q^9 = 0,4604272$. Então, a soma da progressão geométrica será:

$$\frac{0,4604272 - 0,9174311}{0,9174311 - 1} = \frac{0,4570039}{0,0825689} = 5,5348187$$

Agora, que já calculamos a soma dos termos da progressão geométrica, podemos finalmente calcular o valor da prestação:

$$1.200 = P \cdot 5,5348187 \qquad \text{ou}$$

$$P = \frac{1.200}{5,5348187} = 216,81$$

Concluímos que cada prestação na compra a prazo será de **R$ 216,81**.

Exercícios

Exercício 1
Você fez um empréstimo de R$ 250,00 a juros de 8% ao mês.
Quanto você deverá pagar dois meses depois?

Exercício 2
João comprou tijolos para sua construção no valor de R$ 150,00. O vendedor da loja fez a seguinte oferta: R$ 50,00 no ato da compra e R$ 100,00 dois meses depois. Se a loja cobra 10% de juros ao mês, qual seria o preço à vista que João deveria pagar pelos tijolos?

Sugestão: Transfira a dívida de R$ 100,00 do futuro para o presente.

Exercício 3
Na introdução da nossa aula mostramos duas opções de venda em certa loja. Se um artigo custa R$ 120,00. Determine:
a) o preço à vista com desconto de 20%;
b) se a loja cobra 10% de juros ao mês, qual é o valor à vista equivalente ao financiamento?

Exercício 4

Uma geladeira custa R$ 800,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 12% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo a primeira prestação paga:

a) um mês após a compra;
b) no ato da compra;
c) dois meses após a compra.

Exercício 5

Jussara deveria efetuar seis pagamentos mensais sucessivos, de R$ 150,00 cada. Renegociou a dívida, para efetuar apenas dois pagamentos iguais, nas épocas do segundo e do quinto pagamentos. Se a taxa de juros é de 10% ao mês, qual o valor desses novos pagamentos?

Sugestão: Transfira tudo para a época do 1º pagamento. Na primeira opção esse valor seria de:

$$150 + \frac{150}{1,1} + \frac{150}{1,1^2} + \ldots + \frac{150}{1,1^5}$$

Faça o mesmo com a segunda opção e iguale os dois resultados.

Exercício 6

Lúcia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00 um mês após a compra e R$ 200,00 dois meses após a compra. Se são pagos juros de 25% sobre o saldo devedor, qual é o preço à vista?

Exercício 7

Uma loja, no Rio de Janeiro, oferecia, no Natal, as alternativas de pagamento:

a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra;
b) três pagamentos mensais iguais sem juros, o primeiro no ato da compra.

Se você fosse cliente dessa loja e o dinheiro valesse para você 10% ao mês, qual seria sua opção?

Exercício 8

Investindo todo mês R$ 50,00 em um fundo de investimentos que rende 4% ao mês, qual será o montante, imediatamente após o 20º depósito?

Sugestão: Transfira tudo para a data do último depósito. O primeiro depósito sofreu 19 correções, ou seja, ficou multiplicado por $1,04^{19}$. O segundo depósito sofreu 18 correções, e assim por diante. Você terá de calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica.