AULA

43

A lei dos senos

Introdução

Na Aula 42 vimos que a Lei dos co-senos é uma importante ferramenta matemática para o cálculo de medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer, isto é, de triângulos de "forma" arbitrária.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

Note que se $\hat{A} = 90^\circ$, então $\cos \hat{A} = 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$, confirmando o Teorema de Pitágoras.

Para utilizar a lei dos co-senos no cálculo da medida de um dos lados de um triângulo, precisamos conhecer as medidas dos outros dois lados e a medida do ângulo oposto ao lado desconhecido. Nem sempre temos esses dados. O que podemos fazer quando conhecermos, por exemplo, um lado e dois ângulos? A solução para problemas desse tipo é o assunto desta aula.

Nossa aula

Calculando a área de um triângulo qualquer

Sabemos que a área de um triângulo pode ser obtida pela fórmula:

$$\boxed{S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}} \quad \text{ou, simplesmente,} \quad \boxed{S = \frac{b \cdot h}{2}}$$

em que **b** é a base e **h** a altura.

Percebemos, então, que é preciso saber a medida de um dos lados do triângulo e da altura relativa a esse lado, como nos exemplos a seguir:

Nos três casos temos, $S = \frac{b \cdot h}{2}$ sendo que no triângulo retângulo há a facilidade de termo **h = c**. Assim, a área é calculada multiplicando os dois catetos e dividindo o resultado por 2. Nos outros dois casos precisamos calcular **h**.

Para o triângulo acutângulo, conhecendo o ângulo Â, temos:

$$\boxed{\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h}{c}} \qquad \text{ou} \qquad c \cdot \text{sen}\,\hat{A} = h$$

No triângulo obtusângulo, conhecendo o ângulo Â e considerando o triângulo retângulo formado pela altura, pelo prolongamento do lado **a** e pelo lado **c**, temos:

$$\boxed{\text{sen}\,(180^o - \hat{A}) = \frac{h}{c}} \qquad \text{ou} \qquad c \cdot \text{sen}\,(180^o - \hat{A}) = h$$

Já vimos na Aula 42, que sen (180º – Â) = sen Â. Sabendo que o seno de um ângulo qualquer é igual ao seno do seu suplemento, concluímos que, nos dois casos, $h = c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$ e substituindo **h** na fórmula de cálculo da área, encontramos:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c\,\text{sen}\hat{A}}{2}}$$

EXEMPLO 1

Calcule a área total da figura:

Solução:

A área do triângulo ABC é:

$$S_1 = \frac{12 \cdot 30 \cdot \text{sen}\,120^o}{2} =$$

$$= 180 \cdot \text{sen}\ 60^o =$$

$$= 180 \cdot \frac{1}{2} = 90\ \text{mm}^2$$

A área do triângulo DBC é:

$$S_2 = \frac{50 \cdot 50 \cdot \text{sen}\,45^o}{2} = 1250 \cdot \text{sen}\ 45^o \cong 1250 \cdot 0{,}7 = 875\ \text{mm}^2$$

Portanto, a área total da figura $S = S_1 + S_2 =$ **965 mm²** ou **9,5 cm²**.

Observação:

Essa fórmula para o cálculo da área é válida para qualquer triângulo, inclusive para o triângulo retângulo.

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\ 90^o}{2} \qquad \text{e, como sen } 90^o = 1,$$

temos:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c}{2}}$$

Obtendo a lei dos senos

Para obter a fórmula $S = \frac{1}{2}\, b \cdot c \operatorname{sen} \hat{A}$, utilizamos o seno do ângulo $\hat{A}$ para encontrar **h**. Mas também poderíamos utilizar o seno do ângulo $\hat{C}$:

$h = a \operatorname{sen} \hat{C}$ e $S = \frac{1}{2}\, b \cdot a \operatorname{sen} \hat{C}$.

Como $h = c \operatorname{sen} \hat{A}$ e $h = a \operatorname{sen} \hat{C}$, temos:

$$\boxed{c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = a \operatorname{sen} \hat{C}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}}$$

Generalizando esta conclusão também para o ângulo $\hat{B}$ e seu lado oposto **b**:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}}$$

A igualdade das razões entre cada um dos lados de um triângulo e o seno do respectivo ângulo oposto é chamada de **lei dos senos**.

O triângulo e a circunferência

No dicionário, encontramos as seguintes definições:

Inscrito → Traçado dentro.

Circunscrito → Limitado totalmente por uma linha.

Em geometria, esses termos são usados com um pouco mais de precisão. Observe os exemplos:

a) O retângulo está inscrito no losango ou o losango está circunscrito ao retângulo

(observe que todos os vértices do retângulo tocam os lados do losango).

b) A esfera está inscrita no cubo ou o cubo está circunscrito à esfera

(todas as faces do cubo tocam a esfera).

c) O hexágono está inscrito no círculo ou o círculo está circunscrito ao hexágono

(todos os vértices do hexágono tocam o círculo).

d) O círculo está inscrito no triângulo retângulo ou o triângulo retângulo está circunscrito ao círculo

(todos os lados do triângulo tocam o círculo).

Mais uma vez, o triângulo se confirma como uma figura especial. É sempre possível inscrever uma circunferência em um triângulo; além disso, sempre podemos circunscrever uma circunferência a um triângulo.

Para a circunferência circunscrita ao triângulo, e cujo raio é R, temos o seguinte resultado:

$$\boxed{2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}}$$

Observe ainda que, no caso do triângulo retângulo, sen $\hat{A}$ = sen 90º = 1 e

$$2R = a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

EXEMPLO 2

Calcular os outros dois lados de um triângulo que mede 5 cm de um lado e tem ângulo de 80º e outro de 40º, como mostra a figura:

Solução:

$$\frac{5}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 80^\circ} \qquad \frac{5}{0{,}866} = \frac{b}{0{,}985}$$

$$b = \frac{5 \cdot 0{,}985}{0{,}866} = \mathbf{5{,}687}$$

$$\frac{5}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 40^\circ} \qquad \frac{5}{0{,}866} = \frac{c}{0{,}643} \qquad c = \frac{5 \cdot 0{,}643}{0{,}866} = \mathbf{3{,}712}$$

EXEMPLO 3

Um triângulo de lados 6, 8 e 8 está inscrito num círculo. Determine seus ângulos e o raio do círculo.

Solução:

O triângulo do problema é isósceles, como o representado na figura abaixo. Inicialmente, vamos descobrir a medida do ângulo do vértice ($\hat{A}$):

$$6^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos \hat{A}$$

$$36 = 128 - 128 \cos \hat{A}$$

$$-92 = -128 \cos \hat{A} \quad \rightarrow \quad \cos \hat{A} = \frac{92}{128} \approx 0{,}719$$

Consultando a tabela trigonométrica,
$\hat{A} \approx 44º$.

Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ da base são iguais e medem: $\hat{B} = \hat{C}$ » $\frac{180^\circ - 44^\circ}{2}$ » 68°

Para determinar o raio do círculo, podemos utilizar qualquer um dos lados e o respectivo ângulo oposto. Temos, então:

$$2R = \frac{6}{\text{sen } 44^\circ} \qquad 2R = \frac{6}{0{,}695} \text{ @ } 8{,}6 \qquad R \cong 4{,}3 \qquad \text{ou}$$

$$2R = \frac{8}{\text{sen } 68^\circ} \qquad 2R = \frac{8}{0{,}927} \text{ @ } 8{,}6 \qquad R \cong 4{,}3$$

Assim, os ângulos são $\hat{A} = 44º$ e $\hat{B} = \hat{C} = 68º$. E o raio mede, aproximadamente, 4,3.

Exercícios

Exercício 1

a) Calcule o raio do círculo circunscrito num triângulo equilátero de lado **a**.
b) Calcule a área do triângulo equilátero de lado **a**.

Exercício 2

Calcule a área do hexágono regular de lado **a**, formado por seis triângulos equiláteros.

Exercício 3

Para calcular a área aproximada de um terreno irregular, os agrimensores subdividem o terreno em triângulos formados a partir de um mesmo vértice no interior do terreno. Usando o teodolito, eles marcam os ângulos formados ao redor desse ponto e medem as distâncias do ponto até a fronteira do terreno.

Observe a figura e calcule a área aproximada do terreno, usando as medidas tomadas por um agrimensor:

OA = 52 m

OB = 63 m

OC = 59 m

OD = 40 m

OE = 45 m

OF = 50 m

OG = 48 m

Exercício 4*

O terreno correspondente à figura ABCDE, abaixo, foi vendido a R$ 40,00 o metro quadrado. Conseqüentemente foi vendido por:

a) R$ 7.800,00
b) R$ 5.000,00
c) R$ 100.000,00
d) R$ 7.960,00
e) R$ 1.150,00

* Exercício aplicado na PUC–SP.

Exercício 5*

No triângulo ABC da figura, em que R é o raio da circunferência, o ângulo Â é oposto ao lado **a**, que mede $\frac{3R}{2}$. Calcule o valor de sen Â.

* Fonte: *Matemática Aplicada – 2º grau*, Ed. Moderna, Luiz Marcio Imenes, Fernando Trotta e José Jakubovic.