AULA

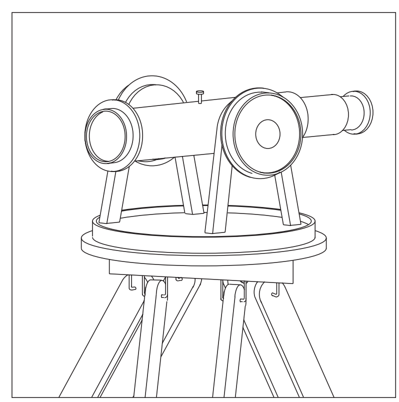
44

Distâncias inacessíveis

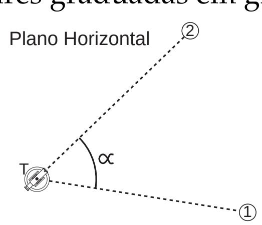
Introdução

Na Aula 20 aprendemos a calcular distâncias que não podiam ser medidas diretamente. Nessa aula, os conceitos utilizados foram a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras. Agora, mostraremos métodos para o cálculo de distâncias inacessíveis, que vão utilizar os conceitos de trigonometria aprendidos entre as Aulas 29 e 43. A aplicação desses métodos necessita de um instrumento capaz de medir ângulos, usado por agrimensores, topógrafos e engenheiros: o **teodolito**.

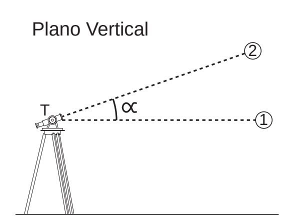
Ilustração de um teodolito.



O teodolito mede ângulos horizontais e verticais com suas duas escalas circulares graduadas em graus.



Se o teodolito T e os objetos 1 e 2 estão em um mesmo plano horizontal, podemos medir o ângulo $1\hat{T}2$.



Visando o objeto 2, podemos medir o ângulo que a reta T2 faz com a reta horizontal T1.

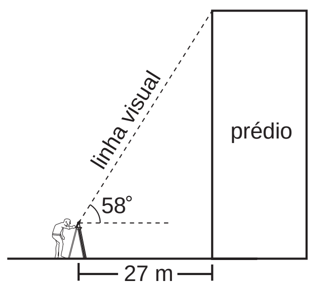
Com essas duas utilizações do teodolito, que nos permitem calcular ângulos horizontais e verticais, poderemos agora utilizar a lei dos co-senos, a lei dos senos e a tabela trigonométrica para calcular distâncias inacessíveis. Os principais métodos estão nos exemplos da nossa aula.

Nossa aula

Para que você possa entender bem os métodos que utilizaremos nos exemplos a seguir, é conveniente que recorde as Aulas 39 e 40, nas quais introduzimos os conceitos de seno, co-seno e tangente, e, também, as Aulas 42 e 43, nas quais aparecem as fórmulas da lei dos co-senos e da lei dos senos. Para os cálculos, utilizaremos os valores da tabela trigonométrica que se encontra na Aula 40. Ela também será necessária para os exercícios.

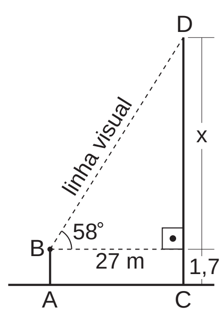
EXEMPLO 1

Para determinar a altura de um prédio, o topógrafo colocou seu teodolito na praça em frente. Com uma trena, ele mediu a distância do teodolito ao prédio e encontrou 27 m. Mirando o alto do prédio, ele verificou, na escala do teodolito, que o ângulo formado por essa linha visual com a horizontal é de 58º. Se a luneta do teodolito está a 1,7 m do chão, qual é a altura do prédio?



Solução:

Na figura abaixo, AB é a altura do teodolito e CD é a altura do prédio.



Vamos calcular o cateto **x** do triângulo retângulo que aparece na figura.

Temos: $\frac{x}{27} = \text{tg } 58^\circ$

Da tabela trigonométrica obtemos que a tangente de 58º é aproximadamente 1,6.

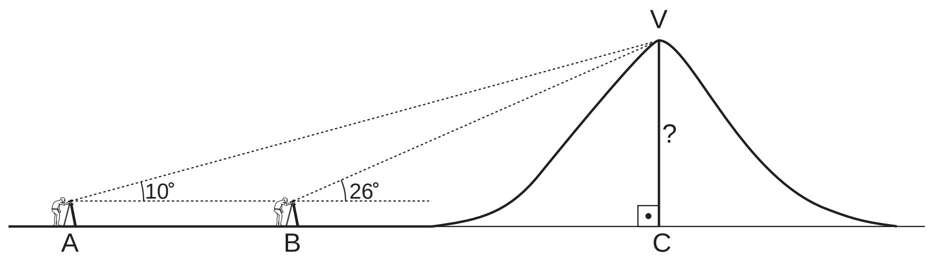
Assim, $\frac{x}{27} = 1{,}6$ $\qquad$ $x = 1{,}6 \cdot 27 = 43{,}2$

A altura total do prédio será igual a esse valor mais 1,7, que é a altura da luneta do teodolito. Portanto, CD = 43,2 + 1,7 = 44,9 m.

A altura desse prédio é, então, de 44 metros e 90 centímetros, ou seja, aproximadamente 50 metros.

EXEMPLO 2

Neste exemplo determinaremos a altura de um morro em relação a uma região plana que existe em volta. Para isso, foi preciso fazer duas medições com o teodolito. Inicialmente, o teodolito foi colocado em um ponto A. Mirando o ponto V, o mais alto do morro, verificamos que o ângulo dessa linha visual com a horizontal era de 10º. Em seguida, o topógrafo aproximou-se do morro e fixou o teodolito no ponto B. Nessa posição, mirando o ponto V, o mais alto do morro, ele verificou que o ângulo da linha visual com a horizontal passou a ser de 26º. Sabendo que a distância AB (medida com a trena) era de 100 m, qual é a altura do morro?



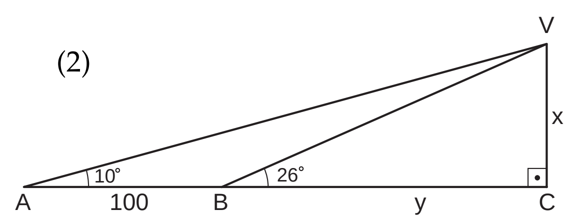
Solução:

Com os dados obtidos pelo topógrafo, vamos calcular a altura do morro. Na figura a seguir, mostramos esses dados sem considerar a altura do teodolito.

Determinando BC = y, temos as relações:

$$\frac{VC}{AC} = tg\,10^\circ \Rightarrow \frac{x}{100 + y} = 0,17633 \qquad (1)$$

$$\frac{VC}{BC} = tg\,26^\circ \Rightarrow \frac{x}{y} = 0,48773 \qquad (2)$$



Da relação (1) tiramos x = y . 0,17633 + 17,633.
Da relação (2) tiramos x = y . 0,48773.

Igualando, temos:

$y \cdot 0,48773 = y \cdot 0,17633 + 17,633$
$y \cdot 0,48773 - y \cdot 0,17633 = 17,633$
$y\,(0,48773 - 0,17633) = 17,633$
$y \cdot 0,3114 = 17,633$ $\qquad y = \dfrac{17,633}{0,3114} = 56,62$ (aproximando)

e $x = y \cdot 0,48773 = 27,61$ m.

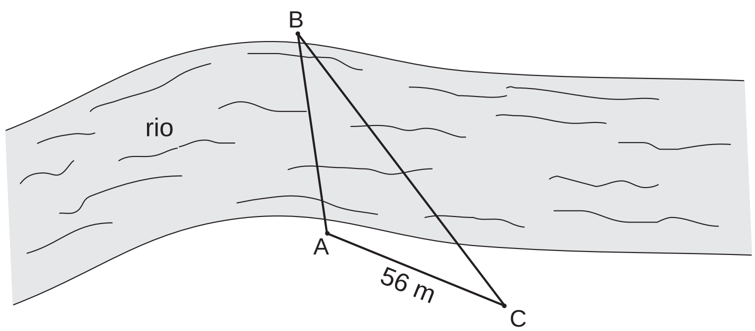
Somando a esse valor a altura do teodolito (1,7 m), concluímos que a altura do morro em relação à região plana em volta é de 27,61 + 1,7 = 29,31 m.

Vamos ver, a seguir, um outro exemplo muito comum no campo ou nas fazendas, onde diversas medidas não podem ser feitas diretamente.

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

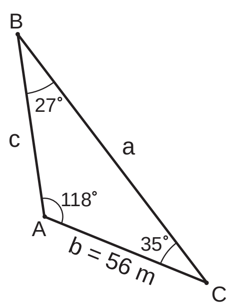
EXEMPLO 3

Em uma região há um rio com curso irregular. Sua largura não é constante e ele faz muitas curvas. Entre os ponto A e B, situados em margens opostas, deseja-se construir uma ponte. Para isso, é necessário determinar a distância AB. O topógrafo, que está na margem inferior do desenho que vemos abaixo, assinala com uma estaca um ponto C qualquer. Com a trena, ele mede a distância AC e encontra 56 m. Com o teodolito ele mede os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ encontrando 118º e 35º, respectivamente. Qual será o valor da distância AB?



Solução:

Vamos analisar o triângulo ABC. Se $\hat{A}$ = 118º e $\hat{C}$ = 35º, então podemos calcular o ângulo $\hat{B}$. Como sabemos, a soma dos três ângulos é 180º.



$$118^\circ + \hat{B} + 35^\circ = 180^\circ \text{ ® } \hat{B} = 27^\circ$$

Determinando AB = C e AC = b, a lei dos senos nos informa que:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{c}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{56}{\text{sen } 27^\circ}$$

Utilizando os valores da tabela trigonométrica, temos:

$$\frac{c}{0{,}57358} = \frac{56}{0{,}45399}$$

Assim,

$$c = \frac{56 \cdot 0{,}57358}{0{,}45399} = 70{,}75$$

Portanto, naquela parte do rio, a distância AB é de 70,75 m.

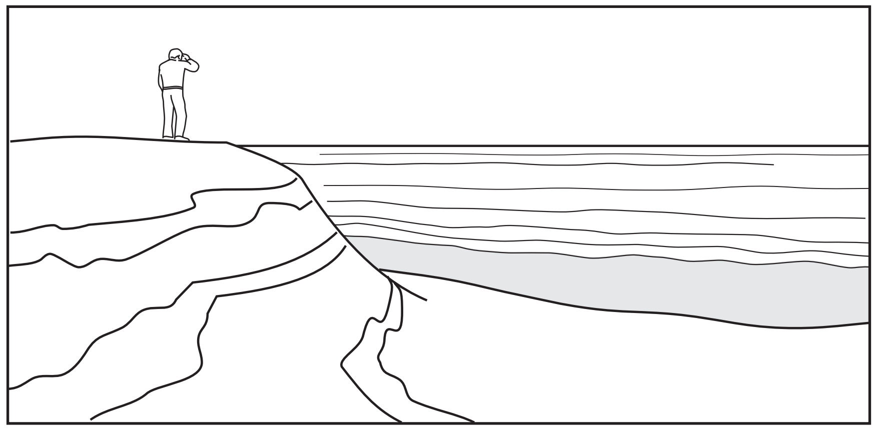
P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

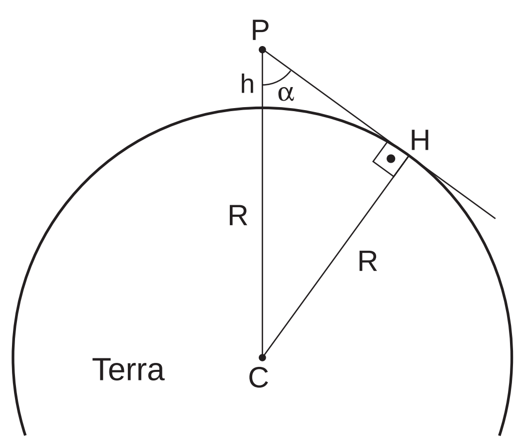
EXEMPLO 4

Um dos cálculos que, no passado, mais fascinaram os matemáticos era o da medida do raio da Terra. O engenhoso processo que vamos descrever já tinha sido imaginado pelos gregos da Antigüidade, mas, na época, não dava bons resultados porque os instrumentos de medida eram bastante precários.

Imagine que, do alto de um morro situado próximo ao mar, uma pessoa observa o oceano, vendo com nitidez a linha do horizonte.



Vamos, agora, imaginar um imenso triângulo que tem um vértice no centro da Terra, outro vértice na pessoa que está em cima do morro e o terceiro vértice na linha do horizonte que essa pessoa vê. O desenho será o seguinte:



Na figura acima, o ponto C é o centro da Terra e o ponto P é a pessoa que está situada a uma altura **h** em relação ao nível do mar. Para essa pessoa, o ponto H está na linha do horizonte e, como a reta PH é tangente à Terra, o ângulo $P\hat{H}C$ é reto. A altura **h** do morro é conhecida e o ângulo $\alpha = C\hat{P}H$ pode ser medido. Portanto, no triângulo CPH, o seno do ângulo α é igual a $\frac{CH}{CP}$, ou seja,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{R}{h+R}$$ em que R, o raio da Terra, é a nossa incógnita.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

Então, $(h + R) \operatorname{sen} \alpha = R$

$h \operatorname{sen} \alpha + R \operatorname{sen} \alpha = R$

$h \operatorname{sen} \alpha = R - R \operatorname{sen} \alpha$

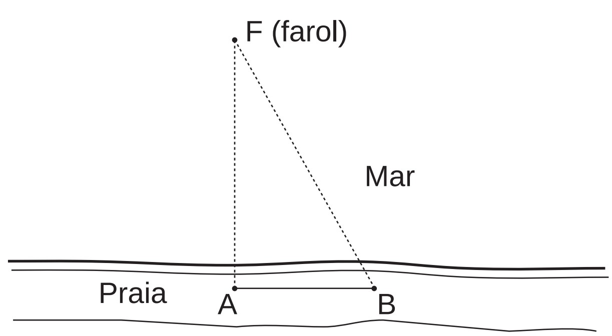
$h \operatorname{sen} \alpha = R (1 - \operatorname{sen} \alpha)$ ou $R = \dfrac{h \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$

Observe que conhecendo a altura **h** e o ângulo α podemos calcular o raio da Terra usando essa fórmula, mas, na prática, existem dificuldades. A altura **h** será sempre muito pequena em relação ao raio da Terra. Para se obter R com precisão, é preciso medir o ângulo α também com muita precisão, pois um pequeno erro na medida de α acarretará um erro muito grande na medida de R. Hoje, existem instrumentos eletrônicos que medem ângulos com precisão de 1 milésimo de grau, e as calculadoras científicas fornecem os senos dos ângulos com a necessária exatidão. Por exemplo, se a pessoa P está a uma altura de 2 km em relação ao nível do mar, o ângulo α será de 88,657 graus. Com uma calculadora científica, encontramos o seno desse ângulo igual a 0,9996872 e o raio da Terra aproximadamente igual a 6390 km.

Exercícios

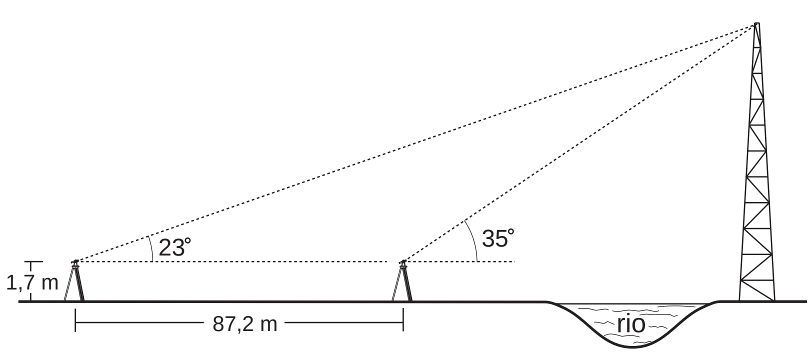
Exercício 1

Na figura abaixo, o ponto F é um farol que está numa ilha próxima ao continente. Na praia, foram assinalados dois pontos, A e B, tais que AB = 132m, $F\hat{A}B = 90°$ e $A\hat{B}F = 85°$. Calcule a distância AF.



Exercício 2

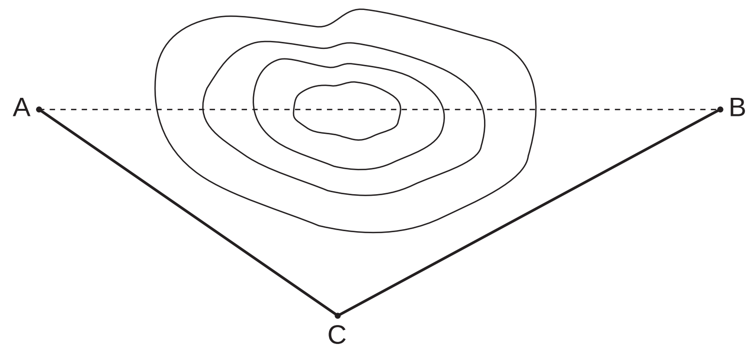
O topógrafo utilizou o mesmo método descrito no Exemplo 2 desta aula para calcular a altura de uma torre que se encontra do outro lado de um rio. Calcule sua altura, utilizando os dados que estão na figura abaixo.



Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

Exercício 3

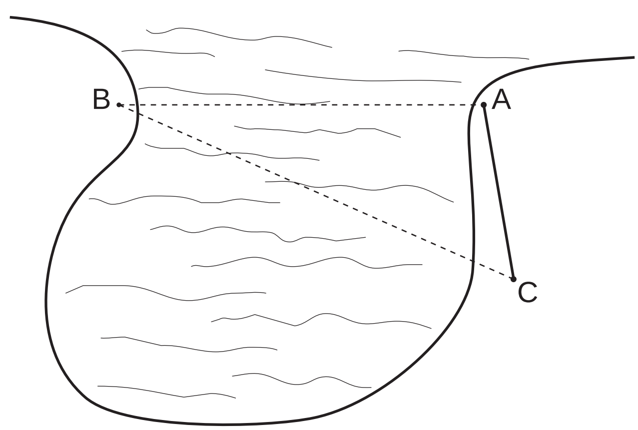
Entre os pontos A e B, situados em uma fazenda, existe um morro. O teodolito colocado no ponto C consegue mirar tanto A quanto B. Sabendo que CA = 76 m, CB = 90 m e $A\hat{C}B = 126°$, calcule a distância AB.



Sugestão: Volte à Aula 42 para recordar como se calcula o co-seno de um ângulo maior que 90º e aplique a lei dos co-senos no triângulo ABC. Use a calculadora.

Exercício 4

Na figura abaixo, os pontos A e B estão em lados opostos da entrada de uma baía. Para calcular a distância AB, o topógrafo fixou um ponto C de onde pudesse mirar os pontos A e B. Com a trena, mediu AC, encontrando 320 m, e, com o teodolito, mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$, encontrando 98º e 47º, respectivamente. Quanto mede AB?



Sugestão: use a lei dos senos no triângulo ABC da forma que foi utilizada no Exemplo 3 desta aula.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/