AULA

45

A equação da reta

Introdução

Vamos, nesta aula, retomar o assunto que começamos a estudar nas Aulas 9 e 30: a equação da reta. Aprenderemos hoje outra forma de obter a equação da reta e veremos diversas aplicações.

Em algumas situações é necessário calcular a distância de um ponto a uma reta. Também nesta aula, veremos como isso pode ser feito.

Nossa aula

Imaginemos, no plano cartesiano, uma reta que não seja paralela a nenhum dos eixos. Como mostra o desenho a seguir, essa reta passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Esses pontos são dados, ou seja, x_1, y_1, x_2 e y_2 são números conhecidos. Seja então (x, y) um ponto qualquer dessa reta.

Observe que os comprimentos dos segmentos horizontais e verticais são fáceis de obter:

$AC = x_2 - x_1$
$AD = x - x_1$
$CB = y_2 - y_1$
$DP = y - y_1$

Veja, agora, que os triângulos ACB e ADP são semelhantes, portanto

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DP}{CB} \quad \text{o que é a mesma coisa que} \quad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Essa relação permite obter facilmente a equação da reta que passa pelos dois pontos dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Essa equação será do primeiro grau nas incógnitas x e y, e portanto, terá a forma

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Observe com atenção o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos (1 , 2) e (3, 5).

Solução:

Não importa qual é o primeiro ponto. Vamos considerar $(x_1, y_1) = (1, 2)$, ou seja, $x_1 = 1$ e $y_1 = 2$ e $(x_2, y_2) = (3, 5)$, isto é, $x_2 = 3$ e $y_2 = 5$. Aplicando a fórmula, temos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} \qquad 3(x - 1) = 2(y - 2) \qquad 3x - 3 = 2y - 4$$

$$\boxed{3x - 2y + 1 = 0}$$

Aí está a equação da nossa reta. Se você quiser saber se um ponto qualquer pertence a essa reta, basta substituí–lo na equação e ver se a igualdade se verifica.

Por exemplo, será que o ponto (9, 14) pertence a essa reta? Vamos ver. Substituindo **x** por 9 e **y** por 14, temos:

$$3 \cdot 9 - 2 \cdot 14 + 1 =$$

$$= 27 - 28 + 1 =$$

$$= 28 - 28 = 0$$

Deu certo. O ponto (9, 14) pertence à nossa reta.

Devemos lembrar que a equação da reta não precisa ser escrita obrigatoriamente na forma que apresentamos. Algumas vezes, deixamos a letra **y** isolada do lado esquerdo, quando desejamos pensar nessa equação como uma função. Veja:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

$$-2y = -3x - 1$$

$$2y = 3x + 1 \qquad y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$$

A equação $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ representa a mesma reta, e agora foi escrita como uma função do 1º grau, estudada na Aula 30. Veja, a seguir, algumas aplicações.

EXEMPLO 2

Certo município é um grande produtor de soja. A produtividade vem aumentando de acordo com o gráfico abaixo.

Qual foi a produção em 1993?

Solução:

Este é um exemplo muito comum. Alguma coisa evolui linearmente, ou seja, tem um crescimento constante em intervalos de tempo iguais. Vamos ver a solução usando a equação da reta e, nos exercícios, vamos sugerir uma outra.

Inicialmente, vamos definir de forma mais prática o eixo horizontal. 1990 será o ano 0 e 1995 o ano 5.

O gráfico, então, fica assim:

A nossa reta passa pelos pontos (0, 8) e (5, 12). Vamos obter sua equação utilizando a fórmula:

$$\frac{x - 0}{5 - 0} = \frac{y - 8}{12 - 8}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y - 8}{4}$$

$$4x = 5y - 40$$

$$4x - 5y + 40 = 0$$

Aí está a equação da reta. Como 1993 é o ano 3 da nova escala, vamos substituir **x** por 3. O valor de **y** que encontrarmos será a produção nesse ano.

$$4 \cdot 3 - 5y + 40 = 0$$

$$12 + 40 = 5y$$

$$52 = 5y$$

$$y = \frac{52}{5} = 10{,}4$$

Concluimos que a produção de soja em 1993 foi de 10,4 mil toneladas.

EXEMPLO 3

Nivaldo está sempre inventando coisas. Um dia, ele resolveu inventar uma nova escala de temperaturas. Verificou que, na região onde mora, a temperatura mínima registrada foi de 16ºC e que a máxima foi de 41ºC. Então, Nivaldo resolveu que essas temperaturas seriam os valores 0 e 100 da sua nova escala. Supondo uma variação linear, qual é a equação que relaciona as duas escalas? Na escala de Nivaldo em que temperatura ferve a água?

Solução:

Vamos chamar de **x** uma temperatura em graus Celsius e de **y** a mesma temperatura em graus Nivaldo.

Temos, então, o quadro abaixo:

x (ºC)	**y (ºN)**
16	0
41	100

Assim, devemos encontrar a equação da reta que contém os pontos (16, 0) e (41, 100). Aplicando a fórmula, temos:

$$\frac{x - 16}{41 - 16} = \frac{y - 0}{100 - 0}$$

$$\frac{x - 16}{25} = \frac{y}{100}$$

$$\frac{x - 16}{1} = \frac{y}{4}$$

$$4x - 64 = y$$

$$\boxed{y = 4x - 64}$$

Esta é a equação que relaciona as temperaturas nas duas escalas. Respondendo à segunda pergunta, sabemos que a água ferve a 100ºC. Fazendo x = 100 na equação, descobriremos o valor correspondente na escala do Nivaldo:

$$y = 4 \cdot 100 - 64$$

$$y = 400 - 64$$

$$y = 336$$

Portanto, para Nivaldo, a água ferve a 336 ºN.

A distância de um ponto a uma reta

A distância de um ponto a uma reta é o comprimento da perpendicular traçada do ponto até a reta. Veja isso no desenho abaixo.

Vamos descobrir agora como calcular essa distância, se nós conhecemos o ponto P e a equação da reta **r**. Antes, porém, devemos recordar uma propriedade dos triângulos retângulos:

"Em todo triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura a ela relativa".

$$\boxed{bc = ah}$$

Podemos compreender essa propriedade lembrando como se calcula a área de um triângulo. No caso do triângulo retângulo da figura acima, ela é igual a $\frac{bc}{2}$ e também igual a $\frac{ah}{2}$. Portanto, é claro que bc = ah.

EXEMPLO 4

Calcular a distância do ponto (5, 4) à reta $x + 2y - 9 = 0$.

Solução:

Seja P = (5, 4) o ponto dado. Vamos começar fazendo um desenho da reta $x + 2y - 9 = 0$. Para isso, precisamos conhecer dois de seus pontos. Como as coordenadas de P são x = 5 e y = 4, vamos aproveitar esses valores para determinar os pontos da reta que possuem essa abcissa e essa ordenada. Substituindo esses valores, um de cada vez, na equação da reta, temos:

$x = 5 \Rightarrow 5 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$

$y = 4 \Rightarrow x + 2 \cdot 4 - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 - \Rightarrow 8 \quad x = 1$

Conseguimos, então, dois pontos da reta: A = (5, 2) e B = (1, 4).

O desenho fica assim:

No triângulo retângulo PAB da figura acima, conhecemos os comprimentos dos catetos: AP = 2 e BP = 4. Para calcular a hipotenusa, aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Representando por **d** a distância do ponto à reta temos, pela relação que mostramos anteriormente,

$$AP \cdot BP = AB \cdot d$$

$$2 \cdot 4 = 2\sqrt{5} \cdot d \qquad d = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cong 1,79$$

Finalmente, vamos apresentar uma fórmula que faz o mesmo cálculo que acabamos de realizar. O ponto dado será representado por $P = (x_0, y_0)$ e a reta por $ax + by + c = 0$.

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Observe o cálculo da distância do ponto P = (5, 4) à reta x + 2y – 9 = 0, agora usando a fórmula:

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 8 - 9|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

O resultado, como era de se esperar, é o mesmo, e essa fórmula, que não é indispensável, mostra-se bastante prática.

Exercícios

Exercício 1

Encontre a equação da reta que contém os pontos (–1; 2) e (2; 4).

Exercício 2

Determine os pontos onde a reta $2x + 5y - 40 = 0$ corta os eixos.

Sugestão: determinado $y = 0$ você encontrará o ponto em que essa reta corta o eixo dos x. Determinando $x = 0$, ...

Exercício 3

Calcule k para que os pontos (1; –2), (4; 3) e (8; k) estejam na mesma reta.

Sugestão: encontre a equação da reta que contém os dois primeiros pontos. Depois, substitua o terceiro ponto nessa equação.

Exercício 4

Os relógios dos táxis mediam "unidades taximétricas" (UT) que eram depois transformadas em reais com o uso de uma tabela. Em certa cidade, Nivaldo reparou que em um percurso de 7 km o taxímetro marcou 7 UT e em um percurso de 12 km marcou 10 UT.
Quantas UT o relógio marcaria em um percurso de 25 km?

Sugestão: considere dois "pontos" do tipo (km, UT) e encontre a equação da reta.

Exercício 5

Faça uma solução do Exemplo 2 da nossa aula usando uma progressão aritmética.

Sugestão: $a_1 = 8$, $a_6 = 12$.

Exercício 6

Uma caixa d'água de 500 litros vaza por um furo que existe no fundo. Ao meio-dia de uma segunda-feira ela foi completamente cheia, mas às 8 horas da noite desse mesmo dia só tinha 440 litros.

a) Quantos litros terá a caixa ao meio-dia de terça-feira?

b) Supondo que o vazamento seja sempre constante, quando a caixa ficará vazia?

Sugestão: a partir de dois "pontos" do tipo (tempo, litros) encontre a equação da reta. Considere $x = 0$ ao meio-dia de segunda-feira.

Exercício 7

Encontre a distância do ponto (3; 2) à reta $3x + 4y - 29 = 0$

Exercício 8

Determine a distância da origem à reta que contém os pontos (1; 8) e (4; 2).