

As permutações

Introdução

Nesta aula você estudará um tipo muito comum de problemas de contagem, que está relacionado com as várias formas de organizar ou arrumar os elementos de um conjunto.

Organizar tais elementos é uma atividade cotidiana que inclui várias possibilidades, sendo que cada pessoa adota uma estratégia. No entanto, muitas vezes precisamos saber de quantas maneiras podemos arrumar um conjunto de elementos ou simplesmente saciar a curiosidade sobre o número total de possibilidades.

Consultando um dicionário encontramos:

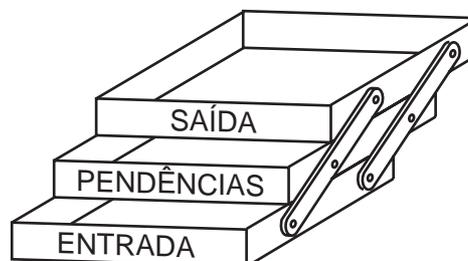
PERMUTAR → dar mutuamente, trocar.

PERMUTAÇÃO → 1) ato ou efeito de permutar, troca, substituição;
2) transposição dos elementos de um todo para se obter uma nova combinação;
3) seqüência ordenada dos elementos de um conjunto.

Nossa aula

EXEMPLO 1

No protocolo de uma repartição há um arquivo de mesa como o da figura abaixo. Cada funcionário do setor gosta de arrumar estas caixas em uma ordem diferente (por exemplo: entrada-pendências-saída, pendências-saída-entrada etc.). De quantas maneiras é possível ordenar estas caixas?



Solução:

Como temos 3 caixas – saída (S), pendências (P) e entrada (E) – vamos escolher uma delas para ficar embaixo. Escolhida a caixa inferior, sobram 2 escolhas para a caixa que ficará no meio e a que sobrar ficará sobre as outras.

Então, usando o princípio multiplicativo temos

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ opções}$$

Assim, as soluções são:

S	S	E	E	P	P
P	E	S	P	E	S
E	P	P	S	S	E

EXEMPLO 2

De quantas maneiras podemos arrumar 5 pessoas em fila indiana?

Solução:

Para facilitar, vamos imaginar que as pessoas são $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ e que precisamos arrumá-las nesta fila:

--	--	--	--	--

Deste modo, podemos ter soluções como:

P_1	P_3	P_5	P_2	P_4
P_5	P_2	P_1	P_3	P_4

etc.

Ao escolher uma pessoa para ocupar a primeira posição na fila temos cinco pessoas à disposição, ou seja, 5 opções; para o 2º lugar, como uma pessoa já foi escolhida, temos 4 opções; para o 3º lugar sobram três pessoas a serem escolhidas; para o 4º lugar duas pessoas, e para o último lugar na fila sobra apenas a pessoa ainda não escolhida.

Pelo princípio multiplicativo temos:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ opções}$$

Permutação

Dado um conjunto formado por n elementos, chama-se permutação desses n elementos qualquer seqüência de n elementos na qual apareçam todos os elementos do conjunto.

Os Exemplos 1 e 2 são demonstrações de permutações feitas com 3 caixas e 5 pessoas. No Exemplo 2, como na maioria dos casos, não descrevemos ou enumeramos todas as permutações que podemos encontrar, pois apenas calculamos o número de permutações que poderíamos fazer.

Cálculo do número de permutações

O número de modos de ordenar n objetos distintos é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 1$$

EXEMPLO 3

Quantos números diferentes de 4 algarismos podemos formar usando apenas os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Solução:

Como são 4 algarismos diferentes, que serão permutados em 4 posições, a solução é:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24 \text{ números diferentes}}$$

Um novo símbolo

Uma multiplicação do tipo $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 1$ é chamada **fatorial** do número n e representada por $n!$ (lemos n fatorial).

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 1$$

Veja os exemplos:

a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$

b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$

c) $5! \cdot 4! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 120 \cdot 24 = \mathbf{2880}$

d) $8! = \mathbf{8 \cdot 7!}$

e) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 = \mathbf{20}$

f) $\frac{12!}{13!} = \frac{\cancel{12!}}{13! \cdot \cancel{12!}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}$

g) $\frac{\mathbf{0} + \mathbf{10!}}{n!} = \frac{\mathbf{0} + \mathbf{10!}}{n!} = \mathbf{n + 1}$

EXEMPLO 4

Quantos são os anagramas da palavra MARTELO?

Você sabe o que é um **anagrama**?

Anagrama é uma palavra formada pela transposição (troca) de letras de outra palavra. Existem também anagramas de frases, nos quais se trocam as palavras, formando-se outra frase.

Solução:

Cada anagrama da palavra MARTELO é uma ordenação das letras M, A, R, T, E, L, O. Assim, o número de anagramas é o número de permutações possíveis com essas letras, ou seja:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

EXEMPLO 5

Quantos anagramas que comecem e terminem por consoantes podemos formar a partir da palavra MARTELO?

Solução:

A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras e a consoante final de 3 maneiras. As 5 letras restantes serão permutadas entre as duas consoantes já escolhidas. Portanto, a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 5! = \mathbf{1440}$ anagramas

EXEMPLO 6

Um grupo de 5 pessoas decide viajar de carro, mas apenas 2 sabem dirigir. De quantas maneiras é possível dispor as 5 pessoas durante a viagem?

Solução:

O banco do motorista pode ser ocupado por uma das 2 pessoas que sabem guiar o carro e as outras 4 podem ser permutadas pelos 4 lugares restantes, logo:

$$2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = \mathbf{48}$$
 maneiras

Nos Exemplos 6 e 7 vemos que em alguns problemas (que envolvem permutações dos elementos de um conjunto) podem existir restrições que devem ser levadas em conta na resolução.

Portanto, fique sempre muito atento ao enunciado da questão, procurando compreendê-lo completamente antes de buscar a solução.

EXEMPLO 7

Num encontro entre presidentes de países da América do Sul, apenas 7 confirmaram presença.

Os organizadores dos eventos que ocorrerão durante a visita gostariam de permutar os presidentes possibilitando vários contatos diferentes.

- De quantas maneiras podemos permutar os presidentes em 7 cadeiras lado a lado?
- Se 2 dos presidentes devem se sentar lado a lado, quantas são as possibilidades de organizá-los?
- Se tivéssemos 2 presidentes que não devem ficar juntos, quantas seriam as possibilidades de organizá-los?

Solução:

- O total de permutações possíveis dos 7 presidentes por 7 cadeiras é $7! = 5040$.
- Observe que, agora, queremos contar apenas o número de permutações nas quais os presidentes A e B aparecem juntos, como, por exemplo:

$\underline{A} \underline{B} C D E F G$
 $\underline{B} \underline{A} C G D F E$
 $G \underline{A} \underline{B} D C E F$ etc.

Então, é preciso contar quantos são os casos em que A e B estariam juntos.

Eles estariam juntos na 1ª e na 2ª cadeiras, na 2ª e na 3ª, 3ª e 4ª, 4ª e 5ª, 5ª e 6ª ou 6ª e 7ª. Podemos verificar que são 6 posições e que para cada uma delas poderíamos ter A e B ou B e A (2 possibilidades: $6 \cdot 2 = 12$). Além disso, devemos contar várias vezes no total de permutações cada uma dessas 12 possibilidades, como, por exemplo, $EFGCD\underline{AB}$, $FEGCD\underline{AB}$, $DEFG\underline{AB}$ etc. Para sabermos quantas vezes A e B aparecem nas posições 6 e 7, respectivamente, precisamos contar todas as permutações possíveis dos outros 5 presidentes nas 5 posições restantes.

Considerando todos estes casos, o número total de posições em que A e B aparecem junto é

$$2 \cdot 6 \cdot 5! = 12 \cdot 120 = \mathbf{1440 \text{ posições}}$$

- Neste caso, do total de permutações possíveis com os 7 presidentes (5040) devemos retirar aquelas em que A e B aparecem juntos (1440). Portanto, a resposta seria:

$$5040 - 1440 = \mathbf{3600 \text{ possibilidades}}$$

Exercício 1.

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra AMOR?

Exercício 2.

a) Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

b) Quantos desses números são pares?

c) Quantos têm os algarismos 1 e 2 juntos?

d) Quantos são múltiplos de 5?

e) Quantos são os múltiplos de 5 com no mínimo 4 centenas de milhar?

Exercício 3.

a) Numa quadrilha de 10 casais, de quantas maneiras podemos organizar a ordem de entrada?

b) De quantas maneiras poderíamos enfileirar os casais, se dois deles não quisessem ficar juntos?

Exercício 4.

Quatro crianças viajam sempre no banco traseiro de um automóvel de 4 portas. As 3 maiores brigam pela janela, e a menor não deve viajar perto das portas. Quantas são as arrumações possíveis das crianças?