AULA

51

As combinações

Introdução

Até agora você estudou problemas de análise combinatória que envolviam o princípio multiplicativo e as permutações.

Se observar os problemas de permutações apresentados nas Aulas 49 e 50, verá que possuem duas características em comum:

- todos os objetos são usados na hora de formar o agrupamento;
- a ordem em que os objetos são arrumados no agrupamento faz diferença.

Nos problemas que envolviam anagramas com as letras de uma palavra, por exemplo, todas as letras da palavra original tinham de ser usadas, e a ordem em que arrumávamos as letras era importante, pois cada ordem diferente fornecia um novo anagrama.

Agora, você estudará um tipo diferente de problema em que:

- não utilizamos todos os objetos;
- a ordem em que os objetos são arrumados "não faz diferença".

Vamos começar compreendendo e resolvendo um problema.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Em uma obra havia três vagas para pedreiro. Cinco candidatos se apresentaram para preencher as vagas. De quantas formas o encarregado da obra pode escolher os três de que ele precisa?

Solução:

Note que ele não vai usar todos os candidatos, de 5 escolherá apenas 3.

Além disso, a ordem em que ele vai escolhê-los não faz diferença (se escolher primeiro João, depois José e por último Pedro, ou primeiro José, depois Pedro e por último João, o grupo escolhido será o mesmo).

Assim, você já deve ter notado que este não é um problema de permutações.

Se a ordem de escolha dos candidatos importasse, poderíamos usar o **princípio multiplicativo**. Nesse caso, teríamos 5 candidatos para a primeira vaga, 4 candidatos para a segunda e 3 candidatos para a última. A solução seria: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Portanto, haveria 60 formas de escolher os três novos pedreiros.

Usando o princípio multiplicativo, no entanto, contamos várias vezes o mesmo grupo de três candidatos:

João	José	Pedro
João	Pedro	José
Pedro	João	José
Pedro	José	João
José	Pedro	João
José	João	Pedro

Estes seis grupos são iguais e foram contados como agrupamentos diferentes nas 60 formas de escolher que encontramos. Para "retirar" as repetições destes e de outros grupos, vamos dividir o resultado pelo número de vezes que eles se repetem na contagem. Que número é esse?

Os grupos repetidos são as formas de "embaralhar" três candidatos escolhidos. Ora "embaralhar" três objetos é fazer permutações! O número de permutações de 3 objetos você já sabe que é $3! = 6$. Logo, basta dividir 60 por 6 para não contarmos as repetições dentro de cada grupo formado. Isso significa que há **10 maneiras de escolher** os três novos pedreiros, entre os 5 candidatos.

Uma fórmula para o cálculo das combinações

Esse tipo de agrupamento chama-se ***combinação***. No caso do nosso exemplo, temos uma combinação de 5 objetos (os 5 candidatos) 3 a 3 (apenas 3 serão escolhidos).

Vamos supor que temos **n** objetos disponíveis para escolha e que, destes, vamos escolher **p** objetos ($p < n$). O número de maneiras de se fazer essa escolha chama-se ***combinação*** e representa-se por C_n^p. Portanto, o número de combinações de **n** elementos **p** a **p** é calculado por:

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n \quad p)!\, p!}}$$

Em nosso exemplo, temos $n = 5$ e $p = 3$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5 \quad 3)!\, 3!} = \frac{5!}{2!\, 3!} =$$

Vamos resolver mais alguns problemas nos próximos exemplos. Leia com atenção o enunciado, interprete-o e tente resolver cada exemplo sozinho. Só depois disso leia a solução.

Assim você poderá verificar se realmente compreende o problema e sua solução.

EXEMPLO 2

Em um hospital há apenas 5 leitos disponíveis na emergência. Dez acidentados de um ônibus chegam e é preciso escolher 5 para ocupar os leitos. Os outros ficariam em macas, no corredor do hospital. De quantas formas poderíamos escolher 5 pessoas que ficariam nos leitos?

Solução:

Na realidade, os responsáveis pela emergência estudariam cada caso e escolheriam os mais graves, mas imagine que todos tenham a mesma gravidade.

Nesse caso, há duas coisas a observar: de 10 pessoas, 5 serão escolhidas e a ordem em que a escolha é feita não importa. Trata-se, então, de uma combinação onde:

n = 10 (número de "objetos" disponíveis)
p = 5 (número de "objetos" a serem escolhidos)

Usando a fórmula, temos:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{(10 \quad 5)!\,5!} = \frac{10!}{5!\,5!}$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 2$$

Logo, há **252 formas** de escolher as 5 pessoas que irão ocupar os 5 leitos.

EXEMPLO 3

Uma pequena empresa quer formar um time de futebol e 15 funcionários se inscreveram, dizendo que aceitam jogar em qualquer posição. De quantas formas é possível escolher os 11 jogadores do time?

Solução:

De 15 operários, 11 serão escolhidos e a ordem de escolha não importa, pois queremos escolher apenas os jogadores sem determinar as posições em campo.

Temos, então, as características de uma combinação de 15 pessoas (n = 15) para formar grupos de 11 (p = 11).

Usando a fórmula:

$$C_{15}^{11} = \frac{15!}{(15 \quad 11)!\,11!} = \frac{15 \cdot}{}$$

$= 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365$

Assim, os jogadores podem ser escolhidos de **1 365 formas diferentes**.

EXEMPLO 4

Os 15 funcionários da empresa decidem escolher uma comissão de 3 membros para reivindicar apoio financeiro da diretoria ao novo time de futebol. Beto começou a pensar em todas as comissões possíveis em que ele pudesse ser um dos membros, e nas quais Edu não estivesse. Em quantas comissões Beto poderia pensar?

Solução:

Como Edu não pode participar de nenhuma das comissões pensadas por Beto, podemos retirá-lo do problema. Temos, então, 14 funcionários para formar comissões de 3.

Como um dos membros sempre é o Beto, precisamos descobrir os outros dois membros que devem ser escolhidos dentre 13 pessoas (Beto já foi "escolhido").

Assim, concluímos que o número máximo de comissões diferentes que Beto poderia pensar é:

$$C_{13}^{2} = \frac{13!}{(13 \quad 2)!\ 2!} = \frac{13!}{11!\ 2!}$$

EXEMPLO 5

De quantos modos podemos formar 2 times de vôlei com 12 moças?

Solução:

Como cada um dos times deve ter 6 jogadoras, o primeiro pode ser escolhido de C_{12}^{6} modos. Escolhido esse time, sobram exatamente 6 moças para formar o segundo. A resposta, então, parece ser $C_{12}^{6} \cdot 1$. No entanto, contamos cada time duas vezes. Observe, por exemplo, que as formações abaixo são idênticas:

a, b, c, d, e, f	e	g, h, i, j, l, m

ou

g, h, i, j, l, m	e	a, b, c, d, e, f

A resposta correta é:

$$\frac{C_{12}^{6} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{12!}{6!\ 6!} = 462$$

Assim, temos então **462 modos de formar os 2 times**.

Exercícios

Exercício 1.

O chefe da seção de laticínios de um supermercado quer arrumar 6 marcas diferentes de ervilha em lata em duas prateleiras. Três delas ficarão na primeira prateleira e as outras três na segunda. De quantas formas ele pode escolher as marcas que ficarão em cada prateleira?

Exercício 2.

Uma quituteira faz 10 tipos diferentes de docinhos e 15 qualidades de salgadinhos. Para organizar uma festa, Lúcia vai escolher 10 tipos de salgadinhos e 6 tipos de docinhos diferentes. De quantas formas ela pode escolhê-los?

Exercício 3.

Entre os 12 acionistas de uma empresa, serão escolhidos 1 para presidente, 1 para vice-presidente e 2 tesoureiros. Sabendo que há 4 candidatos para os cargos de presidente e vice-presidente, e 5 candidatos a tesoureiros, responda: de quantas formas os cargos poderão ser preenchidos?

Exercício 4.

Uma emissora de TV tem 15 comerciais para serem igualmente distribuídos nos 5 intervalos de um filme. Se em cada intervalo forem exibidos 3 comerciais diferentes, de quantas formas pode-se escolher os comerciais que serão passados em cada intervalo?

Exercício 5.

Dezesseis policiais vão sair em duplas para fazer a ronda em vários pontos de um bairro de uma grande cidade.

a) De quantas formas as duplas poderão ser organizadas?

b) Se, dos 16 policiais, 4 são policiais femininas e não podemos fazer uma dupla com duas mulheres, de quantas formas poderemos formar as duplas?