

# Expoentes fracionários

**N**esta aula faremos uma revisão de potências com expoente inteiro, particularmente quando o expoente é um número negativo. Estudaremos o significado de potências com expoentes fracionários e, em seguida, verificaremos que as propriedades operatórias da potenciação são, também, válidas para as potências de expoentes fracionários e negativos. Essas propriedades são muito úteis para a resolução das equações exponenciais e, também, no estudo dos logaritmos, que serão vistos mais adiante.

## Introdução

Lembrando que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, quando, por exemplo, escrevemos  $2^3 = 8$ , a **base** é o número 2 e o expoente 3 indica o número de fatores iguais a 2. O resultado, chamado de **potência**, é o número 8.

## Nossa Aula

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

↓  
3 fatores

E qual o significado de uma potência com expoente negativo? Esse tipo de potência representa uma fração onde o numerador é 1 e o denominador é a mesma potência, com o expoente positivo.

Por exemplo  $5^{-2}$  é igual a  $5^{\frac{1}{2}}$ .

De forma geral, se  $a \neq 0$ , então:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vamos calcular algumas potências com expoentes negativos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \text{ ou } 0,04 \text{ (dividindo 1 por 25)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000} \text{ ou } 0,001 \text{ (um milésimo)}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \text{ ou } 0,0625 \text{ (dividindo 1 por 16)}$$

Quando temos uma fração com numerador igual a 1, podemos escrevê-la como uma potência de base inteira e expoente negativo.

$$\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$$

$$\frac{1}{7} = 7^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Podemos, ainda, transformar um número decimal numa potência de expoente negativo, ou num produto de um número por uma potência negativa.

#### EXEMPLO 1

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

#### EXEMPLO 2

$$0,125 = \frac{125}{1000} = 125 \cdot \frac{1}{1000} = 125 \cdot \frac{1}{10^3} = 125 \times 10^{-3}$$

### Expoentes fracionários

Uma potência de expoente fracionário representa uma raiz, e podemos escrevê-la assim:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

onde  $a > 0$ ,

**m** e **n** são números inteiros e  $n \neq 0$

Observe que:

- o denominador da fração é o índice da raiz (n).
- a base (a) elevada ao numerador (m) é o radicando ( $a^m$ ).

**EXEMPLO 3**

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

**EXEMPLO 4**

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

**EXEMPLO 5**

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}$$

**EXEMPLO 6**

$$50^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{50^1} = \sqrt[3]{50}$$

Portanto, podemos escrever uma raiz em forma de potência de expoente fracionário:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$$

Observando esses últimos exemplos, vimos que, transformando uma raiz em potência de expoente fracionário, tendo, antes, feito a decomposição do radicando em fatores primos, justificamos a seguinte propriedade dos radicais:

***Podemos dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, para simplificar o radical.***

### Propriedades da potenciação

A seguir, enumeramos as propriedades da potenciação e damos alguns exemplos:

#### Primeira propriedade

Produto de potências de mesma base:

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3^4} = 3^{(2+4)} = 3^6$$

***Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.***

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Essa propriedade pode ser aplicada para expoentes negativos e para expoentes fracionários:

$$5^{-2} \cdot 5^5 = 5^{-2+5} = 5^3$$

$$7^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 7^{\frac{4}{2}} = 7^2$$

### Segunda propriedade

Divisão de potências de mesma base:

**Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Vamos aplicar essa propriedade às potências de expoentes negativos ou fracionários:

$$\frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}$$

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

### Terceira Propriedade

Potenciação de potência:

$$(3^2)^3 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{3 \text{ fatores}} = (3^2)^3 = 36$$

**Para elevar uma potência a um outro expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Vejamoss essa propriedade aplicada a potências com expoentes negativos ou fracionários:

$$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1) \times (-3)} = 2^3$$

$$\left(\frac{1}{5^2}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2} \times 3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

### Quarta propriedade

Distributividade em relação à multiplicação e à divisão:

$$(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \text{ou}$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{8^3}{3^3}$$

**Para elevar um produto ou um quociente a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente ou, no caso do quociente, elevamos o dividendo e o divisor ao mesmo expoente.**

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Veja alguns exemplos:

#### EXEMPLO 7

$$(3 \times 5)^4 = 3^4 \times 5^4$$

#### EXEMPLO 8

$$(2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

#### EXEMPLO 9

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{-3} = 6^{-3} \cdot 5^3$$

#### EXEMPLO 10

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$$

## Aplicações do cálculo de multiplicações e divisões de radicais

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (8 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

Podemos multiplicar ou dividir radicais de mesmo índice, multiplicando ou dividindo os radicandos.

Se os índices forem diferentes, podemos transformar os radicais em radicais equivalentes e com mesmo índice.

$$\sqrt{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = (5^2 \times 7)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{175}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{12}} \cdot 3^{\frac{3}{12}} = (2^4 \cdot 3^3)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{16 \cdot 27}$$

## Exercícios

### Exercício 1.

Escreva o resultado de cada item, na forma de uma única potência:

a)  $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4 =$

b)  $8^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-5} =$

c)  $\frac{(3^2)^3}{3^5}$

d)  $\frac{3^7}{3^3 \cdot 3}$

### Exercício 2.

Calcule o valor de  $\frac{(5^{-1})^{-2} \times 5^{-5}}{5^2 \times 5^{-1}}$ ,  $5^{-2}$

### Exercício 3.

Efetue, transformando as raízes em potências de expoente fracionários:

a)  $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} =$

b)  $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} =$

c)  $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} =$

d)  $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}} =$

**Exercício 4.**

Transforme as potências em raízes:

a)  $12^{0,4} =$

b)  $6^{0,5} =$

**Exercício 5.**

Calcule:

a)  $36^{-\frac{1}{2}}$

b)  $1000^{-\frac{1}{3}}$