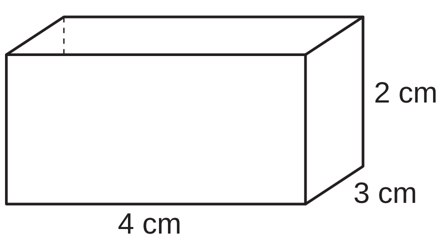
AULA
63

Cubo, prismas, cilindro

Introdução

Qual é a quantidade de espaço que um sólido ocupa? Esta é uma das principais questões quando estudamos as figuras espaciais. Para respondê-la, a geometria compara esse sólido com outro, tomado como unidade. O resultado dessa comparação é um número real positivo, chamado de volume ou capacidade do sólido.

Qual é o volume da caixa?



$V = 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$

$V = 24\text{ cm}^3 = 24\text{ m}\ell$

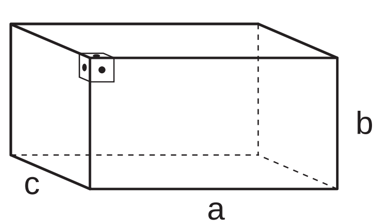
O volume dessa caixa é de 24 cm^3, que também pode ser expresso como 24 mililitros ($24\text{m}\ell$).

Nossa aula

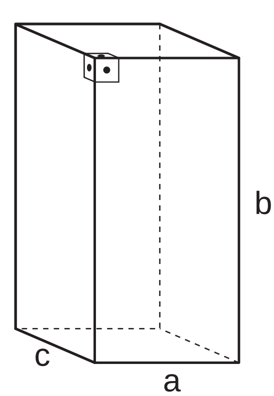
Na aula anterior você estudou as unidades padronizadas de volume e aprendeu a calcular o volume do paralelepípedo. Nesta aula vamos aprofundar um pouco mais esses conceitos.

O volume do bloco retangular

Bloco retangular ou paralelepípedo retângulo é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de uma caixa de sapatos, caixa de fósforos etc.



Observe que essa forma geométrica é delimitada por seis retângulos cujas faces opostas são retângulos idênticos.



Observe também que, em cada vértice, as arestas são perpendiculares duas a duas. O volume do bloco retangular é dado por:

$$\boxed{V = abc}$$

onde **a**, **b** e **c** são as medidas das arestas, usando uma mesma unidade de comprimento.

Como **ac** é a área do retângulo que é a base do bloco retangular e **c** é a sua altura, o volume do bloco retangular é dado por:

$$\boxed{V = A \cdot h}$$

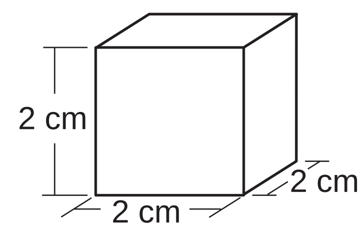
Em que **A** é a área da base e **h** a altura.

O volume de um cubo

O cubo é um paralelepípedo cujas arestas têm a mesma medida.

A figura ao lado mostra um cubo de aresta 2 cm.

Seu volume é
$2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 2^3 \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3$



De maneira geral, um cubo de aresta **a** tem seu volume expresso por:

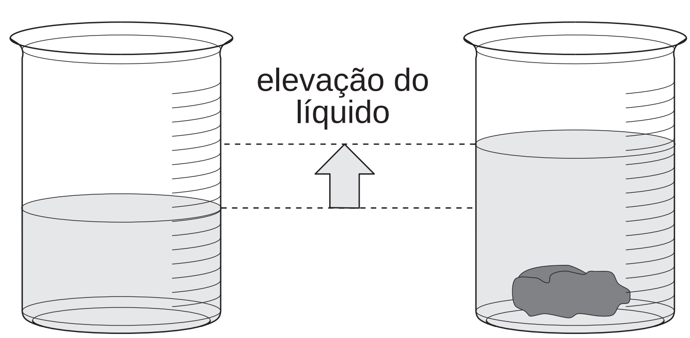
$$\boxed{V = a^3}$$

Um pouco de história

A preocupação com o cálculo de volumes é bastante antiga. Há milhares de anos a civilização egípcia já conhecia alguns processos para esse cálculo. Os habitantes da Grécia Antiga aprimoraram esses processos e desenvolveram outros. Destaca-se o trabalho do matemático e físico Arquimedes, que viveu no século III a.C.

Desenvolvendo raciocínios bastante criativos, Arquimedes mostrou como calcular o volume de diversas figuras geométricas.

Conta-se que, enquanto tomava banho, constatou que a água subia quando ele mergulhava. Essa quantidade de água que subia era seu volume. Veja como obter o volume de um sólido qualquer, como uma pedra, uma fruta, um legume etc. usando o ***princípio de Arquimedes***.

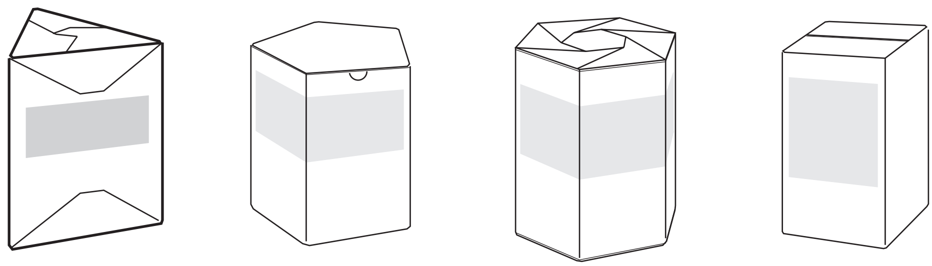


A diferença entre os dois resultados é o volume do sólido.

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

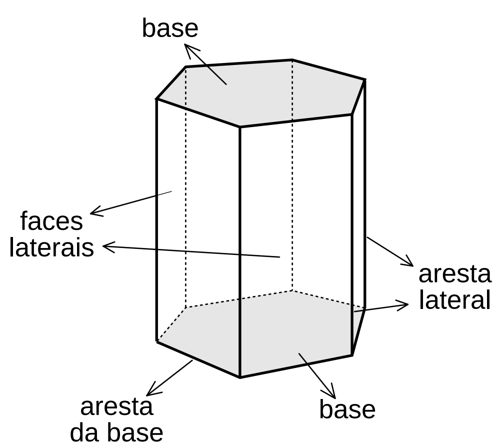
Prismas

Veja alguns exemplos de prismas.

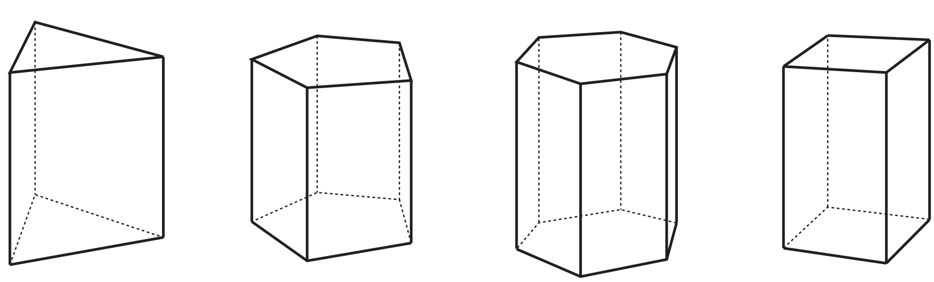


Prismas são sólidos geométricos que possuem as seguintes características:

- bases paralelas são iguais;
- arestas laterais iguais e paralelas e que ligam as duas bases.



Nomenclatura: Os prismas são desiguais pelo número de lados das bases, que lhes dão o nome:



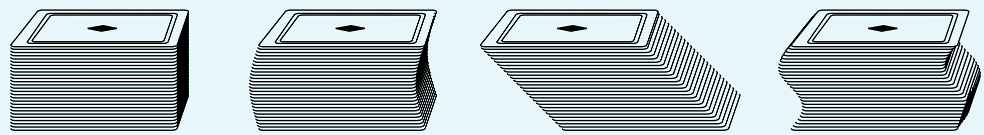
Prisma Triangular | Prisma Pentagonal | Prisma hexagonal | Prisma quadrangular

Observação: Só trataremos aqui de prismas retos, que são aqueles cujas arestas laterais são perpendiculares às bases.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

A pilha entorta e o volume se mantém

Para compreender as idéias de Cavalieri (matemático italiano que viveu na Itália no século XVII), vamos imaginar uma pilha formada com as cartas de quatro ou cinco jogos de baralho. Podemos formar pilhas de várias formas, que tenham a mesma base e a mesma altura.



Partindo de qualquer uma das pilhas, podemos raciocinar assim: o volume da pilha é a soma dos volumes das cartas e, como as cartas são as mesmas, as pilhas têm o mesmo volume, apesar de terem formas diferentes.

A primeira pilha tem a forma de um bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo). É um sólido delimitado por seis retângulos; as faces opostas são retângulos idênticos. A terceira pilha tem a forma de um paralelepípedo oblíquo: suas bases são retângulos, mas suas faces laterais são paralelogramos. Da pilha 1 para a pilha 3 houve mudança de forma, mas o volume permaneceu inalterado. Como os paralelepípedos das pilhas 1 e 3 têm a mesma base, a mesma altura e o mesmo volume, e como o volume do paralelepípedo da pilha 1 é igual ao produto da área da sua base pela sua altura, concluímos que o volume do paralelepípedo da pilha 3 também é igual ao produto da área da sua base pela sua altura.

Desse modo, conseguimos calcular o volume de um paralelepípedo oblíquo, que não pode ser decomposto em cubinhos unitários. O cálculo do volume desse sólido ilustra a idéia central de Cavalieri, já trabalhada por Arquimedes. Essa idéia consiste em imaginar um sólido decomposto em camadas muito finas, como as cartas de um baralho. Se dois sólidos forem constituídos por camadas iguais, de mesma área e de mesma espessura, então seus volumes são iguais.

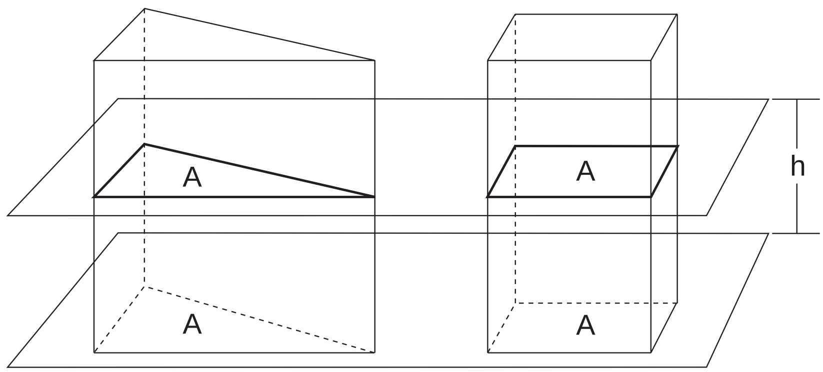
(Fonte: Telecurso 2º grau 6ª ed. 1989 - FRM. Aula 64, pág. 423)

Volume do prisma

Você já sabe que para determinar o volume de um bloco retangular utilizamos a fórmula

$$\boxed{V = A \cdot h}$$

Imagine um prisma qualquer e um bloco retangular com a mesma altura (h) e as bases de mesma área (A), apoiados em um plano horizontal, como mostra a figura.

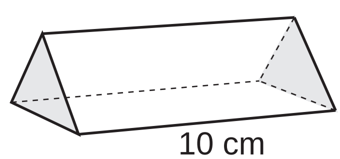


Qualquer outro plano horizontal corta os dois sólidos, determinando figuras iguais às suas bases. Logo, pelo princípio de Cavalieri, eles têm mesmo volume. Por isso, o volume de qualquer prisma é o produto da área da base pela altura.

$$\boxed{V = A \cdot h}$$

Vejamos um exemplo:

Qual é o volume do prisma triangular da figura abaixo, sabendo que suas bases são formadas por triângulos equiláteros de lados 5 cm?



ATENÇÃO!

A fim de saber qual a base de um prisma, examine suas faces (as figuras planas que o limitam) e verifique quais delas são paralelas. Há exatamente duas que são paralelas. Qualquer uma delas pode ser escolhida como base.

Para obter o volume do prisma, devemos multiplicar a área de sua base pela altura.

Como foi visto na Aula 41, a altura do triângulo equilátero é $h = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{2}$

Como $\ell = 5$, temos que $h = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} = 2,5\sqrt{3}$ cm

Logo, a área do triângulo equilátero é igual a:

$$\frac{5 \cdot 2,5\sqrt{3}}{2} = \frac{12,5\sqrt{3}}{2} = 6,25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Assim, o volume do prisma é:

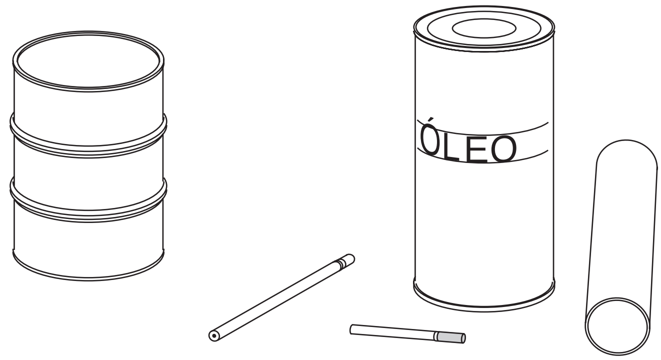
$$V = 6,25\sqrt{3} \times 10 = 62,5\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Usando $\sqrt{3} = 1,73$ temos que o volume do prisma é aproximadamente 108,125 cm^3.

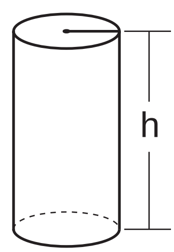
AULA
63

O cilindro

São comuns os objetos que têm a forma de um cilindro, como por exemplo, um lápis sem ponta, uma lata de óleo, um cigarro, um cano etc.

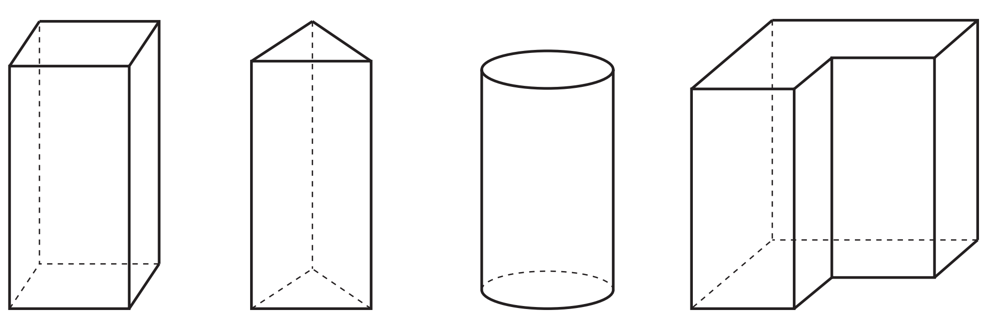


Podemos imaginar um cilindro formado por círculos de cartolina, todos do mesmo tamanho, empilhados. Por isso, temos que o volume do cilindro é também igual ao produto da área da base pela altura.



Volume do cilindro
$V = A \cdot h$

Há muita semelhança entre os prismas e os cilindros. Podemos dizer que eles pertencem a uma mesma família de sólidos geométricos, com características comuns.



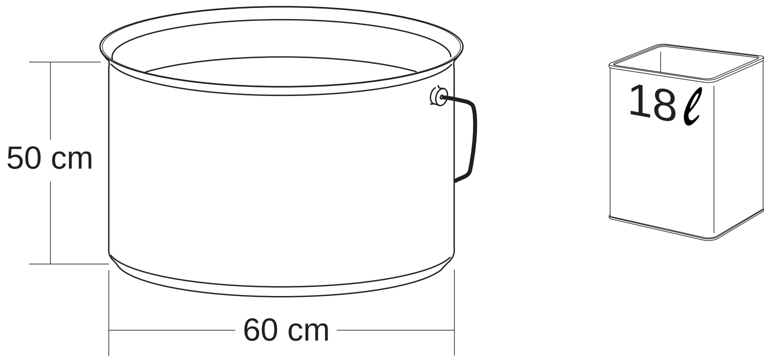
O volume de todos os prismas e de todos os cilindros pode ser determinado aplicando-se a fórmula:

$$\mathbf{V = A \cdot h}$$

Acesse: ☞ http://fuvestibular.com.br/

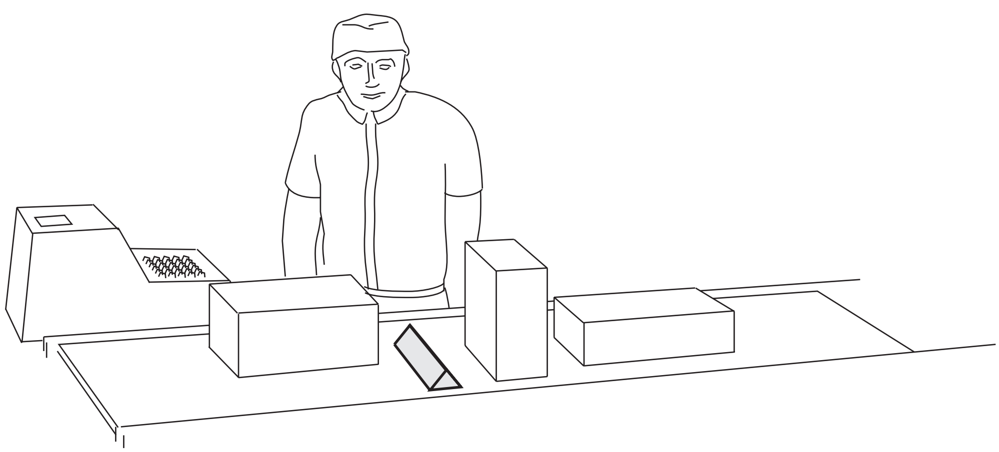
Exercício 1.

Um restaurante costuma usar panelas enormes em dias de muito movimento. Para encher de água uma dessas panelas o cozinheiro utiliza latas (ou galões) de 18 litros. Quantos desses galões são necessários para encher completamente uma panela de 60 cm de diâmetro e 50 cm de altura?



Exercício 2.

Alguns supermercados têm usado um prisma de madeira para separar, no caixa, as compras dos clientes que já foram registrados.



Supondo que esse prisma seja maciço, determine o volume de madeira necessário para a fabricação de 100 prismas com as seguintes características: aresta da base com 2 cm e altura com 20 cm (use $\sqrt{3}$ @ $1,73$).

Exercício 3.

Qual o volume aproximado de uma lata de óleo ou de refrigerante? Use uma régua para medir a altura e o raio da base.

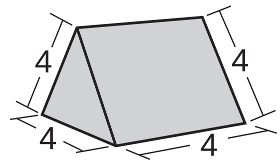
Exercício 4.

Quantos metros de fio de cobre, de $\frac{1}{8}$ de polegada de diâmetro, podem ser fabricados a partir de 100 kg de cobre? Sabe-se que 1 cm^3 de cobre tem massa igual a 8,8 kg e que 1 polegada é aproximadamente igual a 2,54 cm.

P/ as outras apostilas de Matemática, Acesse: http://fuvestibular.com.br/telecurso-2000/apostilas/ensino-medio/matematica/

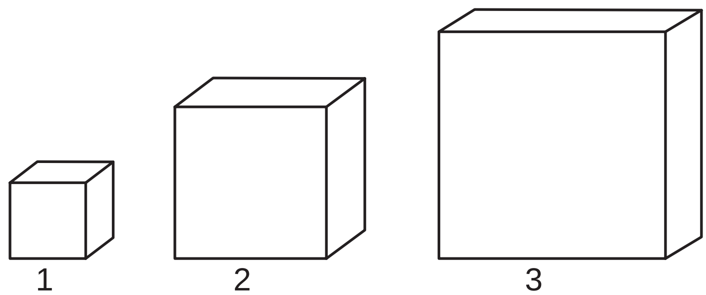
Exercício 5.

As arestas do prisma da figura a seguir são todas iguais a 4 unidades. Calcule seu volume.



Exercício 6.

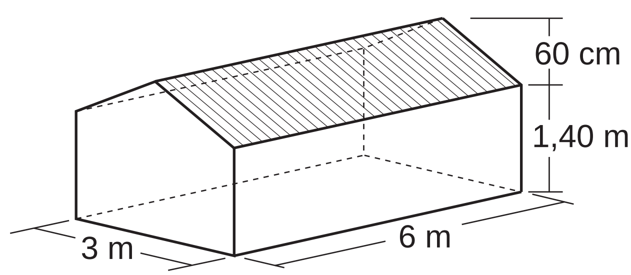
Os cubos seguintes têm, respectivamente, arestas 1, 2 e 3.



a) Calcule o volume de cada um dos cubos.
b) O que ocorre com o volume do cubo quando dobramos sua aresta? E quanto a triplicamos?

Exercício 7.

Qual o volume da estufa representada pela seguinte figura?



Exercício 8.

De um cubo de madeira de 6 cm de aresta foi cortado um prisma de base triangular, como mostra a figura. Qual é o volume desse prisma?